15.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 13. MAJ 2009

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

15. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Goran Turk, Dejan Zupan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 13. maj 2009

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
15. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Laserprint grafika, Ljubljana

Obseg: 25 strani

Naklada: 80 izvodov

Ljubljana, 2009

15. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2009

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali 15. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan,
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo, Celje) in
Duška Tomšič (Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola, Ljubljana).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 82 dijakinj in dijakov tretjega in 55 dijakinj in dijakov četrtega letnika. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 14.-15. aprila 2009. Petintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 13. maja 2009 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

ime in priimek	letnik	šola	mentor
Nejc Fabijan	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Simon Zupančič	3	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Luka Laznik	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Anja Rudman	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Danijel Zorec	3	SGŠ Maribor	Eva Dvorakova
Bojan Bučar	3	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Anže Češnovar	3	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Ana Drenik	3	SEŠTG Novo mesto	Peter Šterk
Matej Drobnič	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Nives Fatkić	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Gašper Jagodič	3	SŠG Celje	Lidija Jurički
Mateja Kopinšek	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Jure Leščanec	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Zdenko Mazurek	3	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Franci Pavlin	3	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Momčilo Perić	3	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Klemen Petrovič	3	SGGEŠ Ljubljana	Duška Tomšič
Miha Povše	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Andrej Žolnir	4	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Uroš Strojin	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Borut Bučar	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Mitja Črnčec	4	SGŠ Maribor	Maja Lorger
Katja Drofenik	4	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Janez Fabjan	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Matic Franko	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Rok Grah	4	SEŠTG Novo mesto	Bojan Lutman
Boštjan Komočar	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Luka Leiler	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
Peter Malenšek	4	SGLŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Biljana Rakanović	4	SŠG Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Martin Rakovnik	4	SGŠ Maribor	Maja Lorger
Sebastijan Skrbinšek	4	SGGEŠ Ljubljana	Majda Pregl
Primož Štefane	4	SSŠ Maribor	Vili Vesenjak
Aleksander Mitrović	4	SSŠ Maribor	Vili Vesenjak
Miran Zorko	4	SSŠ Maribor	Vili Vesenjak

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGEŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
SGLŠ Novo Mesto	Srednja gradbena in lesarska šola Novo mesto
SGŠ Maribor	Srednja gradbena šola Maribor
SSŠ Maribor	Srednja strojna šola Maribor
SŠG Celje	Srednja šola za gradbeništvo Celje

Sklepno tekmovanje se je začelo 13. maja 2009 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom Martina Bombača ogledali laboratorij Hidroinštituta na Hajdrihovi 28 v Ljubljani.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Rado Flajs, Nataša Šinkovec, Goran Turk, Dejan Zupan in Eva Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan FGG prof. dr. Bojan Majes. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Nejc Fabijan	SGLŠ Novo mesto	2. nagrada	43%
Simon Zupančič	SEŠTG Novo mesto	2. nagrada	43%
Luka Laznik	SŠG Celje	3. nagrada	40%
Anja Rudman	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	40%
Danijel Zorec	SGŠ Maribor	3. nagrada	40%

4. letnik			
ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
Miha Povše	SEŠTG Novo mesto	1. nagrada	67%
Andrej Žolnir	SŠG Celje	2. nagrada	59%
Uroš Strojin	SEŠTG Novo mesto	3. nagrada	55%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	14.34	8.45	4.55	15.21	42.55
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	85

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	13.72	14.36	15.00	15.13	58.21
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	90

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	18.68	7.76	1.76	5.59	33.79
najnižja ocena	10	0	0	2	15
najvišja ocena	25	15	5	12	43

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.00	12.13	3.33	6.40	36.87
najnižja ocena	0	0	0	0	7
najvišja ocena	25	25	25	14	67

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom najtežje 2. in 3. naloga pri tretjih letnikih, medtem ko so bile naloge pri četrtih letnikih zelo enakovredne, saj povprečne ocene odstopajo za manj kot dve točki. Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene bistveno slabše kot na predtekmovanju, kar kaže na to, da so bile naloge na sklepnem tekmovanju precej težje.

Zanimivo je tudi, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju je vsako nalogo pravilno rešil vsaj en dijak. Na sklepnem je izrazito izstopala 3. naloga pri tretjih letnikih, katere povprečna ocena je bila komaj 1.76 (od 25 možnih točk). Najvišja ocena pri tej nalogi je bila 5 točk, torej je nihče ni uspešno rešil. Za tekmovalce so bile težje še 2. in 4. naloga za tretje letnike ter 4. naloga za četrte letnike. Nobene od teh nalog ni pravilno rešil nihče. Boljši so bili rezultati pri četrtih letnikih, kjer je vsaj eno od prvih treh nalog povsem pravilno rešil vsaj ena tekmovalka oziroma tekmovalec.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
18	7	2	4
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
17	9	22	5

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
6	0	0	0
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
5	1	2	0

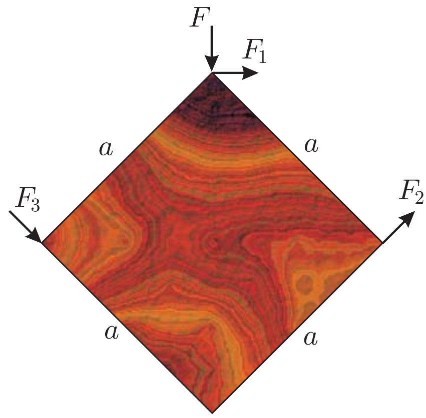
Letošnje tekmovanje sta finančno podprli:
Ministrstvo za šolstvo in šport,
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://www.km.fgg.uni-lj.si/tekma/tekma.htm`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Na togo kvadratno ploščo v ravnini deluje sila $F = 100$ N. Določi velikosti neznanih sil F_1, F_2 in F_3, da bo plošča v ravnotežju!

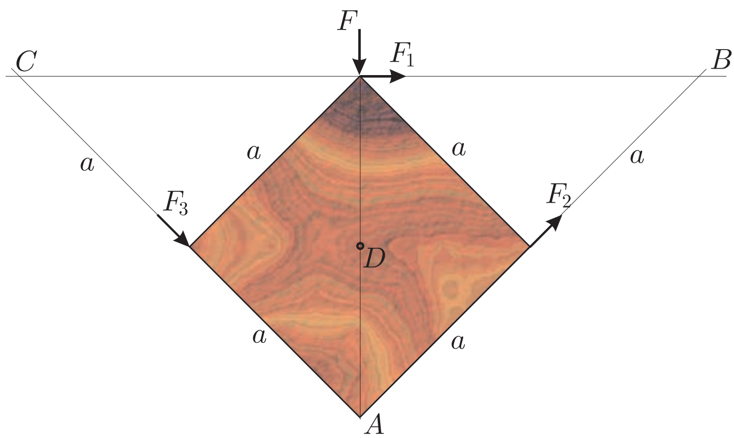


Rešitev: Zapišemo momentne ravnotežne pogoje glede na točke A, B in C (glej spodnjo sliko) in iz dobljenih enačb izračunamo neznane sile F_1, F_2 in F_3:

$$\sum M^A = 0 \qquad F_1\, a\sqrt{2} = 0 \qquad \rightarrow \quad F_1 = 0,$$

$$\sum M^B = 0 \qquad F_3\, 2a + F\, a\sqrt{2} = 0 \qquad \rightarrow \quad F_3 = -F\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sum M^C = 0 \qquad F_2\, 2a - F\, a\sqrt{2} = 0 \qquad \rightarrow \quad F_2 = F\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

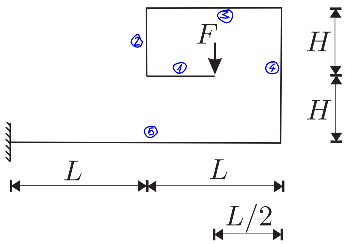


Z momentno ravnotežno enačbo glede na točko D lahko preverimo pravilnost izračunanih sil:

$$\sum M^D = 0 \qquad -F_1\, a\frac{\sqrt{2}}{2} + F_2\frac{a}{2} + F_3\frac{a}{2} = 0 \qquad 0 + F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2} = 0.$$

2. naloga

Za lomljeni previsni nosilec na sliki določi diagrame notranjih sil!
Podatki $F = 10$ N, $L = 2$ m, $H = 1$ m.



Rešitev: Nosilec razdelimo na pet polj, kakor je označeno na sliki. Za vsako polje zapišemo ravnotežna pogoja v osni in prečni smeri ter momentni ravnotežni pogoj.

Polje 1: $0 \leq \bar{x} \leq 1\,\text{m}$

$$\sum x = 0 \qquad N_x = 0,$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = F = 10\,\text{N},$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = -F\,\bar{x} \qquad (M_y(0) = 0, M_y(1) = -10\,\text{Nm}).$$

Polje 2: $0 \leq \bar{x} \leq 1\,\text{m}$

$$\sum x = 0 \qquad N_x = F = 10\,\text{N},$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = 0,$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = -F \cdot 1 = -10\,\text{Nm}.$$

Polje 3: $0 \leq \bar{x} \leq 2\,\text{m}$

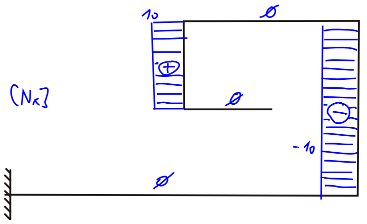
$$\sum x = 0 \qquad N_x = 0,$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = -F = -10\,\text{N},$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = -F\,(1 - \bar{x}) \qquad (M_y(0) = -10\,\text{Nm}, M_y(2) = 10\,\text{Nm}).$$

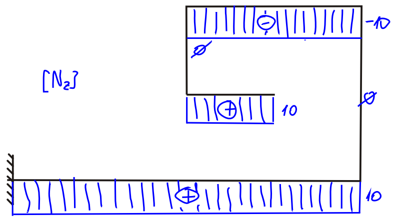
Polje 4: $0 \leq \bar{x} \leq 2\,\text{m}$

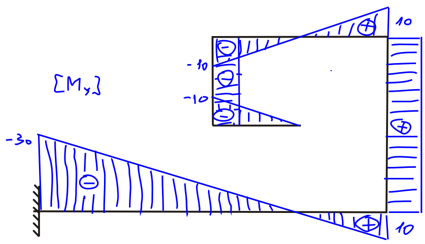
$$\sum x = 0 \qquad N_x = -F = -10\,\text{N},$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = 0,$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = F \cdot 1 = 10\,\text{Nm}.$$

Polje 5: $0 \leq \bar{x} \leq 4\,\text{m}$

$$\sum x = 0 \qquad N_x = 0,$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = F = 10\,\text{N},$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = F\,(1 - \bar{x}) \qquad (M_y(0) = 10, M_y(4) = -30\,\text{Nm}).$$

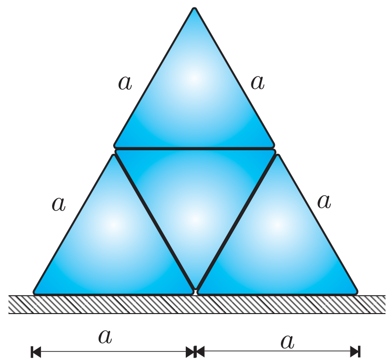

[Nx]
10
⊕
∅
∅
⊖
-10
∅


[Nz]
⊖
-10
∅
⊕
10
∅
⊕
10

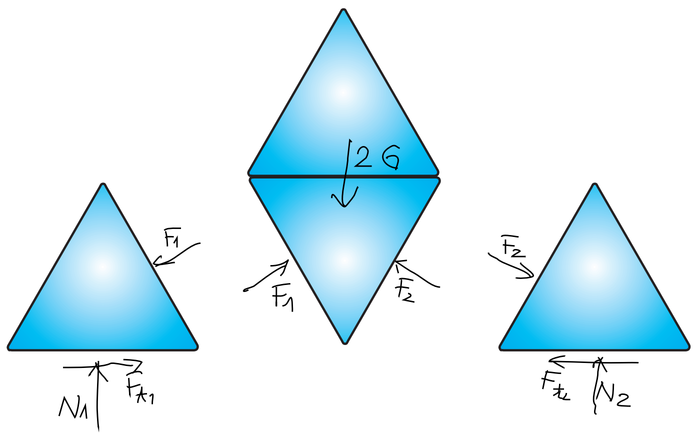

[My]
10
⊖
⊕
-10
⊖
-10
⊖
⊕
-30
⊖
⊕
10

3. naloga

Štiri enakostranične prizme s stranico a in zaobljenimi robovi so postavljene, kot je prikazano na sliki. Vse prizme imajo enako težo $G = 10$ N. Vodoravne ploskve so hrapave, poševne pa tako gladke, da lahko trenje pri izračunih zanemarimo. Določi najmanjši koeficinet lepljenja k_l med spodnjima prizmama in podlago, da se prizmi ne razmakneta!



Rešitev: Sistem štirih prizem razstavimo na tri podsisteme, kot kaže slika. Skladno s 3. Newtonovim zakonom medsebojne vplive ter vpliv podlage nadomestimo s silami. Nato za vse tri podsisteme zapišemo ravnotežne pogoje v vodoravni in navpični smeri.



Zgornji dve prizmi:

$$\sum X = 0 \qquad F_1 \cos 30 - F_2 \cos 30 = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = F_2,$$

$$\sum Y = 0 \qquad F_1 \sin 30 + F_2 \sin 30 - 2\,G = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = F_2 = 2\,G.$$

Leva prizma:

$$\sum X = 0 \qquad F_{t1} - F_1 \cos 30 = 0 \quad \rightarrow \quad F_{t1} = F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = G\sqrt{3},$$

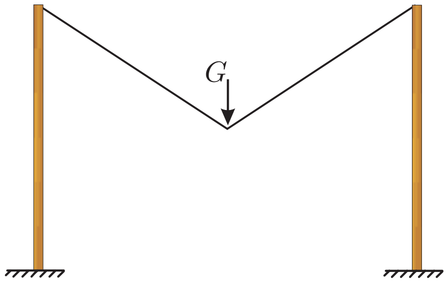
$$\sum Y = 0 \qquad N_1 - G - F_1 \sin 30 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 2\,G.$$

Iz zveze med normalno silo na podlago in silo lepljenja lahko izračunamo najmanjši koeficient lepljenja k_l, pri katerem se prizmi ne razmakneta:

$$F_{t1} = k_l\, N_1 \quad \rightarrow \quad k_l = \frac{F_{t1}}{N_1} = \frac{G\,\sqrt{3}}{2\,G} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866.$$

4. naloga

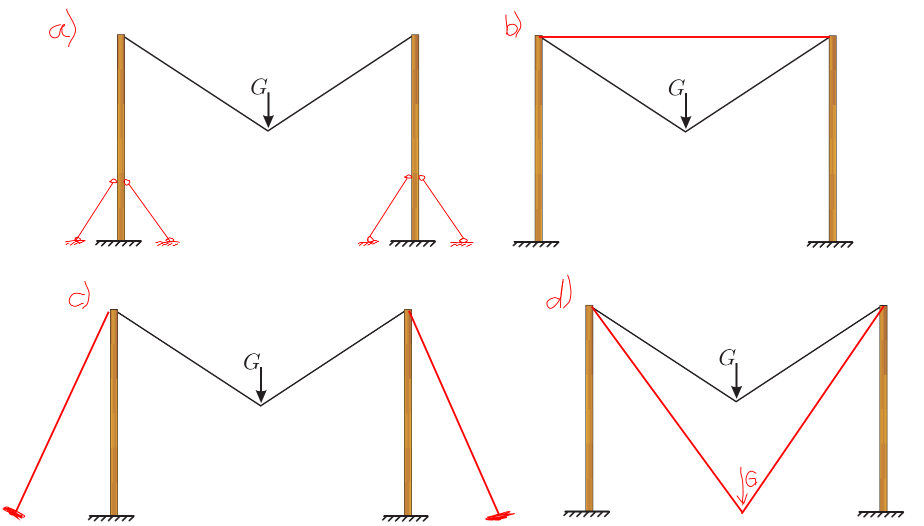
Na spodnji sliki je prikazana ležalna mreža in njen računski model. Za počivanje bi mrežo želel uporabiti človek s težo G. Žal pa bi se stebra med njegovim počivanjem porušila. Na kakšen način se lahko stebra porušita? S kakšnimi ukrepi bi preprečil porušitev stebrov? Glede na obliko porušitve opiši vsaj tri možne ukrepe in jih utemelji!



Rešitev: Stebra se lahko porušita zaradi dosežene upogibne trdnosti ob vpetišču. Stebra pa se lahko porušita tudi tako, da se zaradi osne (navpične) sile uklonita.

Možni varovalni ukrepi so:

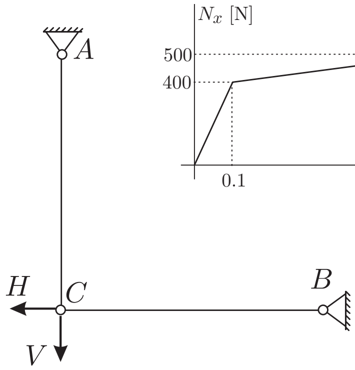
- Ojačitve stebrov, kot kaže slika (a);
- Dodatna vez, kot kaže slika (b);
- Sidranje stebrov, kot kaže slika (c);
- Daljša mreža zmanjša vodoravno obtežbo in ob ustrezni uklonski nosilnosti lahko prepreči upogibno porušitev (slika (d));
- Hujšanje uporabnika: s tem zmanjšamo obtežbo in s tem obremenitev stebrov.

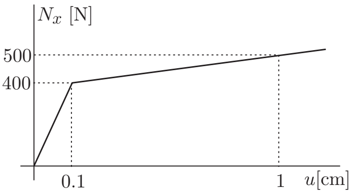


Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

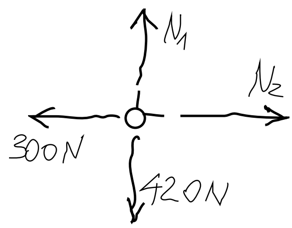
1. naloga

Palici z dolžino 1 m sta podprti in povezani, kot kaže slika. Vozlišče C je obteženo z vodoravno silo $H = 300$ N in navpično silo $V = 420$ N. Materialna lastnost palic je opisana z bi-linearnim diagramom, ki povezuje raztezek oziroma pomik konca palice u in osno silo N_x. Diagram je prikazan na sliki. Določi vodoravni in navpični pomik vozlišča C!





Rešitev: Zapišemo ravnotežne pogoje za vozlišče C:



$$\sum X = 0 \qquad N_2 - 300 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 300\,\mathrm{N},$$
$$\sum Y = 0 \qquad N_1 - 420 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 420\,\mathrm{N}.$$

Iz diagrama $N_x - u$ lahko izpeljemo izraze za povezavo med raztezkom in osno silo:

$$N_x = \frac{400}{0.1}\,u = 4000\,u \quad \rightarrow \quad u = \frac{N_x}{4000} \quad \text{za} \quad N_x \in [0, 400],$$
$$N_x = \frac{100}{0.9}(u - 0.1) + 400 =$$
$$= \frac{1000}{9}\,u + \frac{3500}{9} \quad \rightarrow \quad u = \frac{9\,N_x - 3500}{1000} \quad \text{za} \quad N_x \in [400, \infty).$$

Če v zgornja izraza vstavimo vrednosti osnih sil N_1 in N_2, dobimo iskani komponenti pomika vozlišča C

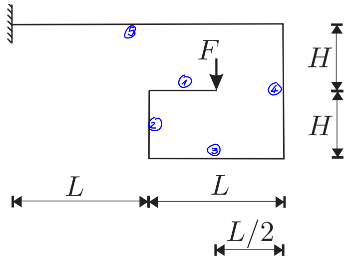
$$u_{\text{vodoravno}} = \frac{N_2}{4000} = 0.075\,\mathrm{cm},$$
$$u_{\text{navpično}} = \frac{9\,N_1 - 3500}{1000} = 0.28\,\mathrm{cm}$$

oziroma

$$\vec{u}_C = (0.075, 0.28)\,\mathrm{cm}.$$

2. naloga

Za lomljeni previsni nosilec na sliki določi diagrame notranjih sil!
Podatki $F = 10$ N, $L = 2$ m, $H = 1$ m.



Rešitev: Nosilec razdelimo na pet polj, kakor je označeno na sliki. Za vsako polje zapišemo ravnotežna pogoja v osni in prečni smeri ter momentni ravnotežni pogoj.

Polje 1: $0 \leq \bar{x} \leq 1\,\mathrm{m}$

$$\sum x = 0 \qquad N_x = 0,$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = F = 10\,\mathrm{N},$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = -F\,\bar{x} \qquad (M_y(0) = 0, M_y(1) = -10\,\mathrm{Nm}).$$

Polje 2: $0 \leq \bar{x} \leq 1\,\mathrm{m}$

$$\sum x = 0 \qquad N_x = -F = -10\,\mathrm{N},$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = 0,$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = -F \cdot 1 = -10\,\mathrm{Nm}.$$

Polje 3: $0 \leq \bar{x} \leq 2\,\mathrm{m}$

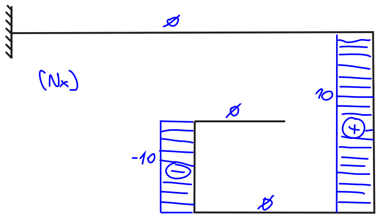
$$\sum x = 0 \qquad N_x = 0,$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = -F = -10\,\mathrm{N},$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = -F\,(1-\bar{x}) \qquad (M_y(0) = -10\,\mathrm{Nm}, M_y(2) = 10\,\mathrm{Nm}).$$

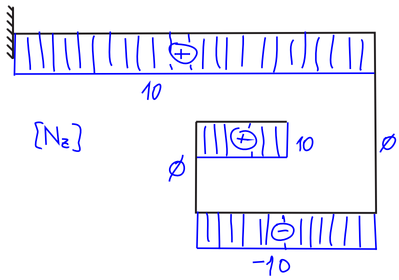
Polje 4: $0 \leq \bar{x} \leq 2\,\mathrm{m}$

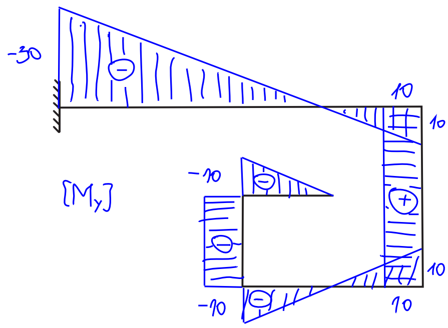
$$\sum x = 0 \qquad N_x = F = 10\,\mathrm{N},$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = 0,$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = F \cdot 1 = 10\,\mathrm{Nm}.$$

Polje 5: $0 \leq \bar{x} \leq 4\,\mathrm{m}$

$$\sum x = 0 \qquad N_x = 0,$$
$$\sum z = 0 \qquad N_z = F = 10\,\mathrm{N},$$
$$\sum M_y^T = 0 \qquad M_y = F\,(1-\bar{x}) \qquad (M_y(0) = 10, M_y(4) = -30\,\mathrm{Nm}).$$

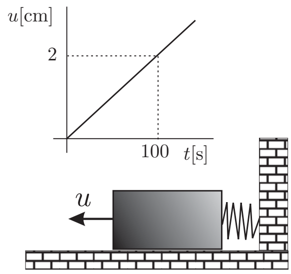

(Nx)
∅
∅
∅
10
-10
+
−

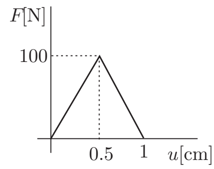

[Nz]
+
10
10
∅
∅
−
-10


[My]
-30
10
10
-10
10
10
-10
+
−

3. naloga

Klada je z nelinearno vzmetjo pripeta na togo steno. Kladi postopoma vsiljujemo pomik, pri tem pa merimo silo v vzmeti. Za dani linearni potek vsiljenih pomikov v odvisnosti od časa določi spreminjanje sile v vzmeti v odvisnosti od časa. Rezultate podaj grafično! Trenje in vztrajnostne sile lahko zanemariš.





Rešitev: Določiti moramo značilna časa t_1 in t_2, ko sila doseže največjo vrednost in ko pade nazaj na nič. Sila je največja (100 N) v trenutku, ko je pomik enak 0.5 cm. Sila v vzmeti pade na nič, ko je pomik enak 1 cm. Iz diagrama $u-t$ lahko zapišemo zvezo:

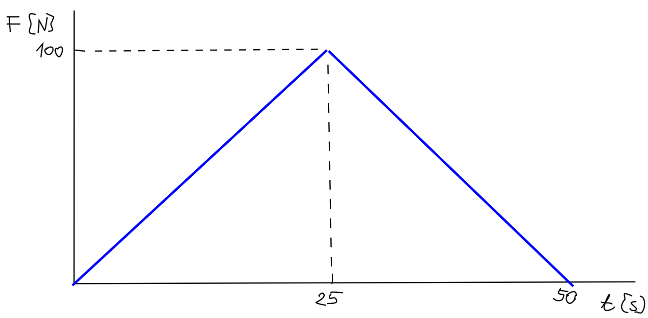
$$u(t) = \frac{2}{100}\,t = \frac{t}{50} \quad \rightarrow \quad t = 50\,u.$$

Značilna časa sta:

$$t_1 = 50 \cdot 0.5 = 25\,\mathrm{s}, \qquad t_2 = 50 \cdot 1 = 50\,\mathrm{s}.$$

Značilne točke diagrama so:

$$F(0) = 0,$$
$$F(t_1) = F(25) = 100\,\mathrm{N},$$
$$F(t_2) = F(50) = 0.$$



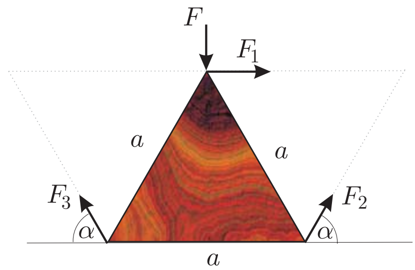
4. naloga

Glej četrto nalogo za 3. letnike!

Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

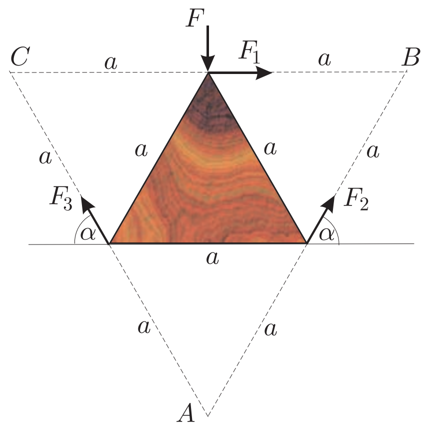
1. naloga

Na togo in breztežno pravilno tristrano prizmo v ravnini deluje sila $F = 100\,\mathrm{N}$, kot kaže slika. Neznana sila F_1 deluje v vodoravni smeri, sili F_2 in F_3 pod kotom $\alpha = 60°$. Določi velikosti neznanih sil F_1, F_2 in F_3, da bo plošča v ravnotežju.
Podatki: $a = 2\,\mathrm{m}$.



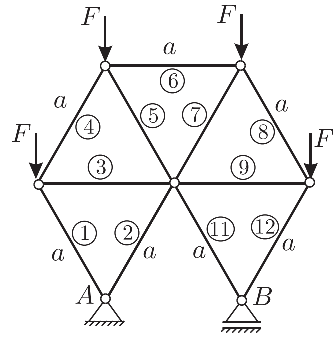
Rešitev: Zapišemo momentne ravnotežne pogoje glede na točke A, B in C (glej spodnjo sliko) in iz enačb neposredno izračunamo neznane sile F_1, F_2 in F_3:

$$
\begin{aligned}
&\sum M^A = 0 \qquad && -F_1\, 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad && \rightarrow \quad F_1 = 0,\\
&\sum M^B = 0 \qquad && -F_3\, 2\frac{a\sqrt{3}}{2} + F\,a = 0 \qquad && \rightarrow \quad F_3 = F\frac{\sqrt{3}}{3} = 57.74\,\mathrm{kN},\\
&\sum M^C = 0 \qquad && F_2\, 2\frac{a\sqrt{3}}{2} - F\,a = 0 \qquad && \rightarrow \quad F_2 = F\frac{\sqrt{3}}{3} = 57.74\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$



2. naloga

Za palično konstrukcijo v obliki pravilnega šestkotnika določi osne sile v palicah!
Podatki: $F = 5\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Izračunajmo najprej reakcije v podporah A in B:

$$\sum X = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_X = 0,$$

$$\sum M_Z^B = 0 \qquad -A_Y\,a + F\frac{3a}{2} + F\,a - F\frac{a}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_Y = 2\,F,$$

$$\sum M_Z^A = 0 \qquad B_Y\,a - F\frac{3a}{2} - F\,a + F\frac{a}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad B_Y = 2\,F.$$

Iz ravnoztežnih pogojev za posamezna vozlišča postopno izračunamo iskane sile v palicah:

$$N_1 = N_2 = N_{11} = N_{12} = -\frac{2}{\sqrt{3}}F = -5.77\,\mathrm{kN},$$

$$N_3 = N_9 = \frac{1}{\sqrt{3}}F = 2.87\,\mathrm{kN},$$

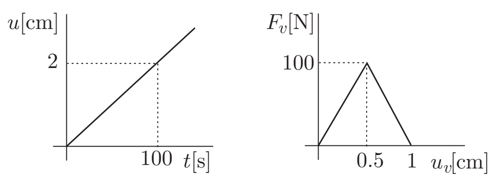
$$N_4 = N_8 = 0,$$

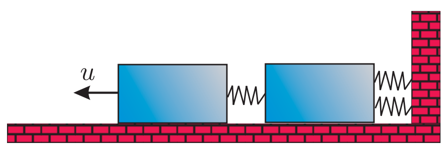
$$N_5 = N_7 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F = -5.77\,\mathrm{kN},$$

$$N_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}F = 2.87\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

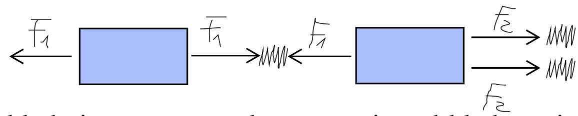
Kladi sta med seboj pripeti z nelinearno vzmetjo na steno pa druga klada z dvema nelinearnima vzmetema. Prvi kladi postopoma vsiljujemo pomik in opazujemo sile v vzmeteh. Za dani linearni potek vsiljenih pomikov v odvisnosti od časa določi spreminjanje sile v vzmeteh v odvisnosti od časa! Trenje in vztrajnostne sile lahko zanemariš!





Rešitev: Kladi ločimo, medsebojni vpliv in vpliv okolice pa določajo sile v vzmeteh. Pri tem upoštevamo, da sta sili v vzporednih vezeh enaki, saj sta mehanski lastnosti vzmeti enaki. Iz ravnotežnega pogoja za desno oziroma drugo klado ugotovimo, da je

$$F_2 = \frac{F_1}{2}.$$



Pomik leve oziroma prve klade je vsota raztezkov vzmeti med kladama in vzmetema med desno klado in steno:

$$u = u_{v1} + u_{v2}.$$

Proces premikanja klad razdelimo na več faz.

1. faza: Raztezek obeh vzmeti je manjši od 0.5 cm. Ker je sila v prvi vzmeti večja, doseže ta vzmet največjo silo prva:

$$u_{v1} = \frac{F_1}{200}, \quad u_{v2} = \frac{F_2}{200} = \frac{F_1}{400} = \frac{u_{v1}}{2} \quad \rightarrow \quad u = \frac{3u_{v1}}{2}.$$

$$u_{v1} \in [0, 0.5] \uparrow \qquad u_{v2} \in [0, 0.25] \uparrow \quad \rightarrow \quad u \in [0, 0.75]\,\mathrm{cm}.$$

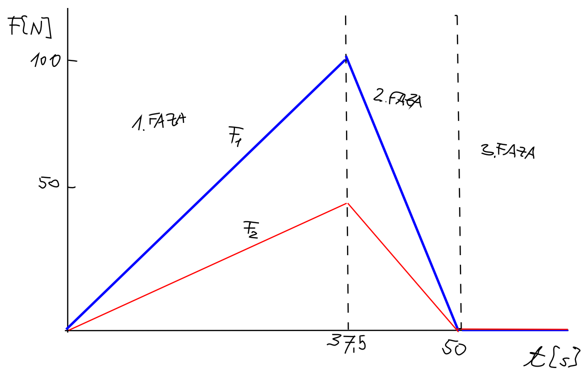
Prva faza traja do $t_1 = \frac{0.75}{2}100 = 37.5\,\mathrm{s}$. V tej fazi sile v vzmeteh narastejo od nič do največjih vrednosti; govorimo, da so vzmeti v elastičnem stanju.

2. faza: Raztezek prve vzmeti se veča, sila F_1 pa pada; govorimo, da je vzmet v fazi mehčanja. Ker sila F_1 pada, se manjša tudi sila $F_2 = F_1/2$. Ker sta drugi vzmeti še v elastičnem stanju, ko največja sila še ni bila dosežena, se z zmanjšavanjem sile zmanjšuje tudi raztezek:

$$u_{v1} \in [0.5, 1] \uparrow \qquad u_{v2} \in [0.25, 0] \downarrow \quad \rightarrow \quad u \in [0.75, 1]\,\mathrm{cm}.$$

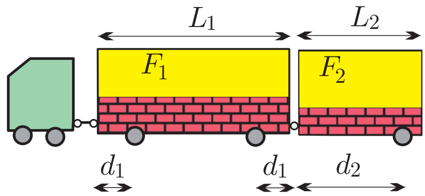
Druga faza traja do $t_1 = \frac{1}{2}100 = 50\,\mathrm{s}$. V tej fazi sile v vzmeteh padejo na nič.

3. faza: V tretji fazi so sile v vseh vzmeteh enake nič, pomik pa se zaradi raztegovanja prve vzmeti še naprej veča, medtem je raztezek drugih dveh vzmeti $u_{v2} = 0$, torej druga klada miruje.

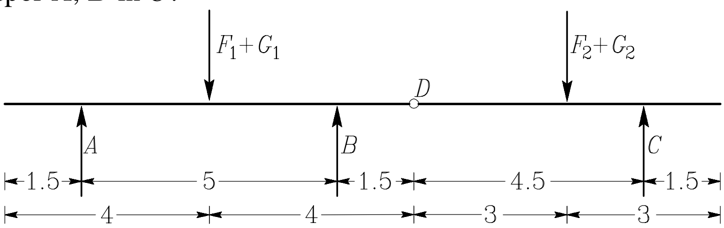


4. naloga

Na prikolici vlačilca naložimo zidake s povprečno specifično težo $\gamma = 15\,\mathrm{kN/m^3}$. Določi optimalno višino zidakov v posameznih prikolicah h_1 in h_2, pri tem pa upoštevaj, da bo obremenitev na posamezna kolesa najmanjša, količina zidakov pa enaka, kot če bi na vsako prikolico naložili do višine $h = 0.5\,\mathrm{m}$. Širina prikolic je $b = 2.5\,\mathrm{m}$, teža prve prikolice je $F_1 = 30\,\mathrm{kN}$, druge pa $F_2 = 20\,\mathrm{kN}$.
Geometrijski podatki: $L_1 = 8\,\mathrm{m}$, $L_2 = 6\,\mathrm{m}$, $d_1 = 1.5\,\mathrm{m}$, $d_2 = 4.5\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Statični model prikolic prikazujemo na spodnji sliki. Model sestavljeta dva členkasto povezana nosilca, podprta v treh oseh, ki so na sliki označene s tremi silami podpor A, B in C.



Iz momentnih ravnotežnih pogojev določimo reakcije v podporah:

$$\sum_{\text{desna stran}} M_Y^D = 0 \qquad 4.5\,C - 3\,(F_2 + G_2) = 0 \quad \rightarrow \quad C = \frac{3}{4.5}(F_2 + G_2),$$

$$\sum M_Y^B = 0 \qquad -5\,A + 2.5\,(F_1 + G_1) - 4.5\,(F_2 + G_2) + 6\,C = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{2.5}{5}\,(F_1 + G_1) - \frac{4.5}{5}\,(F_2 + G_2) + \frac{6}{5}\,C,$$

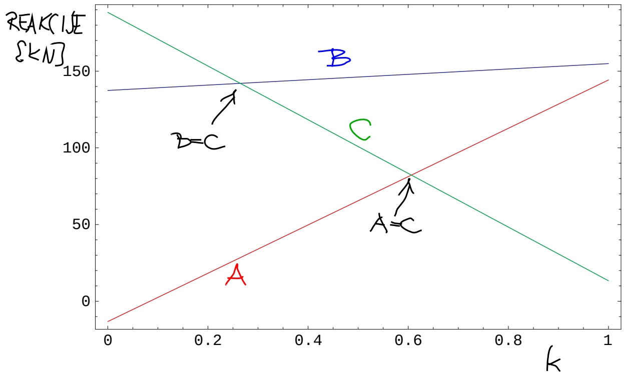
$$\sum M_Y^A = 0 \qquad 5\,B - 2.5\,(F_1 + G_1) - 9.5\,(F_2 + G_2) + 11\,C = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad B = \frac{2.5}{5}\,(F_1 + G_1) + \frac{9.5}{5}\,(F_2 + G_2) - \frac{11}{5}\,C.$$

Skupna teža zidakov je $G = \gamma\,b\,h\,(L_1 + L_2) = 15 \cdot 2.5 \cdot 0.5 \cdot 14 = 262.5\,\mathrm{kN}$. Razporedimo jo na obe prikolici: $G_1 = G\,k$ na prvo prikolico in $G_2 = G\,(1-k)$ na drugo prikolico. Naloga je, da poiščemo optimalni parameter k, ob pogoju, da je $0 \le k \le 1$. Ko zapišemo težo zidakov v odvisnosti od parametra k, izrazimo reakcije podpor s tremi linearnimi enačbami

$$A = -13.25 + 157.5\,k, \qquad B = 137.5 + 17.5\,k, \qquad C = 188.3 - 175\,k.$$

Ker želimo imeti najmanjšo obremenitev osi, moramo poiskati tisti k, pri katerem je največja izmed treh reakcij čim manjša. Iz slike vidimo, da je ta vrednost približno 0.25. V tem primeru sta reakciji v osi B in C enaki.



Računsko optimalno vrednost parametra k določimo tako, da preverimo vrednosti za $k = 0$, $k = 1$ in vse tri primere, ko sta po dve reakciji enaki:

$$
\begin{array}{llllll}
 & & k = 0 & \rightarrow & \max(A, B, C) = 188.3\,\mathrm{kN}, \\
 & & k = 1 & \rightarrow & \max(A, B, C) = 154.9\,\mathrm{kN}, \\
A = B & \rightarrow & k = 1.076 & \rightarrow & \text{ta vrednost } k \text{ ni ustrezna}, \\
A = C & \rightarrow & k = 0.606 & \rightarrow & \max(A, B, C) = 148.0\,\mathrm{kN}, \\
B = C & \rightarrow & k = 0.265 & \rightarrow & \max(A, B, C) = 142.0\,\mathrm{kN}.
\end{array}
$$

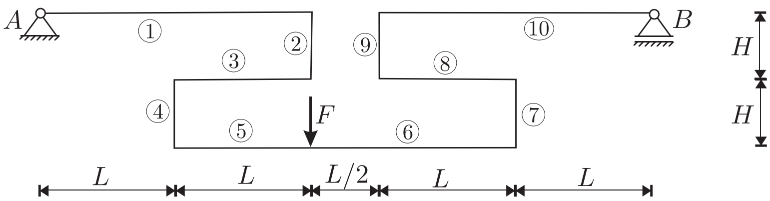
Ugotovili smo, da bi bilo zidake najbolje razporediti tako, da bi bilo na prvi prikolici $G_1 = 0.265\,G = 69.43\,\mathrm{kN}$ in na drugi pa $G_2 = (1 - 0.265)\,G = 193.07\,\mathrm{kN}$ zidakov. V tem primeru so zidaki naloženi do višin

$$
h_1 = \frac{G_1}{b\,L_1\,\gamma} = \frac{69.43}{2.5 \cdot 8 \cdot 15} = 0.23\,\mathrm{m},
$$
$$
h_2 = \frac{G_2}{b\,L_2\,\gamma} = \frac{193.07}{2.5 \cdot 6 \cdot 15} = 0.86\,\mathrm{m}.
$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Za lomljeni prostoležeče podprti nosilec na sliki določi diagrame notranjih sil.
Podatki: $F = 9\,\mathrm{kN}$, $L = 2\,\mathrm{m}$, $H = 1\,\mathrm{m}$.



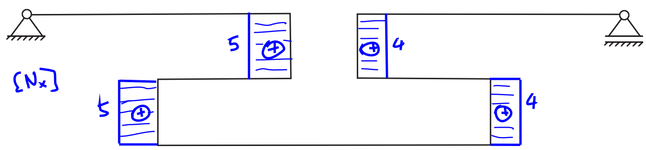
Rešitev: Iz ravnotežnih pogojev izračunamo reakcije podpor:

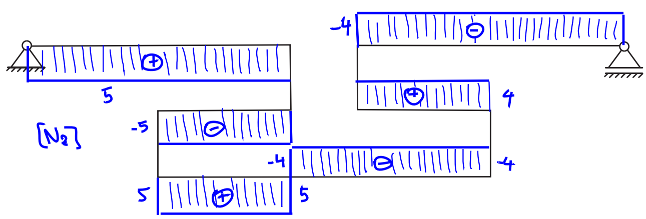
$$\sum X = 0 \qquad\qquad \rightarrow \quad A_X = 0,$$

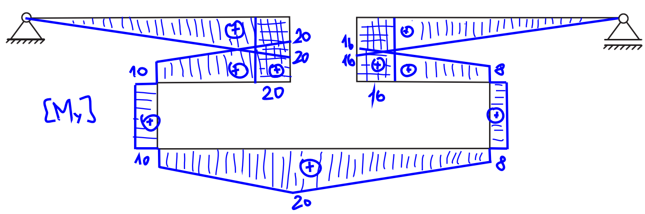
$$\sum M_Y^B = 0 \qquad A_Z\frac{9\,a}{2} - F\frac{5\,a}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{5\,F}{9} = 5\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Y^A = 0 \qquad B_Z\frac{9\,a}{2} - F\,2\,a = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -\frac{4\,F}{9} = 4\,\mathrm{kN}.$$

Lomljeni nosilec razdelimo na 10 polj, kot kaže zgornja slika. Za poljubni prerez v vsakem polju zapišemo razvnotežne enačbe in iz njih izračunamo notranje sile N_x, N_z in M_y. Rezultate prikazujemo na spodnjih diagramih.

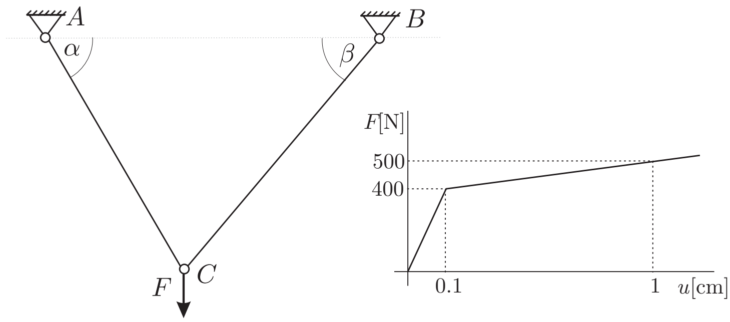






2. naloga

Palici iz bi-linearnega materiala sta podprti in povezani, kot kaže slika. Palica AC je dolga $L_1 = 1\,\mathrm{m}$, kota pa sta $\alpha = 60°$ in $\beta = 45°$. Vozlišče C obremenimo z navpično silo $F = 600\,\mathrm{N}$, Na osnovi diagrama, ki je določen s pari točk sila–raztezek palice: $(0,0)$, $(0.1\,\mathrm{cm}, 400\,\mathrm{N})$, $(1\,\mathrm{cm}, 500\,\mathrm{N})$, določi pomik točke C! Vpliv spremembe kotov v ravnotežnih enačbah lahko zanemariš!



Rešitev: Določimo višino trikotnika $ABC = h$ ter dolžino stranic $\overline{BC} = L_2$ in $\overline{AB} = L_0$:

$$h = L_1 \sin 60 = 0.866\,\mathrm{m}, \qquad L_2 = \frac{h}{\sin 45} = 1.225\,\mathrm{m},$$
$$L_0 = L_1 \cos 60 + L_2 \cos 45 = 1.366\,\mathrm{m}.$$

Iz ravnotežnega pogoja za točko C določimo osni sili N_1 in N_2 v obeh palicah:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum X = 0 & -N_1 \cos 60 + N_2 \cos 45 = 0 \\ \sum Y = 0 & N_1 \sin 60 + N_2 \sin 45 - F = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} N_1 = 439.23\,\mathrm{kN}, \\ N_2 = 310.58\,\mathrm{kN}. \end{array}$$

Sedaj lahko izračunamo raztezka obeh palic:

$$u_1 = 0.1 + 0.9\frac{N_1 - 400}{100} = 0.453\,\mathrm{cm}, \qquad u_2 = 0.1\frac{N_2}{400} = 0.0776\,\mathrm{cm}.$$

Novo lego vozlišča C določimo tako, da izračunamo novi dolžini palic AC in BC, ter s kosinusnim izrekom nov kot $\bar{\alpha}$:

$$\bar{L}_1 = L + u_1 = 1.00453\,\mathrm{m}, \qquad \bar{L}_2 = L_2 + u_2 = 1.2255\,\mathrm{m}$$

in s kosinusnim izrekom

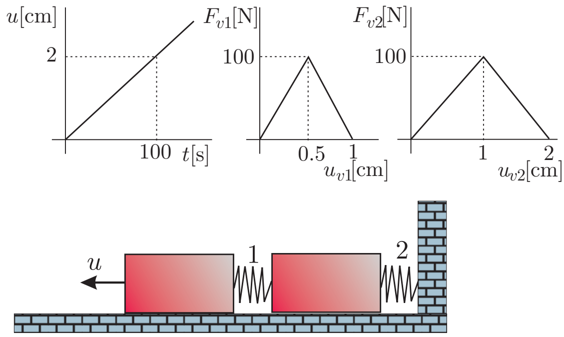
$$\bar{L}_2^2 = \bar{L}_1^2 + L_0^2 - 2\,\bar{L}_1\,L_0 \cos\bar{\alpha} \;\rightarrow\; \cos\bar{\alpha} = \frac{-\bar{L}_2^2 + \bar{L}_1^2 + L_0^2}{2\,\bar{L}_1\,L_0} \;\rightarrow\; \bar{\alpha} = 59.976°.$$

Sedaj lahko določino novo lego vozlišča C in s tem tudi komponenti vektorja pomika:

$$\bar{x}_C = \bar{L}_1 \cos\bar{\alpha} = 0.50263 \quad \rightarrow \quad u_{Cx} = \bar{x}_C - x_C = 0.263\,\mathrm{cm},$$
$$\bar{y}_C = \bar{L}_1 \sin\bar{\alpha} = 0.86974 \quad \rightarrow \quad u_{Cy} = \bar{y}_C - y_C = 0.371\,\mathrm{cm}.$$

3. naloga

Kladi sta med seboj in na togo steno pripeti z dvema različnima nelinearnima vzmetema. Prvi kladi postopoma vsiljujemo pomik in opazujemo sile v vzmeteh. Za dani linearni potek vsiljenih pomikov v odvisnosti od časa določi spreminjanje sil v obeh vzmeteh v odvisnosti od časa! Trenje in vztrajnostne sile lahko zanemariš!



Rešitev: Iz ravnotežnega pogoja za desno klado ugotovimo, da sta sili v obeh vzmeteh enaki, medtem ko je pomik u enak vsoti raztezkov obeh vzmeti:

$$F_{v1} = F_{v2}, \qquad u = u_{v1} + u_{v2}.$$

Premikanje klad opazujemo v treh fazah.

1. faza: Z večanjem pomika u se večata tudi sili v obeh vzmeteh. Ko pomik v prvi vzmeti doseže vrednost 0.5 cm, doseže v drugi vzmeti vrednost 1 cm. Sila je tedaj v obeh vzmeteh enaka 100 N.

$$u_{v1} \in [0, 0.5] \quad u_{v2} \in [0, 1] \quad \rightarrow \quad u \in [0, 1.5]\,\mathrm{cm}.$$

2. faza: Z nadaljnjim povečevanjem pomika u se manjšata sili v obeh vzmeteh, torej sta vzmeti v fazi mehčanja. Ko pomik v 1. vzmeti doseže vrednost 1 cm, doseže v drugi vzmeti vrednost 2 cm. V tem trenutku sta sili v obeh vzmeteh enaki 0:

$$u_{v1} \in [0.5, 1] \quad u_{v2} \in [1, 2] \quad \rightarrow \quad u \in [1.5, 3]\,\mathrm{cm}.$$

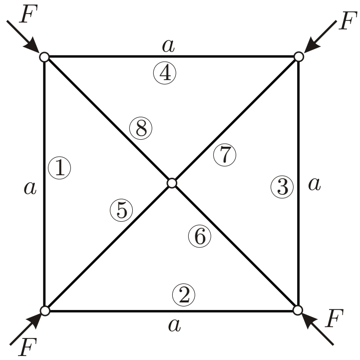
3. faza: Z dodatnim povečevanjem pomika u ostaneta sili v obeh vzmeteh enaki nič:

$$u_{v1} \in [1, \infty) \quad u_{v2} \in [2, \infty) \quad \rightarrow \quad u \in [3, \infty)\,\mathrm{cm}.$$

Pripomniti pa velja, da je tak potek raztegovanja vzmeti možen le v idealnih razmerah. Zaradi nepopolnosti obe vzmeti ne dosežeta kritične točke istočasno. Zato je lahko ena vzmet še v elastičnem stanju, druga pa je že v fazi mehčanja. Ker sta sili v obeh vzmeteh enaki, bi se pri eni vzmeti pomik začel manjšati. Nazadnje bi bil celoten pomik leve klade odvisen le od raztegovanja ene izmed vzmeti.

4. naloga

Kvadratno paličje iz linearno elastičnega materiala je obremenjeno simetrično, kot kaže slika. Določi osne sile v palicah, če veš, da je sila v palici sorazmerna skrčku palice $N_p = k_p u$, kjer je k_p togost palice! Togosti vseh palic so enake $k_p = 10^6$ kN/m. Zunanje sile so $F = 10$ kN.



Rešitev: Zaradi simetrije so sile v palicah 1, 2, 3 in 4 ter 5, 6, 7, in 8 enake:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = k_p\, u_1, \qquad N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = k_p\, u_5.$$

Simetrija paličja in obtežbe je razlog za dejstvo, da ostanejo po deformiranju konstrukcije tudi vsi koti enaki. Zato velja, da so razmerja med skrčki palic enaka razmerju med njihovimi dolžinami:

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \sqrt{2}\, u_5, \qquad u_5 = u_6 = u_7 = u_8.$$

Iz ravnotežnega pogoja za eno izmed vozlišč določimo

$$\sum X = 0 \qquad F\frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 + N_5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F\frac{\sqrt{2}}{2} + k_p\, u_2 + k_p\, u_5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F\frac{\sqrt{2}}{2} + k_p\sqrt{2}\, u_5 + k_p\, u_5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad u_5 = -\frac{F}{3\, k_p} = -3.33 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}.$$

Notranje sile v palicah so:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = k_p\, u_1 = k_p\, \sqrt{2}\, u_5 = -\frac{10\sqrt{2}}{3} = -4.71\,\mathrm{kN},$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = k_p\, u_5 = k_p\, u_5 = -\frac{10}{3} = -3.33\,\mathrm{kN}.$$