12.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 17. MAJ 2006

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

12. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Goran Turk, Dejan Zupan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 17. maj 2006

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
12. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Fotokopiranje Slatner, s.p., Ljubljana

Obseg: 23 strani

Naklada: 100 izvodov

Ljubljana, 2006

12. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2006

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali že 12. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan,
Alenka Ambrož–Jurgec (Srednja gradbena šola, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja tehniška in zdravstvena šola, Novo mesto),
Irena Posavec (Srednja tehniška šola, Celje),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja tehniška šola, Celje) in
Duška Tomšič (Srednja gradbena in ekonomska šola, Ljubljana).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 69 dijakinj in dijakov tretjega in 65 dijakinj in dijakov četrtega letnika. V sredo, 12. aprila 2006, so na srednjih šolah reševali enake predtekmovalne naloge. Štiriintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 17. maja 2006 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

letnik	ime in priimek	kraj	mentor
3	Nejc Avguštin	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
3	Mitja Beber	Maribor[6]	Vili Vesenjak
3	Niko Bezovnik	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Dušan Bregant	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Anže Egart	Ljubljana[2]	Duška Tomšič
3	Gregor Golob	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Miha Klančnik	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Maja Kobe	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Jan Kolar	Maribor[3]	Eva Dvořakova
3	Grega Kralj	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Peter Pekolj	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Beno Resnik	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Marko Virtič	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Matjaž Vrbek	Maribor[3]	Maja Lorger
3	Ambrož Zorenč	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Matic Zupančič	Novo mesto[4]	Bojan Lutman

letnik	ime in priimek	kraj	mentor
4	Andrej Anžlin	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Igor Beronja	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Rok Grabrijan	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
4	Mihael Humar	Maribor[6]	Vili Vesenjak
4	Sebastijan Jurendič	Maribor[3]	Maja Lorger
4	David Kaljun	Maribor[6]	Vili Vesenjak
4	Simon Krnc	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
4	Damir Kulanić	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
4	Denis Kunčič	Maribor[3]	Maja Lorger
4	Anja Lavrič	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Primož Murn	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Matej Panjan	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Nejc Repše	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Primož Rezar	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
4	Primož Šentveter	Maribor[3]	Goran Perahvec
4	Andrej Špehar	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
4	Gašper Tisovec	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Jan Tomšič	Ljubljana[2]	Majda Pregl

[1] Poklicna in tehniška gradbena šola Celje
[2] Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
[3] Srednja gradbena šola Maribor
[4] Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija
[5] Šolski center Novo mesto, Srednja gradbena in lesarska šola
[6] Srednja strojna šola Maribor

Sklepno tekmovanje se je začelo 17. maja 2006 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom Jureta Mlačnika ogledali Laboratorij za hidravlične raziskave.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Tomaž Hozjan, Simon Schnabl, Goran Turk, Eva Zupan in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan FGG izr. prof. dr. Bojan Majes. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**kraj**	**nagrada**	**točke**
Dušan Bregant	Novo mesto	1. nagrada	59%
Nejc Avguštin	Novo mesto	2. nagrada	44%
Matic Zupančič	Novo mesto	3. nagrada	35%

4. letnik			
ime in priimek	**kraj**	**nagrada**	**točke**
Nejc Repše	Novo mesto	1. nagrada	90%
Matej Panjan	Novo mesto	2. nagrada	85%
Rok Grabrijan	Novo mesto	2. nagrada	85%
Andrej Anžlin	Novo mesto	3. nagrada	80%
Anja Lavrič	Novo mesto	3. nagrada	80%
Primož Rezar	Celje	3. nagrada	80%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

Povprečna ocena na predtekmovanju (32.27% za tretje letnike in 27.00% za četrte) je bila nekoliko nižja kot lani, ko je bilo povprečje za tretje letnike 34.52%, za četrte pa 33.59%. Ocena, potrebna za uvrstitev na sklepno tekmovanje, je bila za v obeh letnikih 45% ali več.

Na sklepnem tekmovanju je bila povprečna ocena za tretje letnike bistveno nižja (24.13%) kot lani, medtem ko je bila v četrtih letnikih višja (60.29%) (lani v tretjih letnikih 46.43%, v četrtih pa 51.25%). Izrazito visoka je bila povprečna ocena v četrtih letnikih, pri katerih je presegla 60%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	12.05	5.45	8.98	5.80	32.27
najnižja ocena	0	0	0	0	5
najvišja ocena	25	25	25	25	85

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	10.46	7.12	5.00	4.42	27.00
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	20	65

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	7.19	4.38	6.94	5.63	24.13
najnižja ocena	0	0	0	0	7
najvišja ocena	20	25	20	25	59

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	13.53	20.29	12.65	13.82	60.29
najnižja ocena	0	0	0	0	15
najvišja ocena	25	25	25	25	90

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakinjam in dijakom najtežje 2. in 4. naloga pri tretjih letnikih ter 3. in 4. naloga pri četrtih. Na sklepnem tekmovanju so bile dijakinjam in dijakom tretjih letnikov vse naloge pretežke, medtem ko so dijakinje in dijaki četrtih letnikov vse naloge relativno dobro reševali.

Zanimivo je tudi, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Na predtekmovanju je skoraj vsako nalogo pravilno rešil vsaj en dijak. Izjema je bila le 4. naloga pri četrtih letnikih, ki je bila v resnici nekoliko prezahtevna za srednješolski nivo matematičnega znanja. Na sklepnem tekmovanju je bila očitna razlika v uspešnosti med tretjim in četrtim letnikom. Medtem, ko sta pri četrtih letnikih vsako nalogo pravilno rešila vsaj dva dijaka, 2. nalogo pa je pravilno rešila več kot polovica dijakov, sta bili pri tretjih letnikih po enkrat pravilno rešeni le dve nalogi.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
6	3	11	2
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
9	1	1	0
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0	1	0	1
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
4	11	2	4

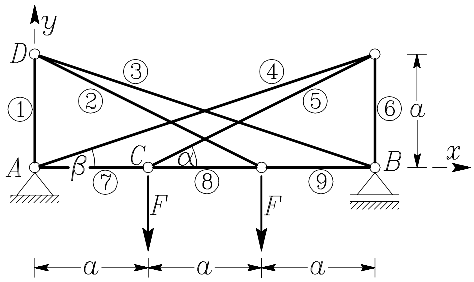
Letošnje tekmovanje sta finančno podprli:
Slovensko društvo za mehaniko,
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://www.km.fgg.uni-lj.si/tekma/tekma.htm`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Določi osne sile v prikazanem paličju! Velikost sile $F = 10\,\mathrm{kN}$, dolžina a pa je $2\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Reakcije paličja izračunamo iz ravnotežnih enačb za celotno konstrukcijo

$$\sum M_Z^B = 0 \quad \rightarrow \quad -A_y\,3a + F\,2a + F\,a = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = F = 10\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Z^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_y\,3a - F\,2a - F\,a = 0 \quad \rightarrow \quad B_y = F = 10\,\mathrm{kN},$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = 0.$$

Zaradi simetrije konstrukcije in obtežbe lahko zaključimo, da so osne sile v določenih palicah enake:

$$N_1 = N_6, \qquad N_2 = N_5, \qquad N_3 = N_4, \qquad N_7 = N_9.$$

Za izračun osnih sil v palicah moramo poznati še velikosti kotov α in β:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} = 26.56^\circ,$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \beta = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} = 18.44^\circ.$$

Iz ravnotežnih enačb za posamezna vozlišča paličja postopoma izračunamo vse neznane osne sile v palicah:

$$\sum_{\text{voz. } C} Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_5\,\sin\alpha - F = 0 \quad \rightarrow \quad N_5 = N_2 = 22.36\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{voz. } D} X = 0 \quad \rightarrow \quad N_2\,\cos\alpha + N_3\,\cos\beta = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = N_4 = -21.08\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{voz. } D} Y = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 - N_2\,\sin\alpha - N_3\,\sin\beta = 0$$

$$\rightarrow \quad N_1 = N_6 = -3.33\,\mathrm{kN},$$

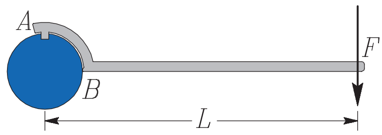
$$\sum_{\text{voz. } A} X = 0 \quad \rightarrow \quad A_x + N_4\,\cos\beta + N_7 = 0$$

$$\rightarrow \quad N_7 = N_9 = 20.00\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{\text{voz. } C} X = 0 \quad \rightarrow \quad N_8 - N_7 + N_5\,\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad N_8 = 0.$$

2. naloga

Določi velikost in smer dveh sil $\vec{A}$ in $\vec{B}$, s katerima ključ zaradi sile $F = 0.3\,\mathrm{kN}$ deluje na vijak! Premer vijaka je $\phi = 18\,\mathrm{mm}$. Upoštevaj, da v točki B ni trenja.
$L = 15\,\mathrm{cm}$.



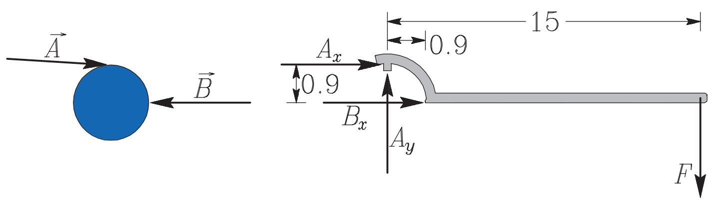
Rešitev: Sistem dveh togih teles (ključ in vijak) ločimo. Na stiku v točkah A in B njun medsebojni vpliv nadomestimo s silama $\vec{A}$ in $\vec{B}$. Ker v točki B ni trenja, medsebojni vpliv med ključem in vijakom predstavlja le normalna sila na površino vijaka – v tem primeru je to vodoravna sila $\vec{B} = B_x\,\vec{e}_x$. V točki A ima sila poljubno smer.

Iz ravnotežnih pogojev za ključ določimo neznane sile:

$$\sum M_Z^A = 0 \quad \to \quad B_x\,0.9 - F\,15 = 0 \quad \to \quad B_x = \frac{F\,15}{0.9} = 5\,\mathrm{kN},$$

$$\sum X = 0 \quad \to \quad A_x + B_x = 0 \quad \to \quad A_x = -B_x = -5\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Y = 0 \quad \to \quad A_y - F = 0 \quad \to \quad A_y = F = 0.3\,\mathrm{kN}.$$



Določimo lahko še velikost in smer sile $\vec{A}$:

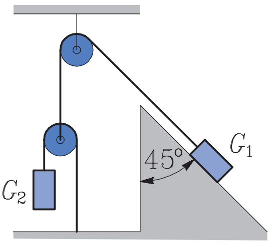
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 5.009\,\mathrm{kN},$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{A_y}{A_x} = 3.43^\circ.$$

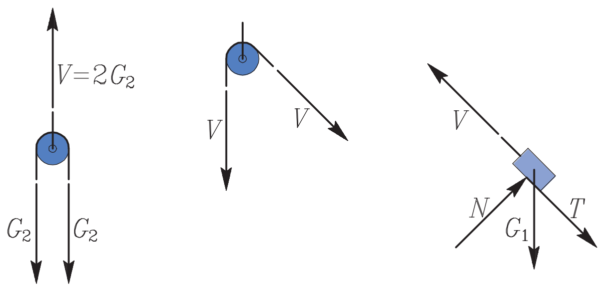
Na vijak delujeta dve sili: sila $\vec{A}$ z velikostjo $5.009\,\mathrm{kN}$ pod kotom 3.43° glede na vodoravnico in vodoravna sila $\vec{B}$ velikosti $5\,\mathrm{kN}$.

3. naloga

Ugotovi, kolikšen najmanj mora biti koeficient trenja med kvadrom G_1 in poševno podlago, da bo sistem miroval! Upoštevaj, da sta škripca in vrv breztežna.
$G_1 = 1\,\mathrm{kN}$,
$G_2 = 0.4\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Mehanski sistem dveh škripcev, vrvi in bremen ločimo na tri dele. V računu predpostavimo, da so škripci in vrvi brez teže. Upoštevamo tudi, da v ležajih škripca ni trenja. V tem primeru je sila v vrvi na eni strani škripca enaka sili v vrvi na drugi strani.



Iz ravnotežne enačbe v navpični smeri za levi škripec lahko hitro ugotovimo velikost sile V v vrvi:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad G_2 + G_2 - V = 0 \quad \rightarrow \quad V = 2G_2 = 0.8\,\mathrm{kN}.$$

Zapišimo še ravnotežne pogoje za breme G_1 v smereh vzdolž klanca in pravokotno na klanec:

$$\sum F_{\|} = 0 \quad \rightarrow \quad V - T - G_1 \cos 45^\circ = 0 \quad \rightarrow \quad T = V - G_1 \cos 45^\circ,$$
$$\sum F_{\perp} = 0 \quad \rightarrow \quad N - G_1 \sin 45^\circ = 0 \quad \rightarrow \quad N = G_1 \sin 45^\circ,$$

Sedaj zapišemo še zvezo med normalno silo in silo trenja

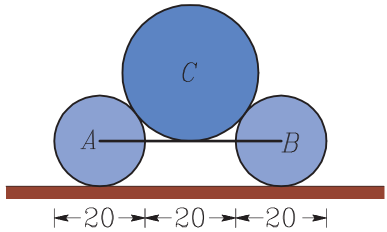
$$T = N\, k_t,$$

kjer smo s k_t označili koeficient trenja. Če v zadnjo enačbo vključimo še rezultate ravnotežnih pogojev za levi škripec in breme G_1, dobimo

$$2\,G_2 - G_1 \cos 45^\circ = G_1 \sin 45^\circ\, k_t \quad \rightarrow \quad k_t = \frac{2\,G_2 - G_1 \cos 45^\circ}{G_1 \sin 45^\circ} = 0.1314.$$

4. naloga

Trije hlodi dolžine $L = 6\,\mathrm{m}$ so položeni na ravno podlago tako, kot je prikazano na sliki. Da se spodnja hloda ne bi odkotalila, smo ju na obeh koncih pritrdili z vrvema, ki sta na hloda pripeta v točkah A in B. Polmer manjših dveh hlodov je $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$, polmer zgornjega pa je $r_2 = 15\,\mathrm{cm}$.



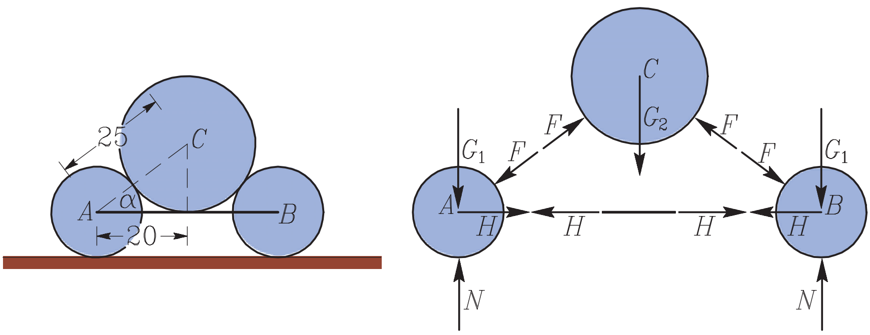
Določi silo v vrveh, če je specifična teža lesa $\gamma_l = 6\,\mathrm{kN/m^3}$! Upoštevaj, da med hlodi ter hlodoma in podlago ni trenja.

Rešitev: Na obeh koncih hlodov sta privezani enaki vrvi, zato izračunamo le polovico teže zgornjega hloda

$$G_2 = \gamma_l\,\pi\,r_2^2\,L/2 = 1.27\,\mathrm{kN}.$$

Hlode ločimo in medsebojni vpliv nadomestimo s silami, kot je prikazano na spodnji sliki. Ker med hlodi ni trenja, so smernice sil med hlodi pravokotne na ploskev in torej potekajo skozi središča krožnic. Kot α izračunamo po enačbi

$$\cos\alpha = \frac{20}{25} = 0.8 \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos 0.8 = 36.87^\circ.$$



Zaradi simetrije smo predpostavili enake sile F in H na levem in desnem hlodu. Zapišemo ravnotežni enačbi za hlod C in hlod A:

$$\sum_C Y = 0 \quad \rightarrow \quad 2F\sin\alpha - G_2 = 0 \quad \rightarrow \quad F = \frac{G_2}{2\sin\alpha} = 1.06\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_A X = 0 \quad \rightarrow \quad H - F\cos\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad H = F\cos\alpha = 0.848\,\mathrm{kN}.$$

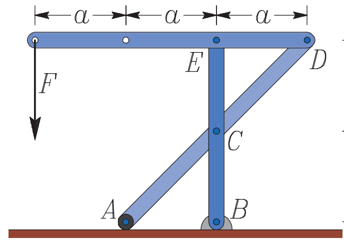
Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Glej prvo nalogo za 3. letnike!

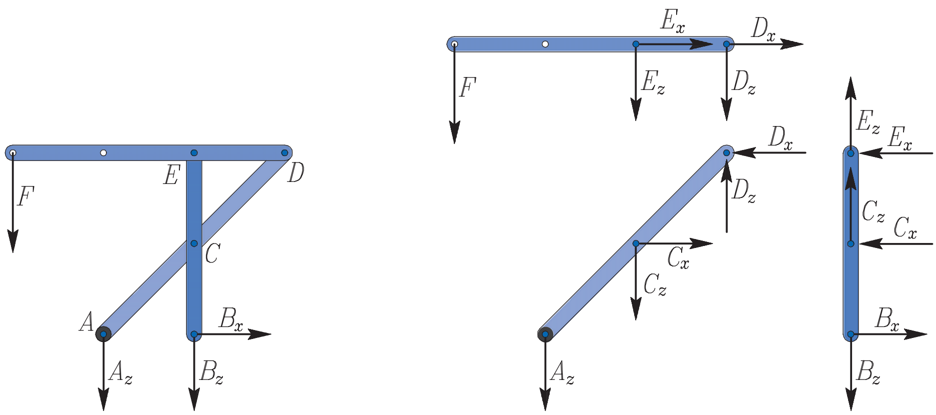
2. naloga

Konstrukcija na sliki je nepomično členkasto podprta v točki B, v točki A pa se lahko premika le v vodoravni smeri. Določi strižne sile v členkih C, D in E, ki jih morajo prevzeti te vezi!
$a = 1\,\mathrm{m}$,
$F = 2\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Iz ravnotežnih enačb za celotno konstrukcijo (levi del spodnje slike) določimo reakcije podpor:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0,$$
$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad F\,a - B_z\,a = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = F = 2\,\mathrm{kN},$$
$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z + B_z + F = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -F - B_z = -4\,\mathrm{kN}.$$



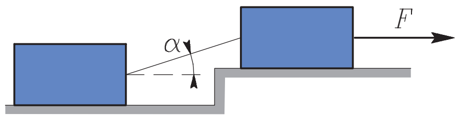
V nadaljevanju posamezna toga telesa ločimo in njihov medsebojni vpliv nadomestimo s silami v točkah C, D in E (desni del zgornje slike). Iz ravnotežnih enačb za dele konstrukcije lahko izračunamo sile v vezeh:

$$\sum_{BE} M_Y^E = 0 \quad \rightarrow \quad -\,C_x\,a = 0 \quad \rightarrow \quad C_x = 0,$$
$$\sum_{AD} X = 0 \quad \rightarrow \quad C_x - D_x = 0 \quad \rightarrow \quad D_x = 0,$$
$$\sum_{BE} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad E_x\,a = 0 \quad \rightarrow \quad E_x = 0,$$

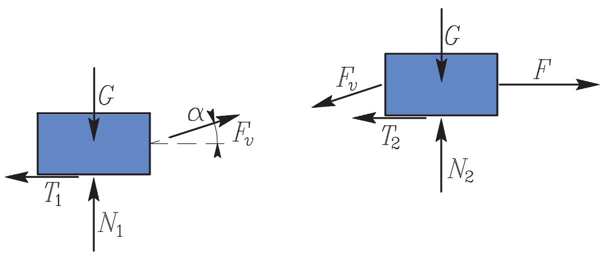
$$\sum_{AD} M_Y^D = 0 \quad \rightarrow \quad C_z\, a + A_z\, 2a = 0 \quad \rightarrow \quad C_z = -2\, A_z = 8\,\mathrm{kN},$$
$$\sum_{AD} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad D_z\, a + A_z\, a = 0 \quad \rightarrow \quad D_z = -A_z = 4\,\mathrm{kN},$$
$$\sum_{BE} Z = 0 \quad \rightarrow \quad B_z - C_z - E_z = 0 \quad \rightarrow \quad E_z = B_z - C_z = -6\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Z vodoravno silo F vlečemo dve z vrvjo povezani kladi, kot je prikazano na sliki. Podlaga na spodnji stopnici je bolj hrapava kot na zgornji stopnici: $k_{t,\text{spodaj}} = 0.5$, $k_{t,\text{zgoraj}} = 0.25$. Določi zvezo med kotom α in silo F, ki je potrebna, da lahko vlečemo kladi! Izračunaj silo F za tri izbrane vrednosti kota α in nariši graf odvisnosti $F(\alpha)$! Teža klade je $10\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Na spodnji sliki sta prikazani obe kladi in vse sile, ki na njiju delujejo.



Iz ravnotežnih pogojev in enačb trenja za obe kladi

$$\sum_{\text{spodaj}} X = 0 \quad \rightarrow \quad F_v\, \cos\alpha - T_1 = 0,$$
$$\sum_{\text{spodaj}} Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 - G + F_v\, \sin\alpha = 0,$$
$$\sum_{\text{zgoraj}} X = 0 \quad \rightarrow \quad F - F_v\, \cos\alpha - T_2 = 0,$$
$$\sum_{\text{zgoraj}} Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 - G - F_v\, \sin\alpha = 0,$$

$$T_1 = k_{t,\text{spodaj}}\, N_1,$$
$$T_2 = k_{t,\text{zgoraj}}\, N_2,$$

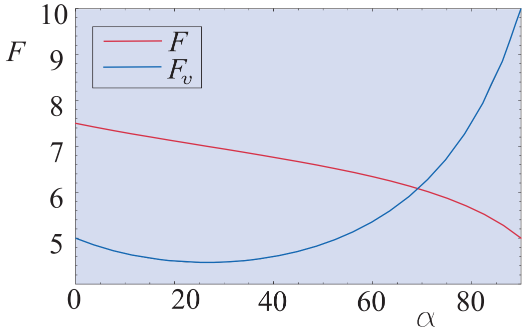
lahko določimo vse neznane sile v odvisnosti od kota α

$$
\begin{aligned}
F_v &= G \frac{k_{t,\text{spodaj}}}{\cos\alpha + k_{t,\text{spodaj}}\ \sin\alpha},\\
N_1 &= G \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + k_{t,\text{spodaj}}\ \sin\alpha},\\
N_2 &= G \frac{\cos\alpha + 2\,k_{t,\text{spodaj}}\ \sin\alpha}{\cos\alpha + k_{t,\text{spodaj}}\ \sin\alpha},\\
F &= G \frac{k_{t,\text{spodaj}}\ \cos\alpha + k_{t,\text{zgoraj}}\ \cos\alpha + 2\,k_{t,\text{spodaj}}\,k_{t,\text{zgoraj}}\ \sin\alpha}{\cos\alpha + k_{t,\text{spodaj}}\ \sin\alpha}.
\end{aligned}
$$

Z uporabo zgornjih enačb lahko izračunamo neznane sile v odvisnosti od kota α. Rezultate prikazujemo v naslednji preglednici.

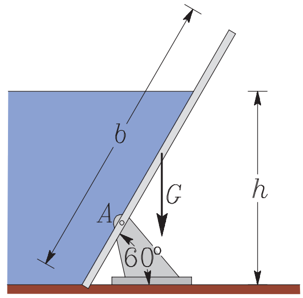
α	F_v [kN]	N_1 [kN]	N_2 [kN]	F [kN]
0	5.000	10.000	10.000	7.500
10	4.666	9.190	10.810	7.297
20	4.502	8.460	11.540	7.115
30	4.480	7.760	12.240	6.940
40	4.598	7.044	12.956	6.761
50	4.874	6.266	13.734	6.567
60	5.359	5.359	14.641	6.340
70	6.159	4.213	15.787	6.053
80	7.507	2.607	17.393	5.652
90	10.000	0.000	20.000	5.000

Zanimivo je spreminjanje sile F in sile v vrvi F_v v odvisnosti od kota α. Vidimo, da sila F pada z večanjem kota α. Za vodravno vrv je sila enaka $7.5\,\text{kN}$, za navpično pa $5\,\text{kN}$. Sila v vrvi F_v z večanjem kota α najprej pada, pri kotu $\alpha \approx 25^\circ$ doseže najmanjšo vrednost in nato narašča do vrednosti $10\,\text{kN}$, ki jo doseže za navpično lego vrvi.



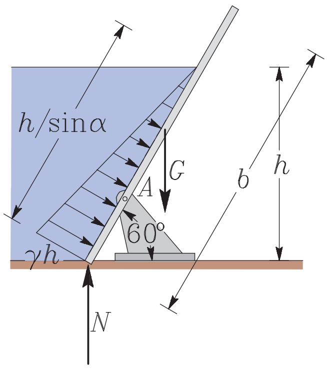
4. naloga

Določi kritično višino vode $h_{\max}$ pri samodejni zapornici, ki jo prikazuje slika! Premični del zapornice z dolžino $b = 1.2\,\mathrm{m}$ je v točki A členkasto pritrjen na nepomično podporo. Lega točke A je na četrtini premičnega dela zapornice. Zapornica je široka $d = 1\,\mathrm{m}$, premični del pa tehta $G = 0.5\,\mathrm{kN}$. Pri računu upoštevaj, da je specifična teža vode enaka $10\,\mathrm{kN/m^3}$.



Prikazana zapornica ima veliko pomanjkljivost: odpre se tudi v primeru, ko je voda zelo nizka pri $h_{\min}$. Določi tudi to višino in poskusi podati navodila, kako bi to pomanjkljivost odpravil.

Rešitev: Na sliki prikazujemo zapornico in vse obtežbe, ki nanjo delujejo.



Zapišimo momentni ravnotežni pogoj glede na točko A

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad G\,\cos 60\,\frac{b}{4} - N\,\cos 60\,\frac{b}{4} - \gamma\,h\frac{h\,d}{\sin 60}\left(\frac{1}{3}\frac{h}{\sin 60} - \frac{b}{4}\right) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -h^3\frac{\gamma d}{3\,\sin^2 60} + h^2\frac{\gamma\,d\,b}{4\,\sin 60} + \frac{G\,b\,\cos 60}{4} = N\,\cos 60\,\frac{b}{4}.$$

Kritične višine vode h so tiste, ko je sila podlage N enaka nič. Poiskati moramo ničle kubičnega polinoma:

$$-\,h^3\frac{\gamma d}{3\,\sin^2 60} + h^2\frac{\gamma\,d\,b}{4\,\sin 60} + \frac{G\,b\,\cos 60}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} h_{\max} &= 0.749\,\mathrm{m},\\ h_{\min} &= 0.166\,\mathrm{m},\\ h_{\mathrm{neg}} &= -0.136\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

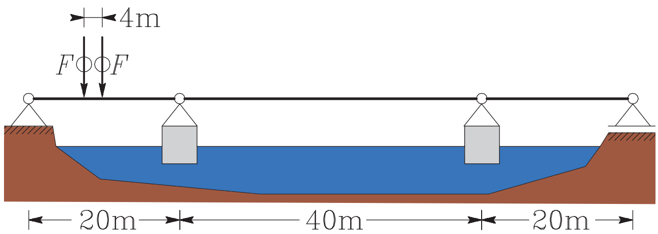
Rešitev $h_{\max} = 0.749\,\mathrm{m}$ ustreza trenutku, ko postane vode preveč in se zapornica odpre, vrednost $h_{\min} = 0.166\,\mathrm{m}$ ustreza trenutku, ko je voda nizka in se zapornica odpre, čeprav tega ne želimo. Negativna vrednost $h_{\mathrm{neg}} = -0.136\,\mathrm{m}$ nima fizikalnega pomena.

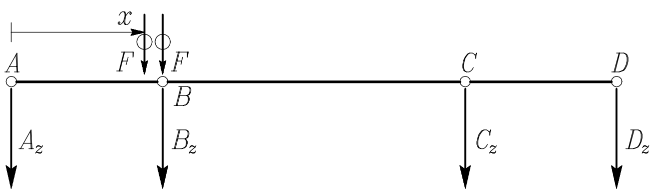
Pomanjkljivost lahko odpravimo na različne načine. Ena možnost je uporaba navpične zapornice, druga je, da spodnji del zapornice dadatno obtežimo v tolikšni meri, da se ne prevrne, četudi vode sploh ni.

Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Most čez jezero Okanagan (Kanada) je pontonski. Računski model mostu je podan na sliki pod fotografijo. Določi največji ugrez obeh plavajočih podpor, če se čez most zapelje vozilo z medosno razdaljo $4\,\mathrm{m}$ in osno obremenitvijo $F = 8\,\mathrm{kN}$! Za največ koliko se lahko premakne točka na sredini mostu zaradi omenjnega vozila? Plavajoča podpora je oblike kvadra s širino $10\,\mathrm{m}$ in dolžino $6\,\mathrm{m}$. Upoštevaj, da je specifična teža vode enaka $\gamma = 10\,\mathrm{kN/m^3}$.





Rešitev: Most je sestavljen iz treh prostoležečih nosilcev, za katere velja, da obtežba na enem ne vpliva na notranje sile in reakcije v drugem nosilcu. Zato lahko določimo reakcije v podpori B za nekaj različnih leg vozil iz ravnotežnih pogojev za prvi ali drugi nosilec:

$$\boxed{x = 16 \;\text{ – Vozilo je s prvim kolesom nad podporo } B.}$$

$$\sum_{AB} M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad -20\,B_z - 20\,F \;-16\,F = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = -14.4\,\mathrm{kN},$$

$$\boxed{x = 20 \;\text{ – Vozilo je z zadnjim kolesom nad podporo } B.}$$

$$\sum_{BC} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad 40\,B_z + 40\,F \;+36\,F = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = -15.2\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{BC} M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad -40\,C_z - 4\,F \;= 0 \quad \rightarrow \quad C_z = -0.8\,\mathrm{kN},$$

$\boxed{x = 38 \ \text{– Težišče vozila je na sredini mosta.}}$

$$\sum_{BC} M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad 40\, B_z + 18\, F \ + 22\, F = 0 \qquad \rightarrow \quad B_z = -8\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{BC} M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad -40\, C_z - 18\, F \ - 22\, F = 0 \qquad \rightarrow \quad C_z = -8\,\mathrm{kN},$$

Za ugrez plavajoče podpore B je kritična lega vozila pri $x = 20\,\mathrm{m}$. Ugrez podpore w_B oziroma w_C izračunamo z upoštevanjem vzgona. Pri tem upoštevamo, da je v mirovanju obtežba na podporo enaka teži izpodrinjene tekočine:

$$|B_z| = A\,\gamma\, w_B, \quad \rightarrow \quad w_B = \frac{|B_z|}{A\,\gamma} = 0.0253\,\mathrm{m},$$

kjer smo upoštevali, da je ploščina plavajočih podpor enaka $A = 10 \cdot 6 = 60\,\mathrm{m}^2$. Za račun pomika na sredini srednjega nosilca moramo izračunati še ugrez plavajoče podpore C:

$$|C_z| = A\,\gamma\, w_C, \quad \rightarrow \quad w_C = \frac{|C_z|}{A\,\gamma} = 0.00133\,\mathrm{m}.$$

Pomik na sredini mostu je povprečje ugrezov obeh plavajočih podpor:

$$w_s = \frac{w_B + w_C}{2} = 0.0133\,\mathrm{m}.$$

Ob predpostavki, da je upogib nosilca zanemarljiv, dobimo enak rezultat, če upoštevamo, da je vozilo na sredini nosilca pri $x = 38\,\mathrm{m}$:

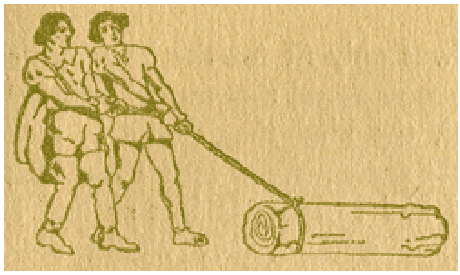
$$|B_z| = A\,\gamma\, w_B, \quad \rightarrow \quad w_B = \frac{|B_z|}{A\,\gamma} = 0.0133\,\mathrm{m},$$

$$|C_z| = A\,\gamma\, w_C, \quad \rightarrow \quad w_C = \frac{|C_z|}{A\,\gamma} = 0.0133\,\mathrm{m},$$

$$w_s = \frac{w_B + w_C}{2} = 0.0133\,\mathrm{m}.$$

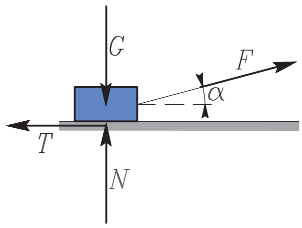
2. naloga

Možaka vlečeta težak hlod. Pri tem ju ovira sila trenja, ki jo določata normalna sila hloda na podlago in koeficient trenja $k_t = 0.3$. Pomagaj možakoma in določi optimalno smer (naklon vrvi glede na vodoravno podlago) vlečenja tako, da bo sila vlečenja najmanjša. Teža hloda je $2.5\,\mathrm{kN}$.



Namig: Določi najprej zvezo med vlečno silo F in kotom α (naklon vrvi glede na vodoravno podlago). Nato z odvajanjem ali s poskušanjem (nariši graf) oceni opitmalni kot vlečenja.

Rešitev: Na sliki je prikazan hlod in vse sile, ki nanj delujejo. Iz ravnotežnih enačb in enačbe za silo trenja lahko določimo zvezo med potrebno silo vlečenja F in kotom vlečenja α:



$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad F\,\cos\alpha - T = 0,$$

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N + F\,\sin\alpha - G = 0,$$

$$\text{enačba trenja} \quad \rightarrow \quad T = N\,k_t.$$

Ko drugo enačbo vstavimo v tretjo, to pa v prvo, lahko zapišemo iskano enačbo:

$$F(\alpha) = \frac{G\,k_t}{\cos\alpha + k_t\,\sin\alpha}.$$

Zadnjo enačbo odvajamo po α in zahtevamo, da je odvod enak nič:

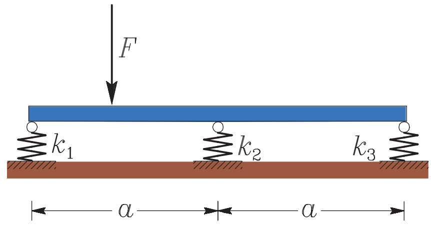
$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{G\,k_t\,(\cos\alpha + k_t\,\sin\alpha)}{(\cos\alpha + k_t\,\sin\alpha)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha = k_t$$

$$\rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,k_t = 16.7^\circ.$$

Možaka bosta hlod najlažje vlekla (sila F bo najmanjša) tedaj, ko bo naklon vrvi glede na vodoravnico enak 16.7°.

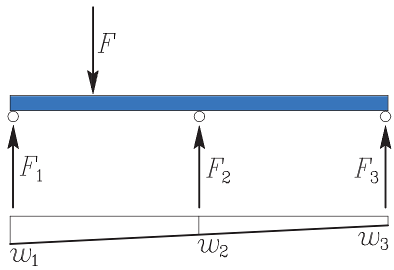
3. naloga

Preprost absolutno tog nosilec dolžine $2a = 8\,\mathrm{m}$ je podprt s tremi vzmetmi. Vemo, da se prva vzmet skrči za 3 cm, druga pa za 2 cm. Togosti vzmeti so:
$k_1 = 1.5\,\mathrm{kN/cm}$
$k_2 = 1.25\,\mathrm{kN/cm}$
$k_3 = 1.5\,\mathrm{kN/cm}$.



Določi velikost in lego navpične sile F, ki povzroči take skrčke vzmeti! Težo nosilca zanemarimo.

Rešitev: Na sliki prikazujemo sile, ki delujejo na nosilec, in premaknjeno lego nosilca. Ker je nosilec tog, in poznamo skrčke prvih dveh vzmeti, lahko s podobnimi trikotniki določimo, da je pomik tretje vzmeti w_3 enak 1 cm. Sile F_i v vzmeteh izračunamo s preprosto enačbo



$$F_1 = k_1\,w_1 = 1.5 \cdot 3 = 4.5\,\mathrm{kN},$$
$$F_2 = k_2\,w_2 = 1.25 \cdot 2 = 2.5\,\mathrm{kN},$$
$$F_3 = k_3\,w_3 = 1.5 \cdot 1 = 1.5\,\mathrm{kN}.$$

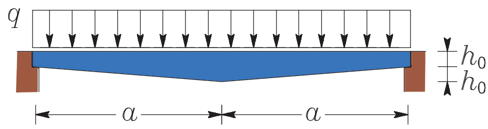
Velikost sile F in njeno lego določimo iz ravnotežnih enačb

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad F - F_1 - F_2 - F_3 = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad F = F_1 + F_2 + F_3 = 8.5\,\mathrm{kN},$$
$$\sum M_Y^1 = 0 \quad \rightarrow \quad -F\,x_F + F_2\,a + F_1\,2a = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad x_F = \frac{F_2\,a + F_1\,2a}{F} = 2.588\,\mathrm{m}.$$

Sila F, ki povzroči take premike nosilca, je velika $8.5\,\mathrm{kN}$ in deluje $2.588\,\mathrm{m}$ od levega roba nosilca.

4. naloga

Obravnavamo prostoležeči nosilec s spremenljivim prečnim prerezom, obtežen s konstantno linijsko obtežbo q. Ali meniš, da bodo največje normalne napetosti na sredini nosilca? Utemelji odgovor!



Če največje normalne napetosti v prečnem prerezu niso na sredini nosilca, kje jih lahko pričakuješ? Izračunaj normalne napetosti na spodnjem robu prečnega prereza na sredini nosilca, in še v prerezu, za katerega meniš, da je (bolj) kritičen.

$a = 3\,\mathrm{m}, \qquad h_0 = 0.1\,\mathrm{m}, \qquad b = 0.2\,\mathrm{m}, \qquad q = 1.5\,\mathrm{kN/m}.$

Namig: Enačba za določitev normalnih napetosti na spodnjem robu prečnega prereza je:

$$\sigma_{xx}^{\text{spodaj}}(x) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)}\,\frac{h(x)}{2}, \qquad I_y(x) = \frac{b\,h(x)^3}{12}.$$

Rešitev: Zaradi simetrije lahko računamo le za levo polovico nosilca. Zapišimo napetosti σ_{xx} na spodnjem robu prečnega nosilca v odvisnosti od x

$$\sigma_{xx}^{\text{spodaj}}(x) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)}\,\frac{h(x)}{2} = \frac{M_y(x)}{\frac{b\,h(x)^3}{12}}\,\frac{h(x)}{2} = \frac{6\,M_y(x)}{b\,h(x)^2},$$

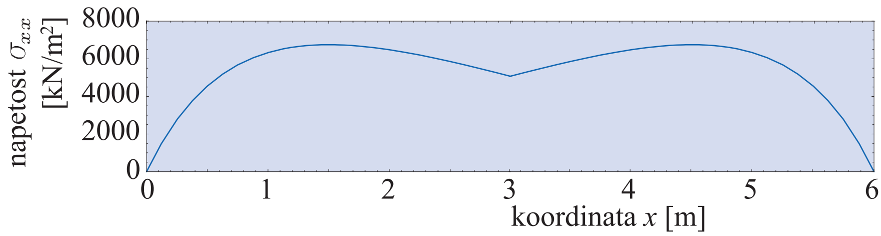
kjer moramo upoštevati, da se na levi polovici višina nosilca $h(x)$ in upogibni moment $M_y(x)$ spreminjata po enačbah

$$h(x) = h_0\left(1 + \frac{x}{a}\right), \qquad M_y(x) = q\,x\left(a - \frac{x}{2}\right).$$

Normalna napetost na spodnji strani nosilca je

$$\sigma_{xx}^{\text{spodaj}}(x) = \frac{6\,q\,x\left(a - \frac{x}{2}\right)}{b\,h_0^2\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2}.$$

Na spodnji sliki prikazujemo spreminjanje normalne napetosti na spodnjem robu nosilca v odvisnosti od x. Vidimo, da na sredini nosilca normalna napetost ni največja, saj je le $\sigma_{xx}^{\text{spodaj}}(3) = 5062.5\,\mathrm{kN/m^2}$. Največja napetost je pri $x = 1.5\,\mathrm{m}$, ko doseže $\sigma_{xx}^{\text{spodaj}}(1.5) = 6750\,\mathrm{kN/m^2}$.



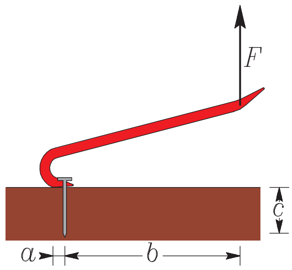
Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

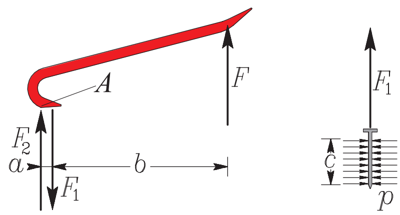
Glej prvo nalogo za 3. letnike!

2. naloga

S svinjsko nogo poskušamo izvleči žičnik iz podlage. Pri tem zmoremo silo $F = 300\,\mathrm{N}$. Ali žičnik uspemo izvleči, če podlaga pritiska na obod žičnika v povprečju s pritiskom $p = 500\,\mathrm{N/cm^2}$? Polmer žičnika je $r = 0.3\,\mathrm{cm}$, koeficient trenja med žičnikom in podlago pa je $k_t = 0.6$. Kolikšna je najmanjša sila F_{min}, s katero že lahko izvlečemo žičnik?
$a = 2\,\mathrm{cm}$,
$b = 30\,\mathrm{cm}$,
$c = 10\,\mathrm{cm}$.



Rešitev: Na sliki prikazujemo sile, ki delujejo na svinjsko nogo in žičnik. Iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na prijemališče sile F_2 lahko določimo zvezo med silo F, s katero vlečemo, in izvlečno silo F_1, s katero poskušamo izvleči žičnik:



$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad F\,(a+b) - F_1\,a = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{F\,(a+b)}{a} = 4800\,\mathrm{N}.$$

Sila trenja, s katero podlaga zadržuje žičnik je enaka produktu normalne sile N in koeficienta trenja k_T. Normalna sila N podlage na žičnik je ob predpostavki o enakomerno porazdeljenem pritisku na žičnik enaka

$$N = p\,2\pi\,r\,c = 9424.8\,\mathrm{N} \quad \rightarrow \quad F_t = N\,k_t = 5654.9\,\mathrm{N}.$$

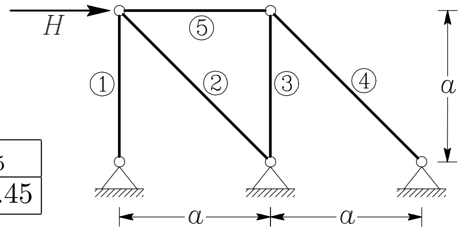
Ker je izvlečna sila F_1 manjša od sile trenja F_t, žičnika s silo $F = 300\,\mathrm{kN}$ ne moremo izvleči. Najmanjšo potrebno silo F_{min}, s katero moramo vleči svinjsko nogo, da lahko izvlečemo žičnik, izračunamo tako, da izenačimo izvlečno silo s silo trenja in zapišemo momentni ravnotežni pogoj glede na prijamlišče sile F_2:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{min}}\,(a+b) - F_t\,a = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{min}} = \frac{F_t\,a}{(a+b)} = 353.4\,\mathrm{N}.$$

3. naloga

Osne sile zaradi vodoravne sile H v paličju na sliki so podane v spodnji preglednici (vrednosti so podane v kN).

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
111.55	−157.76	88.45	−125.00	−88.45



Kolikšna je sila H? Določi tudi najmanjšo silo H_{mej}, ki že povzroči porušitev paličja! Ugotovi, katera palica se prva poruši in skiciraj porušeno konstrukcijo.

Ploščino prereza označimo z $A = b\,h$, vztrajnostni moment pa z $I = b\,h^3/12$.

$$a = 2\,\text{m}, \qquad b/h = 12/12\,\text{cm}, \qquad E = 1000\,\text{kN/cm}^2, \qquad \sigma_{\text{mej}} = 1\,\text{kN/cm}^2.$$

Namig: Mejno nosilnost tegnjenih palic določimo z enačbo mejnih napetosti

$$N_{\text{mej}} = A\,\sigma_{\text{mej}},$$

mejno nosilnost tlačenih palic pa z enačbo uklona

$$N_{\text{mej}} = \frac{\pi^2\,E\,I}{L^2}.$$

Rešitev: Iz vsote vseh sil v vodoravni smeri za zgornje levo vozlišče izračunamo silo H:

$$\sum X = 0 \quad\rightarrow\quad H + N_5 + N_2 \cos 45^\circ = 0 \quad\rightarrow\quad H = 200\,\text{kN}.$$

Za porušitev paličja sta kritični palici 1 in 2. Prva je tegnjena palica z največjo osno silo, druga pa je tlačena palica z najmanjšo osno silo. Kritični sili za obe palici sta:

$$N_{1,\text{mej}} = A\,\sigma_{\text{mej}} = 144\,\text{kN/cm}^2$$
$$N_{2,\text{mej}} = \frac{\pi^2\,E\,I}{L^2} = \frac{\pi^2\,E\,I}{(a\sqrt{2})^2} = 213.18\,\text{kN/cm}^2$$

Izračunajmo še razmerje med kritično silo in silo ob dani obtežbi $H = 200\,\text{kN}$:

$$\frac{N_{1,\text{mej}}}{N_1} = \frac{144}{111.55} = 1.29, \qquad\qquad \frac{N_{2,\text{mej}}}{|N_2|} = \frac{213.18}{157.76} = 1.35.$$

Pri obtežbi z vodoravno silo H najprej doseže mejno nosilnost palica 1. Pri tem je sila

$$H^* = 1.29\,H = 258.18\,\text{kN}.$$

Ker je paličje statično nedoločeno, obtežba H^* še ni mejna obtežba, pri kateri bi se poličje porušilo. To se zgodi pri mejni nosilnosti paličja, ki je

$$H_{\text{mej}} > H^*.$$

4. naloga

Z merilnim trakom želimo izmeriti razdaljo med dvema točkama. Vemo, da je bil merilni trak umerjen pri temperaturi $20°\text{C}$ in natezni sili $50\,\text{N}$. Kolikšna je točna razdalja med dvema točkama, če merimo poleti pri temperaturi $40°\text{C}$ in vlečemo s silo $75\,\text{N}$? Na merilnem traku smo odčitali $23.217\,\text{m}$. Kolikšna je napaka, ali smo izmerili preveč ali premalo? Premisli in zapiši ugotovitve!

Prečni prerez traku je $A_x = 1\,\text{mm}^2$, elastični modul $E = 200\,000\,\text{N/mm}^2$, koeficient temperaturnega raztezka je $\alpha_T = 0.000012(°\text{C})^{-1}$.

Rešitev: Vzemimo, da z L' označimo odčitek, z L_0 pa pravo razdaljo. Sprememba temperature je $\Delta T = 20°\text{C}$, sprememba sile pa $\Delta N = 75 - 50 = 25\,\text{kN}$. Spremembo specifične deformacije izračunamo po enačbi

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta N}{E A_x} + \alpha_T\,\Delta T = 0.000365.$$

Ker se zaradi povečanja temperature in večje natezne sile trak podaljša, na merilnem traku odčitamo vrednost, ki je manjša od prave razdalje med dvema točkama. Zato velja:

$$L_0 = L'\,(1 + \Delta\varepsilon) = 23.2255\,\text{m}.$$

Ker je napaka meritve enaka

$$\Delta L = L' - L_0 = -0.0085\,\text{m} = -8.5\,\text{mm},$$

smo izmerili za $8.5\,\text{mm}$ prekratko razdaljo.