25.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 15. MAJ 2019

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

25. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

**Goran Turk, Dejan Zupan, Tomaž Hozjan,
Peter Češarek, Rado Flajs in Igor Planinc**

Ljubljana, 15. maj 2019

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; HOZJAN, Tomaž; ČEŠAREK, Peter; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor

25. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Tiskarna

Obseg: 28 strani

Naklada: 60 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2019

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (25 ; 2019 ; Ljubljana)
[Petiindvajseto]
25. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 15. maj 2019 / [pripravili] Goran Turk ... [et al.]. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2019

ISBN 978-961-6884-65-5
1. Turk, Goran
301768448

25. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2019

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 25. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Uroš Avsec (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 83 dijakinj in dijakov. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 17. aprila 2019. Štiriintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 15. maja 2019 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime in priimek	Letnik	Šola	Mentor
Andraž Močnik	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Brina Pečjak	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Maks Lenart Rep	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Matej Šenica	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Ema Šimc	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Leja Udovč	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Alen Begić	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Sabina Grlj	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Emil Ikanović	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Danijel Kirn	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Žiga Krvina	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Nejc Pirc	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Jaka Krivic	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Kevin Tramte	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Alen Baša	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Rene Ravnjak	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jaka Ročenovič	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Alen Drofenik	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tomaž Jakš	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Martin Sešlar	3	ŠC GK Krško	Erika Broz Žižek
Ana Urbanč	3	ŠC GK Krško	Erika Broz Žižek
Sašo Tratnik	3	ŠC SPLŠ Nova Gorica	Karlo Petrovčič
Luka Frančič	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Marko Kalin	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Luka Novak	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Nejc Panjan	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Žan Pust	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Hana Vidic	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Benjamin Bernot	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Tilen Lipush Rebernak	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Urh Starina	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Alen Granda	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Tomaž Plavčak	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Adrijan Vrečun	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLVŠ Novo Mesto	Srednja gradbena, lesarska in vzgojiteljska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje
ŠC GK Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško
ŠC SPLŠ Nova Gorica	Šolski center Nova Gorica, Strojna, prometna in lesarska šola

Sklepno tekmovanje se je začelo 15. maja 2019 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom Boštana Juršinoviča in Mitje Plosa ogledali poskus upogibne porušitve lepljenega lesenega nosilca v Konstrukcijsko prometnem laboratoriju.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Dejan Zupan, Tomaž Hozjan, Rado Flajs, Peter Češarek, Urška Dolinar in Tamara Šuligoj, (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Priznanja in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil prodekan UL FGG prof. dr. Matjaž Dolšek. Najuspešnejši so bili:

ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
	3. letnik		
Ana Urbanč	ŠC GK Krško	1. mesto	52
Andraž Močnik	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	50
Maks Lenart Rep	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	50
Ema Šimc	SEŠTG Novo mesto	zlato priznanje	
Alen Baša	SGŠG Maribor	zlato priznanje	
Tomaž Jakš	SŠGVO Celje	zlato priznanje	
Sašo Tratnik	ŠC SPLŠ Nova Gorica	zlato priznanje	
	4. letnik		
Žan Pust	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	60
Nejc Panjan	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	55
Luka Frančič	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	50
Marko Kalin	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	50
Tilen Lipush Rebernak	SGGOŠ Ljubljana	3. mesto	48
Alen Granda	SGŠG Maribor	3. mesto	48

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	18.38	16.88	11.13	11.50	57.88
najnižja ocena	0	0	0	0	15
najvišja ocena	25	25	25	25	100

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	3.28	14.14	11.38	5.69	34.48
najnižja ocena	0	5	0	0	10
najvišja ocena	25	25	25	20	90

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	6.43	6.67	5.33	10.57	29.00
najnižja ocena	0	0	0	0	3
najvišja ocena	15	18	15	25+5	52

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.83	8.08	1.25	16.42	36.58
najnižja ocena	0	0	5	0	15
najvišja ocena	25	15	10	25	60

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da na tekmovanju za tretje letnike po težavnosti nobena naloga ni posebno izstopala. Dijakinjam in dijakom četrtih letnikov pa sta bili najtežji 1. in 4. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene v tretjih letnikih bistveno nižje kot na predtekmovanju, nekoliko boljše so se odrezali 4. letniki. To pomeni, da so bile naloge za tekmovalce zelo zahtevne. Dijaki 3. letnikov so najbolje reševali 4. nalogo, velike težave pa so imeli s preostalimi tremi. Pri 4. letnikih je bila glede na rezultate najtežja 3. naloga, bolje pa so reševali 1. in 4. nalogo.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je prvo nalogo povsem pravilno rešilo kar 24 udeležencev (60 %), uspešni pa so bili tudi pri reševanju druge naloge, ki jo je pravilno rešilo 12 udeležencev (30 %). Četrti letniki so bili letos na predtekmovanju nekoliko manj uspešni, še najbolje je bilo pri tretji nalogi, ki jo je povsem pravilno rešilo sedem dijakov.

Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Prvih treh nalog pri 3. letnikih ter druge in tretje naloge pri 4. letnikih povsem pravilno ni rešil nihče. Nekoliko več povsem pravilnih rešitev je bilo le pri četrti nalogi v četrtem letniku (6 pravilno rešenih). Omeniti velja, da sta na tekmovanju za tretje letnika dva dijaka povsem pravilno rešila 4. nalogo in dobila še dodatne točke za ustrezno odgovor na dodatno vprašanje.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
24	12	7	6
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
2	5	7	0
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	0	0	2
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
2	0	0	6

Tekmovanje financirata:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Zavod RS za šolstvo.

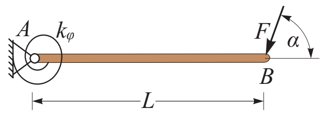
Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

Naloge za 3. letnike

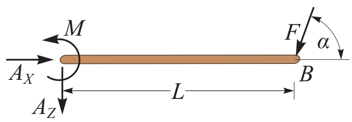
1. naloga

Togi nosilec je v podpori A podprt z vrtljivo podporo in spiralno elastično vzmetjo. Določi kot zasuka togega nosilca okoli členka A. Predpostavimo, da so zasuki majhni.



Podatki: $L = 2\,\mathrm{m}$, $F = 10\,\mathrm{kN}$,
$k_\varphi = 200\,\mathrm{kNm/rad}$, $\alpha = 70°$.

Rešitev: Najprej določimo reakcijo M v podpori A tako, da podporo odstranimo in jo nadomestimo z reakcijami, kot je prikazano na spodnji sliki.



Iz ravnotežnega pogoja določimo moment M v podpori A:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad M = F\,L\,\sin\alpha = 10 \cdot 2 \cdot \sin 70 = 18.79\,\mathrm{kNm}.$$

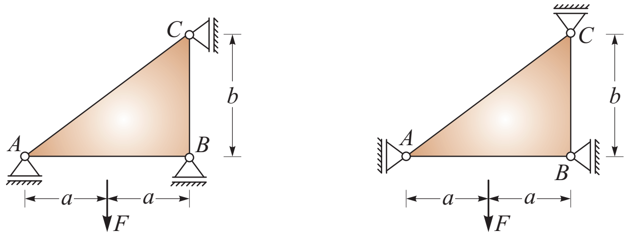
Nato določimo še kot zasuka togega nosilca

$$M = k_\varphi\,\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{M}{k_\varphi} = \frac{F\,L\,\sin\alpha}{k_\varphi} = \frac{18.79}{200} = 0.0940\,\mathrm{rad} = 5.38°.$$

2. naloga

Trikotni togi plošči sta podprti v točkah A, B in C, tako kot je prikazano na sliki. Določi reakcije v obeh primerih podpiranja. Če pride do težav pri enem ali obeh primerih, pojasni razloge.

Podatki: $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 3\,\mathrm{m}$, $F = 10\,\mathrm{kN}$.



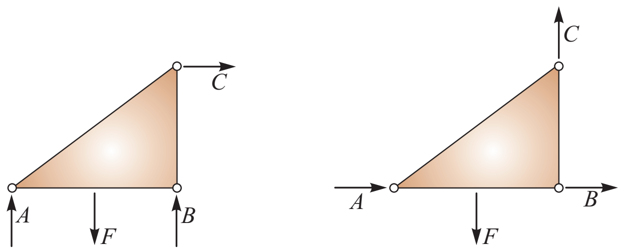
Rešitev: Podpore odstranimo in jih nadomestimo z neznanimi reakcijami A, B in C, kot kaže spodnja slika.

Nato napišemo ravnotežne pogoje za primer na levi:

$$\sum X = 0 \qquad \to \qquad C = 0,$$

$$\sum M^A = 0 \qquad \to \qquad B\,2a - F\,a - C\,b = 0 \qquad \to \qquad B = \frac{F}{2},$$

$$\sum M^B = 0 \qquad \to \qquad -A\,2a + F\,a - C\,b = 0 \qquad \to \qquad A = \frac{F}{2}.$$



Sedaj napišimo še ravnotežne enačbe za primer na desni:

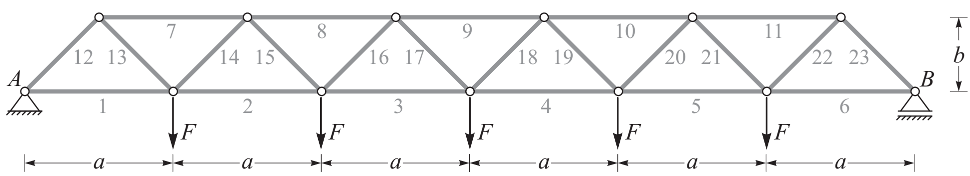
$$\sum Y = 0 \qquad \to \qquad C - F = 0 \qquad \to \qquad C = F,$$

$$\sum M^A = 0 \qquad \to \qquad C\,2a - F\,a = 0 \qquad \to \qquad C = \frac{F}{2}.$$

Prišlo je do protislovja, ob upoštevanju ene ravnotežne enačbe smo dobili drugačen rezultat kot po drugi. Reakcij ne moremo določiti, saj so podpore napačno razporejene – smernice vseh treh reakcije se sekajo v isti točki (B).

3. naloga

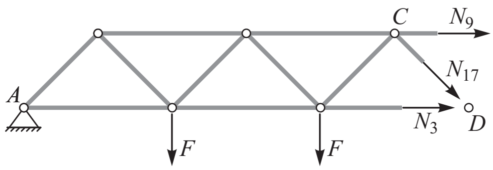
Prikazano paličje z razponom 24 m je obteženo s silami v spodnjih vozliščih, kot je prikazano na sliki. Izračunaj sile v treh palicah (eni spodnji vodoravni, eni zgornji vodoravni in eni poševni), za katere meniš, da so najbolj obremenjene.
Podatki: $a = 4\,\mathrm{m}$, $b = 2\,\mathrm{m}$, $F = 20\,\mathrm{kN}$.

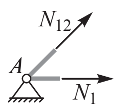


Rešitev: Obravnavano paličje v celoti deluje kot prostoležeči nosilec, pri katerem so največji upogibni momenti na sredini razpona, največje prečne sile pa ob podporah. Zato lahko pričakujemo največje natezne in tlačne osne sile v vodoravnih palicah na sredini razpona (palice 3, 4, in 9), največje sile v poševnih palicah pa ob podporah (palici 12 in 23). Za določitev osnih sil v naštetih palicah najprej izračunajmo reakcije v podporah tega simetričnega paličja.

$$\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\to \quad A_X = 0,\\
\sum M_Z^A = 0 \quad &\to \quad B_Y\,6a - F\,a - F\,2a - F\,3a - F\,4a - F\,5a = 0 \quad \to\\
&\to \quad B_Y = \frac{5F}{2} = 50\,\mathrm{kN},\\
\sum M_Z^B = 0 \quad &\to \quad -A_Y\,6a + F\,a + F\,2a + F\,3a + F\,4a + F\,5a = 0 \quad \to\\
&\to \quad A_Y = \frac{5F}{2} = 50\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}$$

Paličje prerežemo preko palic 3, 9 in 17 ter na mestu prereza predpostavimo osne sile v palicah, kot kaže spodnja slika levo.





Zapišemo momentna ravnotežna pogoja na vozlišči C in D za levi del konstrukcije in ugotovimo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{levi del}} M_Z^C = 0 \quad &\to \quad N_3\,b - A_Y\,5a/2 + F\,a/2 + F\,3a/2 = 0 \quad \to\\
&\to \quad N_3 = \frac{17Fa}{4b} = 170\,\mathrm{kN},\\
\sum_{\text{levi del}} M_Z^D = 0 \quad &\to \quad -N_9 b - A_Y\,3a + F\,a + F\,2a = 0 \quad \to\\
&\to \quad N_9 = -\frac{9Fa}{2b} = -180\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}$$

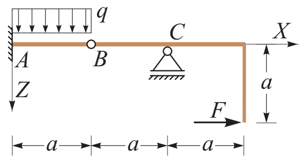
Silo v palici 12 določimo z izrezom vozlišča A, kot kaže zgornja slika desno. Nato zapišemo ravnotežni pogoj:

$$\sum_{\text{vozlišče } A} Y = 0 \quad \to \quad N_{12}\frac{\sqrt{2}}{2} + A_Y = 0 \quad \to \quad N_{12} = -\frac{5\sqrt{2}F}{2} = -70.7\,\mathrm{kN}.$$

Povzemimo, da se največja natezna osna sila pojavi v palicah 3 in 4, največja tlačna osna sila v palici 9, največja osna sila v poševni palici pa je v palicah 12 in 23.

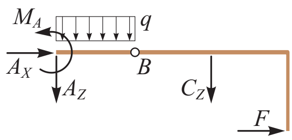
4. naloga

Za sestavljeno konstrukcijo na sliki izračunaj reakcije podpor in notranje sile ter nariši njihove diagrame.



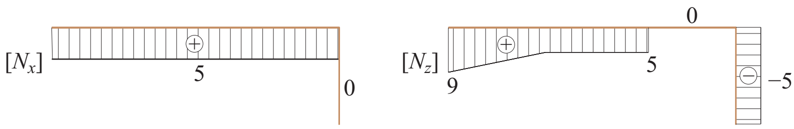
Podatki: $a = 2\,\mathrm{m}$, $q = 2\,\mathrm{kN/m}$, $F = 5\,\mathrm{kN}$.

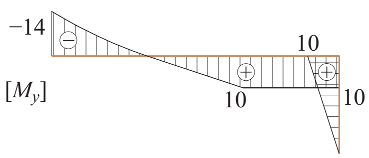
Rešitev: Določimo najprej reakcije v podporah A in C, kot so prikazane na spodnji sliki.



$$
\begin{aligned}
\sum X &= 0 &&\rightarrow && A_X = -F = -5\,\mathrm{kN},\\
\sum_{\text{desni del}} M_Y^B &= 0 &&\rightarrow && C_Z = F = 5\,\mathrm{kN},\\
\sum Z &= 0 &&\rightarrow && A_Z = -C_Z - q\,a = -9\,\mathrm{kN},\\
\sum M_Y^A &= 0 &&\rightarrow && M_A = q\,a^2/2 + C_Z\,2a - F = 14\,\mathrm{kNm}.
\end{aligned}
$$

Diagrame notranjih sil (v kN) in upogibnih momentov (v kNm) prikazujemo na spodnji sliki

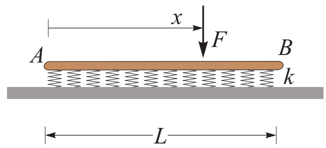




Naloge za 4. letnike

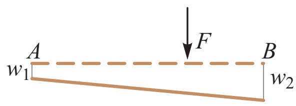
1. naloga

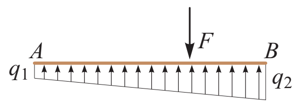
Togi nosilec leži na elastični podlagi s togostjo k. Obtežen je s točkovno silo F na razdalji x od levega roba nosilca. Določi reakcijsko silo elastične podlage (linijska obtežba) na nosilec in pomika nosilca na robovih.



Podatki: $L = 6\,\mathrm{m}$, $x = 4\,\mathrm{m}$, $F = 30\,\mathrm{kN}$, $k = 200\,\mathrm{kN/m^2}$.

Rešitev: Reakcijska sila podlage q je linearno odvisna od pomika w v posamezni točki $q = w/k$. Ker je nosilec tog, se njegova oblika ne spremeni in predstavlja reakcijska sila podlage trapezno linijsko obtežbo, kot kaže spodnja slika.





Zapišemo ravnotežne pogoje za nosilec

$$\sum Y = 0 \qquad \rightarrow \qquad q_1 \frac{L}{2} + q_2 \frac{L}{2} - F = 0,$$

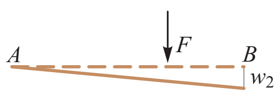
$$\sum M^A = 0 \qquad \rightarrow \qquad q_1 \frac{L}{2} \frac{L}{3} + q_2 \frac{L}{2} \frac{2L}{3} - F\,x = 0$$

in izračunamo vrednosti linijske obtežbe na obeh koncih nosilca:

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = 10\,\mathrm{kN/m}.$$

Na osnovi teh vrednosti lahko določimo še pomika na obeh koncih nosilca in narišemo lego nosilca potem, ko se elastična podlaga poda.

$$w_1 = 0 \qquad w_2 = q_2/k = 0.05\,\mathrm{m}.$$



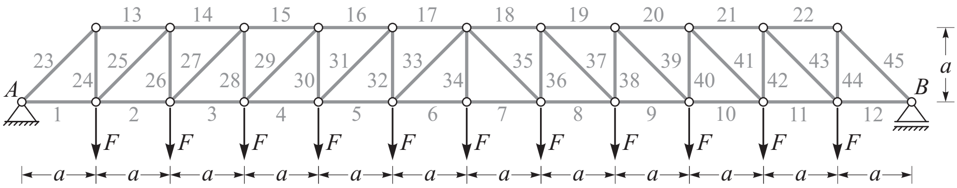
2. naloga

Glej 2. nalogo za tretje letnike.

3. naloga

Prikazano paličje z razponom 48 m je obteženo s silami v spodnjih vozliščih, kot je prikazano na sliki. Izračunaj sile v štirih palicah (eni spodnji vodoravni, eni zgornji vodoravni, eni navpični in eni poševni), za katere meniš, da so najbolj obremenjene.

Podatki: $a = 4\,\mathrm{m}$, $F = 20\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Obravnavano paličje v celoti deluje kot prostoležeči nosilec, pri katerem so največji upogibni momenti na sredini razpona. največje prečne sile pa ob podporah. Zato lahko pričakujemo največje natezne in tlačne osne sile v vodoravnih palicah na sredini razpona (palice 6, 7, 17 in 18), največje sile v poševnih in navpičnih palicah pa ob podporah (palice 23, 24, 44 in 45). Za določitev osnih sil v naštetih palicah najprej izračunajmo reakcije v podporah tega simetričnega paličja:

$$\sum X = 0 \quad \to \quad A_X = 0,$$

$$\sum M_Z^A = 0 \quad \to \quad B_Y\,12a - F\,a - F\,2a - \cdots - F\,11a = 0 \quad \to$$

$$\to \quad B_Y = \frac{11F}{2} = 110\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Z^B = 0 \quad \to \quad -A_Y\,12a + F\,a + F\,2a + \cdots + F\,11a = 0 \quad \to$$

$$\to \quad A_Y = \frac{11F}{2} = 110\,\mathrm{kN}.$$

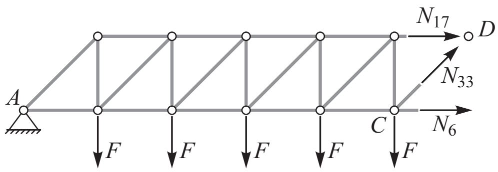
Paličje prerežemo preko palic 6, 17 in 33 ter na mestu prereza predpostavimo osne sile v palicah, kot kaže spodnja slika levo. Zapišemo momentna ravnotežna pogoja na vozlišči C in D za levi del konstrukcije in ugotovimo:

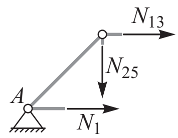
$$\sum_{\text{levi del}} M_Z^C = 0 \quad \to \quad -N_{17}\,a - A_Y\,5a + F\,a + \cdots + F\,4a = 0$$

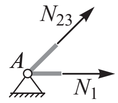
$$\to \quad N_{17} = -\frac{35F}{2} = -350\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{levi del}} M_Z^D = 0 \quad \to \quad N_6 a - A_Y\,6a + F\,a + \cdots + F\,5a = 0$$

$$\to \quad N_6 = 18F = 360\,\mathrm{kN}.$$







Silo v palici 25 določimo s prerezom paličje prek palic 1, 13 in 25, kot kaže zgornja slika na sredini. Nato zapišemo ravnotežni pogoj za navpične sile

$$\sum_{\text{levi del}} Y = 0 \quad \rightarrow \quad -N_{25} + A_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_{25} = \frac{11F}{2} = 110\,\text{kN}.$$

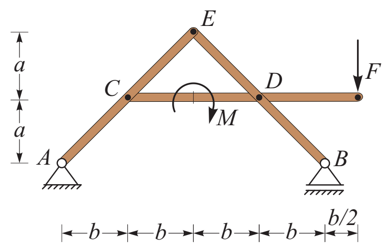
Silo v palici 23 pa določimo z izrezom vozlišča A, kot kaže zgornja slika desno. Nato zapišemo ravnotežni pogoj:

$$\sum_{\text{vozlišče } A} Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_{23}\frac{\sqrt{2}}{2} + A_Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_{23} = -\frac{11\sqrt{2}F}{2} = -155.5\,\text{kN}.$$

Povzemimo, da se največja natezna osna sila pojavi v palicah 6 in 7, največja tlačna osna sila v palicah 17 in 18, največja osna sila v poševni palici pa je v palicah 23 in 45, največja osna sila v navpičnih pa v palicah 24 in 44.

4. naloga

Za sestavljeno konstrukcijo na sliki izračunaj reakcije podpor in upogibne momente. Upogibne momente predstavi v obliki diagramov. V vseh treh vezeh, kjer se stikajo nosilci, so preprečeni medsebojni pomiki, dovoljeni pa medsebojni zasuki.



Podatki: $a = 1.5\,\text{m}$, $b = 2\,\text{m}$, $M = 12\,\text{kNm}$, $F = 4\,\text{kN}$.

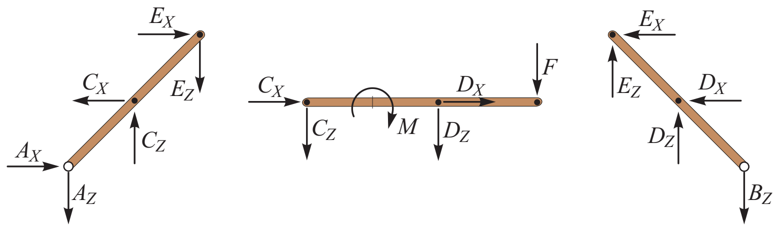
Rešitev: Pri tako sestavljeni konstrukciji moramo najprej določiti reakcije podpor A in B ter sile v vezeh C, D in E. Iz ravnotežnih enačb za celotno konstrukcijo določimo reakcije podpor:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X = 0\,\text{kN},$$

$$\sum M_Y^A = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_Z = -\frac{1}{4b}\left(M + F\frac{9b}{2}\right) = -6\,\text{kN},$$

$$\sum M_Y^B = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Z = \frac{1}{4b}\left(M + F\frac{b}{2}\right) = 2\,\text{kN}.$$

V nadaljevanju določimo sile v vezeh C, D in E iz ravnotežnih pogojev za posamezne elemente sestavljene konstrukcije. Predpostavljene smeri sil v vezeh so prikazane na naslednji sliki.



Zapišemo ravnotežne pogoje za dele konstrukcije in določimo sile v vezeh:

$$\sum_{\text{del } CD} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad D_Z = -\frac{1}{2b}\left(M + F\frac{7b}{2}\right) = -10\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } CD} M_Y^D = 0 \quad \rightarrow \quad C_Z = \frac{1}{2b}\left(M + F\frac{3b}{2}\right) = 6\,\mathrm{kN},$$

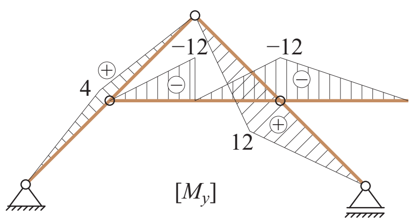
$$\sum_{\text{del } AE} M_Y^E = 0 \quad \rightarrow \quad C_X = \frac{1}{a}\left(-C_Z\,b + A_X\,2a + A_Z\,2b\right) = -2.67\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } AE} X = 0 \quad \rightarrow \quad E_X = C_X - A_X = -2.67\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } AE} Z = 0 \quad \rightarrow \quad E_Z = C_Z - A_Z = 4\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } CD} X = 0 \quad \rightarrow \quad D_X = -C_X = 2.67\,\mathrm{kN}.$$

Sedaj lahko postopoma izračunamo upogibne momente za vse dele sestavljene konstrukcije. Diagrame upogibnih momentov (v kNm) prikazujemo na spodnji sliki.

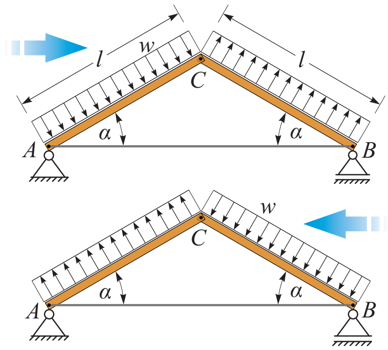


Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

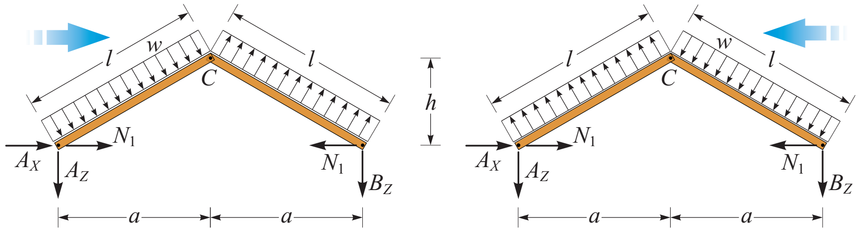
1. naloga

Lesen poveznik ostrešja na sliki smo nadomestili z vodoravno jekleno vrvjo. V vseh vezeh so sproščeni zasuki, preprečeni pa so medsebojni pomiki. Ali je ta rešitev ustrezna za obtežbo vetra w, ki lahko vpliva iz dveh smeri, kot prikazuje slika? Za smer vetra, za katero je vrv ustrezna rešitev, nariši pripadajoče diagrame notranjih sil.

Podatki: $l = 3\,\mathrm{m}$, $\alpha = 30°$, $w = 3\,\mathrm{kN/m}$.



Rešitev: Podpore in vrv odstranimo in jih nadomestimo z reakcijami v podporah A_X, A_Z, B_Z in silo v vezi N_1, kot kaže spodnja slika.



Iz ravnotežnih enačb izračunamo reakcije in silo v vrvi. Za veter z leve velja:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -2\,w\,l\,\sin\alpha = -9\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = \frac{w\,l}{2a}\left(\sin\alpha\,h - \cos\alpha\,a\right) = -2.60\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -\frac{w\,l}{2a}\left(\sin\alpha\,h - \cos\alpha\,a\right) = 2.60\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } AC} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = \frac{-1}{h}\left(\frac{w\,l^2}{2} + A_x\,h + A_z\,a\right) = 4.5\,\mathrm{kN}.$$

Za veter z desne pa velja:

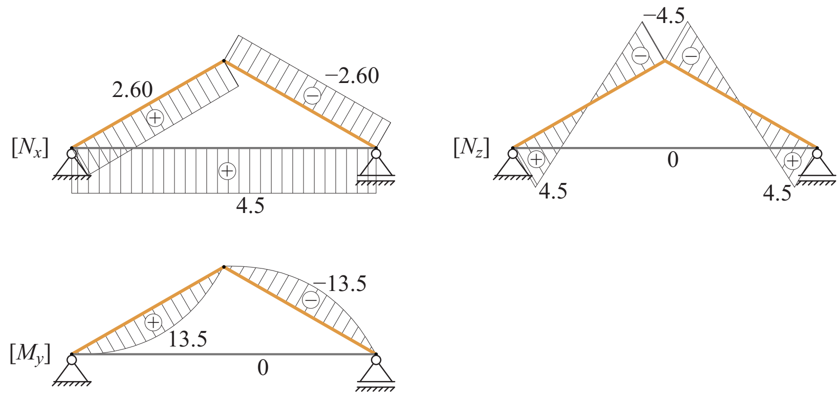
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 2\,w\,l\,\sin\alpha = 9\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{w\,l}{2a}\left(\sin\alpha\,h - \cos\alpha\,a\right) = 2.60\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = \frac{w\,l}{2a}\left(\sin\alpha\,h - \cos\alpha\,a\right) = -2.60\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } AC} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = \frac{-1}{h}\left(-\frac{w\,l^2}{2} + A_x\,h + A_z\,a\right) = -4.5\,\mathrm{kN}.$$

Rešitev z vrvjo ni ustrezna, če veter piha z desne. V tem primeru je v vrvi tlačna osna sila! Diagrami notranjih sil za primer, ko veter piha z leve, so prikazani v spodnji sliki (osne in prečne sile v kN, upogibni momenti v kNm).

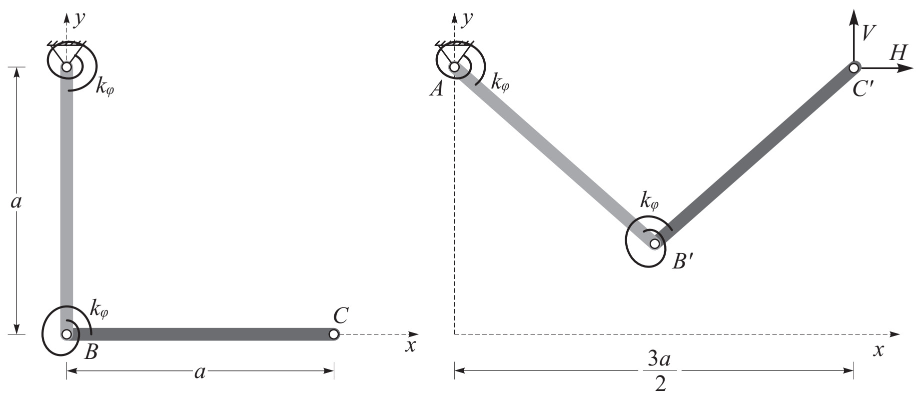


2. naloga

Robotsko roko želimo iz začetne lege, prikazane na zgornji sliki, s silama H in V na koncu robotske roke premakniti tako, da bi z njo dosegli predpisano točko C'. Robotska roka je nepomično vrtljivo podprta v točki A. Sestavljena je iz dveh togih palic dolžin a, ki sta med seboj vrtljivo povezani v točki B. Spiralni vzmeti togosti k_φ omogočata kontrolirani zasuk obeh palic. Kolikšen je zasuk obeh palic glede na začetno lego, da bo robotska roka iz začetne lege prišla v novo lego na spodnji sliki in dosegla predpisano točko C'? Kolikšna sta momenta, ki ju prevzameta spiralni vzmeti. Kolikšni sta sili H in V!

Namig: V končni legi tvorijo oglišča A, B' in C' enakokraki trikotnik.

Podatki: $a = 0.5\,\mathrm{m}$, $A(0, a)$, $B(0, 0)$, $C(a, 0)$, $C'(3a/2, a)$, $k_\varphi = 1\,\mathrm{kNm/rad}$.



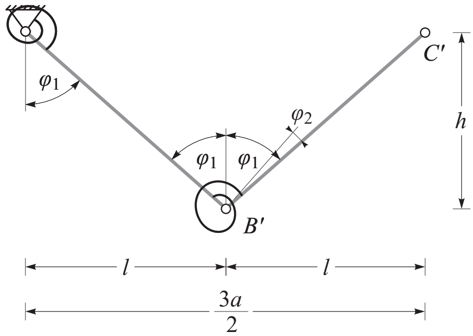
Rešitev: Prvi del te naloge je povsem geometrijski. Določiti moramo koordinate točke B' oziroma razdalji l in h na spodnji sliki in zasuke obeh delov roke φ_1 in

φ_2. Razdalji l in h sta:

$$l = \frac{1}{2}\frac{3a}{2} = \frac{3a}{4} = 0.375\,\mathrm{m}, \qquad h = \sqrt{a^2 - l^2} = 0.331\,\mathrm{m}.$$

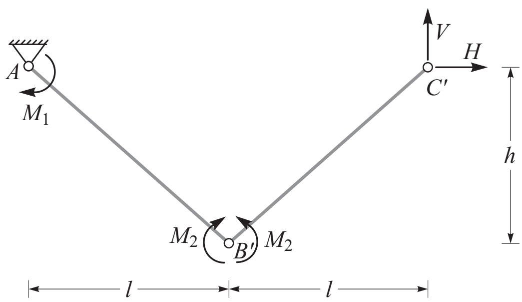
Zasuk φ_1 in spremembo pravega kota φ_2 izrazimo z radiani

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{l}{a} = 0.848\,\mathrm{rad}, \qquad \varphi_2 = 2\varphi_1 - \pi/2 = 0.125\,\mathrm{rad}.$$



Momenta, ki ju prevzameta spiralni vzmeti, sta linearno povezana z zasukom φ_1 in spremembo pravega kota φ_2

$$M_1 = k_\varphi\,\varphi_1 = 0.848\,\mathrm{kNm}, \qquad M_2 = k_\varphi\,\varphi_2 = 0.125\,\mathrm{kNm}.$$



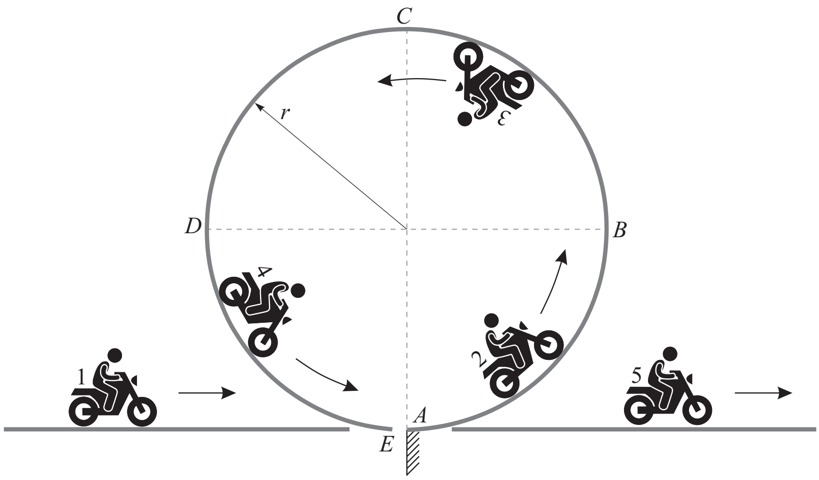
Sedaj lahko iz ravnotežnega pogoja glede na točko A za celotno konstrukcijo in ravnotežnega pogoja na točko B' za del konstrukcije BC določimo sili H in V:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad\rightarrow\quad V = \frac{2\,M_1}{3a} = 1.13\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{del } BC} M_Y^{B'} = 0 \quad\rightarrow\quad H = \frac{1}{h}\,(M_2 + V\,l) = 1.66\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Kaskader na motorju s skupno maso $200\,\mathrm{kg}$ izvaja manever v navpični zanki kot prikazuje slika. Navpična zanka, po kateri se kaskader giblje, je pravilne krožne oblike z radijem $r = 12\,\mathrm{m}$ in je togo vpeta v podlago v točki A. Konstrukcija zanke je torej ukrivljeni konzolni nosilec. Določi vrednost upogibnega momenta na mestu podpore A in točkah B, C in D, ko se kaskader nahaja v točkah B, C, D in E. Upoštevaj, da se kaskader giblje s konstantno hitrostjo $v = 12\,\mathrm{m/s}$. Določi še hitrost v_k, pri kateri bo vrednost upogibnega momenta v točki B enaka nič, ko se bo kaskader nahajal v točki C. Pri izračunih si pomagaj z enačbo za izračun centripetalne sile: $F = mv^2/r$.

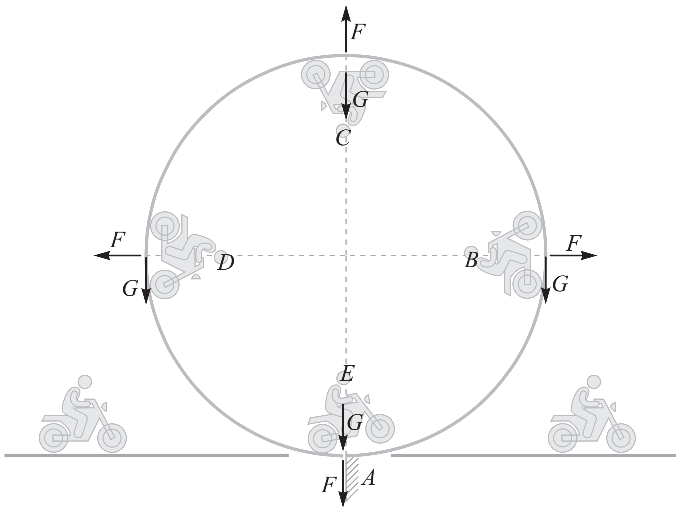


Rešitev: Centripetalna sila, s katero motor pritiska na ukrivljeni nosilec, je enaka

$$F = \frac{m\,v^2}{r} = 2.4\,\mathrm{kN}.$$

Poleg te obtežbe, ki je vedno normalna na nosilec, na konstrukcijo deluje tudi lastna teža kaskaderja z motorjem, ki je enaka $G = 2\,\mathrm{kN}$ in vedno deluje navpično navzdol. Ko bo kaskader v točki B ali D, je sila G pravokotna na silo F. Ko bo kaskader v točki C, se bo obtežba zmanjšala $F - G = 0.4\,\mathrm{kN}$, ko pa bo v točki E, se bo povečala $F + G = 4.4\,\mathrm{kN}$. Glej sliko na naslednji strani.

Določamo le upogibne momente v točkah A, B, C in D, ko je kaskader v točkah B, C, D in E. Takoj lahko ugotovimo, da je upogibni moment v poljubni točki različen od nič šele potem, ko kaskader prevozi to točko. Na primer: če je kaskader med točko A in B (na zgornji sliki v legi 2), so upogibni momenti v točkah B, C in D enaki nič.



Ročice, na katerih sili F in G delujeta na posamezne točke v konstrukciji, je za izbrane točke 0 ali $12\,\mathrm{m}$. Rezultati so podani v spodnji preglednici.

Lega kaskaderja	M_b [kNm] v točkah			
	A	B	C	D
B	-52.8	0	0	0
C	0	-4.8	0	0
D	52.8	48.0	-4.8	0
E	0	52.8	0	-52.8

Upogibni moment bo v točki B pri legi motorista v točki C enak nič tedaj, ko bo sila teže enaka centripetlani sili:

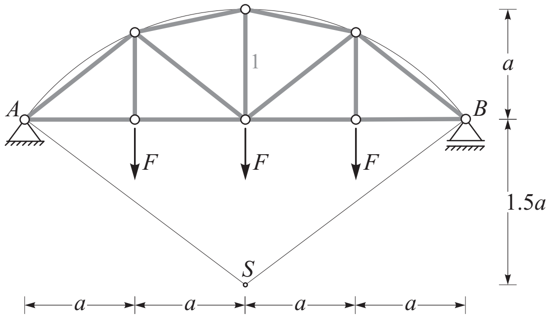
$$\frac{m\,v_k^2}{r} = G \quad \rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{G\,r}{m}} = 10.95\,\mathrm{m/s},$$

kar je tudi najnižja hitrost, potrebna za uspešno izpeljavo manevra.

4. naloga

Ravninsko paličje je obteženo s tremi navpičnimi silami F. Določi osno silo v navpični palici 1. Oglišča na gornjem robu paličja ležijo na krožnici polmera $2.5\,a$ s središčem v točki S. Kot je razvidno iz slike, je najvišje vozlišče za a nad spodnjimi vozlišči, drugo najvišje vozlišče pa za $0.791\,a$ nad spodnjimi vozlišči.

Podatki: $a = 4\,\mathrm{m}$, $F = 1\,\mathrm{kN}$.



Dodatna naloga: Dokaži, da je druga najvišja točka res za $0.791\ a$ nad spodnjimi vozlišči.

Rešitev: V prvem koraku izračunamo reakcije v podporah. Iz ravnotežnih pogojev za celotno konstrukcijo lahko hitro izračunamo, da so reakcije tolikšne:

$$A_X = 0, \qquad A_Y = B_Y = \frac{3F}{2} = 1.5\,\mathrm{kN}.$$

Rešimo najprej geometrijski del naloge (dodatna naloga). S spodnje slike lahko razberemo, da je

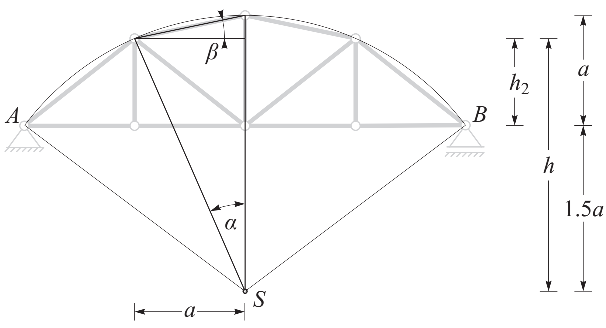
$$\sin\alpha = \frac{a}{2.5a} = \frac{1}{2.5} \quad \rightarrow \quad \alpha = 23.58^\circ.$$

Sedaj lahko določimo še razdaljo h in h_2

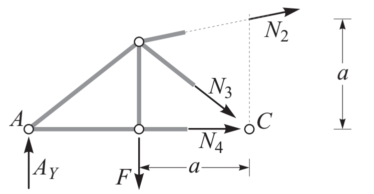
$$h = 2.5a\,\cos\alpha = 2.291\,a = 9.165\,\mathrm{m}, \qquad h_2 = h - 1.5a = 0.791\,a = 3.165\,\mathrm{m}.$$

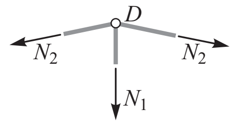
Pri zapisu ravnotežnih enačb bomo potrebovali še velikost kota β:

$$\tan\beta = \frac{a - h_2}{a} = 0.209 \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan(0.209) = 11.789^\circ.$$



Za določitev osnih sil v paličju, konstrukcijo prerežemo in na prerezih predpostavimo neznane osne sile, kot kaže spodnja slika.





Iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na točko C za levi del konstrukcije in ravnotežnega pogoja za vozlišče D lahko izračunamo iskano silo N_1.

$$\sum_{\text{levi del}} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad -N_2\, a \cos\beta + F\, a - A_Y\, 2a = 0$$

$$\rightarrow \quad N_2 = \frac{1}{a\cos\beta}\,(F\, a - A_Y\, 2a) = -2.04\,\mathrm{kN},$$

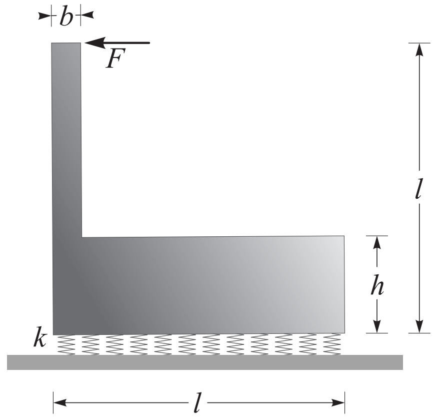
$$\sum_{\text{vozlišče } D} Y = 0 \quad \rightarrow \quad -2\, N_2\, \sin\beta - N_1 = 0$$

$$\rightarrow \quad N_1 = -2\, N_2\, \sin\beta = 0.835\,\mathrm{kN},$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

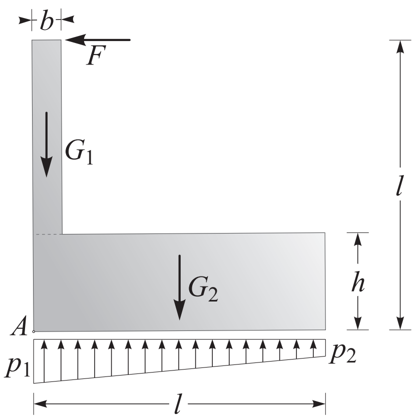
1. naloga

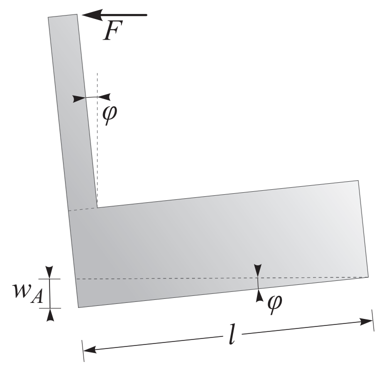
Tog podporni zid leži na elastični podlagi s togostjo k. Poznamo dimenzije l, b, h in specifično težo zidu γ. Določi največjo velikost vodoravne sile F, pri kateri bo spodnja ploskev zidu s celotno površino še v stiku s podlago – sile med podlago in zidom so le tlačne, saj podlaga nateznih obremenitev ne more prevzeti. Kolikšen je pri tolikšni sili zasuk zidu glede na navpičnico? Trenje med zidom in podlago je dovolj veliko, da pri delovanju sile F zid ne zdrsne.



Podatki: $k = 200\,\mathrm{kN/m^2}$, $\gamma = 25\,\mathrm{kN/m^2}$, $l = 3\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$, $b = 0.3\,\mathrm{m}$.

Rešitev: Elastično podlago nadomestimo s trapezno linijsko obtežbo, kot je prikazano na spodnji sliki. Poleg tega na konstrukcijo deluje še sila teže, ki jo prikažemo s silama $G_1 = \gamma\,(l-h)\,b = 15\,\mathrm{kN}$ in $G_2 = \gamma\,l\,h = 75\,\mathrm{kN}$ in delujeta na sredini pravokotnika.





V trenutku, ko je sila F tolikšna, da bi dodatno večanje sile pomenilo pojav natezne obremenitve podlage, je vrednost p_2 enaka nič, p_1 pa izračunamo iz ravnotežnih pogojev:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{2}{l}\,(G_1 + G_2) = 60\,\mathrm{kN/m},$$

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{1}{l}\left(-p_1\,\frac{l}{2}\,\frac{l}{3} + G_1\,\frac{b}{2} + G_2\,\frac{l}{2}\right) = 8.25\,\mathrm{kN}.$$

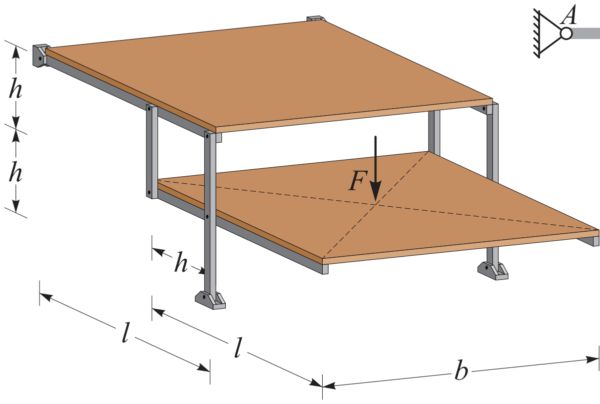
Pri tem se konstrukcija zasuka. Pomik na desnem robu je enak nič, saj je vrednost p_2 enaka nič. Pomik na levem robu v točki A pa je odvisen od podajnosti elastične podlage. Zapišemo lahko:

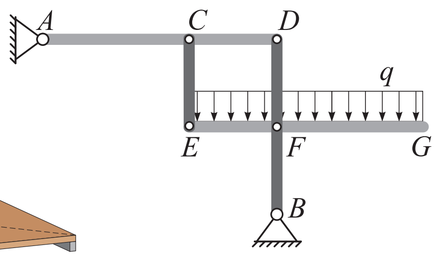
$$w_A = \frac{p_1}{k} = 0.3\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad \varphi = \arcsin\frac{w_A}{l} = 5.74^\circ.$$

2. naloga

Določite upogibne momente v podporni konstrukciji montažnih stopnic, če človek obremeni sredino prve stopnice s silo 0.8 kN. Vsi stiki podporne konstrukcije so vijačeni in dovoljujejo medsebojne zasuke. Predpostavi, da se koncentrirana obtežba F na nosilno konstrukcijo stopnice prenese v obliki enakomerno porazdeljene obtežbe q, kot kaže desna slika.

Podatki: $l = 40\,\mathrm{cm}$, $h = 15\,\mathrm{cm}$, $b = 100\,\mathrm{cm}$.

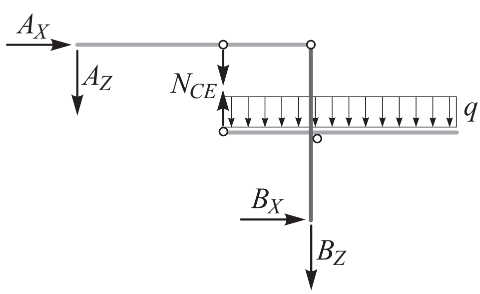




Rešitev: Zaradi simetrične obremenitve polovica sile F vpliva na eno konstrukcijo in sicer z enakomerno linijsko obtežbo q. Velikost linijske obtežbe q izračunamo takole:

$$q = \frac{F}{2\,l} = 1\,\mathrm{kN/m}.$$

Podpore odstranimo in jih nadomestimo z reakcijami, odstranimo tudi palico CE in jo nadomestimo z osno silo N_{CE}, kot kaže spodnja slika.



Iz ravnotežnih enačb izračunamo reakcije in silo v palici CE.

$$\sum_{\text{del } EG} M_Y^F = 0 \quad \rightarrow \quad N_{CE} = -\frac{1}{h}\left(q\,l\left(\frac{l}{2} - h\right)\right) = -0.133\,\text{kN},$$

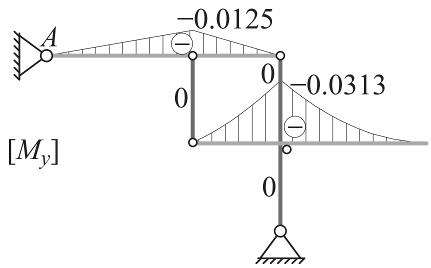
$$\sum_{\text{del } AD} M_Y^D = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{N_{CE}\,h}{l} = 0.05\,\text{kN},$$

$$\sum_{\text{cela konstrukcija}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -q\,l - A_Z = -0.45\,\text{kN},$$

$$\sum_{\text{cela konstrukcija}} M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = \frac{1}{2h}\left(A_Z\,l - q\,l\left(\frac{l}{2} - h\right)\right) = 0\,\text{kN},$$

$$\sum_{\text{cela konstrukcija}} X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = -A_X = 0\,\text{kN}.$$

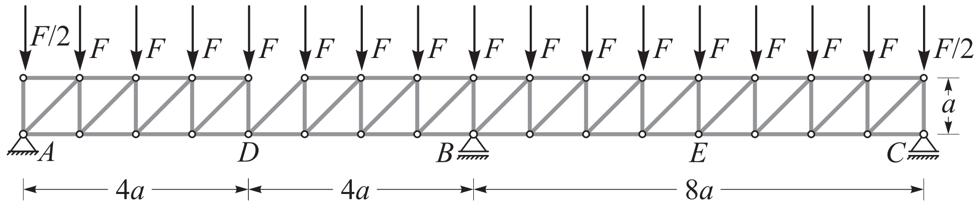
Sedaj lahko določimo notranje sile v konstrukciji. Upogibne momente prikazujemo na spodnji sliki.



3. naloga

V katerih palicah podanega ravninskega paličja na sliki nastopita največja tlačna osna sila in največja natezna osna sila?

Podatki: Dolžine vodoravnih in navpičnih palic so enake in znašajo $a = 4\,\mathrm{m}$, $F = 1\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Glede na vrsto in razpored podpor ter povezave med deli paličja, predstavlja obravnavano paličje Gerberjev nosilec. Za tak nosilec lahko izračunamo vse reakcije, ob upoštevanju, da so sile razporejene enakomerno, pa lahko pričakujemo največje osne sile v vodoravnih palicah nad podporo B. Reakcije podpor izračunamo iz ravnotežnih enačb:

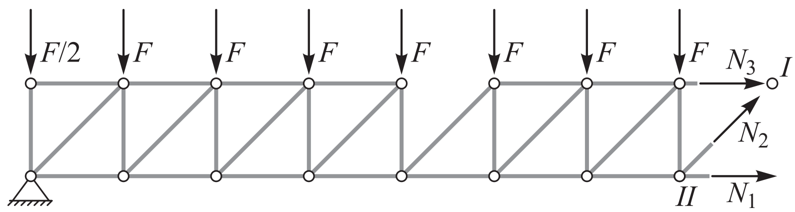
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 0\,\mathrm{kN},$$

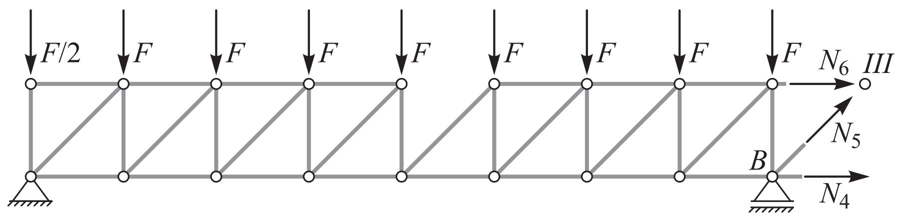
$$\sum_{\text{del } AD} M_Y^D = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{F\,a + F\,2a + F\,3a + F/2\,4a}{4a} = -2\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{cela konstrukcija}} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -\frac{A_Z\,16a + F\,a + F\,2a + \cdots}{8a} = -12\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{cela konstrukcija}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad C_Z = -16F - A_Z - B_Z = -2\,\mathrm{kN}.$$

Paličje prerežemo na dva dela v okolici podpore B, kot kaže spodnja slika.





Iz ravnotežni enačb za določimo osne sile v označenih palicah:

$$\sum_{\text{levi del}} M_Y^I = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -\frac{A_Z\, 8a + F\, a + F\, 2a + \cdots}{a} = -16\,\text{kN},$$

$$\sum_{\text{levi del}} M_Y^{II} = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = \frac{A_Z\, 7a + F\, a + F\, 2a + \cdots}{a} = 10.5\,\text{kN},$$

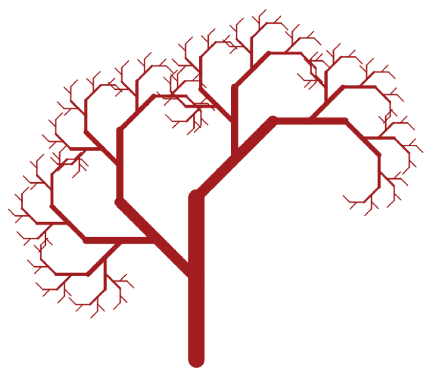
$$\sum_{\text{levi del}} M_Y^{III} = 0 \quad \rightarrow \quad N_4 = -\frac{A_Z\, 9a + B_Z\, a + F\, a + \cdots}{a} = -10.5\,\text{kN},$$

$$\sum_{\text{levi del}} M_Y^{B} = 0 \quad \rightarrow \quad N_6 = \frac{A_Z\, 8a + F\, a + F\, 2a + \cdots}{a} = 16\,\text{kN}.$$

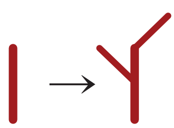
Zaključimo lahko, da je največja natezna osna sila v palici v zgornjem pasu $N_6 = 16\,\text{kN}$, največja tlačna osna sila pa je v palici v spodnjem pasu $N_1 = -16\,\text{kN}$.

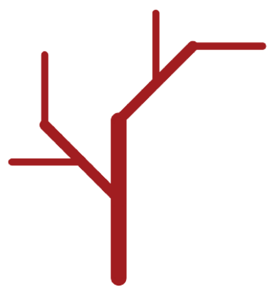
4. naloga

Drevo na desni sliki, obteženo z lastno težo, ima trhle korenine, zato se kmet Janez boji, da se bo prevrnilo. Da bi to preprečil, Janez namerava porezati vse krajše vejice, kot je prikazano na sliki spodaj desno.



Pravilo rasti drevesa: Iz debla na polovici višine pod kotom $45°$ raste leva veja, za faktor k tanjša in krajša od debla, na vrhu pa pod istim kotom še ena enaka desna veja, kot je prikazano na spodnji sliki. V nadaljevanju na enak način iz vsake veje izrasteta po dve tanjši vejici itd...

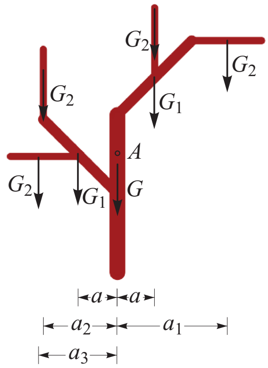




Pomagaj razrešiti Janezovo dilemo. Za obrezano drevo ugotovi, ali je v ravnotežju, če bi korenine povsem strohnele. Če bi se prevrnilo, na katero stran bi padlo? Nato sklepaj še na neobrezano drevo, ki raste po zgoraj opisanem pravilu. Podaj mnenje, naj Janez drevo obreže, ali ne.

Podatki: $k = 2/3$.

Rešitev: Obravnavajmo najprej obrezano drevo. Poleg debla imamo v tem drevesu še dve glavni veji in štiri vejice 2. reda. Vzemimo, da ima deblo dolžine l težo G. Ker se vse tri dimenzije veje v naslednjem redu zmanjšajo za faktor k, se je teža veje G_{n+1} za k^3-krat manjša od G_n. Zato velja:



$$G_1 = k^3\, G = 0.296\, G,$$
$$G_2 = k^3\, G_1 = k^6 G = 0.088\, G.$$

Določimo še razdalje smernic sil G_1 in G_2 od osi debla, izražene z dolžino debla l:

$$a = \tfrac{1}{2}\,\tfrac{2}{3}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\, l = 0.236\, l, \qquad a_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\, l + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\,\frac{2}{3}\, l = 0.694\, l,$$

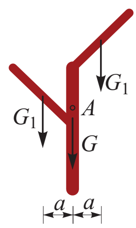
$$a_2 = \tfrac{2}{3}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\, l = 0.471\, l, \qquad a_3 = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\, l + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\,\frac{2}{3}\, l = 0.458\, l.$$

Sedaj zapišimo ravnotežni pogoj glede na poljubno točko na osi debla. Če so vse sile velikosti G_1 in G_2 v ravnotežju, se drevo ne bo prevrnilo:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad G_1\, a + G_2\, a_2 + G_2\, a_3 - G_1\, a - G_2\, a - G_2\, a_1 = 0.$$

Račun pokaže, da je ravnotežni pogoj izpolnjen. Obrezano drevo se ne prevrne.

Pokažimo še, kako je z neobrezanim drevesom. Pri reševanju te naloge igra težišče telesa ključno vlogo. Oglejmo si ponovno osnovni gradnik telesa, prikazan na sliki desno, sestavljen iz debla in dveh poševnih enakih vej, ki z deblom oklepata enaka kota. Hitro lahko ugotovimo, da se težišče tega gradnika nahaja na osi debla. Zapišimo ravnotežne pogoje glede na poljubno točko v osi debla:



$$\sum M_Y^A = 0 \rightarrow \quad G_1\, a - G_1\, a = 0$$

Ker je ravnotežni pogoj izpolnjen, leži težišče tega gradnika na osi debla.

Pokazali bomo, da se tudi težišče neobrezanega drevesa nahaja na osi debla. Pri dokazu si bomo pomagali z matematično indukcijo. Označimo gradnik na zgornji sliki z drevo$[1]$, neobrezano drevo z drevo$[n]$. Trditev za $n = 1$ velja. Naj velja trditev za n–1, naj se težišče drevesa$[n$–$1]$ nahaja na osi njegovega debla. Drevo$[n]$ je sestavljeno iz debla in dveh enakih dreves$[n-1]$, katerih težišči se nahajata na oseh njunih debel na enaki oddaljenosti od osi debla drevesa$[n]$. Drevesi$[n-1]$ sta enako težki. Posledično se tudi težišče drevesa$[n]$ nahaja na osi deblu. Dokaz je končan. Ker se težišče drevesa$[n]$ nahaja na osi debla, se drevo$[n]$ ne prevrne, obrezovanje drevesa za preprečitev prevrnitve drevesa ni potrebno.