26. SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 12. MAJ 2021

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

26. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

**Goran Turk, Dejan Zupan, Tomaž Hozjan,
Peter Češarek, Rado Flajs in Igor Planinc**

Ljubljana, 12. maj 2021

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; HOZJAN, Tomaž; ČEŠAREK, Peter; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor

26. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekanja prof. dr. Violeta Bokan Bosiljkov

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: BIROGRAFIKA BORI d.o.o., Ljubljana

Obseg: 24 strani

Naklada: 60 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2021

CIP – Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (26 ; 2021 ; Ljubljana)
[Šestiindvajseto]
26. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana,
12. maj 2021 / [pripravili] Goran Turk ... [et al.]. - Ljubljana :
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2021

ISBN 978-961-6884-75-4
COBISS.SI-ID 78623235

26. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2021

Po enoletni prekinitvi zaradi epidemije s COVID-19 smo letos na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 26. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Uroš Avsec (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 61 dijakinj in dijakov. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 21. aprila 2021. Dvajset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 12. maja 2021 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani.

Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime in priimek	**Letnik**	**Šola**	**Mentor**
Iva Baša	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Nejc Hočevar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Petra Lozar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Eva Vehar	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Luka Cedilnik	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Grega Iglič	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Tarik Mujakić	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Lea Rebolj	3	SGGOŠ Ljubljana	Jure Zupančič
Andraž Vene	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Žak Artelj	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Nejc Čerčnik	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Aljaž Gabrič	3	ŠCKS SŠ Krško	Erika Broz Žižek
Žan Dular	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Žan Kostanjevec	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Sara Vrtačič	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Dino Kutrtović	4	SGGOŠ Ljubljana	Jure Zupančič
Tilen Lovrek	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Gašper Buršič	4	ŠCKS SŠ Krško	Erika Broz Žižek
Aleš Ferenčak	4	ŠCKS SŠ Krško	Erika Broz Žižek
Žan Spačal	4	ŠC SPLŠ Nova Gorica	Karlo Petrovčič

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLVŠ Novo Mesto	Srednja gradbena, lesarska in vzgojiteljska šola Novo mesto
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje
ŠCKS SŠ Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Srednja šola Krško
ŠC SPLŠ Nova Gorica	Šolski center Nova Gorica, Strojna, prometna in lesarska šola

Sklepno tekmovanje se je začelo 12. maja 2021 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so tekmovalke in tekmovalci zapustili fakulteto.

Komisija za ocenjevanje v sestavi Dejan Zupan, Tomaž Hozjan, Rado Flajs, Peter Češarek in Tamara Šuligoj, (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) je pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Naslednji dan smo preko spletne konference ZOOM organizirali proglasitev rezultatov, katere se je z nagovorom dijakinjam in dijakom ter njihovim mentoricam in mentorjem udeležila tudi dekanja UL FGG prof. dr. Violeta Bokan Bosiljkov.

Najuspešnejši na sklepnem tekmovanju so bili:

ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
3. letnik			
Nejc Hočevar	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	95
Iva Baša	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	60
Andraž Vene	SGLVŠ Novo mesto	3. mesto	50
4. letnik			
Aleš Fernčak	ŠCKS SŠ Krško	1. mesto	85
Sara Vrtačič	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	60
Gašper Buršič	ŠCKS SŠ Krško	3. mesto	50

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	19.07	7.96	5.56	12.41	45.00
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	90

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.78	5.00	8.91	10.22	35.00
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	15	25	25	85

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	11.00	8.30	11.00	8.50	38.80
najnižja ocena	0	5	0	0	15
najvišja ocena	25	20	25	25	95

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	20.62	7.25	9.38	8.13	45.38
najnižja ocena	15	0	0	0	25
najvišja ocena	25	15	25	20	85

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da sta bili nekoliko težji 2. in 3. naloga za tretje letnike. Dijakinjam in dijakom četrtih letnikov je bila najtežja 2. naloga, pa tudi druge tri naloge so bile očitno kar trd oreh.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene v tretjih letnikih nekoliko nižje kot na predtekmovanju, nekoliko boljše pa so se odrezali četrti letniki. Dijaki tretjih letnikov so bolje reševali 1. in 3. nalogo, težji sta bili preostali dve. Pri četrtih letnikih je bila glede na povprečne rezultate najtežja 2. naloga, izrazito bolje pa so reševali 1. nalogo.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge.

Na predtekmovanju tretjih letnikov je prvo nalogo povsem pravilno rešilo kar 15 udeležencev (55 %). Pri vseh drugih nalogah pri tretjem in vseh nalogah pri četrtem letniku so bili letos na predtekmovanju nekoliko manj uspešni,

Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. 2. naloge pri tretjih letnikih ter 2. in 4. naloge pri četrtih letnikih povsem pravilno ni rešil nihče. Nekoliko več povsem pravilnih rešitev je bilo le pri 1. nalogi v četrtem letniku (4 pravilno rešenih, 50 %).

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
15	1	3	6
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
4	0	6	5
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
2	0	1	2
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
4	0	1	0

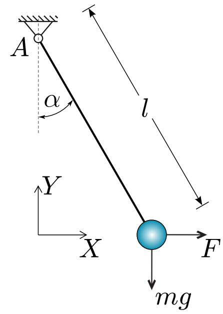
Tekmovanje financirata:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Zavod RS za šolstvo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

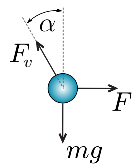
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Utež z maso $m = 10\,\mathrm{kg}$ je obešena na tanko neraztegljivo in breztežno vrvico dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$. Določi silo F, s katero moraš vleči utež, tako da bo kot $\alpha = 30°$. Določi tudi reakcije v podpori A.



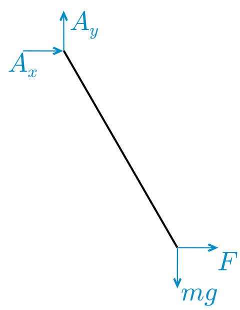
Rešitev: V mislih vrvico prerežemo in na prerezanem mestu predpostavimo neznano silo v vrvici F_v, kot kaže slika na desni. Zaradi 10-kilogramske uteži je vrvica obtežena z navpično silo teže $mg = 100\,\mathrm{N}$.



Iz ravnotežnih pogojev v smereh Y in X lahko izračunamo silo v vrvici in potrebno zunanjo silo F:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad F_v \cos 30° - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_v = \frac{100}{\cos 30°} = 115.5\,\mathrm{N},$$
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F - F_v \sin 30° = 0 \quad \rightarrow \quad F = 115.5 \sin 30° = 57.7\,\mathrm{N}.$$

Nato odstranimo podporo in predpostavimo reakciji A_X in A_Y. Iz ravnotežnih pogojev v smereh X in Y lahko izračunamo obe komponenti reakcije v podpori A:

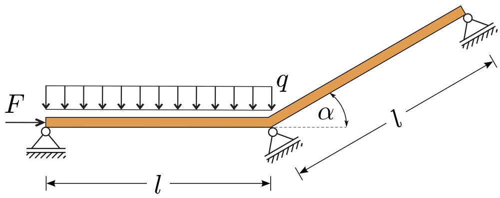


$$\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad A_X + F = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad A_X = -F = 57.7\,\mathrm{N}, \\
\sum Y = 0 \quad &\rightarrow \quad A_Y - mg = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad A_Y = mg = 100\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

2. naloga

Za konstrukcijo na sliki izračunaj reakcije podpor in notranje sile ter nariši njihove diagrame.

Podatki: $l = 4$ m, $\alpha = 30°$,
$q = 8$ kN/m, $F = 10$ kN.

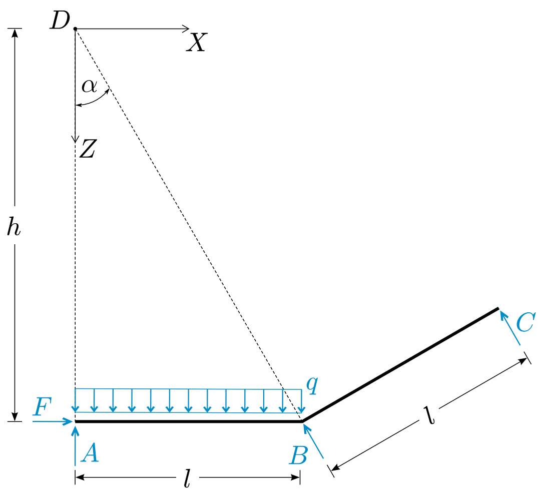


Rešitev: Odstranimo podpore in njihov vpliv nadomestimo z reakcijami A, B in C, kot kaže slika.

Razdalja med točkama A in D je enaka

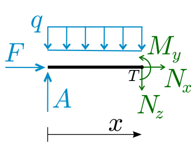
$$h = \frac{l}{\tan\alpha} = 6.92\,\mathrm{m}.$$

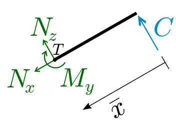
Iz ravnotežnih pogojev lahko določimo reakcije v podporah:



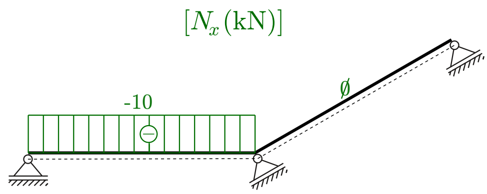
$$\sum M_Y^D = 0 \quad\rightarrow\quad C\,l - q\,l\frac{l}{2} + F\,h = 0 \quad\rightarrow\quad C = -1.3\,\mathrm{kN},$$
$$\sum X = 0 \quad\rightarrow\quad F - B\,\sin\alpha - C\,\sin\alpha = 0 \quad\rightarrow\quad B = 21.3\,\mathrm{kN},$$
$$\sum Z = 0 \quad\rightarrow\quad -A - B\,\cos\alpha - C\,\cos\alpha + q\,l = 0 \quad\rightarrow\quad A = 14.7\,\mathrm{kN}.$$

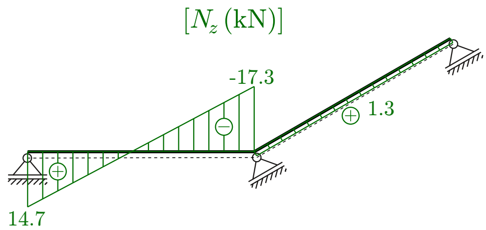
Notranje sile in momente izračunamo tako, da nosilec prerežemo v poljih AB in BC ter na prerezanem delu nosilca predpostavimo notranje sile in momente (glej spodnji sliki). Nato zapišemo ravnotežne enačbe za odrezani del konstrukcije, iz katerih izračunamo notranje sile.

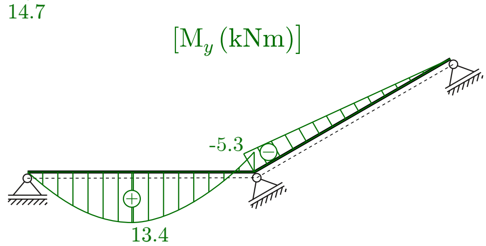




Iz ravnotežnih pogojev za odrezane dele konstrukcije določimo notranje sile in momente, ki jih prikazujemo na naslednjih treh diagramih.



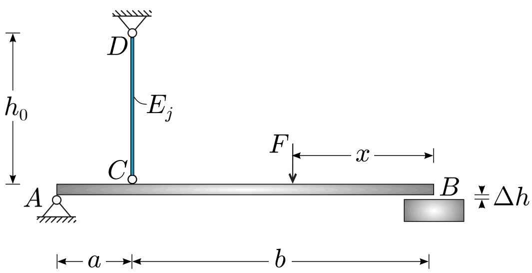




3. naloga

Določite lego sile $F = 2\,\text{kN}$ tako, da se bo togi nosilec AB v točki B dotaknil toge podlage.

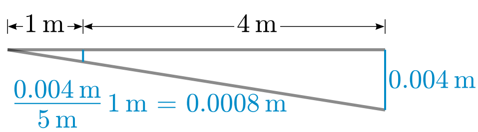
V neobteženem stanju je špranja med nosilcem v točki B in podlago enaka $\Delta h = 0.4$ cm.



Ker je nosilec AB tog, deformacij v nosilcu ni, v analizi pa morate upoštevati deformabilnost jeklene palice CD s premerom $d = 1$ cm.

Podatki: $a = 1$ m, $b = 4$ m, $h_0 = 2$ m, $E_j = 21000\ \text{kN/cm}^2$.

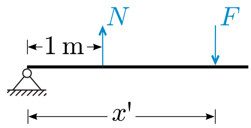
Rešitev: Togi nosilec se zavrti kot togo telo okoli točke A tako, da se dotakne toge podlage v točki B. Zaradi tega zasuka se točka C premakne za $\Delta h = 0.0008\,\text{m}$, kot kaže spodnja slika.



Silo N v navpični palici izračunamo iz njenega raztezka po naslednji enačbi

$$N = E_j \frac{\pi d^2}{4} \frac{\Delta h}{h_0} = 21000 \cdot \frac{\pi 1^2}{4} \cdot \frac{0.0008}{2} = 6.60\,\mathrm{kN}.$$

Lego sile F, pri kateri ta povzroči tak zasuk nosilca AB, da se dotakne toge podlage v točki B, določimo iz ravnotežnega pogoja (glej tudi spodnjo sliko):



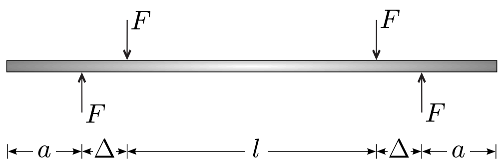
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad N\,1 - F\,x' = 0 \quad \rightarrow \quad x' = \frac{N}{F} = 3.3\,\mathrm{m}.$$

Oddaljenost sile od desnega roba nosilca je torej enaka

$$x = 5 - x' = 5 - 3.3 = 1.7\,\mathrm{m}.$$

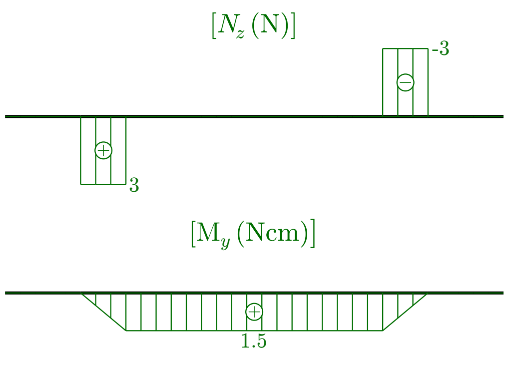
4. naloga

Nosilec je obremenjen, kot prikazuje slika. Določi potek notranjih sil v nosilcu. Ali je največji upogibni moment le na sredini nosilca?



Podatki: $a = 2$ cm, $\Delta = 0.5$ cm, $l = 20$ cm, $F = 3$ N.

Rešitev: Na obeh končnih odsekih nosilec ni obremenjen zato so tam vse notranje sile enake nič. Za druge dele nosilca tega v mislih prerežemo in na prerezanem mestu predpostavimo notranje sile in momente. Nato iz ravnotežnih pogojev določimo notranje sile in momente ter narišemo njihove diagrame. Ker v vodoravni smeri ni obtežbe, je osna sila v temu nosilcu enaka nič.

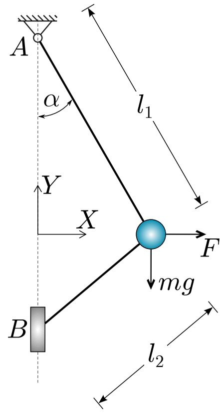


Ker je upogibni moment konstanten na celotnem delu nosilca med notranjima dvema silama, ugotovimo, da največji upogibni moment ni le na sredini nosilca.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

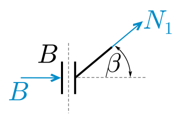
Utež z maso $m = 10\,\mathrm{kg}$ je pripeta z dvema tankima, neraztegljivima in breztežnima vrvicama dolžin $l_1 = 1\,\mathrm{m}$ in $l_2 = 0.8\,\mathrm{m}$. V točki A je zgornja vrvica nepomično podprta, v točki B pa je spodnja vrvica pripeta tako, da se lahko konec vrvice B brez upora (trenja) premika le v navpični smeri.



Določi silo F, s katero moraš vleči utež, tako da bo kot $\alpha = 30°$. Določi tudi reakcije v podporah A in B.

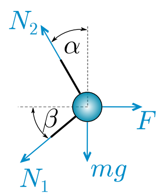
(Namig: Zaradi načina podpiranja je navpična reakcija v točki B enaka nič, vrvica pa lahko prevzame le natezno osno silo, prečne sile in upogibni momenti v vrvici pa so enaki nič.)

Rešitev: Najprej prerežimo vrvico v bližini podpore B, predpostavimo silo v tem delu vrvice N_1 in zapišemo ravnotežne enačbe. Iz vsote vseh sil v navpični smeri ugotovimo, da je sila N_1 enaka nič.



$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \sin\beta = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 0 \quad za \quad \beta \neq 0,$$
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 \cos\beta + B = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0.$$

Nato prerežemo še obe vrvici ob uteži in predpostavimo sili v vrvicah N_1 in N_2 ter zapišemo ravnotežni enačbi.



$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 \cos\alpha - N_1 \sin\beta - mg = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad N_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{100}{\cos 30°} = 115.5\,\mathrm{N},$$
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F - N_2 \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F = N_2\,\sin\alpha = 57.7\,\mathrm{N}.$$

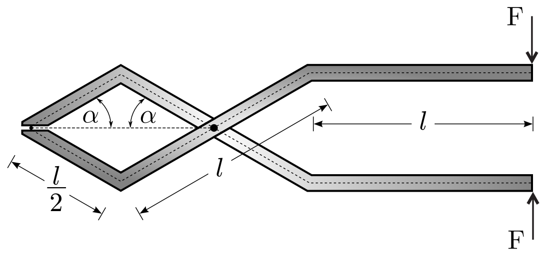
Komponenti reakcije v podpori A lahko izračunamo iz ravnotežnih pogojev za celoten sistem:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + F = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -F = -57.7\,\mathrm{N},$$
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad A_Y - mg = 0 \quad \rightarrow \quad A_Y = mg = 100\,\mathrm{N}.$$

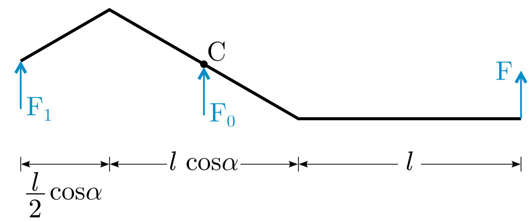
2. naloga

Izračunajte notranje sile v preprostem modelu klešč, s katerimi držimo tanek žebelj. Narišite diagram upogibnih momentov.

Podatki: $l = 12\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$,
$F = 10\,\text{N}$.



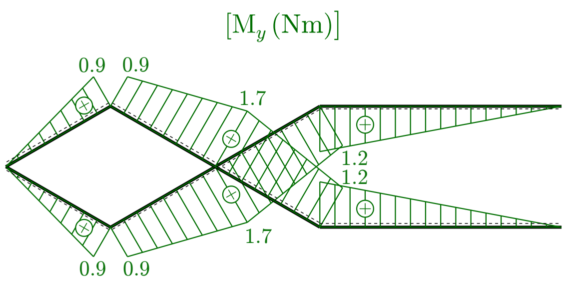
Rešitev: Obravnavamo le polovico klešč. Vpliv drugega dela klešč na obravnavani del zapišemo s silama F_1 in F_0. Iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na točko C lahko izračunamo silo F_1, s katero klešče delujejo na žebelj:



$$\sum M^C = 0 \quad \rightarrow \quad F\left(l + \frac{l}{2}\cos 30°\right) - F_1\, l\,\cos 30° = 0 \quad \rightarrow$$

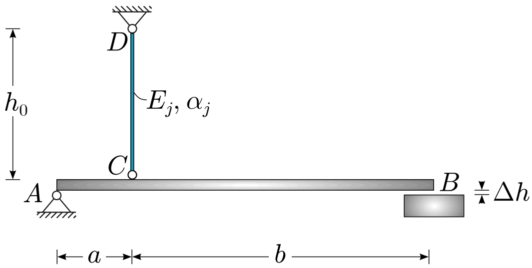
$$\rightarrow \quad F_1 = F\,\frac{1 + \frac{1}{2}\,\cos 30°}{\cos 30°} = 16.5\,\text{N}.$$

Ker sedaj poznamo silo F_1, lahko določimo upogibne momente v kleščah, ki jih prikazujemo na spodnjem diagramu. Pri risanju diagrama smo upoštevali simetrijo klešč.



3. naloga

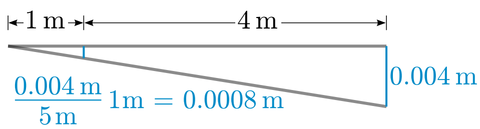
Za koliko moramo segreti jekleno palico CD premera $d = 1$ cm, da se bo togi nosilec AB, v točki B dotaknil toge podlage.



Pri začetni temperaturi palice je špranja med nosilcem v točki B in podlago enaka $\Delta h = 0.4$ cm.

Podatki: $a = 1$ m, $b = 4$ m, $h_0 = 2$ m, $E_j = 21000\ \mathrm{kN/cm^2}$,
koeficient temperaturnega raztezka jekla $\alpha_j = 1.2 \cdot 10^{-5}\,{}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

Rešitev: Ko palico segrejemo, se nosilec zavrti kot togo telo okoli točke A. Pri določeni temperaturi je zasuk tak, da se nosilec dotakne toge podlage v točki B. Ob tolikšnem zasuku nosilca se točka C v navpični smeri premakne za $w_C = 0.0008\,\mathrm{m}$ (glej spodnjo sliko).



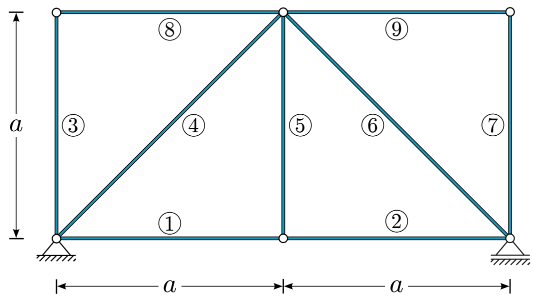
Ker drugih obtežb ni, se palica podaljša le zaradi povečane temperature, torej

$$w_C = h_0\,\Delta T\,\alpha_j \quad \rightarrow \quad \Delta T = \frac{w_C}{h_0\,\alpha_j} = 33.3\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

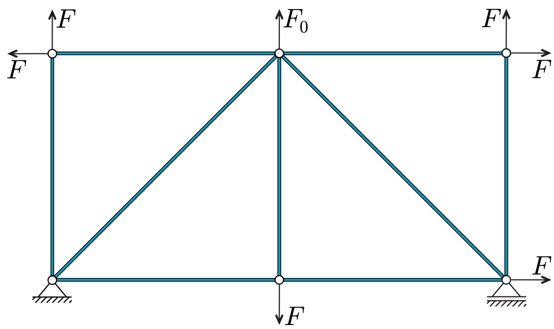
Palica CD se mora segreti za $33.3\,{}^\circ\mathrm{C}$.

4. naloga

Določi obtežbo v vseh vozliščih paličja tako, da bodo osne sile v vseh palicah natezne.

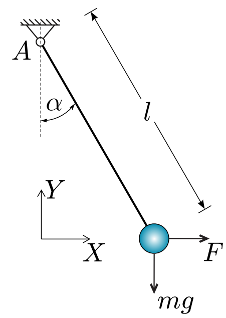


Rešitev: Najdemo lahko neskončno različnih razporeditev, ki povzročijo le natezne sile v palicah. Eno od preprostejših rešitev prikazujemo na spodnji sliki, kjer dodatno zahtevamo, da je $F_0 > F$.



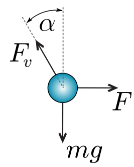
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga



Utež z maso $m = 10\,\mathrm{kg}$ je obešena na tanko **raztegljivo** in breztežno vrvico začetne dolžine $l = 1\,\mathrm{m}$. Togost vrvice je $k = \frac{E\,A_x}{l} = 20\,\mathrm{N/cm}$. Ko je sila F enaka nič, je vrvica navpična. Ko povečujemo vodoravno silo F, se veča tudi kot α. Kolikšna je sprememba dolžine vrvice Δl v odvisnosti od kota α? Nariši graf!

Ali lahko s tem postopkom vrvico zasučemo do vodoravne lege?



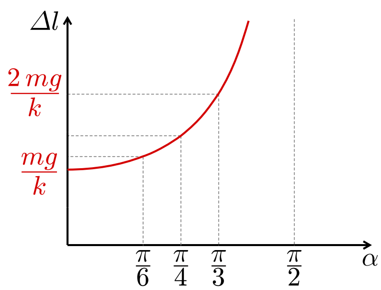
Rešitev: Vrvico prerežemo in v prerezu predpostavimo silo v vrvici F_v. Na utež delujejo sila vrvice F_v, sila teže $mg = 100\,\mathrm{N}$ in sila F, s katero vlečemo utež iz navpične lege. Zapišimo ravnotežni pogoj v navpični smeri in iz njega izračunamo silo v vrvici:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad F_v \cos\alpha - mg = 0 \quad \rightarrow \quad F_v = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

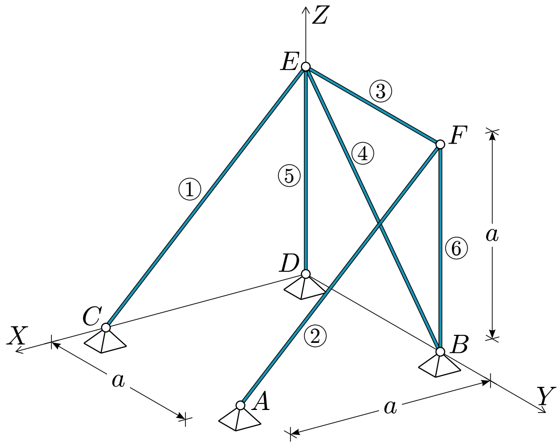
Sprememba dolžine vrvice je odvisna od sile v vrvici F_v in njene togosti k

$$\Delta l = \frac{F_v}{k} = \frac{mg}{k\,\cos\alpha}.$$

V naslednji sliki prikazujemo graf spreminjanja spremembe dolžine vrvice v odvisnosti od kota α. Vidimo, da se sprememba dolžine zelo hitro povečuje in gre proti neskončnosti, ko se kot α približuje $90°$. Za to bi potrebovali neskončno silo F, kar pomeni, da na ta način vrvice ne moremo zavrteti v vodoravno lego.



2. naloga



Določi obtežbo v vozliščih E in F tako, da bodo osne sile v vseh palicah enake $1\,\mathrm{kN}$. Ali je konstrukcija statično določena?

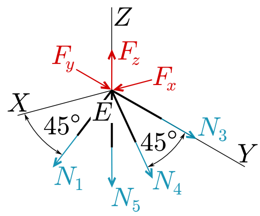
Razdalja $a = 2\,\mathrm{m}$.

Rešitev: Stopnjo statične nedoločenosti prostorskega paličja izračunamo po enačbi:

$$n = K - 3v_p - 2r_1 - r_2,$$

kjer je $K = 6$ število palic, $v_p = 2$ število prostih vozlišč, $r_1 = 0$ število podpor, ki paličju odvzamejo le eno prostostno stopnjo (pomik podpore je vezan na ravnino), $r_2 = 0$ pa število podpor, ki paličju odvzamejo dve prostostni stopnji (pomik podpore je vezan na premico). Ker z zgornjo enačbo izračunamo $n = 0$, je paličje statično določeno.

Določiti moramo obtežbo v vozliščih E in F. Zato vozlišči izrežemo, predpostavimo sile v palicah velikosti $1\,\mathrm{kN}$ in iz ravnotežnih pogojev izračunamo komponente F_X, F_Y in F_Z



$$\sum X = 0 \quad \to \quad F_X + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \to \quad F_X = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707\,\mathrm{kN},$$

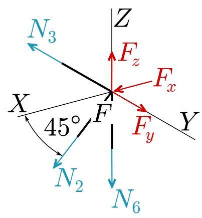
$$\sum Y = 0 \quad \to \quad F_Y + N_3 + N_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \to$$

$$\to \quad F_Y = -\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.707\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0 \quad \to \quad F_Z - N_5 - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \to$$

$$\to \quad F_Z = \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2.414\,\mathrm{kN}.$$

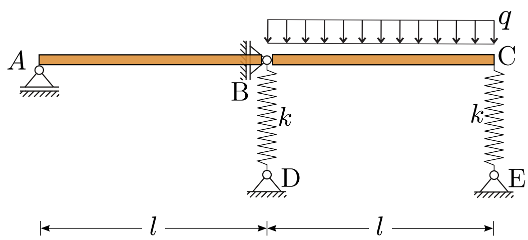
Podobno kot smo naredili za vozlišče E, ravnotežne enačbe zapišemo tudi za vozlišče F. Tako določimo komponente sile F_X, F_Y in F_Z



$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F_X + N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad F_X = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707\,\text{kN},$$
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad F_Y - N_3 = 0 \quad \rightarrow \quad F_Y = 1.000\,\text{kN},$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad F_Z - N_6 - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad F_Z = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.707\,\text{kN}.$$

3. naloga

Nosilec je sestavljen iz dveh delov, ki sta členkasto povezana. Desni del nosilca je podprt z linijskima vzmetema togosti k in obtežen z enakomerno navpično linijsko obtežbo q.



Izračunajte sile v vzmeteh in narišite deformirano lego nosilca. Izračunajte tudi vodoravni pomik točke A in to upoštevajte pri risbi deformirane lege. Določite notranje sile v nosilcu in narišite njihove diagrame.

Podatki: l = 4 m, q = 8 kN/m, k = 100 kN/m.

Rešitev: Edina obtežba nosilca je na delu BC. Ta je podprt kot prostoležeči nosilec. Sili v vzmeteh sta enaki

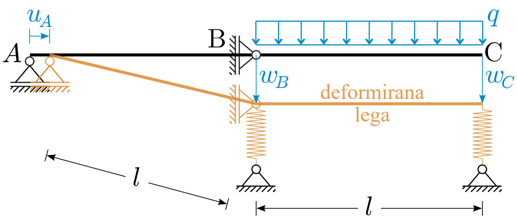
$$F_v = \frac{q\,l}{2} = 16\,\text{kN}.$$

Vzmeti sta tlačno obremenjeni, zato se skrčita za navpični pomik nosilca v točki B oziroma C:

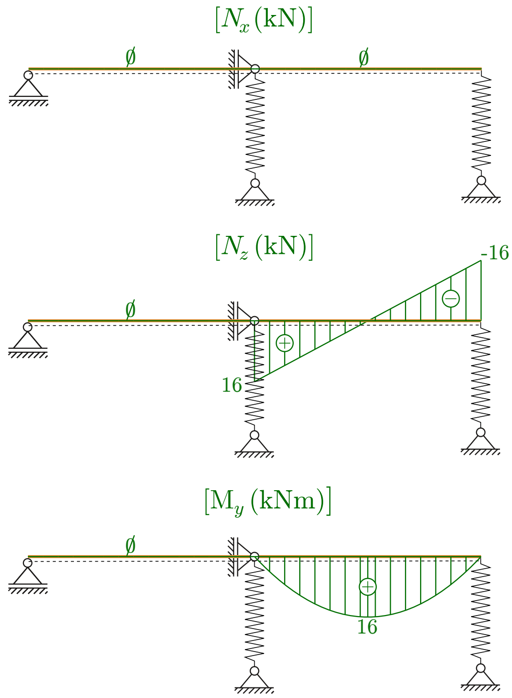
$$w_B = w_C = \frac{F_v}{k} = \frac{16}{100} = 0.16\,\text{m}.$$

Ker se podpora B premakne navzdol, se podpora A premakne v desno (glej sliko). Pomik podpore A lahko izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka

$$(l - u_A)^2 + w_B^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad u_A = l - \sqrt{l^2 - w_B^2} = 0.003\,\text{m}.$$

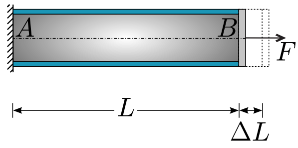


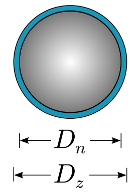
Notranje sile v konstrukciji prikazujemo na spodnjih diagramih. Levi del konstrukcije je neobremenjen, zato so tam notranje sile enake nič, desni del je prostoležeči nosilec.



4. naloga

Sovprežni nosilec AB, ki je sestavljen iz zunanje jeklene cevi in betonskega polnila, je obremenjen silo $F = 1000$ kN. Določite osne sile v jeklenem in betonskem delu sovprežnega nosilca.





V analizi upoštevajte, da je nosilec na robu B zaključen s togo ploščo. Izračunajte tudi raztezek sovprežnega nosilca ΔL.

Podatki: $L = 2$ m, $D_z = 20$ cm, $D_n = 18$ cm,
$E_j = 21000$ kN/cm^2, $E_b = 3200$ kN/cm^2.

Rešitev: Določimo najprej ploščine betonskega in jeklenega prečnega prereza konstrukcijskega sklopa.

$$A_b = \frac{\pi D_n^2}{4} = 254\,\text{cm}, \qquad A_j = \frac{\pi\left(D_z^2 - D_n^2\right)}{4} = 59.7\,\text{cm}.$$

Silo F, ki deluje na sovprežni nosilec, razdelimo na del, ki ga prevzame jeklena cev, in del, ki ga prevzame beton

$$F = F_j + F_b = 1000\,\text{kN}.$$

Predpostavimo, da je stik med betonom in jeklom tog, zato je raztezek obeh delov enak:

$$\Delta L = \frac{L\,F_j}{E_j\,A_j} = \frac{L\,F_b}{E_b\,A_b} \quad \to \quad F_j = \frac{F_b\,E_j\,A_j}{E_b\,A_b}.$$

Če izraz za F_j vstavimo v enačbo $F = F_j + F_b$, izračunamo silo F_b, ki jo prevzame betonski del prereza, torej

$$F_j + F_b = \frac{F_b\,E_j\,A_j}{E_b\,A_b} + F_b = F_b\left(\frac{E_j\,A_j}{E_b\,A_b} + 1\right) = 1000 \quad \to \quad F_b = 394\,\text{kN}.$$

Sila F_j, ki jo prevzame jekleni del prereza, je

$$F_j = F - F_b = 606\,\text{kN}.$$

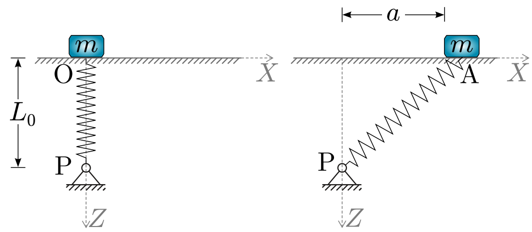
Raztezek nosilca lahko izračunamo tako iz raztezka jeklenega kot betonskega dela

$$\Delta L = \frac{L\,F_j}{E_j\,A_j} = \frac{L\,F_b}{E_b\,A_b} = 0.097\,\text{cm}.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

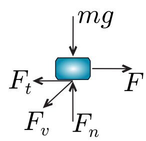
Klada z maso m leži na vodoravni hrapavi podlagi; koeficient trenja označimo z μ. Klada je z vzmetjo togosti k povezana s podporo P. Vzmet je nedeformirana v navpični legi OP. Klado počasi premaknemo v točko A.



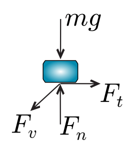
Katere sile delujejo na klado v tej legi? Nariši sliko!

Kaj bi se zgodilo, če bi klado izpustili? V kateri smeri bi delovala sila trenja, ko klado izpustimo?

Rešitev: Klado moramo v lego A premakniti s silo F. Tedaj na klado delujejo naslednje sile: sila teže mg, normalna sila podlage F_n, sila vzmeti F_v, vlečna sila F in sila trenja F_t, ki deluje nasprotno sili F. Te sile so prikazane v sliki na desni.



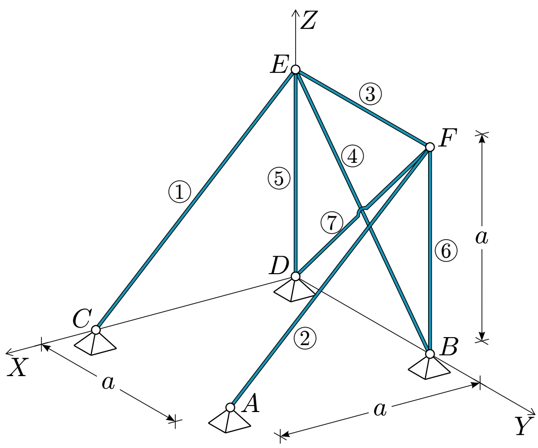
Ko klado spustimo, ta začne drseti proti začetni legi. Vlečne sile F ni več, sila trenja pa deluje v smeri nasprotni gibanju klade. Glej sliko.



2. naloga

Določi obtežbo v vozliščih E in F tako, da bodo osne sile v vseh palicah enake 1 kN. Ali je konstrukcija statično določena?

Razdalja $a = 2\,\mathrm{m}$. Palici 4 in 7 sta mimobežni.



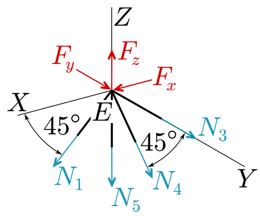
Rešitev: Stopnjo statične nedoločenosti prostorskega paličja izračunamo po enačbi:

$$n = K - 3v_p - 2r_1 - r_2,$$

kjer je $K = 7$ število palic, $v_p = 2$ število prostih vozlišč, $r_1 = 0$ število podpor, ki paličju odvzamejo le eno prostostno stopnjo (pomik podpore je vezan na ravnino),

$r_2 = 0$ pa število podpor, ki paličju odvzamejo dve prostostni stopnji (pomik podpore je vezan na premico). Ker z zgornjo enačbo izračunamo $n = 1$, je paličje enkrat statično nedoločeno, kar pa na reševanje naloge ne vpliva, saj so znane vse osne sile v palicah.

Določiti moramo obtežbo v vozliščih E in F. Zato vozlišči izrežemo, predpostavimo sile v palicah velikosti $1\,\mathrm{kN}$ in iz ravnotežnih pogojev izračunamo sile F_X, F_Y in F_Z



$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F_X + N_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad F_X = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707\,\mathrm{kN},$$

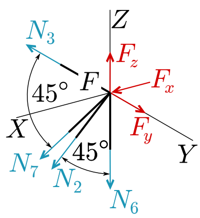
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad F_Y + N_3 + N_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F_Y = -\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.707\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad F_Z - N_5 - N_1\frac{\sqrt{2}}{2} - N_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F_Z = \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2.414\,\mathrm{kN}.$$

Podobno kot smo naredili za vozlišče E, ravnotežne enačbe zapišemo tudi za vozlišče F in določimo sile F_X, F_Y in F_Z



$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F_X + N_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad F_X = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad F_Y - N_3 - N_7\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

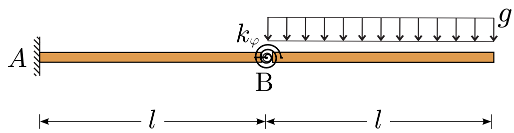
$$\rightarrow \quad F_Y = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.707\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad F_Z - N_6 - N_2\frac{\sqrt{2}}{2} - N_7\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F_Z = \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2.414\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Nosilec je sestavljen iz dveh togih delov, ki sta členkasto povezana. Dodatno pa je členkasta povezava ojačana s polžasto vzmetjo togosti k_φ.

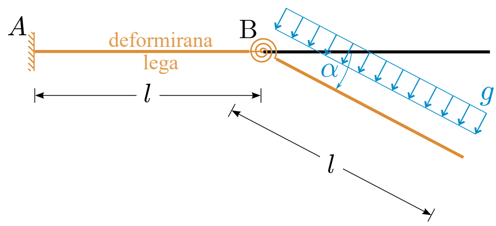


Desni del nosilca je obtežen s slediščno enakomerno obtežbo g. Kot vemo, taka obtežba sledi obračanju nosilca.

Narišite deformirano lego nosilca. Izračunajte notranje sile v nosilcu in narišite njihove diagrame.

Podatki: $l = 4\,\mathrm{m}$, $g = 12\,\mathrm{kN/m}$, $k_\varphi = 200\,\mathrm{kNm/rad}$.

Rešitev: Smer obtežbe g sledi vrtenju prostega dela nosilca okoli vzmeti v točki B. Zato je moment M, ki ga povzroča ta obtežba v členku B, neodvisen od kota α:

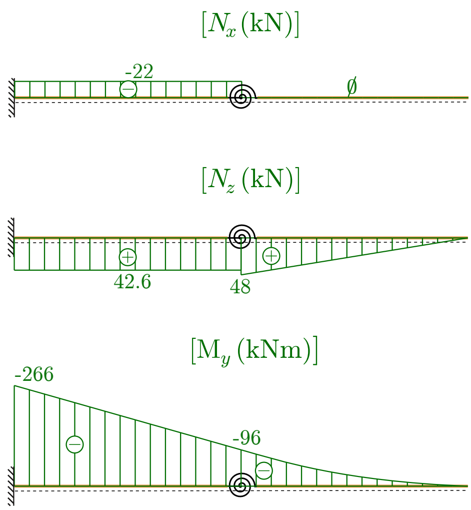


$$M = g\,l\,\frac{l}{2} = 96\,\mathrm{kNm}.$$

Kot α je odvisen od momenta M in togosti k_φ polžaste vzmeti

$$\alpha = \frac{M}{k_\varphi} = 0.48\,\mathrm{rad} = 27.5°.$$

Notranjih sil in momentov ni težko izračunati, saj je obravnavani nosilec preprosti previsni nosilec. Pomembno pa je, da pri računu notranjih sil upoštevamo, da je desni del zasukan za 27.5°. Diagrame prikazujemo na spodnji sliki.

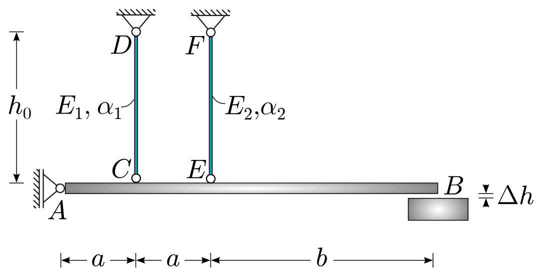


4. naloga

Jekleno palico CD premera $d = 1\,\mathrm{cm}$ segrejemo za $33\,°\mathrm{C}$. Za koliko moramo segreti palico EF premera $d = 2\,\mathrm{cm}$, da se bo nosilec AB, v točki B dotikal toge podlage? Deformiranje nosilca AB v računu zanemarite. Težo konstrukcije zanemarite.

Narišite tudi diagrame notranjih sil.

Podatki: $a = 1\,\mathrm{m}$, $b = 3\,\mathrm{m}$, $h_0 = 2\,\mathrm{m}$, $\Delta h = 1\,\mathrm{cm}$,
$E_1 = 21000\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5}\,°\mathrm{C}^{-1}$,
$E_2 = 18000\,\mathrm{kN/cm^2}$, $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-5}\,°\mathrm{C}^{-1}$.

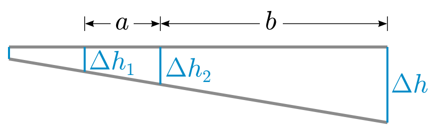


Rešitev: Jeklena palica CD se segreje za $33\,°\mathrm{C}$, dolžina palice se poveča za

$$\Delta h_1 = h_0\, \alpha_1\, \Delta T_1 = 0.079\,\mathrm{cm}.$$

Spremembo dolžine druge palice določimo s slike deformirane lege nosilca, saj vemo, da mora biti pomik v točki B enak $\Delta h = 1\,\mathrm{cm}$:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 + \frac{\Delta h - \Delta h_1}{4} = 0.309\,\mathrm{cm}.$$



Sedaj lahko izračunamo še spremembo temperature, ki je potrebna, da se palica EF raztegne za Δh_2

$$\Delta h_2 = h_0\, \alpha_2\, \Delta T_2 \quad \rightarrow \quad \Delta T_2 = \frac{\Delta h_2}{h_0\, \alpha_2} = 51.6\,°\mathrm{C}.$$

Konstrukcija je statično določena, edini zunanji vpliv na konstrukcijo sta spremenjeni temperaturi v palicah CD in EF. Vse notranje sile in momenti so zato enaki nič.