20.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 21. MAJ 2014

9 789616 884198

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

20. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Dejan Zupan, Goran Turk, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 21. maj 2014

ZUPAN, Dejan; TURK, Goran; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
20. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekan prof. dr. Matjaž Mikoš

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Studio Orca, Ljubljana

Obseg: 26 strani

Naklada: 100 izvodov

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2014

CIP – Katapožni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

37.091.27:624(497.4)
531/533(079)

SLOVENSKO državno prvenstvo v gradbeni mehaniki (20 ; 2014 ; Ljubljana)
[Dvajseto]
20. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana, 21. maj 2014 / [pripravili] Dejan Zupan ... [et al.]. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2014

ISBN 978-961-6884-26-6
1. Zupan, Dejan, 1973-
278567424

20. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2014

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali jubilejno 20. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Tomaž Hozjan,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 80 dijakinj in dijakov tretjega in 91 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 9. aprila 2014. Petintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 21. maja 2014 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime priimek	Letnik	Šola	Mentor
Tomaž Brzin	3	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Žak Dimič	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Tine Hren	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Urban Hribernik	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jernej Koretič	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Jaka Krek	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Mladen Mavrović	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Matic Medvešek	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Jan Muc	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Urška Ošep	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Matej Pirc	3	GK Krško	Erika Broz Žižek
Žan Pirnar	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jovana Rakić	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Jure Smole	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Barbara Škorjanc	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tadej Štampohar	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Toni Udovč	3	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Marko Voh	3	SGŠG Maribor	Andrej Šavora
Alex Želj	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Maja Cvelbar	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Žiga Imperl	4	GK Krško	Franci Udužč
Tejo Jehart	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Vida Jurečič	4	GK Krško	Franci Udužč
Miha Kocbek	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Domen Kostevc	4	GK Krško	Franci Udužč
Žiga Letonja	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Nejc Lukan	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Katja Marinčič	4	SEŠTG Novo mesto	Matej Forjan
Gašper Nemec	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Alen Pavlič	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Jan Plut	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Davor Repatec	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Anton Vrecl	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Jure Zupančič	4	SGLŠ Novo Mesto	Nevenka Cesar
Miha Žarn	4	GK Krško	Franci Udužč

KRATICE ŠOL:

GK Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško
SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 21. maja 2014 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom izr. prof. dr. Vlatka Bosiljkov ogledali Konstrukcijsko prometni laboratorij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Urška Bajc, Rado Flajs, Tomaž Hozjan, Robert Pečenko, Dušan Ružić, Anita Treven in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan UL FGG prof. dr. Matjaž Mikoš. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Tine Hren	SGŠG Maribor	1. nagrada	65
Žan Pirnar	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	58
Alex Želj	SGŠG Maribor	2. nagrada	55
Tomaž Brzin	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	51
4. letnik			
Tejo Jehart	SGŠG Maribor	1. nagrada	89
Davor Repatec	SGŠG Maribor	1. nagrada	89
Žiga Letonja	SGŠG Maribor	2. nagrada	80
Anton Vrecl	SGŠG Maribor	2. nagrada	79
Alen Pavlič	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	72
Jure Zupančič	SGLŠ Novo Mesto	3. nagrada	68
Vida Jurečič	GK Krško	3. nagrada	67

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	12.95	7.35	15.61	8.03	43.94
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	20	25	20	90

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	19.07	19.24	12.46	8.90	59.66
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	100

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	9.21	10.53	3.68	7.11	30.53
najnižja ocena	0	0	0	0	9
najvišja ocena	23	25	15	25	65

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.88	18.88	13.88	16.13	64.75
najnižja ocena	3	3	5	5	23
najvišja ocena	25	25	25	25	89

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom tretjih letnikov najtežji 2. in 4. naloga, dijakinjam in dijakom četrtih letnikov pa 4. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene nekoliko nižje kot na predtekmovanju. Naloge za četrte letnike so bile dokaj uravnotežene, pri tretjih letnikih pa po zahtevnosti izstopa 3. naloga.

Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju tretjih letnikov je prvo nalogo pravilno rešilo kar 18 udeležencev, tretjo pa kar 30 tekmovalcev. Četrti letniki so zelo uspešno in enakovredno reševali vse predtekmovalne naloge. Kar 42 dijakov je pravilno rešilo drugo nalogo, četrto, ki je bila glede na povprečje najtrši oreh, pa je povsem pravilno rešilo 11 dijakov. Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. V obeh letnikih so se dijaki najbolje odrezali pri drugi nalogi.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
18	0	30	0
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
31	42	14	11

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	3	0	1
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
2	7	2	4

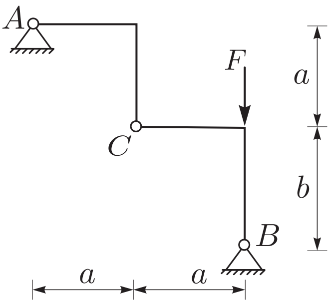
Letošnje tekmovanje je v celoti finančno podprla:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

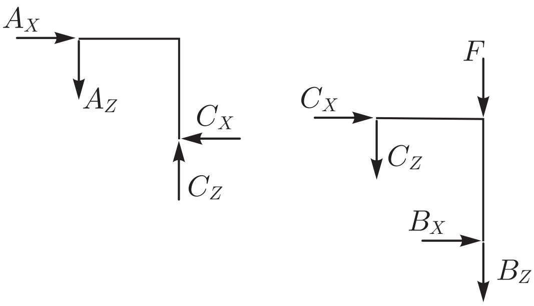
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Za konstrukcijo na sliki določi reakcije v obeh podporah in sile v vezi C!
Podatki: $a = 2$ m, $b = 3$ m, $F = 5\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Podpori in vez odstranimo in njihov vpliv nadomestimo z ustreznimi silami:



Ko ravnotežne enačbe za levi in desni del konstrukcije v smereh X in Z seštejemo, dobimo dve ravnotežni enačbi za celotno konstrukcijo:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X + B_X = 0$$
$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Z + B_Z + F = 0.$$

Ker imamo le dve enačbi za štiri neznane reakcije, potrebujemo pa enolično rešitev, za levi in desni del konstrukcije zapišemo še momentna pogoja glede na točko C:

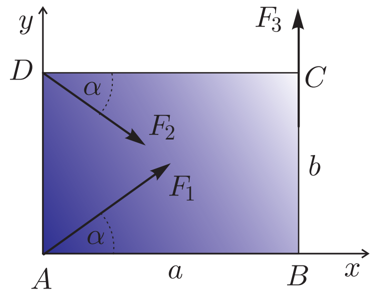
$$\sum_{\text{levi del}} M^C = 0 \qquad \rightarrow \qquad -A_X\,a + A_Z\,a = 0$$
$$\sum_{\text{desni del}} M^C = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_X\,b - B_Z\,a - F\,a = 0.$$

Dobili smo sistem štirih neodvisnih enačb za določitev štirih neznank. Po krajšem računu dobimo $A_X = B_X = A_Z = 0$ in $B_Z = -F$. Sili v vezeh določimo iz ravnotežnih pogojev za levi del konstrukcije:

$$\sum_{\text{levi del}} X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X - C_X = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_X = 0$$
$$\sum_{\text{levi del}} Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Z - C_Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_Z = 0.$$

2. naloga

Na tog pravokotnik s stranicama a in b, ki leži v ravnini xy, deluje sistem treh sil, kot kaže slika. Smernica sile F_1 poteka skozi točki A in C, smernica sile F_2 skozi točki D in B, smernica sile F_3 pa skozi točki B in C. Poišči velikost in lego rezultante teh sil.
Podatki: $F_1 = 10\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 20\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 5\,\mathrm{kN}$, $a = 4$ m, $b = 3$ m.



Rešitev: Poševni sili razstavimo na komponente vzdolž koordinatnih osi. Komponente v vodoravni in navpični smeri potem le še seštejemo

$$
\begin{aligned}
R_x &= F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = 10\frac{4}{5} + 20\frac{4}{5} = 24\,\mathrm{kN} \\
R_y &= F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\alpha + F_3 = 10\frac{3}{5} - 20\frac{3}{5} + 5 = -1\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

Rezultanta sil v splošnem ne more nadomestiti poljubnega sistema sil, saj sile v ravnini xy povzročajo tudi momente okrog osi z. Izračunajmo komponento momenta, ki ga dani sistem sil povzroča glede na točko A:

$$
M_z^A = F_3\, a - F_2\, b \cos\alpha = 5 \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot \frac{4}{5} = -28\,\mathrm{kNm}.
$$

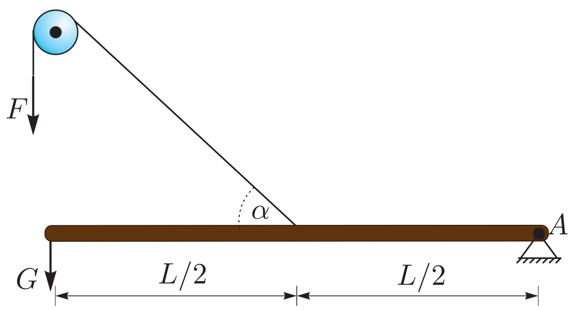
Rezultatnto sil moramo torej postaviti v tisto točko (x, y), da bo moment rezultante na točko A še vedno enak:

$$
M_z^A = xR_y - yR_x = -28 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{24}x + \frac{7}{6}.
$$

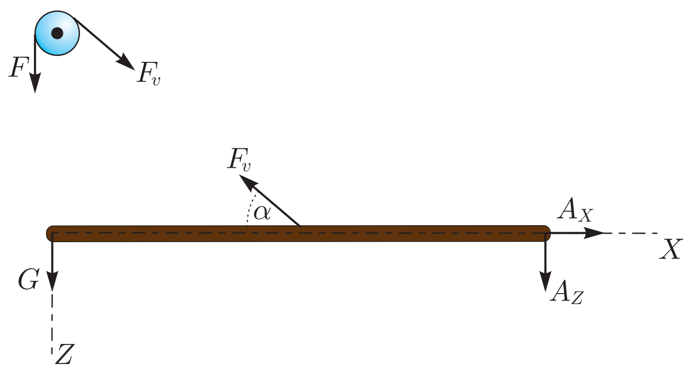
Primerna lega torej ni ena sama točka, temveč celotna premica, ki je vzporedna rezultanti sil. Rezultanto sil lahko postavimo kamorkoli na to smernico, pa bo statično enakovredno nadomestila dani sistem sil.

3. naloga

Prosti konec nosilca obtežimo z navpično silo velikosti G, drugi konec pa vrtljivo podpremo. Preko škripca nosilec pripnemo še z neraztegljivo vrvjo. Določi silo F, s katero moramo vleči vrv, da bo nosilec v ravnotežju! Za to silo določi tudi reakcije v nepomični členkasti podpori A! Lastno težo nosilca in vpliv trenja v škripcu lahko zanemariš.
Podatki: $L = 2$ m, $G = 1$ kN, $\alpha = 60°$.



Rešitev: Odstranimo podporo in vrv, njun vpliv pa nadomestimo z ustreznimi silami.



Iz ravnotežja sil na škripcu brez trenja sledi

$$F = F_v.$$

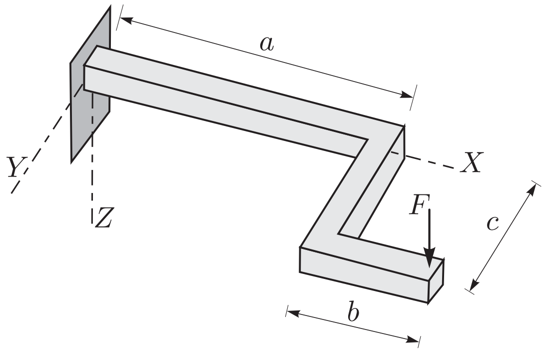
Ravnotežje nosilca določajo tri enačbe:

$$\begin{aligned}
&\sum M_Y^A = 0 &&\rightarrow\quad G\,L - F_v \frac{L}{2}\sin\alpha = 0 &&\rightarrow\quad F_v = 2.31\,\text{kN}\\
&\sum X = 0 &&\rightarrow\quad A_X - F_v\cos\alpha = 0 &&\rightarrow\quad A_X = 1.15\,\text{kN}\\
&\sum Z = 0 &&\rightarrow\quad A_Z - F_v\sin\alpha + G = 0 &&\rightarrow\quad A_Z = G = 1\,\text{kN}.
\end{aligned}$$

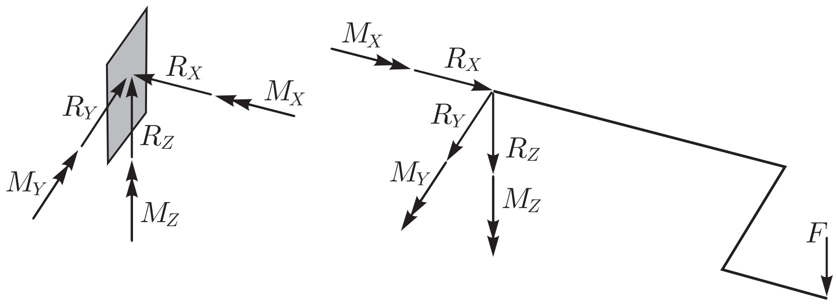
4. naloga

Lomljena kljuka, ki leži v ravnini XY, je vpeta v steno. Kljuko v navpični smeri obtežimo s silo velikosti $F = 150$ N. Določi sile in momente, s katerimi kljuka obremenjuje steno.

Podatki: $a = 30$ cm, $b = 20$ cm, $c = 10$ cm.



Rešitev: Medsebojni vpliv med kljuko in steno opisuje sistem šestih komponent sil in momentov. Kljuko odstranimo, njen vpliv na steno pa nadomestimo s komponentami sil in momentov:



Neznane komponentne sile določimo z reševanjem ravnotežnih enačb za kljuko. Ker gre za prostorski primer, zapišemo tri pogoje za ravnotežje komponent sil:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \quad R_X = 0$$
$$\sum Y = 0 \qquad \rightarrow \quad R_Y = 0$$
$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \quad R_Z = -F$$

in tri pogoje za ravnotežje komponent momentov glede na vpetišče:

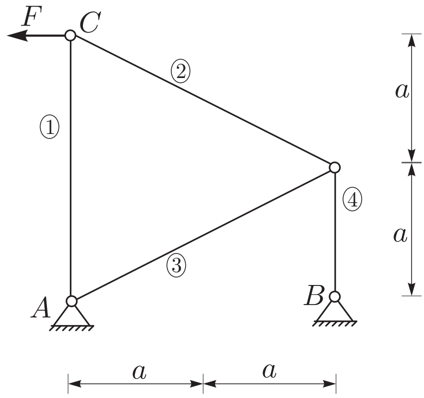
$$\sum M_X^R = 0 \qquad \rightarrow \quad M_X + F\,c = 0 \qquad \rightarrow \quad M_X = -15\,\mathrm{Nm}$$
$$\sum M_Y^R = 0 \qquad \rightarrow \quad M_Y - F\,(a+b) = 0 \qquad \rightarrow \quad M_Y = 75\,\mathrm{Nm}$$
$$\sum M_Z^R = 0 \qquad \rightarrow \quad M_Z = 0.$$

Opozorimo, da na steno delujejo ravno nasprotne komponente sil in momentov.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Za paličje na sliki določi reakcije podpor in osne sile v palicah!
Podatki: $a = 2$ m, $F = 10$ kN.



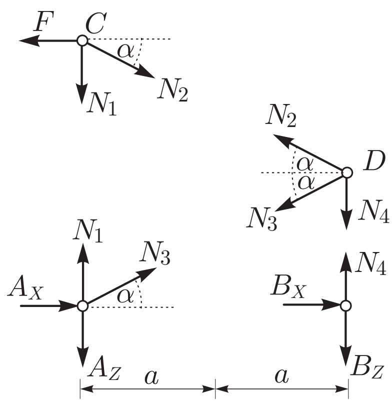
Rešitev: Nalogo rešimo z metodo izrezovanja vozlišč. Vpliv palic in podpor nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Za vsako vozlišče zapišemo dve ravnotežni enačbi:

$$\sum_A X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X + N_3 \cos\alpha = 0$$

$$\sum_A Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Z - N_1 - N_3 \sin\alpha = 0$$

$$\sum_B X = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_X = 0$$

$$\sum_B Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_Z - N_4 = 0$$



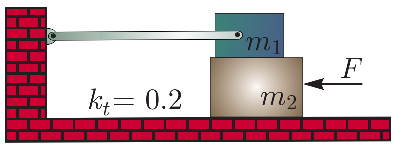
$$
\begin{aligned}
&\sum_C X = 0 && \rightarrow \quad -F + N_2 \cos\alpha = 0 \\
&\sum_C Z = 0 && \rightarrow \quad N_1 + N_2 \sin\alpha = 0 \\
&\sum_D X = 0 && \rightarrow \quad -N_2 \cos\alpha - N_3 \cos\alpha = 0 \\
&\sum_D Z = 0 && \rightarrow \quad -N_2 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha + N_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Rešiti moramo sistem osmih enačb za osem neznank. Rešitve so:

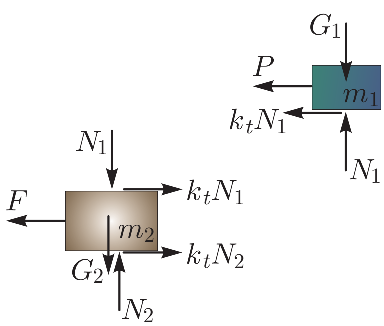
$$
\begin{aligned}
&A_X = 10\,\mathrm{kN} \quad A_Z = -10\,\mathrm{kN} \quad B_X = 0\,\mathrm{kN} \quad B_Z = 10\,\mathrm{kN} \\
&N_1 = -5\,\mathrm{kN} \quad N_2 = N_3 = -11.18\,\mathrm{kN} \quad N_4 = 10\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

2. naloga

Kladi na sliki z masama m_1 in m_2 sta postavljeni ena na drugo, zgornja klada pa je s togo palico pritrjena na steno. Med kladama ter med spodnjo klado in podlago je enak koeficient trenja $k_T = 0.2$. Določi najmanjšo vodoravno silo F, pri kateri bo spodnja klada zdrsnila! Težnostni pospešek je 10 m/s^2. Maso palice in velikost klad lahko zanemariš.
Podatki: $m_1 = m_2 = 2$ kg.



Rešitev: Sistem razstavimo na posamezni kladi. Vplive palice in podlag ter medsebojni vpliv nadomestimo z ustreznimi silami:



Za vsako klado posebej zapišemo dve ravnotežni enačbi:

$$\sum_{\text{klada 1}} X = 0 \quad \rightarrow \quad -P - k_t N_1 = 0 \quad \rightarrow \quad P = 4\,\mathrm{N}$$

$$\sum_{\text{klada 1}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad -G_1 + N_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 20\,\mathrm{N}$$

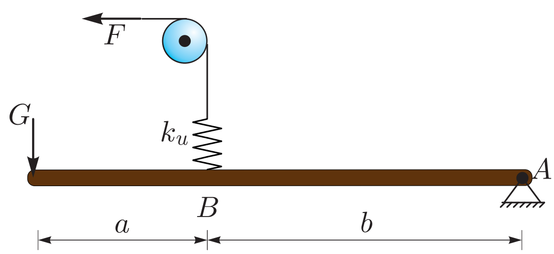
$$\sum_{\text{klada 2}} X = 0 \quad \rightarrow \quad -F + k_t N_1 + k_t N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad F = 12\,\mathrm{N}$$

$$\sum_{\text{klada 2}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad -G_2 - N_1 + N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 40\,\mathrm{N}.$$

Spodnja klada zdrsne, če jo obremenimo s silo $F \geq 12$ N.

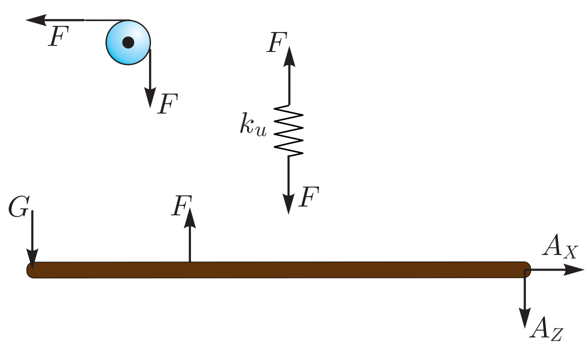
3. naloga

Prosti konec nosilca obtežimo s silo velikosti G, drugi konec pa vrtljivo podpremo. V točki B na nosilec pripnemo linearno vzmet. Ta je preko neraztegljive vrvi in škripca obtežena s horizontalno silo F, kot kaže slika. Določi velikosti sil F in G, da bo raztezek vzmeti 1 cm! Določi velikosti sil F in G tudi za poljubno prijemališče vzmeti! Lastno težo nosilca in vpliv trenja v škripcu lahko zanemariš.
Podatki: $a = 1$ m, $b = 2$ m, $k_u = 10$ kN/cm.



Rešitev: Posebej obravnavamo škripec, vzmet in nosilec. Vpliv vrvi smo nadomestili s silo F, kot kaže slika. Velikost sile F določimo iz znanega raztezka vzmeti:

$$F = k_u u = 10\,\mathrm{kN}.$$



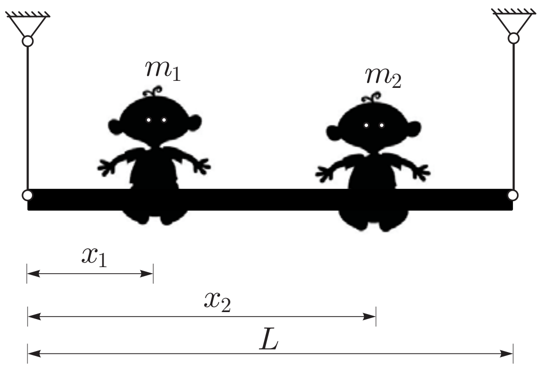
Velikost sile G mora biti tolikšna, da je nosilec v ravnotežju. Za nosilec zapišemo momentni pogoj na točko A, iz katerega dobimo izraz za poljubna razpona a in b:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad (a+b)G - bF = 0 \quad \rightarrow \quad G = \frac{b}{a+b}F.$$

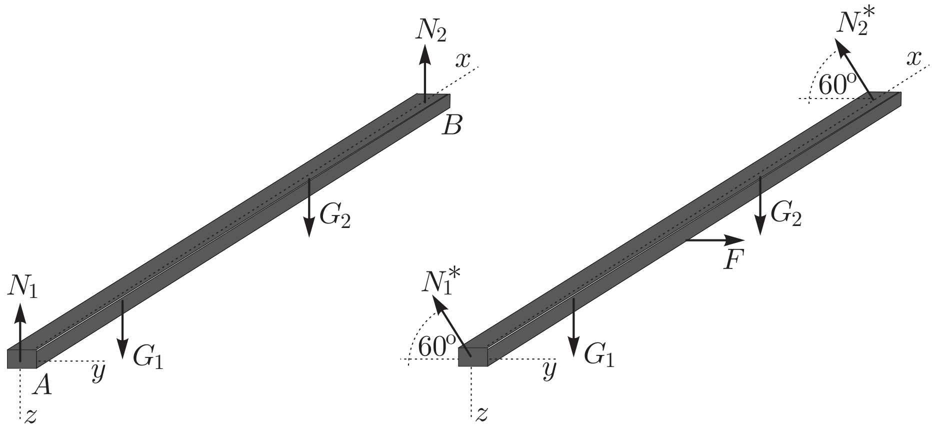
Za dane podatke velja $G = 6.67\,\mathrm{kN}$.

4. naloga

Preprosta gugalnica je obešena na dveh togih palicah. Niha lahko le pravokotno glede na svojo ravnino. Največji dovoljeni zasuk glede na navpično lego je $30°$. Na gugalnici sta dva otroka. Določi lego prvega otroka x_1 tako, da bo sila v levi palici v navpični legi enaka sili v desni palici v najbolj zavrteni legi! Dinamične vplive in maso gugalnice lahko zanemariš.
Podatki: $L = 1.5$ m, $m_1 = 50$ kg, $m_2 = 35$ kg, $x_2 = 1.1$ m.



Rešitev: Obravnavamo dve legi gugalnice, pri čemer vpliv palic in otrok nadomestimo z ustreznimi silami. Prva lega je navpična, druga pa je glede na navpično zavrtena za $30°$. Pri spreminjanju lege se osni sili v palicah spreminjata. V navpični legi smo ju označili z N_1 in N_2, v najbolj zavrteni legi pa z N_1^* in N_2^*.



Iz momentnega ravnotežnega pogoja okrog osi y glede na točko B za navpično lego sledi

$$\sum M_y^B = 0 \quad \to \quad -L\,N_1 + (L - x_1)G_1 + (L - x_2)G_2 = 0.$$

Podobno lahko zapišemo momentni ravnotežni pogoj okrog osi y glede na točko A za najbolj zavrteno lego

$$\sum M_y^A = 0 \quad \to \quad L\,N_2^* \sin 60^\circ - x_2 G_2 - x_1 G_1 = 0$$

$$\to \quad N_2^* = \frac{2}{L\sqrt{3}}\,(x_1 G_1 + x_2 G_2)\,.$$

Tako izraženo silo N_2^* samo še vstavimo namesto N_1 v prvo enačbo in določimo vrednost x_1:

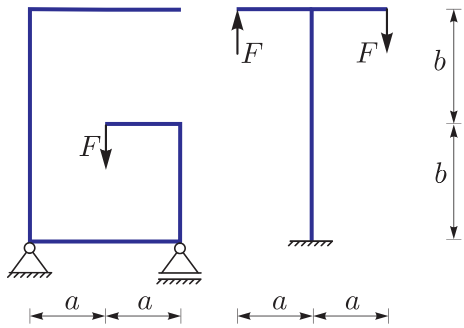
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,(x_1 G_1 + x_2 G_2) + (L - x_1)G_1 + (L - x_2)G_2 = 0$$

$$\to \quad x_1 = \frac{L\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) - \frac{G_2}{G_1} x_2 = 0.41\,\text{cm}.$$

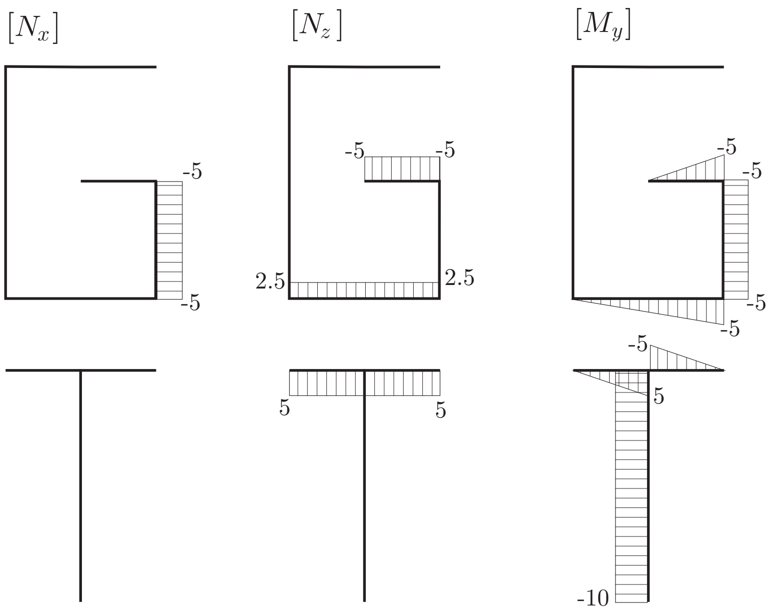
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Prva naloga predstavlja zahvalo prof. dr. Goranu Turku za dvajset let skrbnega in uspešnega vodenja tekmovanja. Za konstrukciji na sliki določi diagrame upogibnih momentov!
Podatki: $F = 5$ kN, $a = 1$ m, $b = 2$ m.

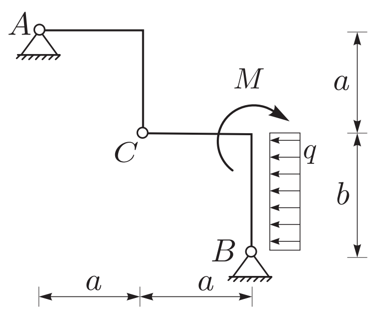


Rešitev: Konstrukciji razdelimo na posamezna polja in zaporedoma rešimo ravnotežne enažbe za vsako polje posebej. Diagrami notranih sil so:

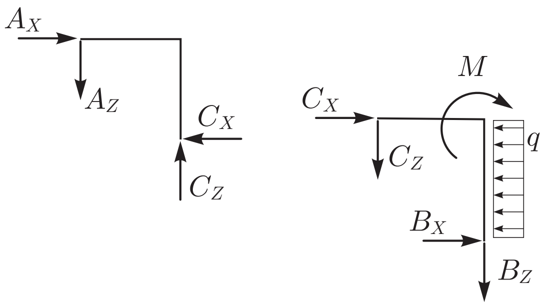


2. naloga

Konstrukcija na sliki je obtežena le na desnem delu, pri čemer moment M deluje v vogalu. Določi reakcije v obeh podporah in sile v vezi C!
Podatki: $a = 2$ m, $b = 3$ m,
$M = 5\,\mathrm{kNm}$, $q = 10\,\mathrm{kN/m}$.



Rešitev: Podpori in vez odstranimo in njihov vpliv na konstrukcijo nadomestimo z ustreznimi silami:



Rešujemo podobno, kot pri prvi nalogi predtekmovanja za tretje letnike. Ravnotežni enačbi za celotno konstrukcijo sta:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X + B_X - q\, b = 0$$
$$\sum Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Z + B_Z = 0.$$

Za levi in desni del konstrukcije pa zapišemo še momentna pogoja glede na točko C:

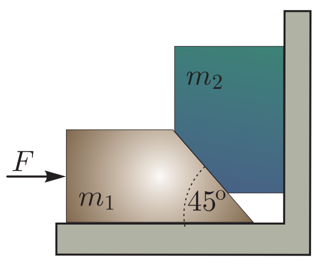
$$\sum_{\text{levi del}} M^C = 0 \qquad \rightarrow \qquad -A_X\, a + A_Z\, a = 0$$
$$\sum_{\text{desni del}} M^C = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_X\, b - B_Z\, a - M - q\, b\frac{b}{2} = 0.$$

Dobili smo sistem štirih linearnih enačb za določitev štirih neznank. Po krajšem računu dobimo $A_X = A_Z = 40\,\mathrm{kN}$, $B_X = -10\,\mathrm{kN}$ in $B_Z = -40\,\mathrm{kN}$. Sili v vezeh določimo iz ravnotežnih pogojev za levi del konstrukcije:

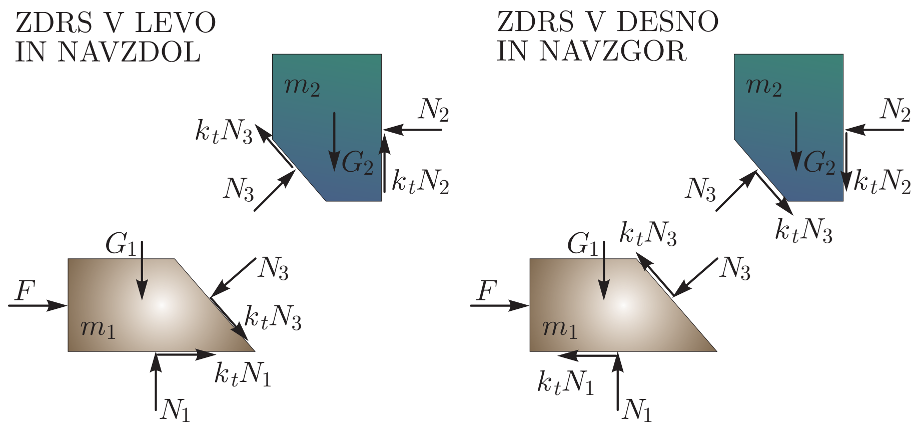
$$\sum_{\text{levi del}} X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X - C_X = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_X = 40\,\mathrm{kN}$$
$$\sum_{\text{levi del}} Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Z - C_Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_Z = 40\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Kladi na sliki z masama m_1 in m_2 se stikata na poševni ploskvi. Za katere velikosti vodoravne sile F je ta sistem v ravnotežju? Težnostni pospešek je $10\,\mathrm{m/s^2}$. Velikost klad lahko zanemariš. Koeficient trenja k_t je za vse stične ploskve enak. *Namig: kladi lahko zdrsneta v levo ali v desno!* Podatki: $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 7$ kg, $k_t = 0.1$.



Rešitev: Ločiti moramo dva primera. Kadar je sila F dovolj majhna, bo klada z maso m_1 zdrsnila v levo. Če pa je sila F dovolj velika, bo klada z maso m_2 zdrsnila v desno. Iščemo območje sil, pri katerih do zdrsa ne pride. V obeh primerih ločimo kladi, medsebojne vplive in vplive podlage pa nadomestimo z ustreznimi silami, kot kaže slika. Pri tem pazimo, da sile trenja pravilno usmerimo glede na možni smeri drsenja klad. Levi par predstavlja razmere tik pred zdrsom v levo, desni par pa razmere tik pred zdrsom v desno.



Za primer zdrsa v levo zapišemo dve ravnotežni enačbi za vsako klado posebej:

$$\sum_{\text{klada 1}} X = 0 \qquad \rightarrow \qquad F + k_tN_1 + k_tN_3\frac{\sqrt{2}}{2} - N_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum_{\text{klada 1}} Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad G_1 - N_1 + k_tN_3\frac{\sqrt{2}}{2} + N_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum_{\text{klada 2}} X = 0 \qquad \rightarrow \qquad -N_2 - k_tN_3\frac{\sqrt{2}}{2} + N_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum_{\text{klada 2}} Z = 0 \qquad \rightarrow \qquad G_2 - k_tN_2 - k_tN_3\frac{\sqrt{2}}{2} - N_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Enačbam je zadoščeno, ko je $F = 41.5\,\mathrm{N}$.

Podobno zapišemo štiri enačbe za primer zdrsa v desno

$$\sum_{\text{klada 1}} X = 0 \qquad \rightarrow \quad F - k_t N_1 - k_t N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum_{\text{klada 1}} Z = 0 \qquad \rightarrow \quad G_1 - N_1 - k_t N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum_{\text{klada 2}} X = 0 \qquad \rightarrow \quad - N_2 + k_t N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$\sum_{\text{klada 2}} Z = 0 \qquad \rightarrow \quad G_2 + k_t N_2 + k_t N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

katerih rešitev je $F = 110.4\,\mathrm{N}$.

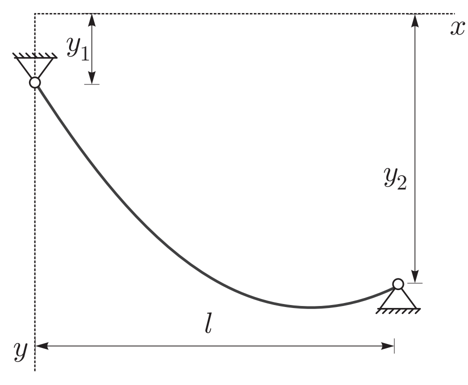
Kladi torej mirujeta, če ju podpiramo z vodoravno silo F, velikosti med 41.5 in $110.4\,\mathrm{N}$.

4. naloga

Daljnovodni vodniki so konstrukcijski elementi podobni neraztegljivim vrvem. Približno lego nepomično vrtljivo podprtega vodnika določa enačba

$$y\left(x\right) = \frac{ql}{2H}\left(x - \frac{x^2}{l}\right) + y_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + y_2\frac{x}{l},$$

kjer je q enakomerna porazdeljena obtežba, l vodoravna razdalja med podporama in H konstantna vodoravna komponenta osne sile. Za vodnik na sliki z lastno težo $q_v = 18$ N/m in silo $H_v = 14.4$ kN določi največjo obtežbo z žledom, da ne bo presežena mejna vodoravna komponenta osne sile $H_{\max} = 70$ kN.
Podatki: $y_1 = 10$ m, $y_2 = 28$ m, $l = 240$ m.



Rešitev: Za vodnik smo predpostavili, da je neraztegljiv, zato se njegova lega s povečanjem porazdeljene obtežbe ne spreminja. Za rešitev naloge tako zadošča že, če določimo lego vodnika v poljubni vmesni točki. Izberimo kar točko $l/2$:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q_v l^2}{8H_v} + \frac{y_1 + y_2}{2} = 28\,\mathrm{m}.$$

Isto lego ima vodnik tudi pri največji vodoravni komponenti osne sile:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q_{\max} l^2}{8H_{\max}} + \frac{y_1 + y_2}{2} = 28\,\mathrm{m} \quad \rightarrow \quad q_{\max} = 87.5\,\mathrm{N/m}.$$

Torej največja dovoljena obtežba z žledom znaša $87.5 - 18 = 69.5\,\mathrm{N/m}$.

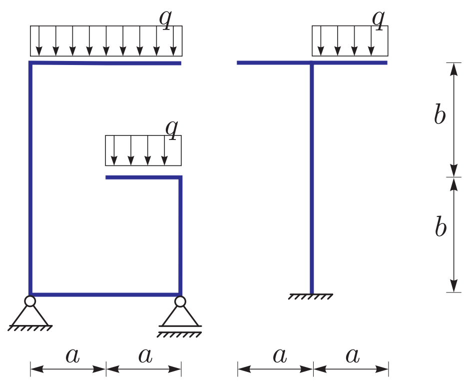
Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Ker mora oblika lege vodnika ostati enaka, mora razmerje med porazdeljeno obtežbo in vodoravno komponento osne sile q/H ostati enako. Zato je

$$q_{\max} = \frac{q_v}{H_v} H_{\max} = 87.5\,\mathrm{N/m}.$$

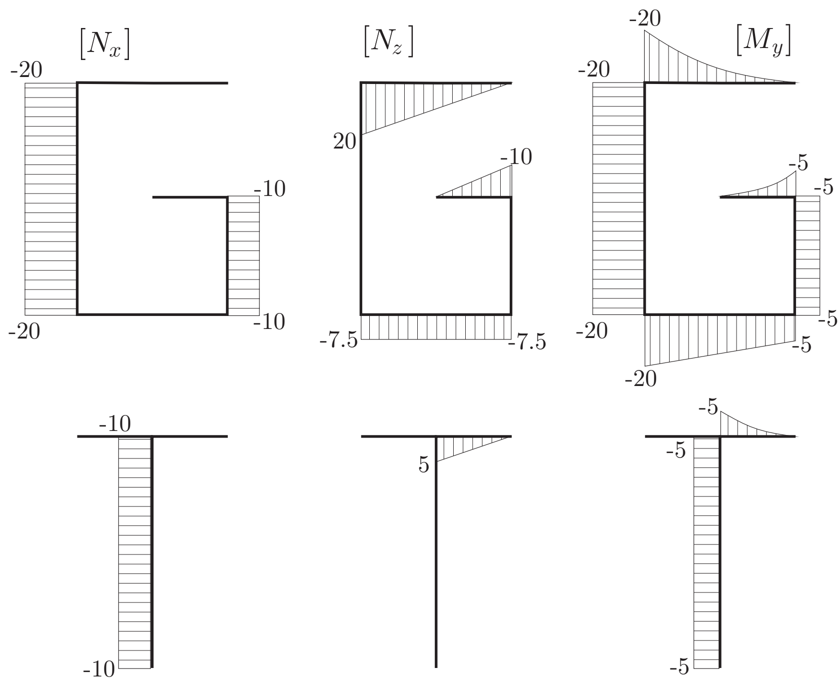
Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Prva naloga predstavlja zahvalo prof. dr. Goranu Turku za dvajset let skrbnega in uspešnega vodenja tekmovanja. Za konstrukciji na sliki določi diagrame upogibnih momentov!
Podatki: $q = 10$ kN/m, $a = 1$ m, $b = 2$ m.

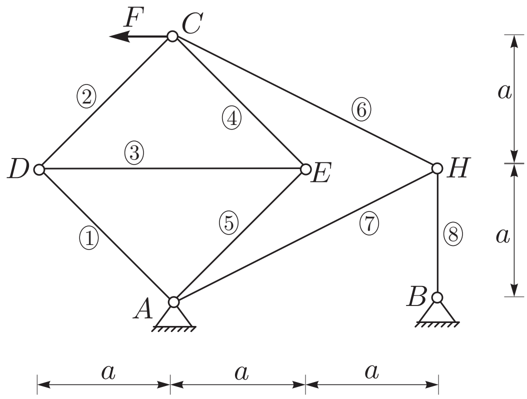


Rešitev: Konstrukciji razdelimo na posamezna polja in zaporedoma rešimo ravnotežne enačbe za vsako polje posebej. Diagrami notranjih sil so:



2. naloga

Za paličje na sliki določi reakcije podpor in osne sile v palicah!
Podatki: $a = 2$ m, $F = 10$ kN.



Rešitev: V vseh vozliščih paličja razen v vozlišču B se stikajo po tri palice. Zato naprej izrežemo vozlišče B in iz dveh ravnotežnih enačb izračunamo: $B_X = 0$ in $N_8 = B_Z$. Preostale tri neznane reakcije določimo iz ravnotežnih pogojev za celotno konstrukcijo

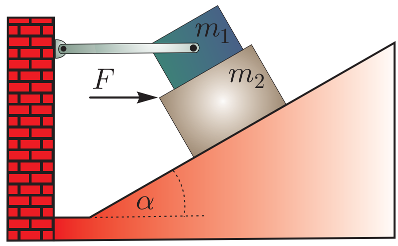
$$\begin{aligned}
&\sum X = 0 &&\rightarrow \quad A_X + B_X - F = 0 &&\rightarrow \quad A_X = 10\,\mathrm{kN}\\
&\sum M_Y^A = 0 &&\rightarrow \quad -2aB_Z + 2aF = 0 &&\rightarrow \quad B_Z = 10\,\mathrm{kN}\\
&\sum Z = 0 &&\rightarrow \quad A_Z + B_Z = 0 &&\rightarrow \quad A_Z = -10\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}$$

Nadaljujemo z izrezovanjem vozlišč po naslednjem vrstnem redu H, A in C, D ali E ter reševanjem ravnotežnih enačb. Iskane osne sile so:

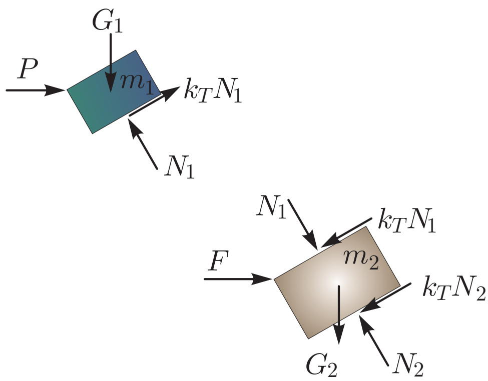
$$N_1 = N_2 = N_4 = N_5 = -3.54\,\mathrm{kN} \quad N_3 = 5\,\mathrm{kN}$$
$$N_6 = 11.18\,\mathrm{kN} \quad N_7 = -11.18\,\mathrm{kN} \quad N_8 = 10\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Kladi z masama m_1 in m_2, ki sta postavljeni ena na drugo, ležita na poševnem klancu z naklonom α. Dodatno je zgornja klada s togo palico pritrjena na steno. Med kladama ter med spodnjo klado in klancem je enak koeficient trenja $k_t = 0.2$. Določi velikost najmanjše vodoravne sile F, pri kateri bo spodnja klada zdrsnila. Maso palice in velikosti klad lahko zanemariš.
Podatki: $m_1 = m_2 = 2$ kg, $\alpha = 30°$.



Rešitev: Oglejmo si vsako klado posebej, pri čemer vplive palice in podlag ter medsebojni vpliv nadomestimo z ustreznimi silami:



Za prvo klado velja:

$$\sum_{\text{klada 1}} X = 0 \quad \rightarrow \quad P + k_T N_1 \cos 30 - N_1 \sin 30 = 0$$

$$\sum_{\text{klada 1}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad G_1 - k_t N_1 \sin 30 - N_1 \cos 30 = 0,$$

za drugo pa

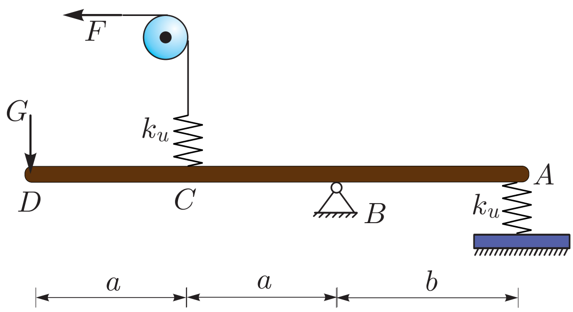
$$\sum_{\text{klada 2}} X = 0 \quad \rightarrow \quad F - k_T N_1 \cos 30 - k_T N_2 \cos 30 + N_1 \sin 30 - N_2 \sin 30 = 0$$

$$\sum_{\text{klada 2}} Z = 0 \quad \rightarrow \quad G_2 - k_t N_1 \sin 30 + k_t N_2 \sin 30 + N_1 \cos 30 - N_2 \cos 30 = 0.$$

Zapisali smo štiri linearne enačbe za določitev štirih neznanih sil. Iz druge in četrte enačbe določimo normalni sili podlage: $N_1 = 20.7\,\mathrm{N}$, $N_2 = 52.2\,\mathrm{N}$. Iz tretje enačbe potem sledi, da mora biti velikost sile F vsaj $28.4\,\mathrm{N}$, da bo prišlo do zdrsa.

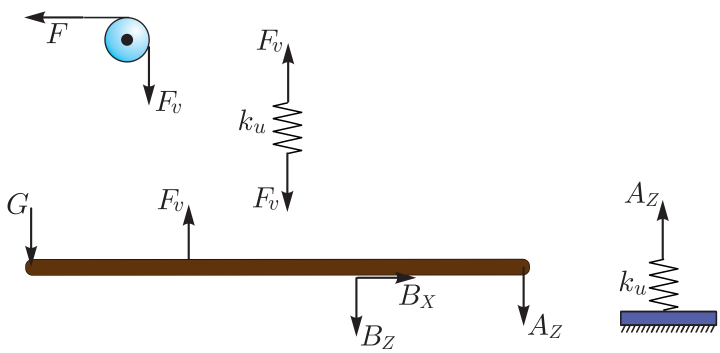
4. naloga

Na vrtljivo podprti togi nosilec sta pritrjeni še dve linearni vzmeti. Prva je preko neraztegljive vrvi in škripca obtežena z vodoravno silo velikosti F, druga pa je pritrjena na togo podlago. Določi pomike nosilca v točkah A, C in D! Lastno težo nosilca in vpliv trenja v škripcu lahko zanemariš.
Podatki: $F = 10$ kN, $G = 15$ kN, $a = 1.5$ m, $b = 2$ m, $k_u = 10$ kN/cm.



Rešitev: Sistem teles razstavimo, kot kaže slika, medsebojne vplive pa ob predpostavki majhnih zasukov opišemo z ustreznimi silami. Neznane sile določimo z reševanjem ravnotežnih enačb glede na začetno lego. Sila v vrvi F_v je enaka sili F, silo v vzmeti A_Z pa določimo iz momentnega ravnotežnega pogoja za nosilec glede na točko B:

$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad 2aG - aF_v - A_Z b = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = 15\,\mathrm{kN}.$$



Velikost sile v vzmeti v točki A določa raztezek vzmeti:

$$w_A = \frac{A_Z}{k_u} = 1.5\,\mathrm{cm}.$$

Navpična pomika v točkah C in D določimo iz zavrtene lege togega nosilca, kjer upoštevamo razmerja stranic podobnih trikotnikov:

$$w_C = \frac{w_A\, a}{b} = \frac{1.5 \cdot 150}{200} = 1.125\,\mathrm{cm}$$
$$w_D = \frac{w_A\, 2a}{b} = \frac{1.5 \cdot 300}{200} = 2.25\,\mathrm{cm}.$$