11. SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 18. MAJ 2005

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

11. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Goran Turk, Dejan Zupan, Rado Flajs in Igor Planinc

Ljubljana, 18. maj 2005

TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
11. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Tisk: Fotokopiranje Slatner, s.p., Ljubljana

Obseg: 22 strani

Naklada: 100 izvodov

Ljubljana, 2006

11. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2005

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali že 11. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Stane Srpčič,
Igor Planinc,
Rado Flajs,
Dejan Zupan,
Alenka Ambrož–Jurgec (Srednja gradbena šola, Maribor),
Bojan Lutman (Srednja tehniška in zdravstvena šola, Novo mesto),
Irena Posavec (Srednja tehniška šola, Celje),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja tehniška šola, Celje) in
Duška Tomšič (Srednja gradbena in ekonomska šola, Ljubljana).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 66 dijakinj in dijakov tretjega in 67 dijakinj in dijakov četrtega letnika. V sredo, 20. aprila 2005, so na srednjih šolah reševali enake predtekmovalne naloge. Štiriintrideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 18. maja 2005 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

letnik	ime in priimek	kraj	mentor
3	Andrej Anžlin	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Ervin Brulc	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Rok Grabrijan	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
3	Dominik Jordan	Ljubljana[2]	Duška Tomšič
3	Sebastijan Jurendić	Maribor[3]	Maja Lorger
3	Marko Krajnc	Maribor[3]	Eva Dvořakova
3	Bojan Kresal	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
3	Simon Krnc	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Damir Kulanić	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Denis Kunčič	Maribor[3]	Maja Lorger
3	Anja Lavrič	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Tadej Lorenci	Maribor[3]	Maja Lorger
3	Tomaž Oset	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Matej Panjan	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Nejc Repše	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Primož Rezar	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
3	Damjan Simrajh	Maribor[3]	Eva Dvořakova
3	Uroš Strmec	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Andrej Špehar	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
3	Gašper Tisovec	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
3	Aljaž Tominc	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
letnik	**ime in priimek**	**kraj**	**mentor**
4	Tomaž Adlešič	Novo mesto[5]	Nevenka Cesar
4	Marko Avbar	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Bojan Bazilija	Ljubljana[2]	Majda Pregl
4	Jerneja Bogovič	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Matej Glinšek	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
4	Gorazd Krese	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Primož Modic	Ljubljana[2]	Majda Pregl
4	Aljaž Poličnik	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
4	Bojan Preložnik	Celje[1]	Marlenka Žolnir Petrič
4	Gregor Sagadin	Maribor[6]	Vili Vesenjak
4	Andjelka Stanić	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Ervin Struna	Novo mesto[4]	Bojan Lutman
4	Gašper Škulj	Novo mesto[4]	Bojan Lutman

[1] Poklicna in tehniška gradbena šola Celje
[2] Srednja gradbena, geodetska in ekonomska šola Ljubljana
[3] Srednja gradbena šola Maribor
[4] Šolski center Novo mesto, Srednja elektro šola in tehniška gimnazija
[5] Šolski center Novo mesto, Srednja gradbena in lesarska šola
[6] Srednja strojna šola Maribor

Sklepno tekmovanje se je začelo 18. maja 2005 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci ogledali Laboratorij za preizkušanje materialov in konstrukcij.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Bojan Čas, Rado Flajs, Igor Planinc in Dejan Zupan (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakinjam in dijakom podelil dekan FGG izr. prof. dr. Bojan Majes, ki je tekmovanje zaključil z mislijo, da se čez leto nekateri spet srečamo na tem tekmovanju. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**kraj**	**nagrada**	**točke**
Matej Panjan	Novo mesto	1. nagrada	80%
Sebastijan Jurendić	Maribor	2. nagrada	70%
Gašper Tisovec	Novo mesto	2. nagrada	70%
Anja Lavrič	Novo mesto	3. nagrada	65%
Damjan Simrajh	Maribor	3. nagrada	65%

4. letnik			
ime in priimek	**kraj**	**nagrada**	**točke**
Andjelka Stanić	Novo mesto	1. nagrada	90%
Marko Avbar	Novo mesto	1. nagrada	90%
Gorazd Krese	Novo mesto	2. nagrada	85%
Gregor Sagadin	Maribor	3. nagrada	75%

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25%.

Povprečna ocena na predtekmovanju (34.52% za tretje letnike in 33.59% za četrte) je bila približno enaka kot lani, ko je bilo povprečje za tretje letnike 41.25% za četrte pa 25.71%. Ocena, potrebna za uvrstitev na sklepno tekmovanje, je bila za v obeh letnikih 50% ali več.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene (46.43% za tretje letnike in 51.25% za četrte) občutno višje kot lani (lani v tretjih letnikih 34.72%, v četrtih pa 35.85%). Izrazito visoka je bila povprečna ocena v četrtih letnikih, pri katerih je presegla mejo 50%.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	12.98	9.81	3.56	8.17	34.52
najnižja ocena	0	0	0	0	5
najvišja ocena	25	25	25	25	80

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	14.13	10.98	3.15	5.33	33.59
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	70

sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	17.86	7.62	14.52	6.43	46.43
najnižja ocena	0	0	0	0	5
najvišja ocena	25	25	25	25	80

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.00	15.42	11.25	9.58	51.25
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	90

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju sklepamo, da so bile dijakom najtežje 3. naloga pri tretjih letnikih ter 3. in 4. naloga pri četrtih. Na sklepnem tekmovanju sta bila dijakom najtežji 2. in 4. naloga v tretjem letniku, medtem ko je bila v četrtem letniku najtežja 4. naloga.

Zanimivo je tudi, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Razveseljivo je, da je vsako nalogo pravilno rešil vsaj en dijak.

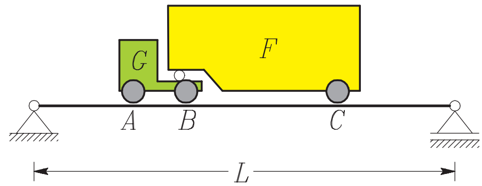
Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
15	2	2	3
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
10	3	1	5
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
8	1	4	2
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
5	5	3	2

Tekmovanje sta finančno podprla:
Republika Slovenija, Ministrstvo za šolstvo in šport;
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na internetu:
`http://www.km.fgg.uni-lj.si/tekma/tekma.htm`.

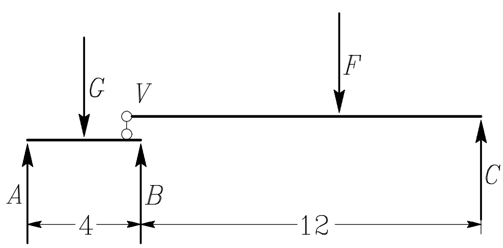
Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

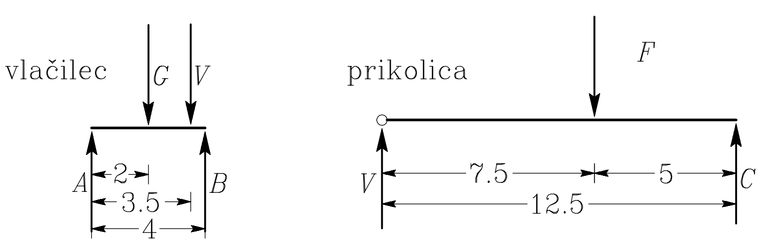
1. naloga



Določi in nariši diagram upogibnih momentov v prikazani prostoležeči konstrukciji - mostu! Most je obtežen le s težo tovornjaka – vlačilca s prikolico. Razdalja med prvima dvema osema koles je 4 m, razdalja od druge osi vlačilca do osi prikolice pa 12 m. Teža vlačilca $G = 30\,\mathrm{kN}$ ima prijemališče na sredini med obema osema koles, teža prikolice $F = 200\,\mathrm{kN}$ pa ima prijemališče 5 m pred zadnjo osjo. Vez med vlačilcem in prikolico leži 0.5 m pred drugo osjo vlačilca in dopušča poljubne zasuke med vlačilcem in prikolico, preprečuje pa medsebojne zamike. Razpon mostu je $L = 40\,\mathrm{m}$. Diagram upogibnih momentov izračunaj za primer, ko je prva os vlačilca 10 metrov od leve podpore!

Rešitev: Preden lahko izračunamo notranje sile v prostoležečem nosilcu, moramo določiti, kolikšne so sile v vseh treh oseh tovornjaka. Konstrukcijo tovornjaka sestavljata dva povezana nosilca, kar je prikazano na naslednji sliki.





Nosilca ločimo in vez nadomestimo s silo v vezi V. Iz ravnotežnih pogojev za vlačilec in prikolico, lahko izračunamo sile A, B in C v oseh tovornjaka ter silo v vezi V. Zapišimo najprej ravnotežne enačbe za prikolico:

$$\sum M_Y^V = 0 \quad \rightarrow \quad 12.5\,C - 7.5\,F = 0 \quad \rightarrow \quad C = 120\,\mathrm{kN},$$

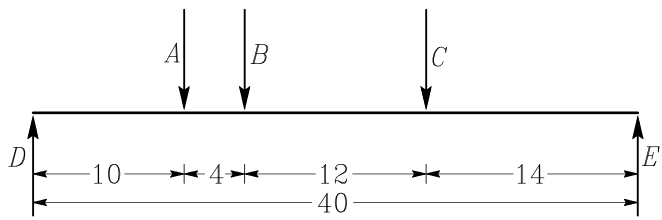
$$\sum M_Y^C = 0 \quad \rightarrow \quad 5\,F - 12.5\,V = 0 \quad \rightarrow \quad V = 80\,\mathrm{kN}.$$

Iz ravnotežnih enačb za vlačilec izračunamo še sili A in B:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad 4\,B - 2\,G - 3.5\,V = 0 \quad \rightarrow \quad B = 85\,\mathrm{kN},$$
$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,G + 0.5\,V - 4\,A = 0 \quad \rightarrow \quad A = 25\,\mathrm{kN}.$$

Z naslednje slike, ki prikazuje prostoležeči mostni nosilec z obtežbo tovornjaka, lahko zapišemo ravnotežne pogoje za določitev reakcij D in E:

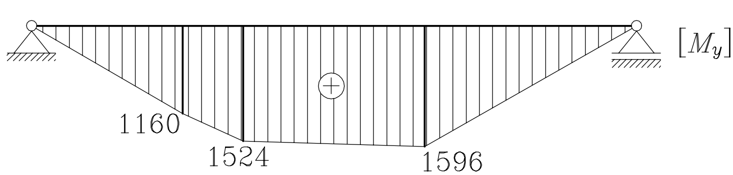
$$\sum M_Y^D = 0 \quad \rightarrow \quad 40\,E - 10\,A - 14\,B - 26\,C = 0 \quad \rightarrow \quad E = 114\,\mathrm{kN},$$
$$\sum M_Y^E = 0 \quad \rightarrow \quad 30\,A + 26\,B + 14\,C - 40\,D = 0 \quad \rightarrow \quad D = 116\,\mathrm{kN}.$$



Ker na nosilec delujejo le točkovne sile, je upogibni moment odsekoma linearna funkcija. Zato je dovolj, da izračunamo upogibne momente v značilnih točkah nosilca (pri $x = 10\,\mathrm{m}$, $x = 14\,\mathrm{m}$ in $x = 26\,\mathrm{m}$). V obeh podporah prostoležečega nosilca sta upogibna momenta seveda enaka nič.

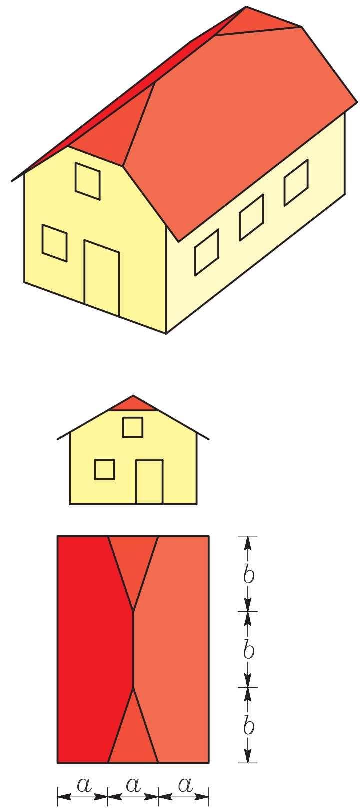
$$x = 10\,\mathrm{m}: \qquad M_y = 10\,D = 1160\,\mathrm{kNm},$$
$$x = 14\,\mathrm{m}: \qquad M_y = 14\,D - 4\,A = 1524\,\mathrm{kNm},$$
$$x = 26\,\mathrm{m}: \qquad M_y = 26\,D - 16\,A - 12\,B = 14\,E = 1596\,\mathrm{kNm}.$$

Na spodnji sliki prikazujemo diagram upogibnih momentov v prostoležečem mostnem nosilcu.



2. naloga

Določi rezultanto teže snega in strešne kritine za stanovanjsko stavbo, prikazano na sliki! Velikost obtežbe snega je $q_s = 1.5\,\mathrm{kN/m^2}$, teža kritine pa je $q_k = 1.0\,\mathrm{kN/m^2}$. Naklon strehe je 30°.
$b = 3\,\mathrm{m}$,
$a = 2\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Rezultanto teže snega R_s preprosto izračunamo kot produkt tlorisne ploščine strehe in obtežbe snega (naklon strehe torej tukaj nima vpliva):

$$R_s = 3\,a\,3\,b\,q_s = 81\,\mathrm{kN}.$$

Za določitev rezultante teže kritine moramo določiti površino celotne strehe A_k, saj rezultanto teže strešne kritine izračunamo po enačbi

$$R_k = A_k\,q_k.$$

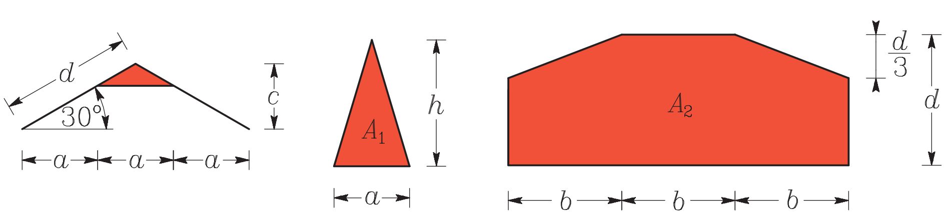
Streha je sestavljena iz štirih likov: dveh enakokrakih trikotnikov (A_1) in dveh šestkotnikov (A_2). Na spodnji sliki sta prikazana oba značilna lika. Izračunamo lahko:

$$\mathrm{tg}30^\circ = \frac{c}{3a/2} \quad \rightarrow \quad c = \frac{3a}{2}\mathrm{tg}30^\circ = \sqrt{3} = 1.7321\,\mathrm{m},$$

$$d = \sqrt{c^2 + (3a/2)^2} = 3.4641\,\mathrm{m}, \qquad h = \sqrt{b^2 + (c/3)^2} = 3.0551\,\mathrm{m},$$

$$A_1 = \frac{a\,h}{2} = 3.0551\,\mathrm{m}^2, \qquad A_2 = 3b\,d - 2\,\frac{b\,d/3}{2} = 27.7128\,\mathrm{m}^2,$$

$$A_k = 2\,A_1 + 2\,A_2 = 61.5357\,\mathrm{m}^2.$$

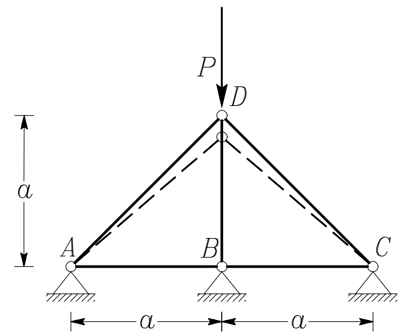


Rezultanta teže kritine in skupna rezultanta teže snega in kritine sta:

$$R_k = A_k\,q_k = 61.54\,\mathrm{kN},$$
$$R = R_k + R_s = 142.54\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Na sliki je prikazano preprosto paličje v nedeformirani in deformirani (črtkana črta) legi. Deformiranje, ki ga enolično opišemo z navpičnim pomikom vozlišča D, je posledica sile P. Določi osne sile v palicah, če je togost vseh palic enaka! Določi tudi velikost sile P, ki povzroči opisano deformiranje paličja!
$a = 2\,\mathrm{m}$,
$w_D = 2\,\mathrm{cm}$,
$EA = 200\,\mathrm{kN}$.



Rešitev: Osne sile v palicah izračunamo po enačbi

$$N = EA\,\varepsilon.$$

Deformacija ε predstavlja specifično spremembo dolžine palice, v tem primeru skrček palice deljen z njeno dolžino v nedeformiranem stanju:

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l},$$

kjer je l' dolžina palice po deformiranju, l pa je dolžina palice v nedeformiranem stanju. Dolžine poševnih palic v obeh stanjih izračunamo po Pitagorovem izreku. V naslednji preglednici prikazujemo določitev osnih sil v paličju (palici AB in BC se ne deformirata in je zato njiuna osna sila enaka nič.

palica	l [m]	l' [m]	ε	N [kN]
AD	2.8284	2.8143	-0.004987	-0.9975
BD	2.0000	1.9800	-0.010000	-2.0000
CD	2.8284	2.8143	-0.004987	-0.9975

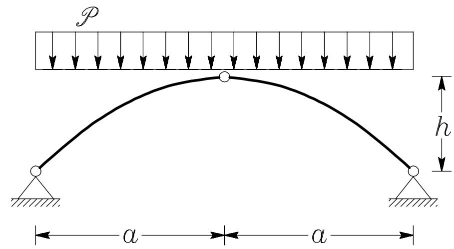
Silo P, ki povzroči tako deformacijo paličja, izračunamo iz ravnotežnih pogojev za vozlišče D:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad -P - N_{AD}\cos 45^\circ - N_{BD} - N_{CD}\cos 45^\circ = 0$$

$$P = 3.4106\,\mathrm{kN}.$$

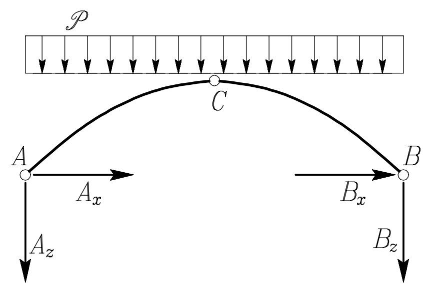
4. naloga

Nosilno konstrukcijo ostrešja športne dvorane predstavlja niz tročlenskih lokov parabolične oblike. Vodoravne razdalje med posameznimi lokovi so 8 m. Določi reakcije v podporah zaradi obtežbe snega!
$a = 20\,\mathrm{m}$,
$h = 10\,\mathrm{m}$,
$q = 2\,\mathrm{kN/m^2}$.



Rešitev: Linijsko obtežbo $\mathscr{P}$ izračunamo ob upoštevanju vodoravne razdalje med posameznimi lokovi:

$$\mathscr{P} = q \cdot 8 = 16\,\mathrm{kN/m}.$$



Reakcije v podporah izračunamo iz ravnotežnih pogojev za tročlenski lok. Zapišemo tri enačbe za celotno konstrukcijo in eno enačbo za del konstrukcije.

$$\begin{aligned}
\sum M_Y^A = 0 \quad &\rightarrow \quad -B_z\,2a - \mathscr{P}\,2a\,a = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = -320\,\mathrm{kN},\\
\sum Z = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z + B_z + \mathscr{P}\,2a = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -320\,\mathrm{kN},\\
\sum_{CB} M_Y^C = 0 \quad &\rightarrow \quad B_x\,h - B_z\,a - \mathscr{P}\,a\,a/2 = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = -320\,\mathrm{kN},\\
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad A_x + B_x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = 320\,\mathrm{kN},
\end{aligned}$$

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

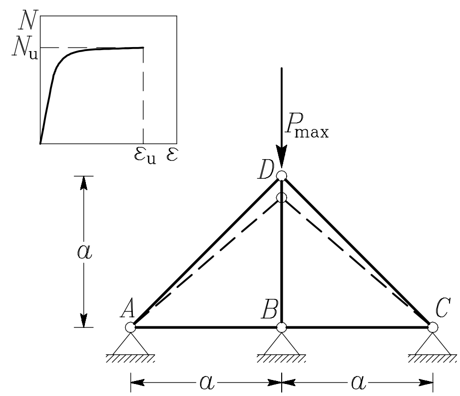
Glej prvo nalogo za 3. letnike!

2. naloga

Glej drugo nalogo za 3. letnike!

3. naloga

Na sliki je prikazano preprosto paličje v nedeformirani in deformirani (črtkana črta) legi. Podajnost palice BD je podana z nelinearnim zakonom, kjer je $N_\mathrm{u} = 1.5\,\mathrm{kN}$ največja sila, ki jo palica lahko prenese. Pri tej sili je deformacija $\varepsilon_\mathrm{u} = 0.01$. Za vse druge palice predpostavimo linearno elastični materialni model ($EA = 200\,\mathrm{kN}$). Določi notranje sile v palicah pri največji obtežbi P_max, ki jo paličje lahko prenese!
$a = 2\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Izračunamo najprej pomik vozlišča D, ob mejni deformaciji ε_u:

$$w_D = \varepsilon_\mathrm{u}\, l_{BD} = \varepsilon_\mathrm{u}\, a = 0.02\,\mathrm{m}.$$

Osna sila v palici BD je pri obtežbi P_max enaka $N_{BD} = -N_\mathrm{u} = -1.5\,\mathrm{kN}$. Notranji sili v palicah AD in CD izračunamo na enak način kot pri tretji nalogi za tretje letnike.

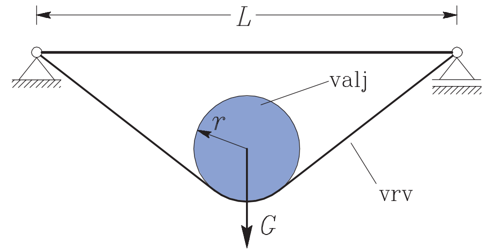
palica	l [m]	l' [m]	ε	N [kN]
AD	2.8284	2.8143	-0.004987	-0.9975
CD	2.8284	2.8143	-0.004987	-0.9975

Vrednost največje obtežbe P_max, ki jo paličje lahko prenese, lahko izračunamo iz ravnotežnega pogoja za vozlišče D:

$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad -P - N_{AD}\cos 45^\circ - N_{BD} - N_{CD}\cos 45^\circ = 0$$
$$P = 2.9106\,\mathrm{kN}.$$

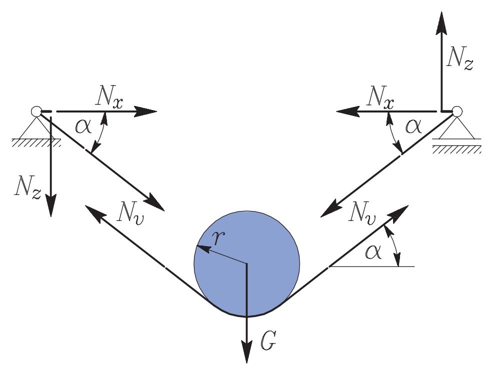
4. naloga

Valjast predmet je postavljen na togo vrv, ki je na obeh konceh pripeta v podporah togega prostoležečega nosilca. Določi dolžino vrvi l tako, da bo absolutna vrednost osne sile v prostoležečem nosilcu enaka $G/2$!
$L = 2.0\,\mathrm{m}$,
$r = 0.25\,\mathrm{m}$,
$G = 1\,\mathrm{kN}$.



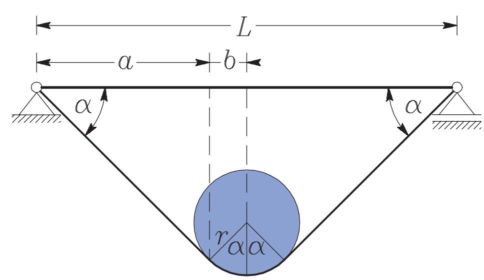
Rešitev: V mislih prerežemo vrvi in na mestu prereza predpostavimo silo v vrvi. Tik ob podpori prerežemo tudi nosilec in predpostavimo notranji sili N_x in N_z. Iz ravnotežnih pogojev za celotno konstrukcijo v vodoravni smeri ugotovimo, da je vodoravna reakcija prostoležečega nosilca enaka nič.

Nato zapišemo ravnotežno enačbo za valjast predmet z delom vrvi, kakor je prikazano na sliki:



$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad -G + 2\,N_v\,\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad N_v = \frac{G}{2\,\sin\alpha}.$$

Iz ravnotežnega pogoja za del ob levem vozlišču prostoležečega nosilca in ob upoštevanju, da je $N_x = G/2$, dobimo



$$\sum X = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad N_v\,\cos\alpha + N_x = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \frac{G}{2\,\sin\alpha}\cos\alpha + \frac{G}{2} = 0 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \mathrm{tg}\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

S pomočjo slike zapišemo enačbi za določitev a in b, izračunamo pa tudi dolžino vrvi l_v

$$b = r\,\sin\alpha = 0.1767\,\mathrm{m}, \qquad a = \frac{L}{2} - b = 0.8232\,\mathrm{m},$$
$$l_v = 2\left(\frac{a}{\cos\alpha} + r\,\alpha\right) = 2.72\,\mathrm{m}.$$

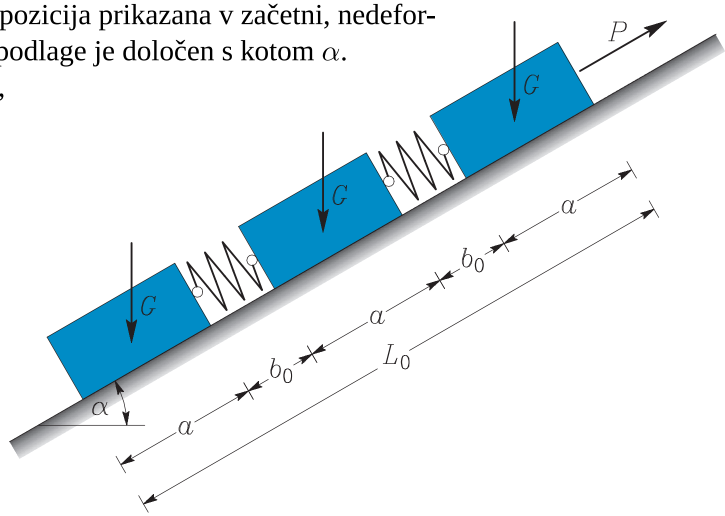
Da bo velikost osne sile v togem nosilcu enaka $G/2$, mora biti dolžina vrvi enaka $2.72\,\mathrm{m}$.

Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Določi silo P, s katero vlečemo kompozicijo kvadrov na sliki tako, da bo mirovala! Trenja med kvadri in podlago ni. Obe vzmeti sta linearni (njuna togost je $k_v = 10\,\mathrm{N/cm}$). Izračunaj dolžino kompozicije L v deformirani legi! Na sliki je kompozicija prikazana v začetni, nedeformirani legi. Naklon podlage je določen s kotom α.

$\alpha = 30°$, $a = 10\,\mathrm{cm}$,
$b_0 = 5\,\mathrm{cm}$,
$G = 10\,\mathrm{N}$.



Rešitev: Iz ravnotežnega pogoja v smeri vzdolž klanca (v smeri sile P) in ob upoštevanju, da trenja ni, dobimo

$$\sum F = 0 \quad \rightarrow \quad P - 3G\,\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad P = 3G\,\sin\alpha = 15\,\mathrm{N}.$$

Na podoben način iz ravnotežnih pogojev v smeri vzdolž klanca za dele sistema določimo tudi sili v obeh vmeteh

$$\sum_{\text{spodnji kvader}} F = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v1} - G\,\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v1} = G\,\sin\alpha = 5\,\mathrm{N},$$

$$\sum_{\text{spodnja dva kvadra}} F = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v2} - 2G\,\sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v2} = 2G\,\sin\alpha = 10\,\mathrm{N}.$$

Raztezek vzmeti u_v izračunamo s preprosto enačbo

$$u_v = \frac{F_v}{k_v}.$$

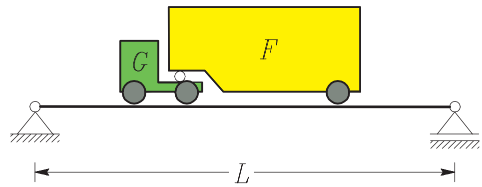
Vzmeti se torej raztegneta za:

$$u_{v1} = \frac{F_{v1}}{k_v} = 0.5\,\mathrm{cm}, \qquad u_{v2} = \frac{F_{v2}}{k_v} = 1.0\,\mathrm{cm}.$$

Skupna dolžina kompozicije je

$$L = 3a + 2b_0 + u_{v1} + u_{v2} = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 0.5 + 1.0 = 41.5\,\mathrm{cm}.$$

2. naloga

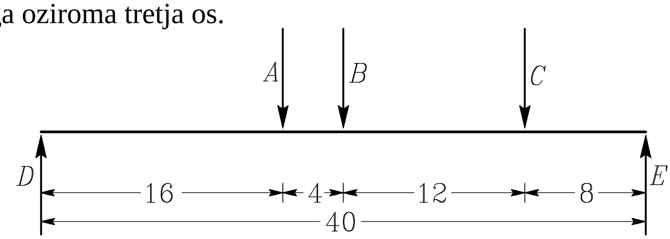


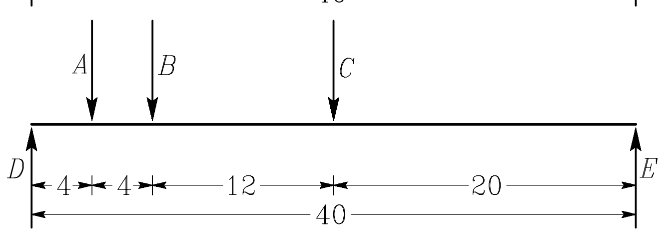
Določi lego tovornjaka na mostu tako, do bo upogibni moment na sredini mostu največji! Nariši tudi diagram upogibnega momenta za ta primer! Most je obtežen le s težo tovornjaka – vlačilca s prikolico. Razdalja med prvima dvema osema koles je 4 m, razdalja od druge osi vlačilca do osi prikolice pa je 12 m. Teža vlačilca $G = 30\,\mathrm{kN}$ ima prijemališče na sredini med obema osema koles, teža prikolice $F = 200\,\mathrm{kN}$ pa ima prijemališče 5 m pred zadnjo osjo. Vez med vlačilcem in prikolico leži 0.5 m pred drugo osjo vlačilca in dopušča poljubne zasuke med vlačilcem in prikolico, preprečuje pa medsebojne zamike. Razpon mostu je $L = 40\,\mathrm{m}$.

Rešitev: Uporabimo rezultate 1. naloge na predtekmovanju, v kateri smo obravnavali enak tovornjak. Zato vemo, kolikšne so sile, s katerimi tovornjak obremenjuje obravnavani most:

$$A = 25\,\mathrm{kN}, \qquad B = 85\,\mathrm{kN}, \qquad C = 120\,\mathrm{kN}.$$

Pričakujemo, da bo upogibni moment na sredini največji v trenutku, ko bo ena izmed osi natanko na sredini mosta. Zato moramo preveriti le tri obtežne primere. Pri tem pa za prvega, ko je na sredini mosta prva os z najmanjšo silo, že vnaprej vemo, da ne bo kritičen. Na sliki sta prikazani dve možni kritični legi, ko je na sredini druga oziroma tretja os.

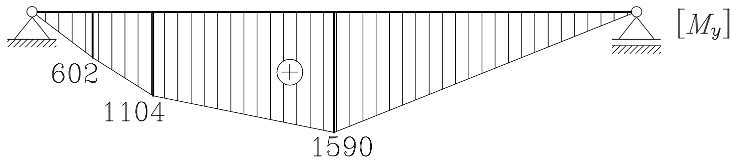




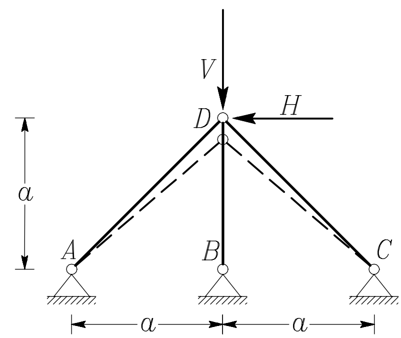
Vrednosti reakcij D in E ter upogibnih momentov na mestu delovanja sil A, B in C prikazujemo v naslednji preglednici

Lega tovornjaka	D [kN]	E [kN]	$M_y(A)$ [kNm]	$M_y(B)$ [kNm]	$M_y(C)$ [kNm]
na sredini je sila B	81.5	148.5	1304	1530	1188
na sredini je sila C	150.5	79.5	602	1104	1590

Vidimo, da je bolj neugodna lega, ko je na sredini mosta sila C – upogibni moment na sredini je tedaj $1590\,\mathrm{kNm}$. Na spodnji sliki prikazujemo diagram upogibnih momentov za kritični primer, ko je na sredini mosta sila C.



3. naloga



Na sliki je prikazano preprosto paličje v nedeformirani in deformirani (črtkana črta) legi. Deformiranje, ki ga enolično opišemo z navpičnim pomikom vozlišča D, je posledica točkovnih sil H in V. Vodoravnega pomika ni! Določi osne sile v palicah, ki imajo različno osno togost! Določi tudi velikost točkovnih sil H in V, ki povzroči opisano deformirano lego paličja!
$a = 2\,\mathrm{m}$, $w_D = 2\,\mathrm{cm}$,
$EA_{AD} = 200\,\mathrm{kN}$, $EA_{BD} = 150\,\mathrm{kN}$, $EA_{CD} = 100\,\mathrm{kN}$.

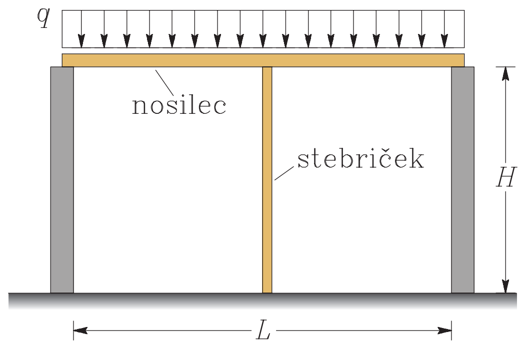
Rešitev: Nalogo rešujemo podobno kot 3. nalogo na predtekmovanju. V naslednji preglednici zapišemo spremenjene dolžine palic, specifične deformacije in osne sile v palicah.

palica	l [m]	l' [m]	ε	N [kN]
AD	2.8284	2.8143	-0.004987	-0.9975
BD	2.0000	1.9800	-0.010000	-1.5000
CD	2.8284	2.8143	-0.004987	-0.4987

Sili H in V določimo iz ravnotežnih pogojev za vozlišče D:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -H - N_{AD}\sin 45^\circ + N_{CD}\sin 45^\circ = 0$$
$$H = 0.3527\,\mathrm{kN},$$
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad -V - N_{AD}\cos 45^\circ - N_{BD} - N_{CD}\cos 45^\circ = 0$$
$$V = 2.5580\,\mathrm{kN}.$$

4. naloga



Prostoležeči leseni nosilec s prečnim prerezom $h \times b = 15 \times 10$ cm je obtežen z enakomerno linijsko obtežbo $q = 5\,\mathrm{kN/m}$. Ker se zaradi obtežbe nosilec preveč povesi, smo ga na sredini podprli s stebričkom prečnega prereza 10×10 cm. Začetno višino stebrička izberemo tako, da je poves na sredini nosilca enak nič. Določi osno silo N_x v stebričku! Določi tudi začetno višino H_0 stebrička, preden ga podstavimo pod nosilec! Lahko pričakuješ, da mora biti začetna višina stebrička nekoliko večja od končne - deformirane višine H.
$L = 5\,\mathrm{m}$,
$H = 2.4\,\mathrm{m}$,
$E = 12\,\mathrm{GPa}$.
V pomoč naj ti bosta enačbi za določitev povesa na sredini prostoležečega nosilca pri enakomerni linijski obtežbi w_q in točkovni sili na sredini razpona nosilca w_F:

$$w_q = \frac{5\,q\,L^4}{384\,EI}, \qquad w_F = \frac{F\,L^3}{48\,EI},$$

kjer je $I = h^3 b/12$ vztrajnostni moment pravokotnega prečnega prereza.

Rešitev: Sila F, ki jo povzroči podstaljeni stebriček mora povzročiti enak poves na sredini nosilca, kot enakomerna linijska obtežba q:

$$w_q = w_F \quad \rightarrow \quad \frac{5\,q\,L^4}{384\,EI} = \frac{F\,L^3}{48\,EI} \quad \rightarrow \quad F = \frac{5\,q\,L}{8} = 15.625\,\mathrm{kN}.$$

Osna sila N_s v stebričku je po absolutni vrednosti enaka sili F in je seveda tlačna: $N_s = -F = -15.625\,\mathrm{kN}$. Specifično deformacijo stebrička ε lahko izrazimo z osno silo, kot tudi z višinami stebrička v začetnem in deformiranem stanju:

$$\varepsilon = \frac{N_s}{EA} = -0.000130208,$$

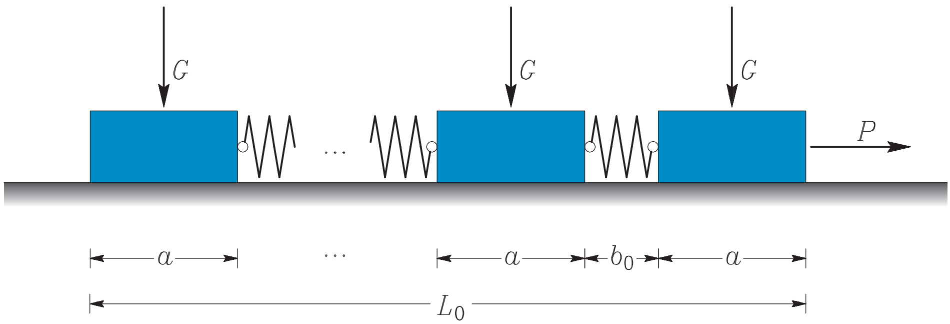
kjer je ploščina prečnega prereza stebrička enaka $A = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01\,\mathrm{m}^2$. Če zapišemo zvezo med specifično deformacijo ε in višinami v nedeformiranem H_0 in deformiranem $H = 2.4\,\mathrm{m}$ stanju, lahko izračunamo začetno višino stebrička

$$\varepsilon = \frac{H - H_0}{H_0} \quad \rightarrow \quad H_0 = \frac{H}{1+\varepsilon} = 2.40031\,\mathrm{m}.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Določi najmanjše število kvadrov v kompoziciji na sliki tako, da bo mirovala! Kvadre vlečemo s silo $P = 15\,\mathrm{N}$. Vse vzmeti so linearne (togost je $k_v = 10\,\mathrm{N/cm}$). Koeficient trenja in lepenja med kvadri in podlago je $k_t = 0.4$. Izračunaj tudi dolžino kompozicije L v deformirani legi! Na sliki je kompozicija prikazana v začetni, nedeformirani legi. $a = 10\,\mathrm{cm}$, $b_0 = 5\,\mathrm{cm}$, $G = 10\,\mathrm{N}$.



Rešitev: Sila trenja F_t je enaka produktu normalne sile N na podlago in koeficienta trenja oziroma lepenja k_t. V našem primeru je normalna sila kar enaka teži kvadra

$$F_t = N\,k_t = G\,k_t = 4\,\mathrm{N}.$$

Potrebno število kvadrov n, da bo kompozicija mirovala, določimo iz pogoja, da je rezultanta sil trenja oziroma lepenja na vseh kvadrih večje od sile P

$$n\,F_t > P \quad \rightarrow \quad n > \frac{P}{F_t} = 3.75 \quad \rightarrow \quad n = 4.$$

Sile v vzmeteh določimo iz ravnotežnih pogojev za dele kompozicije. Na primer, za silo v prvi vzmeti z desni strani zapišemo ravnotežne pogoje le za desni kvader, za drugo z desne zapišemo ravnotežne pogoje za prva dva kvadra z desne in tako naprej. Dobimo

$$\sum_{\text{desni kvader}} X = 0 \quad \rightarrow \quad P - F_t - F_{v1} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v1} = 11\,\mathrm{kN}$$

$$\sum_{\text{desna dva kvadra}} X = 0 \quad \rightarrow \quad P - 2F_t - F_{v2} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v2} = 7\,\mathrm{kN}$$

$$\sum_{\text{desni trije kvadri}} X = 0 \quad \rightarrow \quad P - 3F_t - F_{v3} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{v3} = 3\,\mathrm{kN}$$

Raztezke vzmeti izračunamo po enačbi $u_v = F_v/k_v$. Dolžina kompozicije v deformirani legi je

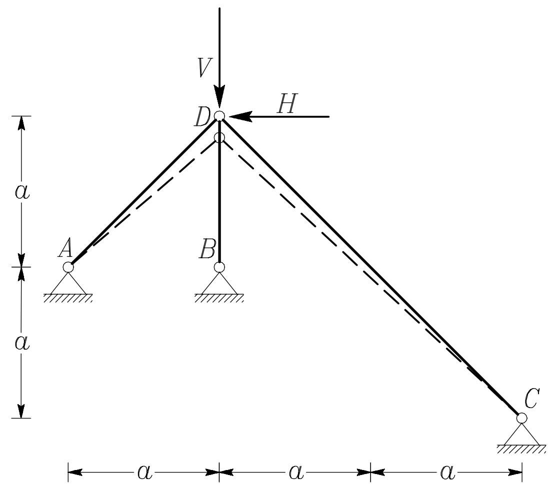
$$L = 4\,a + 3\,b_0 + \frac{F_{v1}}{k_v} + \frac{F_{v2}}{k_v} + \frac{F_{v3}}{k_v} = 57.1\,\mathrm{cm}.$$

2. naloga

Glej drugo nalogo za 3. letnike!

3. naloga

Na sliki je prikazano preprosto paličje v nedeformirani in deformirani (črtkana črta) legi. Deformiranje, ki ga enolično opišemo z navpičnim pomikom vozlišča D, je posledica točkovnih sil H in V. Vodoravnega pomika ni!



Določi osne sile v palicah, ki imajo vse enak prerez in so iz enakega materiala! Določi tudi velikost točkovnih sil H in V, ki povzročita opisano deformirano lego paličja!

$a = 2\,\mathrm{m}$, $w_D = 2\,\mathrm{cm}$, $EA = 200\,\mathrm{kN}$.

Rešitev: Specifične deformacije palic določimo na enak način kot v trtetji nalogi na predtekmovanju ali tretji nalogi sklepnega tekmovanja za 3. letnike. Rezultate prikazujemo v naslednji preglednici.

palica	l [m]	l' [m]	ε	N [kN]
AD	2.8284	2.8143	-0.0049874	-0.9975
BD	2.0000	1.9800	-0.0100000	-2.0000
CD	5.6569	5.6427	-0.0024969	-0.4994

Sili H in V določimo iz ravnotežnih pogojev za vozlišče D:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -H - N_{AD}\sin 45^\circ + N_{CD}\sin 45^\circ = 0$$

$$H = 0.3522\,\mathrm{kN},$$

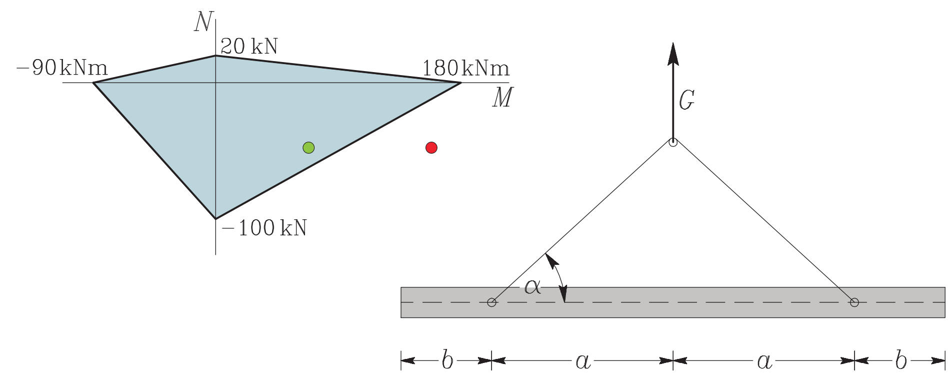
$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad -V - N_{AD}\cos 45^\circ - N_{BD} - N_{CD}\cos 45^\circ = 0$$

$$V = 3.0584\,\mathrm{kN}.$$

4. naloga

Določi minimalno dolžino neraztegljive vrvi za dvigovanje armiranobetonskih nosilcev. Pogoj za določitev minimalne dolžine vrvi določa kriterij mejne nosilnosti prečnega prereza nosilca. Edina obtežba na nosilec je lastna teža nosilca g. Predpostavimo, da je mejna nosilnost enaka za vse prečne prereze vzdolž osi nosilca. Mejno nosilnost prečnega prereza določa tako imenovani interakcijski diagram, ki povezuje vse mejne kombinacije obremenitev prečnega prereza. Preprost interakcijski diagram podajamo na sliki.

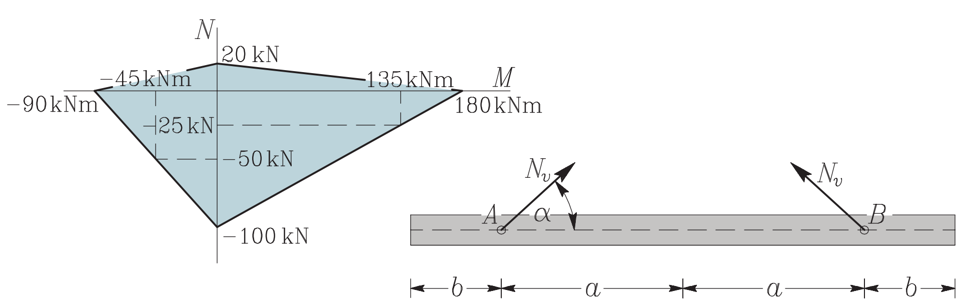
Pojasnimo uporabo interakcijskega diagrama še z dvema primeroma: Če je osna sila $N = -50\,\mathrm{kN}$ in upogibni moment $M = 75\,\mathrm{kNm}$, obremenitev prečnega prereza še ni dosegla meje nosilnosti. Če je osna sila $N = -50\,\mathrm{kN}$ in upogibni moment $M = 150\,\mathrm{kNm}$, obremenitev presega mejo nosilnosti – nosilec se poruši. Oba primera sta označena v sliki: zelena točka je varna, rdeča predstavlja porušitev. $g = 10\,\mathrm{kN/m}$, $a = 6\,\mathrm{m}$, $b = 3\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Kritična prereza, ki ju bomo morali preveriti sta na sredini armiranobetonskega nosilca in ob vpetju vrvi. Izračunajmo najprej reakcije nosilca, nato pa še notranje sile (osno silo in upogibni moment) na sredini nosilca in ob vpetju:

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad N_{vz}\, 2a - g\,(2a + 2b)\, a = 0 \quad \rightarrow \quad N_{vz} = 90\,\mathrm{kN},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{N_{vz}}{N_{vx}} \quad \rightarrow \quad N_{vx} = \frac{N_{vz}}{\mathrm{tg}\alpha}.$$



Osna sila v nosilcu je različna od nič led med vpetiščema, kjer je konstantna in enaka $N_x = -N_{vx}$. Upogibni moment ob vpetišču je negativen

$$M_y = -g\,b\,\frac{b}{2} = -45\,\mathrm{kNm}.$$

Upogibni moment na sredini nosilca je pozitiven

$$M_y = -g\,(a+b)\,\frac{a+b}{2} + N_{vz}\,a = 135\,\mathrm{kNm}.$$

Iz interakcijskega diagrama lahko odčitamo, da je pri momentu $M_y = -45\,\mathrm{kNm}$ kritična negativna osna sila $-50\,\mathrm{kN}$, pri momentu $M_y = 135\,\mathrm{kNm}$ pa je kritična negativna osna sila $-25\,\mathrm{kN}$. Očitno je torej, da je kritični prečni prerez na sredini nosilca. Največja osna sila, s katero smemo v tem primeru obremeniti nosilec je $N_x = -25\,\mathrm{kN}$.

Vodoravna komponenta sila v vrvi je enaka

$$N_{vx} = -N_x = 25\,\mathrm{kN}.$$

Kot α pa izračunamo po naslednji enačbi

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{N_{vz}}{N_{vx}} = \frac{90}{25} = 3.6 \quad \rightarrow \quad \alpha = 74.48^\circ.$$

Dolžina vrvi je

$$l_v = \frac{2\,a}{\cos\alpha} = 44.84\,\mathrm{m}.$$