24.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 16. MAJ 2018

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

24. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Goran Turk, Dejan Zupan, Tomaž Hozjan,
Peter Češarek, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 16. maj 2018

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; HOZJAN, Tomaž; ČEŠAREK, Peter; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
24. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Tiskarna Oman, Kranj

Obseg: 28 strani

Naklada: 60 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2018

CIP – Katažni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (24 ; 2018 ; Ljubljana)
[Štiriindvajseto]
24. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 16. maj 2018 / [pripravili] Goran Turk ... [et al.]. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2018

ISBN 978-961-6884-54-9
1. Turk, Goran
295750912

24. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2018

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 24. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Uroš Avsec (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 126 dijakinj in dijakov. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 11. aprila 2018. Devetintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 16. maja 2018 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime in priimek	Letnik	Šola	Mentor
Luka Novak	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Jernej Avsec	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Žan Pust	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Domen Glavič	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Nejc Panjan	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Hana Vidic	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Luka Frančič	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Marko Kalin	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Alen Granda	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Benjamin Bernot	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Urh Starina	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Tilen Lipush Rebernak	3	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Aleks Plevnik	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Gašper Potokar	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Lara Marušič	3	ŠC TG Nova Gorica	Karlo Petrovčič
Urh Jakop	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Adrijan Vrečun	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Benjamin Bogovič	3	ŠC GK Krško	Erika Broz Žižek
Tomislav Haring	3	ŠC GK Krško	Erika Broz Žižek
Gašper Vidmar	3	ŠC SPSŠ Krško	Erika Broz Žižek
Matevž Cimermančič	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Tajda Koščak	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Urban Oštir	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Primož Pirc	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Toni Dragovan	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Aljaž Pirnar	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Miha Pečarič	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Damjana Vavtar	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Matjaž Pongrac	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Teja Maučec	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Živa Doberšek	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Miha Babič	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Uroš Bevk	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Andrej Saje	4	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Gaja Žgank	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Žiga Kralj	4	ŠC GK Krško	Franci UdUč
Domen Peklar	4	ŠC GK Krško	Franci Uduč
Anton Glogovšek	4	ŠC SPSŠ Krško	Erika Broz Žižek
Lenart Kolić	4	ŠC SPSŠ Krško	Erika Broz Žižek

KRATICE ŠOL:

ŠC GK Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško
ŠC SPSŠ Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Srednja poklicna in strokovna šola Krško
ŠC TG Nova Gorica	Šolski center Nova Gorica, Tehniška gimnazija
SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLVŠ Novo Mesto	Srednja gradbena, lesarska in vzgojiteljska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 16. maja 2018 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom Boštana Juršinoviča; Mitje Plosa in Gorana Turka ogledali poskus natezne porušitve deske iz bukovine v Konstrukcijsko prometnem laboratoriju.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Dejan Zupan, Tomaž Hozjan, Rado Flajs, Peter Češarek, Urška Dolinar in Tamara Šuligoj, (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Priznanja in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Najuspešnejši so bili:

ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
3. letnik			
Žan Pust	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	51
Marko Kalin	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	49
Luka Novak	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	49
Alen Granda	SGŠG Maribor	3. mesto	42
Tilen Lipush Rebernak	SGGOŠ Ljubljana	zlato priznanje	
Adrijan Vrečun	SŠGVO Celje	zlato priznanje	
4. letnik			
Miha Pečarič	SEŠTG Novo mesto	1. mesto	79
Toni Dragovan	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	65
Aljaž Pirnar	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	65
Matjaž Pongrac	SGŠG Maribor	3. mesto	60
Anton Glogovšek	ŠC SPSŠ Krško	zlato priznanje	
Miha Babič	SGGOŠ Ljubljana	zlato priznanje	
Lenart Kolić	ŠC SPSŠ Krško	zlato priznanje	

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	7.30	15.28	12.90	14.50	49.98
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	93

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	16.02	16.25	13.18	8.43	53.80
najnižja ocena	0	0	0	0	5
najvišja ocena	25	25	25	25	90

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	2.55	11.32	3.65	10.15	27.10
najnižja ocena	0	0	0	0	7
najvišja ocena	7	25	10	25	51

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	11.15	13.62	20.77	17.54	63.08
najnižja ocena	0	0	5	0	25
najvišja ocena	25	25	25	23	79

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da je bila dijakinjam in dijakom tretjih letnikov najtežja 1. naloga. Dijakinjam in dijakom četrtih letnikov pa je bila najtežja 4. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene v tretjih letnikih bistveno nižje, kar pomeni, da so bile naloge za tekmovalce zelo zahtevne. Dijaki 3. letnikov so najbolje reševali 2. in 4. nalogo, velike težave pa so imeli s 1. in 3. nalogo. Pri 4. letnikih je bila glede na rezultate najtežja 1. naloga, najbolje pa so reševali 3. nalogo.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je drugo nalogo povsem pravilno rešilo kar 17 udeležencev, prav tako so bili uspešni pri reševanju četrte naloge, ki jo je pravilno rešilo 14 udeležencev. Četrti letniki so zelo uspešno reševali prve tri predtekmovalne naloge, saj je prvo nalogo povsem pravilno rešilo 21 udeležencev, drugo in tretjo pa 17. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Prve in tretje naloge pri 3. letnikih ter četrte naloge pri 4. letnikih povsem pravilno ni rešil nihče. Nekoliko več je bilo povsem pravilnih rešitev le pri tretji nalogi v četrtem letniku.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
6	17	3	14
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
21	17	17	4
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	1	0	1
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
1	2	5	0

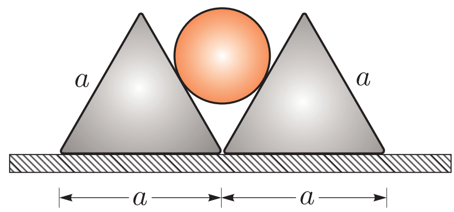
Tekmovanje financirata:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Zavod RS za šolstvo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

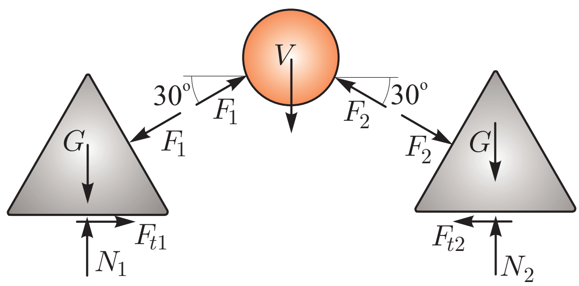
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Med dve enakostranični prizmi s stranico a postavimo valj s polmerom r, kot je prikazano na sliki. Teža prizm je $G = 10$ N, teža valja pa $V = 14$ N. Trenje med prizmama in valjem je zanemarljivo. Določi najmanjši koeficient trenja k_t med prizmama in podlago, da se prizmi ne razmakneta!
Podatki: $a = 5$ cm, $r = a\sqrt{3}/6$.



Rešitev: Sistem razstavimo na tri podsisteme, medsebojne vplive ter vpliv podlage pa nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Ravnotežnje sil zapišemo za valj in za levo prizmo:



Valj:

$$\sum X = 0 \quad \to \quad F_1 \cos 30 - F_2 \cos 30 = 0 \quad \to \quad F_1 = F_2,$$

$$\sum Y = 0 \quad \to \quad F_1 \sin 30 + F_2 \sin 30 - V = 0 \quad \to \quad F_1 = F_2 = V.$$

Leva prizma:

$$\sum X = 0 \quad \to \quad F_{t1} - F_1 \cos 30 = 0 \quad \to \quad F_{t1} = F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = V \frac{\sqrt{3}}{2},$$

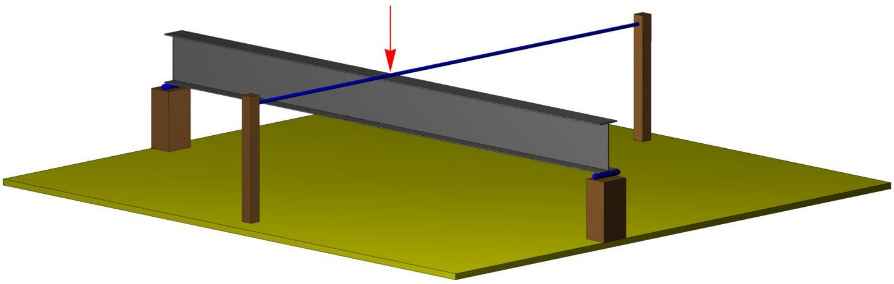
$$\sum Y = 0 \quad \to \quad N_1 - G - F_1 \sin 30 = 0 \quad \to \quad N_1 = G + \frac{V}{2}.$$

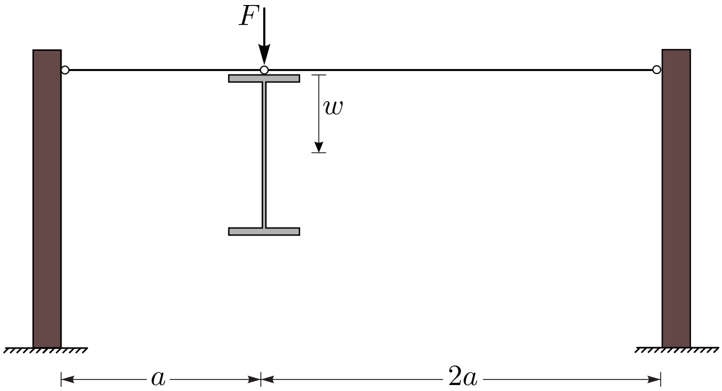
Najmanjši koeficient trenja k_t, pri katerem se prizmi ne razmakneta, je določen z razmerjem med silo trenja in normalno silo:

$$k_t = \frac{F_{t1}}{N_1} = \frac{V\sqrt{3}/2}{(G + V/2)} = \frac{14\sqrt{3}}{2(10+7)} = 0.713.$$

2. naloga

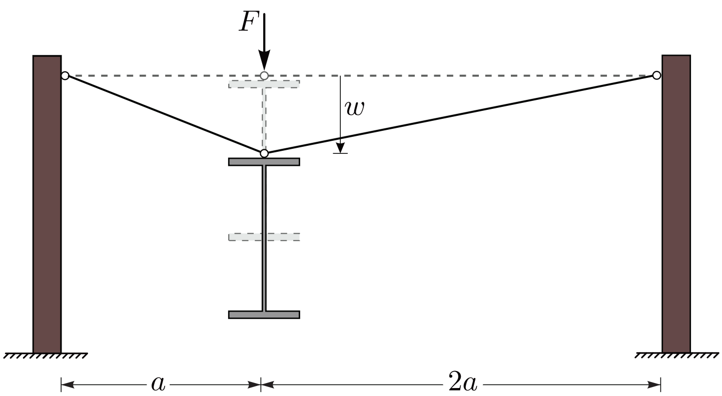
Zaradi nevarnosti bočne zvrnitve pri upogibnem preizkusu jeklenega nosilca z visokim in vitkim prečnim prerezom, smo nosilec zavarovali z jeklenima vrvema, kot kažeta sliki. Določi sili v vrveh, če se je nosilec med preizkusom premaknil za $w = 10$ cm navpično navzdol!





Jekleni vrvi imata premer $d = 6$ mm in elastični modul $E = 19500$ kN/cm^2, razdalja $a = 100$ cm. Predpostavimo, da sta stebra tako toga, da je njuno deformiranje zanemarljivo, zato se vpetišče vrvi ne premakne.

Rešitev: Sile v vrveh nastanejo zaradi raztezkov vrvi, ki so posledica upogiba nosilca.



Najprej določimo spremembi dolžin vrvi:

$$l_1' = \sqrt{a^2 + w^2} = 100.4988\,\text{cm} \qquad \rightarrow \qquad \Delta l_1 = l_1' - a = 0.4988\,\text{cm},$$
$$l_2' = \sqrt{(2a)^2 + w^2} = 200.2498\,\text{cm} \qquad \rightarrow \qquad \Delta l_2 = l_2' - 2a = 0.2498\,\text{cm},$$

nato pa še deformaciji in napetosti v vrveh

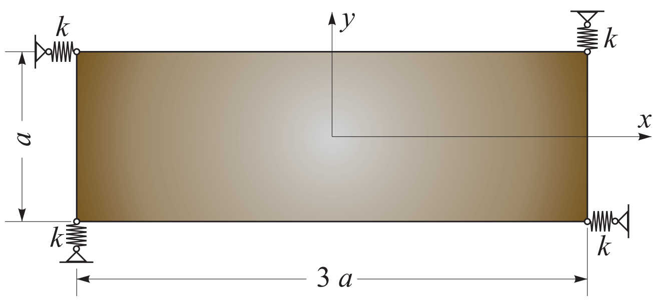
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{a} = 0.00499 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1 = 97.26\,\text{kN/cm}^2,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{2a} = 0.00125 \quad \rightarrow \quad \sigma_2 = E \cdot \varepsilon_2 = 24.36\,\text{kN/cm}^2.$$

Nazadnje določimo sili v vrveh

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0.2827,$$
$$N_1 = A_1 \cdot \sigma_1 = 27.50\,\text{kN},$$
$$N_2 = A_2 \cdot \sigma_2 = 6.89\,\text{kN}.$$

3. naloga

Klada je položena na led in podprta s štirimi vzmetmi, kot je prikazano na sliki (tloris). Trenje med klado in ledom zanemarimo. Zaradi zunanje obtežbe so se vse vzmeti raztegnile za $u = 1/1000\,a$. Določi zunanjo obtežbo klade, ki je povzročila take deformacije vzmeti!
Togosti vzmeti so enake $k = 100$ N/cm, dolžina $a = 2$ m.

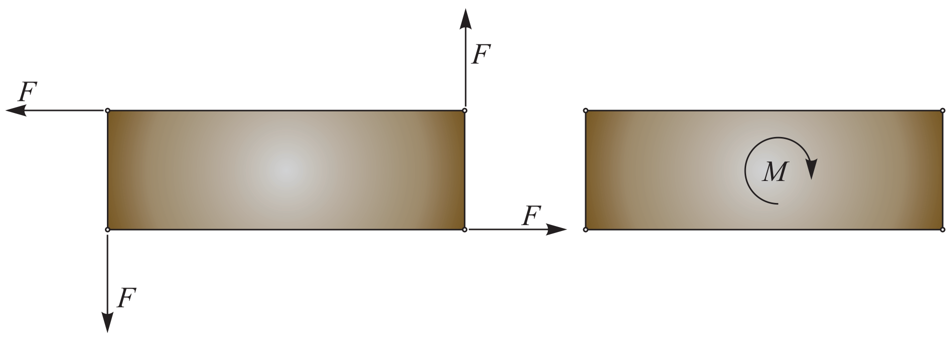


Rešitev: Ker so se enako toge vzmeti raztegnile enako, na klado delujejo štiri po velikosti enake sile F, kot kaže spodnja slika levo. Velikost te sile je:

$$F = k\,u = k\,\frac{a}{1000} = 20\,\text{N}.$$

Štiri sile, katerih rezultanta je enaka nič, lahko nadomestimo z momentom M:

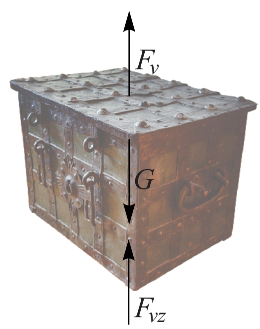
$$M = 2\,F\,\frac{a}{2} + 2\,F\,\frac{3\,a}{2} = 4\,a\,F = 160\,\text{Nm}.$$



4. naloga

Skrinja z zakladom dimenzije $1.5 \times 1.2 \times 0.6$ m je po nesreči padla v Mrtvo morje in se potopila ($\rho_v = 1.24$ kg/l). Potapljači so na skrinjo namestili vrv, s katero bomo dvignili skrinjo z zakladom. Kolikšna je sila v vrvi, dokler je skrinja še pod gladino vode, če je masa skrinje z zakladom enaka 2 toni. Za dvigovanje uporabimo najlonsko vrv premera $d = 10$ mm, z natezno trdnostjo $f_t = 180$ MPa. Ali je vrv dovolj močna, da zaklad dvignemo iz globine morja? Ali je dovolj močna tudi, da bi zaklad dvignili iz morja na ladjo?

Rešitev: Na zaklad delujejo naslednje sile: sila teže G, sila vzgona F_{vz} in sila vrvi F_v, tako kot kaže slika. Sila vzgona je enaka produktu prostornine skrinje in specifične teže tekočine, v kateri je potopljena:



$$F_{vz} = V \rho_v \, g = (1.5 \cdot 1.2 \cdot 0.6) \cdot 1240 \cdot 10 = 13.39 \, \text{kN}.$$

Sila teže je:

$$G = Mg = 2000 \cdot 10 = 20 \, \text{kN}.$$

Iz ravnotežnega pogoja v navpični smeri ugotovimo, da je sila v vrvi, dokler je skrinja pod gladino vode, enaka:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad G - F_v - F_{vz} = 0 \quad \rightarrow \quad F_v = G - F_{vz} = 6.61 \, \text{kN}$$

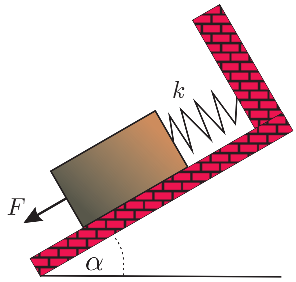
Največja sila, ki jo naša vrv lahko prenese, je enaka:

$$F_{max} = A \, f_t = \frac{\pi d^2}{4} f_t = \frac{\pi 10^2}{4} \cdot 180 = 14137 \, \text{N} = 14.14 \, \text{kN} > F_v.$$

Zaključimo lahko, da je vrv dovolj močna, da skrinjo dvigne iz globin morja do lege tik pod gladino vode. Če pa bi z isto vrvjo skrinjo poskusili dvigniti nad vodo, bi nanjo delovali le še sila teže in sila vrvi. To pomeni, da bi bila sila v vrvi enaka $F_v = G = 20 \, \text{kN} > F_{max} = 14.14 \, \text{kN}$. Vrv bi se torej pretrgala.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

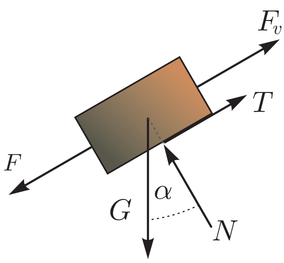


Klada na klancu je z vzmetjo togosti k pripeta na togo podlago. Klado vlečemo s silo F, pri tem pa merimo pomik vzmeti. Dinamični koeficient trenja med klado in podlago znaša $k_t = 0.3$, teža klade je $G = 120$ N. Določi silo, s katero moramo vleči, da se bo vzmet raztegnila za $u = 1$ cm! Vztrajnostne sile lahko zanemarimo.
Podatki: $k = 100$ N/cm, $\alpha = 30°$.

Rešitev: Silo v vzmeti F_v izračunamo na osnovi zahtevanega raztezka in njene togosti:

$$F_v = k\,u = 100 \cdot 1 = 100\,\mathrm{N}.$$

Sila, s katero vlečemo, mora premagovati tudi silo trenja. Klado izoliramo in narišemo sile, ki delujejo nanjo.



Za ta sistem sil zapišemo ravnotežje v smeri klanca (smer x) in pravokotno nanj (smer y):

$$\begin{aligned}
\sum y = 0 \quad &\rightarrow \quad G\cos\alpha - N = 0 \quad \rightarrow \quad N = 60\sqrt{3} = 103.92\,\mathrm{N},\\
\sum x = 0 \quad &\rightarrow \quad F + G\sin 30 - F_v - T = 0 \quad \rightarrow\\
&\rightarrow \quad F = -60 + 100 + 0.3 \cdot 60\sqrt{3} = 71.18\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Iskana sila ima velikost $F = 71.2$ N.

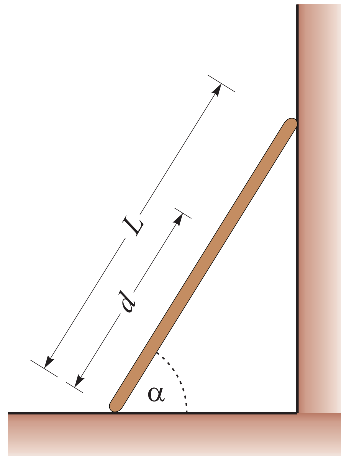
2. naloga

Glej 2. nalogo za tretje letnike.

3. naloga

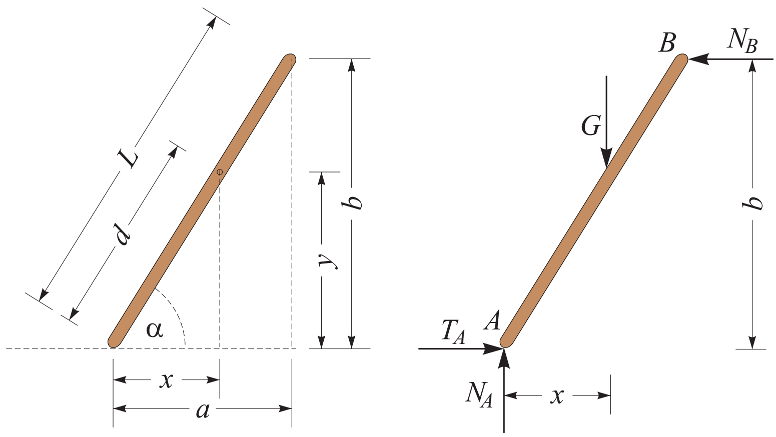
Miha z maso m se mora povzpeti po lestvi dolžine L. Lestev je naslonjena na steno in s podlago oklepa kot α, kot prikazuje slika. Koeficient trenja med lestvijo in tlemi označimo s k_t, medtem ko trenje med lestvijo in steno zanemarimo. Kako visoko po lestvi se Miha lahko povzpne, preden lestev zdrsne (poševna razdalja d na sliki)? Določite tudi velikosti vseh sil, ki v tem trenutku delujejo na lestev!

Podatki: $L = 12$ m, $m = 75$ kg, $\alpha = 65°$,
$k_t = 0.45$.



Rešitev: Tla in steno odstranimo, njun vpliv pa nadomestimo s silami N_A, T_A in N_B, kot je prikazano na spodnji desni sliki. Za boljšo geometrijsko predstavo najprej izračunajmo razdalji a in b:

$$a = L\cos\alpha = 12\cos 65° = 5.07\,\mathrm{m},$$
$$b = L\sin\alpha = 12\sin 65° = 10.88\,\mathrm{m}.$$



Iz ravnotežnih enačb in pogoja za silo trenja, lahko izračunamo sile, ki delujejo na lestev, in razdaljo x:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_A - G = 0 \quad \rightarrow \quad N_A = G = 750\,\mathrm{N},$$
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad T_A - N_B = 0 \quad \rightarrow \quad N_B = T_A = N_A\,k_t = 337.5\,\mathrm{N},$$
$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad G\,x - N_B\,b = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{N_B\,b}{G} = 4.89\,\mathrm{m}.$$

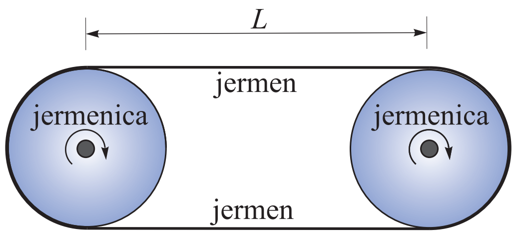
Sedaj lahko izračunamo razdaljo d:

$$d = \frac{x}{\cos\alpha} = 11.58\,\mathrm{m}.$$

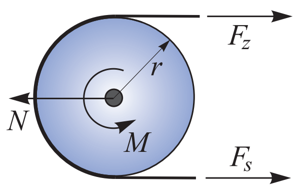
4. naloga

Na jermenici z enakima polmeroma $r = 10$ cm je napet jermen (glej sliko). Kolikšen vrtilni moment prenesemo z desne jermenice na levo, če je koeficient trenja med jermenom in jermenico enak $k_t = 0.4$ in je sila v zgornjem delu jermena enaka $F_z = 2$ kN. Upoštevaj, da se sila v jermenu spreminja v odvisnosti od kota α (to je kot, merjen v radianih, ki opisuje del jermenice, ki je v stiku z jermenom) po naslednji enačbi:

$$F_s = F_z\, e^{-\alpha\, k_t}.$$



Rešitev: Zaradi trenja je sila F_z v zgornjem delu jermena večja, kot sila F_s v spodnjem delu. Na jermenico delujeta sili v jermenu, sila podpore v osi N, ki prepreči, da bi se jermenica premaknila v smeri sil jermenice, ter moment M. Sile in moment, ki delujejo na levo jermenico, prikazujemo na spodnji sliki.



Silo F_s v spodnjem delu jermena izračunamo z naslednjo enačbo, v kateri upoštevamo, da je kot, pod katerim jermen objema jermenico α enak $180°$ oziroma π radianov:

$$F_s = F_z\, e^{-\alpha\, k_t} = 2 \cdot e^{-\pi \cdot 0.4} = 0.57\,\mathrm{kN}.$$

Vrtilni moment oziroma navor, ki ga ustvarjata sili F_z in F_s, izračunamo iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na os jermenice

$$\sum M^O = 0 \quad \rightarrow \quad M + F_s r - F_z r = 0 \quad \rightarrow \quad M = (F_z - F_s) r = 0.14\,\mathrm{kNm}.$$

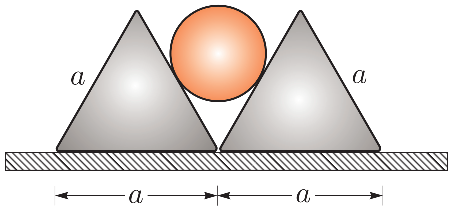
Dodatno lahko iz ravnotežja sil v vodoravni smeri izračunamo še silo N v osi:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F_s + F_z - N = 0 \quad \rightarrow \quad N = F_s + F_z = 2.57\,\mathrm{kN}.$$

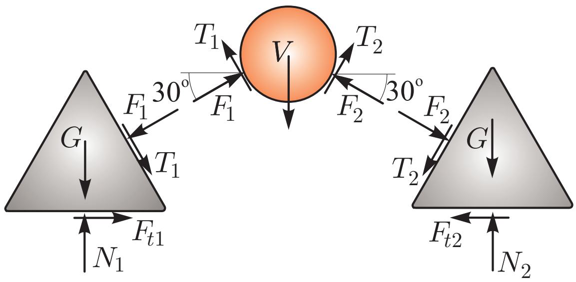
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Med dve enakostranični prizmi s stranico a postavimo valj s polmerom r, kot je prikazano na sliki. Teža prizm je $G = 10\,\mathrm{N}$, teža valja pa $V = 14\,\mathrm{N}$. Koeficient trenja med prizmama in valjem je $k_v = 0.4$. Določi najmanjši koeficient trenja k_t med prizmama in podlago, da se prizmi ne razmakneta!
Podatki: $a = 5$ cm, $r = a\sqrt{3}/6$.



Rešitev: Sistem razstavimo na tri podsisteme, medsebojne vplive ter vpliv podlage pa nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Ravnotežnje sil zapišemo za valj in za levo prizmo:



Ravotežni enačbi za valj sta:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 \cos 30 - T_1 \sin 30 - F_2 \cos 30 + T_2 \sin 30 = 0,$$
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 \sin 30 + T_1 \cos 30 + F_2 \sin 30 + T_2 \cos 30 - V = 0.$$

Če upoštevamo, da ob drsenju veljata zvezi $T_1 = k_v F_1$ in $T_2 = k_v F_2$ in ju vstavimo v prvo ravnotežno enačbo, dobimo

$$(F_1 - F_2)(\cos 30 - k_v \sin 30) = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = F_2 \quad \rightarrow \quad T_1 = T_2.$$

Ko te zveze vstavimo v drugo ravnotežno enačbo, dobimo

$$F_1 = F_2 = \frac{V}{1 + k_v\sqrt{3}} = 8.27\,\mathrm{N}, \qquad T_1 = T_2 = \frac{k_v V}{1 + k_v\sqrt{3}} = 3.31\,\mathrm{N}.$$

Ravnotežni enačbi za levo prizmo sta:

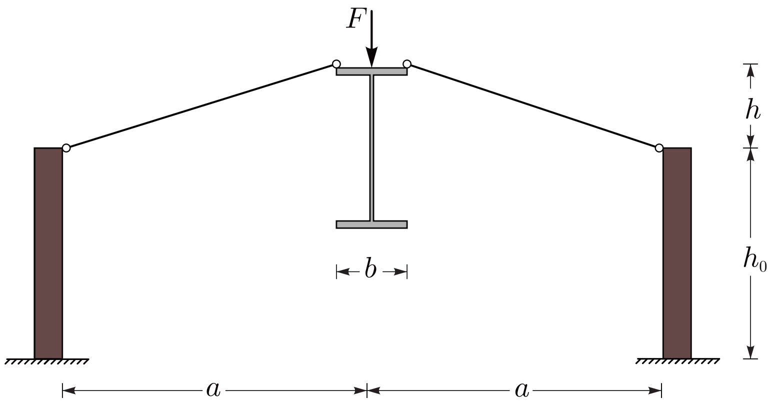
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F_{t1} - F_1 \cos 30 + T_1 \sin 30 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{t1} = 5.51\,\mathrm{N},$$
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 - G - F_1 \sin 30 - T_1 \cos 30 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 17.00\,\mathrm{N}.$$

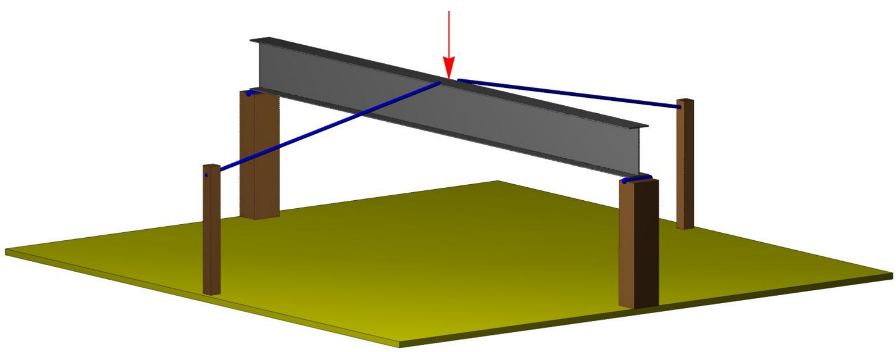
Najmanjši koeficient trenja k_t, pri katerem se prizmi ne razmakneta, je določen z razmerjem med silo trenja in normalno silo:

$$k_t = \frac{F_{t1}}{N_1} = \frac{5.51}{17.00} = 0.324.$$

2. naloga

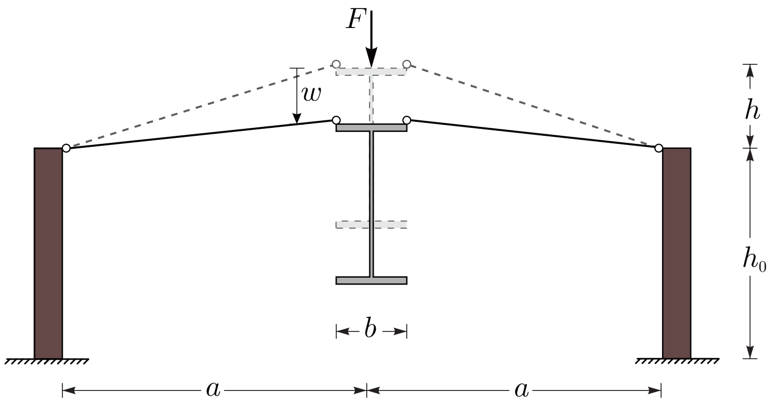
Zaradi nevarnosti bočne zvrnitve pri upogibnem preizkusu jeklenega nosilca z visokim in vitkim prečnim prerezom, smo nosilec zavarovali z jeklenima vrvema, kot kaže slika. Zaradi omejene višine togih podpornih stebrov sta vrvi poševni, zato smo ju prednapeli s silo $N = 80$ kN. Določite največjo velikost navpičnega pomika w nosilca med testom, pri kateri bosta vrvi nosilcu še zagotavljali bočno stabilnost.
Jekleni vrvi imata premer $d = 6$ mm in elastični modul $E = 19500$ kN/cm^2; razdalje so: $a = 200$ cm, $h = 50$ cm in $b = 30$ cm.





Z jekleno vrvjo zmanjšamo tveganje bočne zvrnitve.

Rešitev: Zaradi navpičnega pomika nosilca, se bosta vrvi skrajšali, sila prednapetja pa se bo zmanjševala. V trenutku, ko je sila v vrvi enaka 0, vrv ne zagotavlja več bočne stabilnosti nosilca.



Prečni prerez vrvi je

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 0.2827\ \text{cm}^2,$$

napetost pa izračunamo po naslednji enačbi:

$$\sigma = \frac{N}{A} = 282.94\ \text{kN/cm}^2.$$

Pri spremembi sile $\Delta N = -80$ kN, oziroma napetosti $\Delta\sigma = -282.94$ kN/cm^2 je deformacija vrvi enaka

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} = -0.0145.$$

Deformacijo vrvi pa lahko določimo tudi geometrijsko:

$$\Delta\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

kjer je l_0 začetna, l pa končna dolžina neobremenjene vrvi:

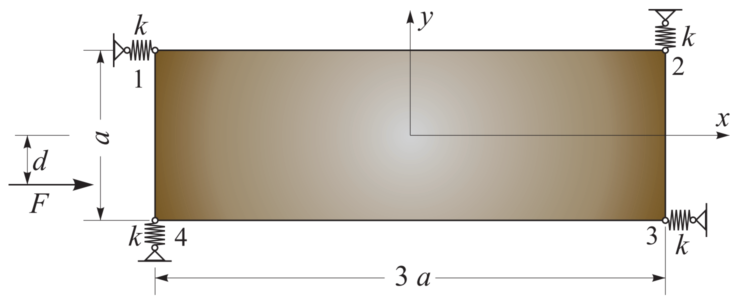
$$l_0 = \sqrt{\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + h^2} = 191.6\ \text{cm},$$
$$l = l_0\,(1 + \varepsilon) = 188.9\ \text{cm}.$$

Sedaj lahko določimo še največji dovoljen navpični pomik

$$h - w = \sqrt{l^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2} = 38.0\ \text{cm},$$
$$w = 12.0\ \text{cm}.$$

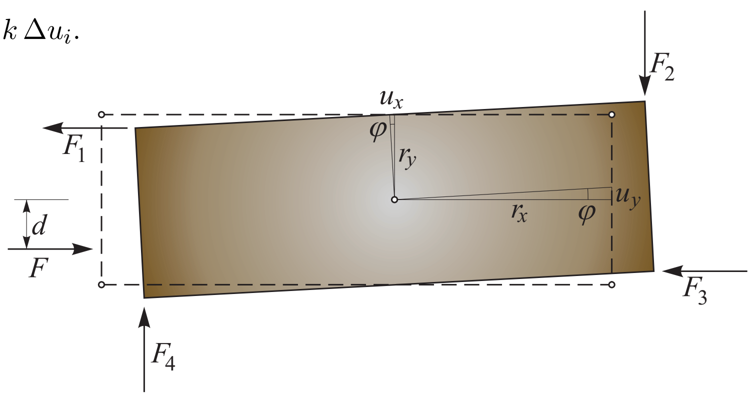
3. naloga

Toga klada je položena na led in podprta s štirimi vzmetmi, kot je prikazano na sliki (tloris). Trenje med klado in ledom zanemarimo. Pod vplivom sile F se klada translatorno premakne za $u = 5\,\mathrm{cm}$ in zavrti v protiurni smeri za $\varphi = 0.1°$. Določi velikost, smer in lego sile F, ki je povzročila tako premaknjeno lego klade. Togosti vzmeti so enake $k = 100$ N/cm, $a = 2$ m.



Rešitev: Podpore z vzmetmi odstranimo in jih nadomestimo s silami F_1, F_2, F_3 in F_4, kot je prikazano na spodnji sliki. Velikost teh sil je odvisna od skrčka oziroma raztezka Δu_i vzmeti, ki so po absolutni vrednosti enake pomikom teh štirih točk v smereh vzmeti:

$$F_i = k\,\Delta u_i.$$



Najprej določimo pomike v smeri in na mestih vzmeti. Pomik posamezne točke togega telesa lahko sestavimo iz dveh vrst premikanja: translacija in rotacija. Translacija je za vse točke enaka in sicer $u = 5\,\mathrm{cm}$ v vodoravni smeri. Pomiki zaradi rotacije so odvisni od oddaljenosti posamezne točke od težišča telesa. Pomike zaradi zasuka togega telesa lahko izpeljemo iz zgornje slike:

$$u_x = -r_y\,\tan\varphi, \quad u_y = r_x\,\tan\varphi.$$

Za majhne zasuke ($\varphi = 0.1° = 0.001745\,\mathrm{rad}$) velja, da je $\tan\varphi \approx \varphi$, zato lahko zapišemo:

$$u_x = -r_y\,\varphi, \quad u_y = r_x\,\varphi \quad \rightarrow \quad \vec{u}_T = -r_y\varphi\,\vec{e}_x + r_x\varphi\,\vec{e}_y,$$

kjer sta r_x in r_y vodoravna in navpična razdalja od težišča klade do obravnavane točke. Na primer: ker nas zanima pomik točke 2 v smeri vzmeti, torej navpično, lahko zapišemo:

$$u_2 = r_x\,\varphi = \frac{3a}{2}\varphi = \frac{3\cdot 200}{2}\cdot 0.001745 = 0.524\,\text{cm}.$$

Na podoben način izračunamo vse pomike v smereh vzmeti zaradi rotacije in prištejemo še pomik zaradi translacije v vodoravni smeri. Ob znani togosti vzmeti določimo ustrezne sile, ki smo jih predpostavili v tiste smeri, kot dejansko delujejo:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 5 - 100\cdot 0.001745 = 4.825\,\text{cm}, &&\rightarrow\quad F_1 = 482.5\,\text{N},\\
u_2 &= 300\cdot 0.001745 = 0.524\,\text{cm}, &&\rightarrow\quad F_2 = 52.4\,\text{N},\\
u_3 &= 5 + 100\cdot 0.001745 = 5.174\,\text{cm}, &&\rightarrow\quad F_3 = 517.5\,\text{N},\\
u_4 &= -300\cdot 0.001745 = -0.524\,\text{cm}, &&\rightarrow\quad F_4 = 52.4\,\text{N}.
\end{aligned}$$

Zapišimo še ravnotežni pogoj za vodoravne sile in momentni ravnotežni pogoj glede na težišče klade v začetni legi, saj so deformacije majhne:

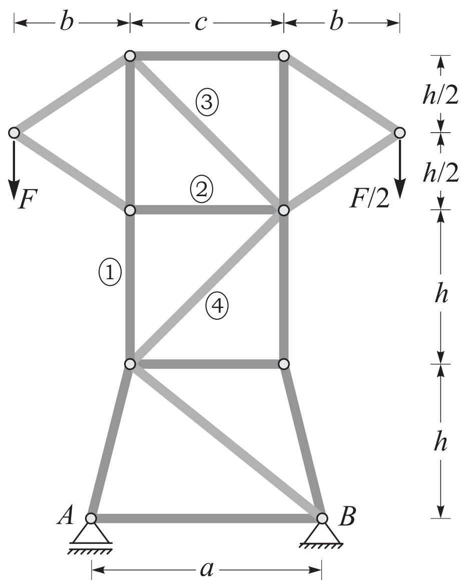
$$\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\rightarrow\quad F - F_1 - F_2 = 0 \quad\rightarrow\quad F = 482.5 + 517.5 = 1000\,\text{N},\\
\sum M_Y^O = 0 \quad &\rightarrow\quad F_1\frac{a}{2} - F_3\frac{a}{2} - F_2\frac{3a}{2} - F_4\frac{3a}{2} + F\,d = 0\\
&\rightarrow\quad 482.5\cdot 1 - 517.5\cdot 1 - 52.4\cdot 3 - 52.4\cdot 3 + 1000\,d = 0\\
&\rightarrow\quad d = \frac{349}{1000} = 0.349\,\text{m}.
\end{aligned}$$

4. naloga

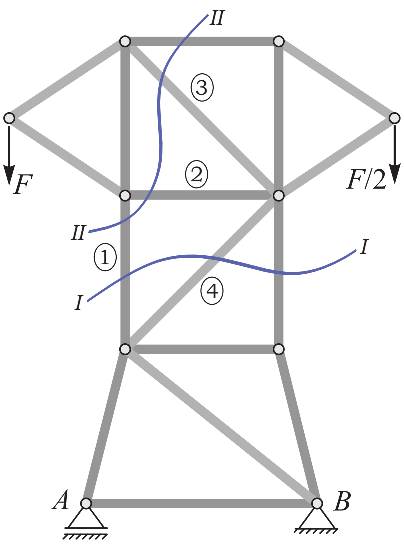
Za ravninsko paličje na sliki določite reakcije podpor A in B ter osne sile v palicah 1, 2, 3 in 4.

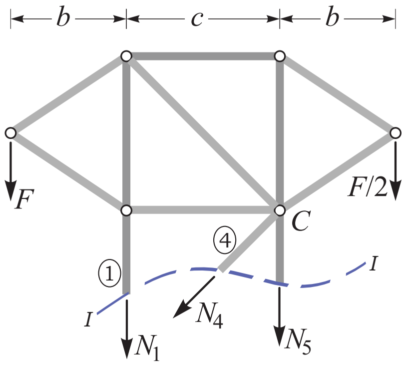
Podatki:

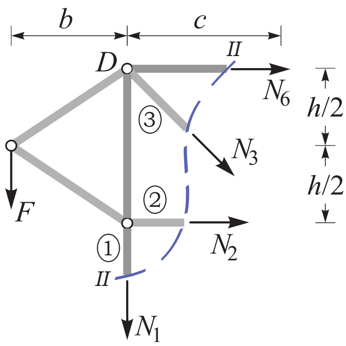
$a = 6\,\text{m}$,
$b = 3\,\text{m}$,
$c = 4\,\text{m}$,
$h = 4\,\text{m}$,
$F = 100\,\text{kN}$.



Rešitev: Konstrukcijo razrežemo preko palic, za katere želimo izračunati notranje sile. Na mestu prereza predpostavimo natezne osne sile v palicah, kot je prikazano na spodnji sliki.







Zapišemo ravnotežne pogoje za del paličja po prerezu *I-I*:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_4 \cos 45 = 0 \quad \rightarrow \quad N_4 = 0,$$

$$\sum M^C = 0 \quad \rightarrow \quad N_1\, c + F\,(b + c) - F/2\, b = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -137.5\,\mathrm{kN}.$$

Iz ravnotežih enačb za del paličja po prerezu *II-II* izračunamo:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad -N_3 \cos 45 - N_1 - F = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = 53.03\,\mathrm{kN},$$

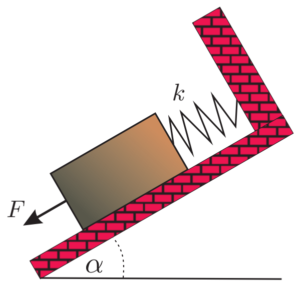
$$\sum M^D = 0 \quad \rightarrow \quad N_2\, h + F\, b = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = -75.00\,\mathrm{kN}.$$

Vidimo, da smo sile v palicah izračunali ne da bi izračunali reakcije podpor. Iz ravnotežnih enačb za celotno konstrukcijo izračunamo tudi reakcije:

$$A_Y = 116.7\,\mathrm{kN}, \quad B_Y = 33.3\,\mathrm{kN}, \quad B_X = 0.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga



Klada na klancu je z vzmetjo togosti k pripeta na togo podlago. Klado vlečemo s silo F, pri tem pa merimo pomik vzmeti. Dinamični koeficient trenja med klado in podlago znaša $k_t = 0.3$, teža klade je $G = 120$ N. Določi silo $F_{\max}$, s katero moramo vleči, da se bo vzmet raztegnila za $u_{\max} = 1$ cm. Vztrajnostne sile lahko zanemariš.

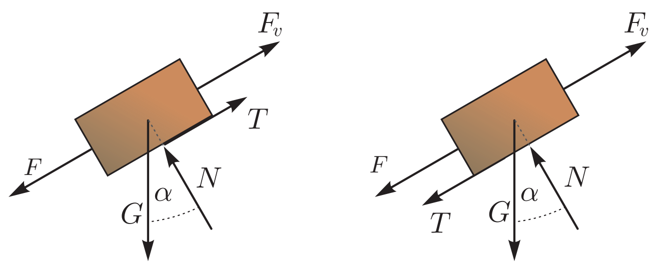
Podatki: $k = 100$ N/cm, $\alpha = 30°$.

Ko je dosežena skrajna točka, začnemo silo zmanjševati. Kaj se zgodi? Nariši grafa pomik-čas in sila-pomik ob počasnem povečanju in zmanjšanju sile F.

Rešitev: Silo v vzmeti F_v izračunamo na osnovi zahtevanega raztezka in njene togosti:

$$F_v = k\,u = 100 \cdot 1 = 100\,\text{N}.$$

Sila, s katero vlečemo, mora prevzeti še silo trenja. Klado izoliramo in narišemo sile, ki delujejo nanjo.



Za ta sistem sil zapišemo ravnotežje v smeri klanca in pravokotno nanj:

$$\begin{aligned}
&\sum y = 0 \quad \rightarrow \quad G\cos\alpha - N = 0 \quad \rightarrow \quad N = 60\sqrt{3} = 103.92\,\text{N},\\
&\sum x = 0 \quad \rightarrow \quad F + G\sin 30 - F_v - T = 0 \quad \rightarrow\\
&\qquad\qquad\;\; \rightarrow \quad F = -60 + 100 + 0.3 \cdot 60\sqrt{3} = 71.18\,\text{N}.
\end{aligned}$$

Iskana sila ima velikost $F = 71.2$ N.

Ko je dosežena skrajna točka in začnemo silo zmanjševati, bi pričakovali, da bo vzmet povlekla klado po klancu navzgor. Ker sila trenja vedno deluje nasproti smeri gibanja, predpostavimo, da sila T deluje vzdolž klanca navzdol, kot je prikazano na zgornji sliki na desni. Ravnotežne enačbe se zato spremenijo:

$$\begin{aligned}
\sum y = 0 \quad &\to \quad G\cos\alpha - N = 0 \quad \to \quad N = 60\sqrt{3} = 103.92\,\mathrm{N},\\
\sum x = 0 \quad &\to \quad F + G\sin 30 - F_v + T = 0 \quad \to\\
&\to \quad T = -60 + 100 - 71.2 = -31.2\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Ko se sila F manjša, se manjša tudi sila aktiviranega trenja, ki je po absolutni vrednosti manjša od mejne vrednosti $k_t\,N = 31.2\,\mathrm{N}$. Absolutna vrednost sile T je torej enaka

$$|T| = |F_v - F - G\sin 30| \leq k_t\,N = 31.2\,\mathrm{N}.$$

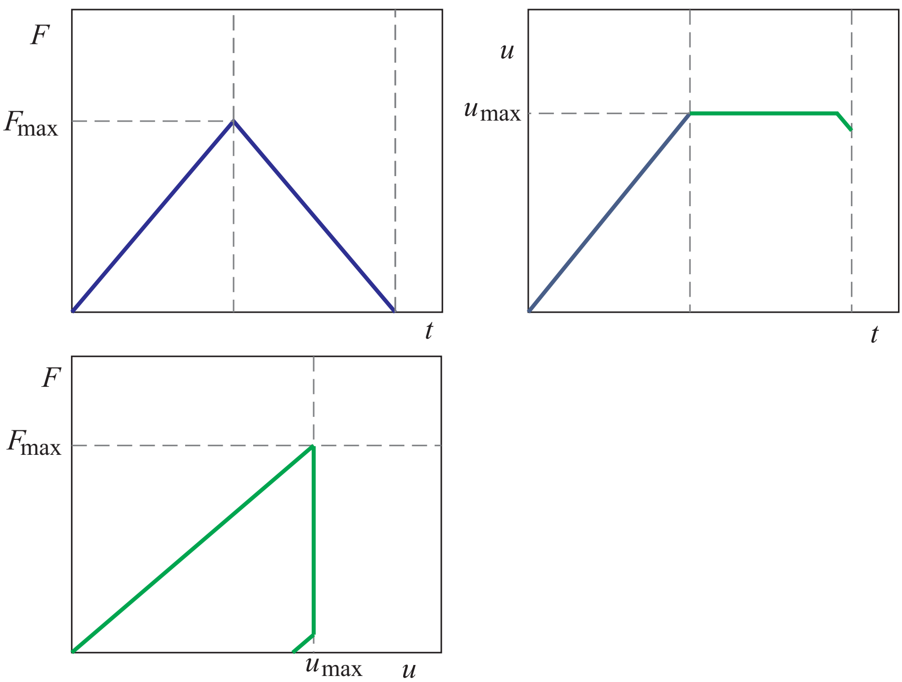
Trenje se bo ponovno aktiviralo, ko bo velikost sile F enaka

$$F = F_v - G\sin 30 - k_t\,N = 8.8\,\mathrm{N}.$$

Če silo še najprej manjšamo, se bo klada začela premikati navzgor po klancu. Za stanje, ko bo sila F ponovno enaka nič, pomik klade izračunamo iz sile v vzmeti:

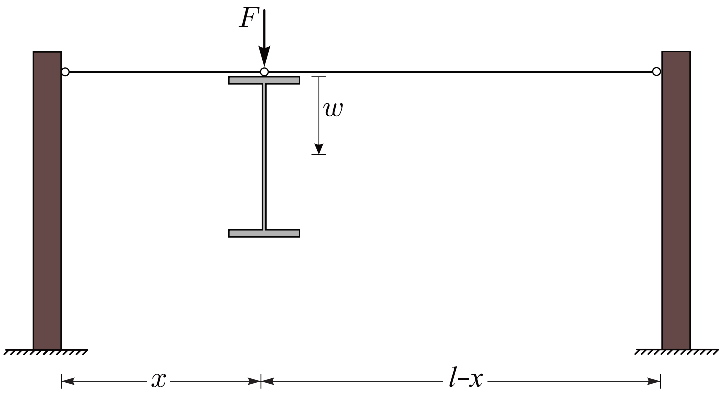
$$F_v = G\sin 30 + k_t\,N = 91.2\,\mathrm{N} \quad \to \quad u = \frac{F_v}{k} = 0.91\,\mathrm{cm}.$$

Pojav lahko opišemo z grafi, kjer pokažemo, da se pomik ob zmanjševanju sile ne spreminja, ko pa sila T ponovno doseže mejno vrednost, se klada začne pomikati navzgor.

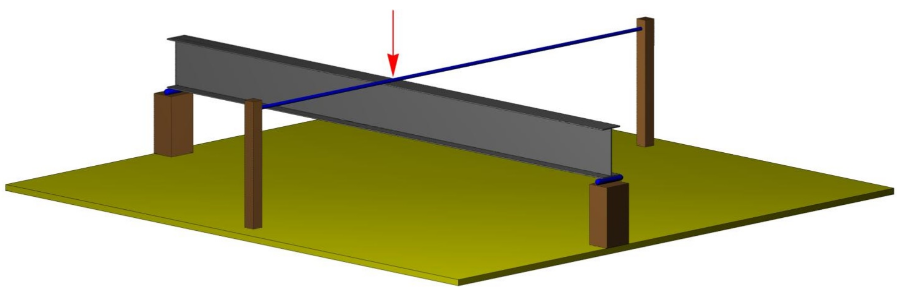


2. naloga

Zaradi nevarnosti bočne zvrnitve pri upogibnem preizkusu jeklenega nosilca z visokim in vitkim prečnim prerezom, smo nosilec zavarovali z jeklenima vrvema, kot kaže slika. Določite skrajni legi (razdalji x) preizkušanca (nosilca) med testom, pri katerih za bočno zavarovanje lahko uporabimo vrv, če se je nosilec med preizkusom premaknil v navpični smeri za $w = 10$ cm! Največja dovoljena napetost v obeh vrveh je $\sigma_{max} = 75$ kN/cm^2.



Jekleni vrvi imata premer $d = 5$ mm in elastični modul $E = 19500$ kN/cm^2; razdalja med togima stebroma je $l = 300$ cm. Predpostavimo, da sta stebra tako toga, da je njuno deformiranje zanemarljivo, zato se vpetišče vrvi ne premakne.



Z jekleno vrvjo zmanjšamo tveganje bočne zvrnitve.

Rešitev: Največja dovoljena deformacija obeh vrvi je

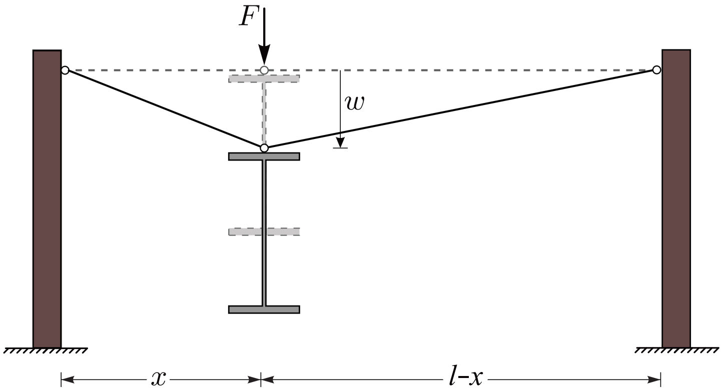
$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} = 0.00385$$

Deformacija vrvi je definirana tudi z enačbo:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1,$$

kjer je l_0 začetna, l pa končna dolžina vrvi. Deformacijo vrvi na levi lahko izrazimo kot

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{x^2 + w^2}}{x} - 1.$$



Rešimo enačbo $\varepsilon = \varepsilon_{max}$:

$$\frac{\sqrt{x^2 + w^2}}{x} - 1 = \varepsilon_{max}.$$

Ker nas rešitve $x < 0$ ne zanimajo, lahko enačbo preoblikujemo v

$$\left((1 + \varepsilon_{max})^2 - 1\right) x^2 = w^2.$$

Pozitivna rešitev za x je enaka:

$$x = \frac{w}{\sqrt{(1 + \varepsilon_{max})^2 - 1}} = 113.9\,\text{cm}.$$

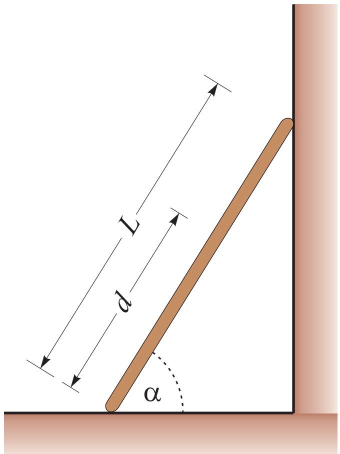
To je hkrati najmanjši dopustni x, pri katerem lahko uporabimo tak način zavarovanja bočne zvrnitve ($x_{\min}$). Zaradi simetrije za drugo skrajno lego velja

$$x_{\max} = l - x_{\min} = 186.1\,\text{cm}.$$

Lega nosilca med preizkusom mora biti med $x_{\min} = 114\,\text{cm}$ in $x_{\max} = 186\,\text{cm}$ od levega podpornega stebra ($114\,\text{cm} \leq x \leq 186\,\text{cm}$).

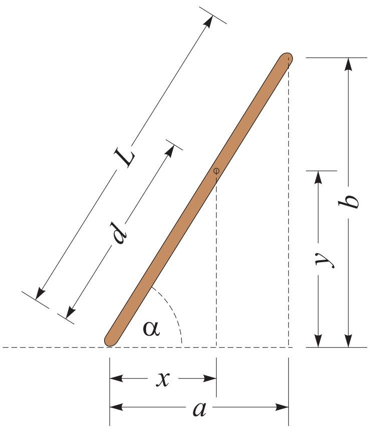
3. naloga

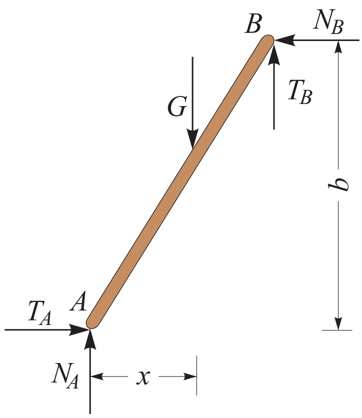
Miha z maso m se mora povzpeti po lestvi dolžine L. Ta je naslonjena na steno in s podlago oklepa kot α, kot prikazuje slika. Koeficient trenja med lestvijo in tlemi ter lestvijo in steno je k_t. Kako visoko po lestvi se Miha lahko povzpne preden lestev zdrsne (poševna razdalja d na sliki)? Določite tudi velikosti vseh sil, ki v tem trenutku delujejo na lestev!
Podatki: $L = 12$ m, $m = 75$ kg, $\alpha = 65°$, $k_t = 0.45$, $g = 10$ m/s^2.



Rešitev: Tla in steno odstranimo, njun vpliv pa nadomestimo s silami N_A, T_A, N_B in T_B, kot je prikazano na spodnji desni sliki. Za boljšo geometrijsko predstavo najprej izračunajmo razdalji a in b:

$$a = L\cos\alpha = 12\cos 65 = 5.07\,\text{m},$$
$$b = L\sin\alpha = 12\sin 65 = 10.88\,\text{m}.$$





Iz ravnotežnih enačb in pogoja za silo trenja, lahko izračunamo sile, ki delujejo na lestev:

$$\sum Y = 0 \quad\rightarrow\quad N_A + T_B - G = 0 \quad\rightarrow\quad N_A + k_t\,N_B - G = 0$$
$$\sum X = 0 \quad\rightarrow\quad T_A - N_B = 0 \quad\rightarrow\quad N_B - k_t\,N_A = 0.$$

Iz zgornjih dveh enačb izračunamo normalni sili N_A in N_B, nato pa še sili trenja T_A in T_B, ki poleg Mihove teže G delujejo na lestev:

$$N_A = 623.7\,\mathrm{N}, \quad N_B = 280.7\,\mathrm{N}, \quad T_A = 280.7\,\mathrm{N}, \quad T_B = 126.3\,\mathrm{N}.$$

Iz momentnega ravnotežnega pogoja določimo vodoravno razdaljo x:

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad -G\,x + N_B\,b + T_B\,a = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad x = \frac{N_B\,b + T_B\,a}{G} = 4.92\,\mathrm{m}$$

in s tem tudi poševno razdaljo d:

$$d = \frac{x}{\cos\alpha} = 11.65\,\mathrm{m}.$$

4. naloga

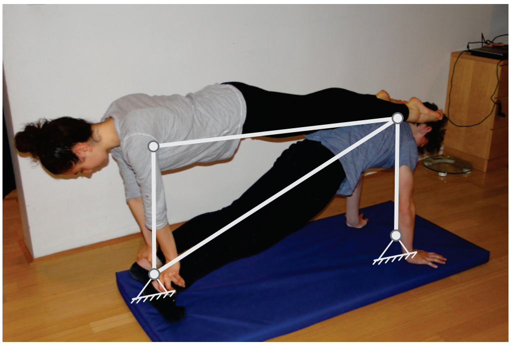
Telovadni par (Gregor in Katja) dela sklece tako, da se Katja ne dotika podlage. Dovoljena sta dva pristopa, pri prvem se Katja dotika le Gregorjevih ramen in gležnjev, pri drugem pa plosko leži na njem, tako da se ga dotika po celotni dolžini telesa. Pri skleci so iztegnjene roke navpične.

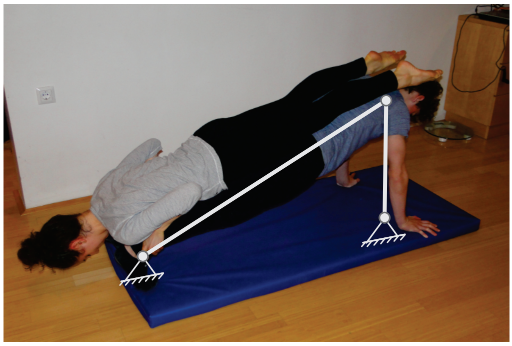
Gregor in Katja imata enako maso 50 kg. Razdalja med gležnji in rameni je pri obeh enaka 135 cm, dolžina rok pa 60 cm. Predpostavimo, da je masa razporejena tako, da težišče telesa leži 45 cm od ramen oziroma 90 cm od gležnjev. Obtežbo telesa poenostavljeno modeliramo s trikotno obtežbo, ki je enaka nič pri gležnjih in je največja v višini ramen.

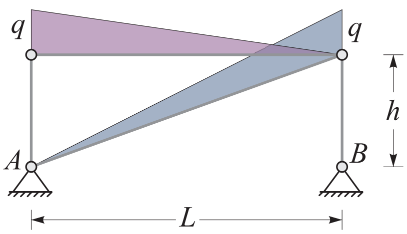
Telovadni par modeliraj s preprostim ravninskim linijskim modelom. Določi obremenitve na iztegnjene Gregorjeve roke in na njegovo telo. Pri kateri postavitvi bo Gregor težje delal sklece.

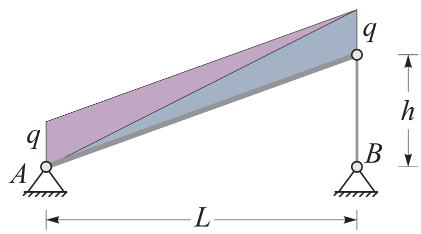
 

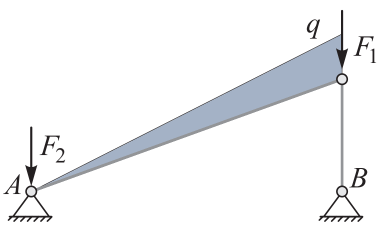
Rešitev: Prvi korak pri reševanju te naloge je priprava računskega modela. Telesi modeliramo kot linijsko konstrukcijo – tročlenski lok, kot je prikazano na sliki. Težo telesa modeliramo kot trikotno porazdeljeno linijsko obtežbo. V drugem primeru, ko Katja leži plosko na Gregorju, predpostavimo, da je skupna obtežba linijsko razporejena po Gregorju.

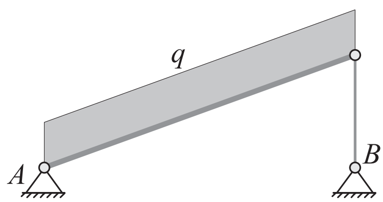












Iz razdalje L

$$L = \sqrt{1.35^2 - 0.6^2} = 1.21\,\mathrm{m}$$

in teže telovadcev $G = 50 \cdot 10 = 500\,\mathrm{N}$ izračunamo vrednost linijske obtežbe q, pri čemer upoštevamo, da smo predpostavili trikotno linijsko obtežbo:

$$q = \frac{2\,G}{L} = \frac{2 \cdot 500}{1.21} = 826.9\,\mathrm{N/m}.$$

Sedaj izračunajmo silo, ki jo morata prevzeti Gregorjevi roki. Enačbi sta enaki za oba primera:

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad -F_R\,L - \frac{q\,L}{2}\frac{L}{3} - \frac{q\,L}{2}\frac{2L}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad F_R = \frac{qL^2}{2L} = \frac{q\,L}{2},$$
$$\rightarrow \quad F_R = 500\,\mathrm{N}.$$

V levem primeru na Gregorjevo telo deluje le njegova teža, saj težo Katje prevzameta podpori (roki in gležnja), v desnem primeru pa Gregorjevo telo nosi tudi težo Katje.

Reakcija v podpori A zaradi trikotne obtežbe za levi primer je

$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z\,L + q\,\frac{L}{2}\frac{L}{3} \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{q\,L}{6} = 166.7\,\mathrm{N},$$

pri čemer nismo upoštevali sile F_2, ki deluje neposredno na podporo A oziroma Gregorjeve gležnje in ne vpliva na notranje sile v Gregorjevem telesu. Upogibni moment M_y v odvisnosti od vodoravne razdalje x določimo iz ravnotežnega pogoja

$$\sum M^T = 0 \;\rightarrow\; M_y + A_Z\,x + \frac{q\,x}{L}\frac{x}{2}\frac{x}{3} = 0 \quad \rightarrow \; M_y = \frac{q\,L\,x}{6} - \frac{q\,x^3}{6L}$$
$$\rightarrow \; M_y = 166.7\,x - 114.0\,x^3.$$

Največji upogibni moment je pri $x = 0.698\,\mathrm{m}$ in je enak $M_{y,\mathrm{max}} = 77.6\,\mathrm{Nm}$.

Reakcija v podpori A zaradi enakomerne obtežbe v desnem primeru je

$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z\,L + q\,L\,\frac{L}{2} \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{q\,L}{2} = 500\,\mathrm{N}.$$

Upogibni moment M_y v odvisnosti od vodoravne razdalje x določimo iz ravnotežnega pogoja

$$\sum M^T = 0 \quad \rightarrow \quad M_y + A_Z\,x + q\,x\frac{x}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = \frac{q\,L\,x}{2} - \frac{q\,x^2}{2}$$
$$\rightarrow \quad M_y = 500\,x - 413.5\,x^2.$$

Največji upogibni moment pri $x = 0.605\,\mathrm{m}$ je enak $M_{y,\mathrm{max}} = 151.2\,\mathrm{Nm}$. Očitno je, da je obremenitev na Gregorjevo telo v drugem primeru precej večja. Primerjava razporeda upogibnih momentov v Gregorjevem telesu je prikazana na spodnji sliki.