5. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Goran Turk, Marjan Stanek in Rado Flajs

Ljubljana, 12. maj 1999

5. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki, Ljubljana 1999

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali že 5. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

> doc. dr. **Marjan Stanek** (predsednik), izr. prof. dr. **Stane Srpčič**, doc. dr. **Goran Turk**, dr. **Blaž Vratanar**, mag. **Rado Flajs**, **Dejan Zupan**, **Alenka Ambrož–Jurgec** (Srednja gradbena šola, Maribor), **Bojan Lutman** (Srednja tehniška in zdravstvena šola, Novo mesto), **Irena Posavec** (Srednja tehniška šola, Celje), **Marlenka Žolnir Petrič** (Srednja tehniška šola, Celje) in mag. **Duška Tomšič** (Srednja gradbena in ekonomska šola, Ljubljana).

Na tekmovanje smo povabili dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih gradbenih šol iz Celja, Ljubljane, Maribora in Novega mesta. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 113 učencev tretjega in četrtega letnika. V sredo, 14. aprila 1999 so na srednjih gradbenih šolah reševali enake predtekmovalne naloge. Petintrideset najuspešnejših se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 12. maja 1999 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Na sklepno tekmovanje so se v konkurenci tretjih letnikov uvrstili:

ime in priimek	**kraj**	**mentor**
Aleš Strašek Klemen Štarkel	Celje	Mišo Kneževič
Admir Isaković Andrej Opara	Ljubljana	Duška Tomšič
Miha Eder Peter Korošec Mihael Peternelj Andrej Rojs Boštjan Zorec Simon Žitnik	Maribor	Alenka Ambrož Jurgec
Katja Markovič Damjan Šumak Mitja Vovko	Novo mesto	Bojan Lutman

V konkurenci četrtih letnikov so se na sklepno tekmovanje uvrstili:

ime in priimek	**kraj**	**mentor**
Dejan Lavbič Vladimir Mijatović Damjan Pirc Dragica Tofant	Celje	Marlenka Žolnir-Petrič
Branko Bandelj Aleš Goršek Peter Jemec Robert Kranjc	Ljubljana	Majda Pregl in Duška Tomšič
Peter Cafuta Daniel Colnar Peter Fekonja Rok Golob Peter Korošec Mitja Perša Dejan Razlag Jožef Toplak	Maribor	Maja Lorger
Jure Balažič Marko Dular Matej Kuhar Alojz Vidmar Marjan Zorko Robert Zupan	Novo mesto	Bojan Lutman

Sklepno tekmovanje se je začelo 12. maja 1999 ob 11.00 na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci pod vodstvom doc. dr. Violete Bokan Bosiljkov in doc. dr. Jožeta Lopatiča ogledali Konstrukcijsko prometni laboratorij na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Pohvale in nagrade je dijakom podelil predstojnik Katedre za mehaniko na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani izr. prof. dr. Stane Srpčič, ki je tekmovanje tudi zaključil. Pohvaljeni so bili vsi udeleženci sklepnega tekmovanja, najuspešnejši pa so bili:

3. letnik			
ime in priimek	**kraj**	**nagrada**	**točke**
Miha Eder	Maribor	1. nagrada	93
Simon Žitnik	Maribor	2. nagrada	70
Damjan Šumak	Novo mesto	3. nagrada	60
Katja Markovič	Novo mesto	3. nagrada	58

4. letnik			
ime in priimek	**kraj**	**nagrada**	**točke**
Mitja Perša	Maribor	1. nagrada	63
Dejan Lavbič	Celje	2. nagrada	58
Matej Kuhar	Novo mesto	2. nagrada	55
Peter Fekonja	Maribor	3. nagrada	50
Robert Kranjc	Ljubljana	3. nagrada	50

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o uspešnosti srednješolk in srednješolcev pri reševanju nalog na predtekmovanju in sklepnem tekmovanju. Povprečna ocena na predtekmovanju je bila nekoliko nižja kot lani (lani 44.0 %), na sklepnem tekmovanju pa je bila v tretjih letnikih nekoliko višja, v četrtih pa precej nižja kot lani (37.1 %), ko so bile naloge za tretje in četrte letnike enake. Na sklepno tekmovanje so se uvrstili vsi, ki so na predtekmovanju dosegli vsaj 43 %.

predtekmovanje					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	14.33	4.19	13.67	5.89	38.11
najnižja ocena	0	0	0	0	9
najvišja ocena	25	24	25	25	89

sklepno tekmovanje za 3. letnike					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	9.23	13.46	8.46	7.62	38.77
najnižja ocena	0	0	0	0	5
najvišja ocena	25	25	25	25	93

sklepno tekmovanje za 4. letnike					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	6.09	14.55	4.09	7.36	32.09
najnižja ocena	0	0	0	0	8
najvišja ocena	20	25	15	25	63

Zanimivo je tudi pogledati, koliko tekmovalk in tekmovalcev je pravilno rešilo posamezne naloge. Vidimo, da sta bili za tekmovalce najtežji 1. in 3. naloga za četrte letnike na sklepnem tekmovanju, ki ju ni nihče rešil povsem pravilno, pa tudi povprečni oceni za ti dve nalogi sta bili najslabši. Na sklepnem tekmovanju so tekmovalci najboljše reševali drugo nalogo, na predtekmovanju pa prvo in tretjo.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
18 (22.8%)	2 (2.5%)	21 (26.6%)	2 (2.5%)
sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
1 (7.7%)	5 (38.5%)	1 (7.7%)	3 (23.1%)
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
0 (0.0%)	10 (45.5%)	0 (0.0%)	3 (13.6%)

Tekmovanje so finančno podprli:
Ministrstvo za šolstvo in šport,
Slovensko društvo za mehaniko,
LANCom, Maribor,
Bramac, Škocjan ter naslednje pedagoško–znanstvene enote
Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani
Prometno tehnični inštitut,
Inštitut za konstrukcije, potresno inženirstvo in računalništvo,
Katedra za masivne in lesene konstrukcije,
Katedra za mehaniko tal z laboratorijem,
Katedra za mehaniko tekočin z laboratorijem,
Katedra za metalne konstrukcije,
Katedra za preskušanje materialov in konstrukcij in
Katedra za splošno hidrotehniko.

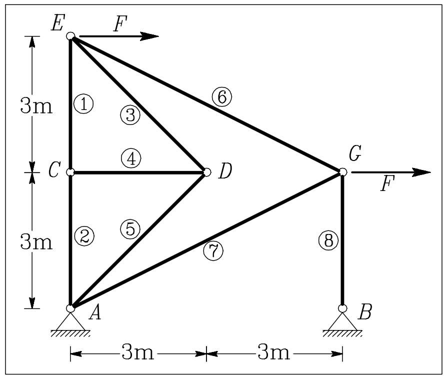
Vsem sponzorjem se za izkazano podporo lepo zahvaljujemo.

Letos so informacije o tekmovanju prvič na internetu, zaenkrat na naslovu:
`http://ucilnica.fgg.uni-lj.si/~gturk/htm/tekma/tekma.htm`

Naloge s predtekmovanja

1. naloga

Izračunaj osne sile v paličju. Sili F sta enaki 10 kN.



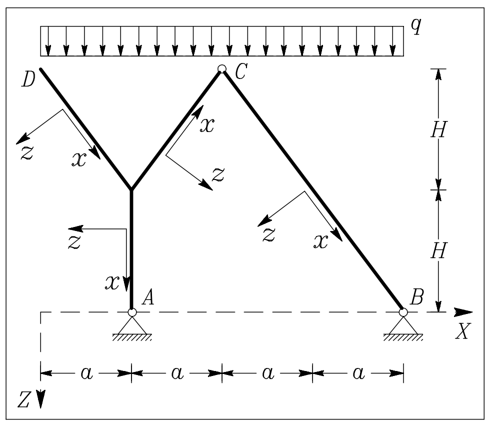
Rešitev: Iz ravnotežnih pogojev za vozlišči C in D sledi, da so sile v palicah 3, 4 in 5 enake nič, sili v palicah 1 in 2 pa sta enaki. Iz ravnotežnih pogojev za vozlišči E in G lahko izračunamo sile v palicah 1, 6, 7 in 8.

Končni rezultati so:

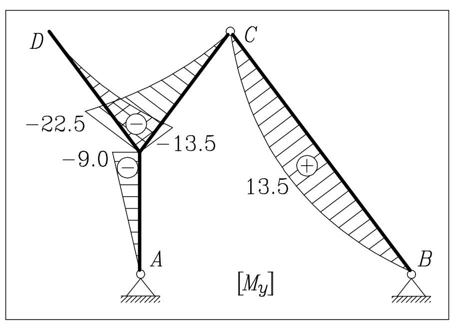
N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
5.00	5.00	0	0	0	−11.18	22.36	−15.00

2. naloga

Izračunaj upogibne momente v prikazani konstrukciji! Skiciraj tudi diagrame upogibnih momentov!
$a = 3\,\text{m}$,
$H = 4\,\text{m}$,
$q = 3\,\text{kN/m}$.



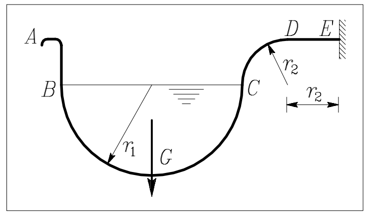
Rešitev: Najprej izračunamo reakcije v podporah A in B. Določimo jih iz treh ravnotežnih pogojev za celotno konstrukcijo in momentnega ravnotežnega pogoja glede na vozlišče C za del konstrukcije BC.



Reakcije so:
$A_X = 2.25\,\text{kN}$,
$A_Z = -24.00\,\text{kN}$,
$B_X = -2.25\,\text{kN}$ in
$B_Z = -12.00\,\text{kN}$.

3. naloga

V žlebu je višina vode taka, kot jo prikazuje slika. Določi upogibne momente v točkah A, B, C, D in E v enem izmed nosilcev, ki so postavljeni na razdalji $L = 2\,\mathrm{m}$. Obtežbo lahko določiš sam, saj poznaš gostoto ρ oziroma specifično težo γ vode.
$r_1 = 8\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 1\,\mathrm{cm}$.



Rešitev: Obtežbo določimo po naslednji enačbi:

$$G = \rho\, g\, \frac{r_1^2\,\pi}{2}\, L,$$

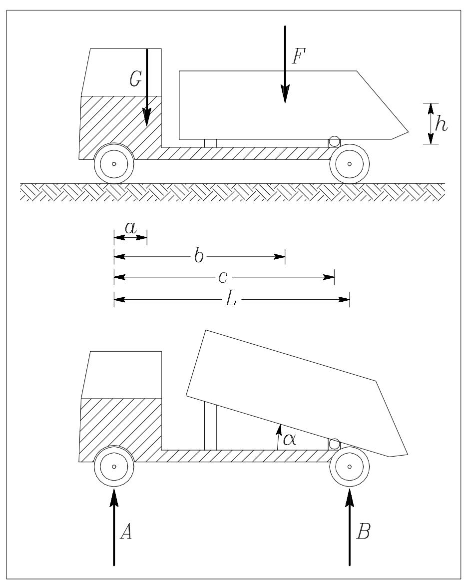
kjer je gostota vode enaka $\rho = 1\,\mathrm{kg/dm^3} = 0.001\,\mathrm{kg/cm^3}$, težnostni pospešek pa je $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Ko vstavimo vrednosti v zgornjo enačbo, dobimo $G = 197.2\,\mathrm{N}$. Ta sila deluje na sredini žleba (glej sliko).

Upogibna momenta v točkah A in B sta enaka nič ($M_A = M_B = 0$), saj sta to točki na prostem koncu konzolnega nosilca. Upogibne momente v ostalih točkah pa izračunamo po enačbah:

$$\begin{aligned} M_C &= G\, r_1 = 197.2 \cdot 8 = 1577.9\,\mathrm{Ncm}, \\ M_D &= G\,(r_1 + r_2) = 197.2 \cdot 9 = 1775.2\,\mathrm{Ncm}, \\ M_E &= G\,(r_1 + 2\,r_2) = 197.2 \cdot 10 = 1972.4\,\mathrm{Ncm}. \end{aligned}$$

4. naloga

Ko pri tovornjaku zvračamo tovor, se sile na osi koles spreminjajo. Določi funkcijo f, po kateri se spreminja obremenitev B na zadnjo os v odvisnosti od kota α, naklona dvignjenega tovornega dela tovornjaka. Razdalja h predstavlja višinsko razliko med lego težišča tovornega dela in točko, okoli katere se tovorni del obrača. Pri tem predpostavimo, da se sila F po velikosti in smeri ne spreminja. Skiciraj še graf funkcije $f(\alpha)$.
$a = 0.5\,\mathrm{m}$, $b = 4.5\,\mathrm{m}$, $c = 5.5\,\mathrm{m}$,
$L = 5.8\,\mathrm{m}$, $h = 0.5\,\mathrm{m}$,
$G = 15\,\mathrm{kN}$, $F = 20\,\mathrm{kN}$.



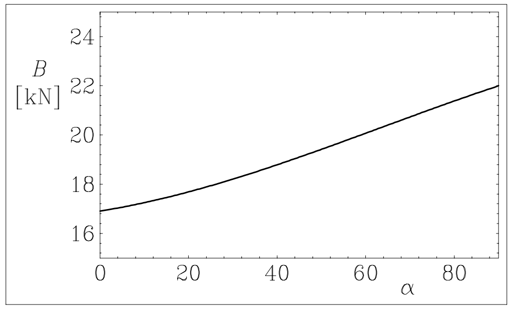
Rešitev: Obremenitev na zadnjo os B v odvisnosti od nagnjenosti tovornega dela tovornjaka izračunamo iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na točko A:

$$\sum M^A = 0 \quad \longrightarrow \quad G\,a + F[c - (c - b)\,\cos\alpha + h\,\sin\alpha] - B\,L = 0.$$

Iz tega izraza lahko izpeljemo izraz za obremenitev osi B v odvisnosti od kota α

$$B = 20.3 - 3.4\,\cos\alpha + 1.7\,\sin\alpha.$$

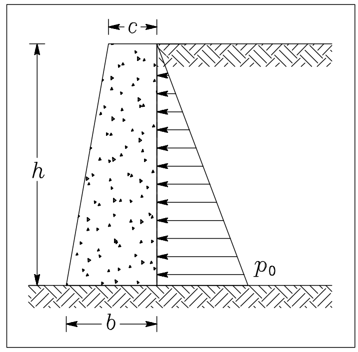
Graf te funkcije za kote od nič do 90° prikazujemo na sliki.



Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

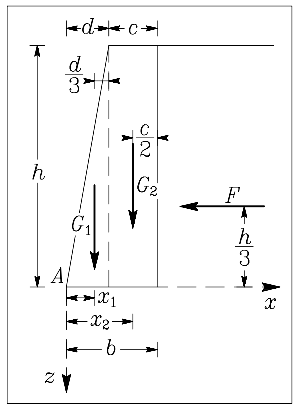
Zid, ki je prikazan na sliki, je obtežen s pritiskom zemljine in z lastno težo (γ je specifična teža zida). Določi spodnjo debelino b podpornega zida tako, da se zid ne bo prevrnil.
$\gamma = 20\,\mathrm{kN/m^3}$,
$p_0 = 15\,\mathrm{kN/m}$,
$c = 0.5\,\mathrm{m}$,
$h = 5\,\mathrm{m}$.



Rešitev: Pogoj, da se zid ne prevrne okoli točke A določimo z momentnim pogojem glede na točko A

$$\sum M_y \leq 0.$$

Momentni pogoj izrazimo s silami G_1 in G_2, ki predstavljata težo zida, in silo F, ki predstavlja obtežbo zemljine (glej sliko):



$$-G_1\,x_1 - G_2\,x_2 + F\,z \leq 0,$$

kjer so:

$$\begin{aligned} G_1 &= (b-c)h\gamma/2, & G_2 &= c\,h\,\gamma, & F &= p_0\,h/2, & \\ x_1 &= 2\,d/3, & x_2 &= b - c/2, & z &= h/3, & d = b - c. \end{aligned}$$

Če te oznake upoštevamo v momentnem pogoju in izraze preuredimo, dobimo kvadratno neenačbo

$$b^2 + b\,c - \frac{c^2}{2} - \frac{p_0\,h}{2\,\gamma} \geq 0.$$

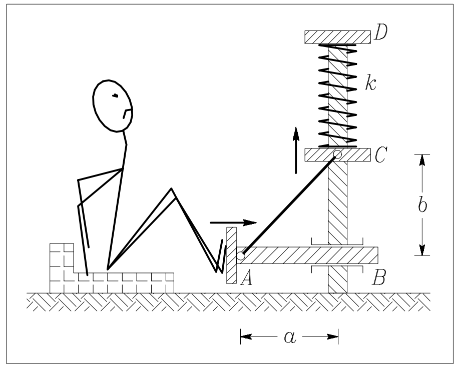
Ničli kvadratne enačbe sta

$$b_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{3\,c^2 + 2\,p_0\,h/\gamma}}{2}.$$

Fizikalni pomeni ima samo pozitivna ničla, iz katere dobimo končni rezultat

$$b \geq 1.186\,\mathrm{m}.$$

2. naloga



S kolikšno silo mora športnik pritisniti z nogami, da se del naprave AB vodoravno premakne za 2 cm. Ko se element AB premakne v desno, se zaradi prečke AC premakne element C in s tem stisne vzmet s togostjo k, ki leži med pomičnim elementom C in nepomičnim delom D. Naprava je izdelana tako, da v vezeh ni trenja. Sila v vzmeti je linearno odvisna od spremembe dolžine u_v vzmeti:

$F_v = k\,u_v$.

$k = 70\,\mathrm{kN/m}$, $a = 0.35\,\mathrm{m}$, $b = 0.40\,\mathrm{m}$.

Rešitev: Najprej izračunajmo, za koliko se premakne točka C, če se točka A premakne za 2 cm. Razdalja $\overline{AC} = c$ ostane tudi po premiku enaka

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0.35^2 + 0.40^2} = 0.5315\,\mathrm{m}.$$

Po premiku se razdalja $a = \overline{AB}$ zmanjša za 2 cm ($a' = 0.33\,\mathrm{m}$). Sedaj lahko izračunamo razdaljo b', to je razdaljo $\overline{BC}$ po premiku:

$$b' = \sqrt{c^2 - a'^2} = \sqrt{0.5315^2 - 0.33^2} = 0.4167\,\mathrm{m}.$$

Tako lahko izračunamo pomik točke C, ki je enak spremembi dolžine vzmeti

$$u_v = 0.4167 - 0.40 = 0.0167\,\mathrm{m}.$$

Sila v vzmeti je enaka

$$F_v = k\,u_v = 70 \cdot 0.0167 = 1.1657\,\mathrm{kN}.$$

Na ploščico C delujejo navpična sila vzmeti F_v, poševna sila nosilca N_{AC} in moment, ki preprečuje vrtenje te ploščice in nas pri izračunu ne zanima. Na ploščico A pa delujejo vodoravna sila športnika F, sila v nosilcu N_{AC} in prečna sila v nosilcu AB v točki A, ki nas pri izračunu ne zanima. Zato lahko iz ravnotežnih pogojev za navpične sile v točki C in vodoravne sile v točki A izrazimo silo F športnika na napravo:

$$\sum_C F_z = 0 \;\rightarrow\; N_{AC}\cos\alpha = F_v, \qquad \sum_A F_x = 0 \;\rightarrow\; N_{AC}\sin\alpha = F,$$

kjer kot α izračunamo za premaknjeno lego takole:

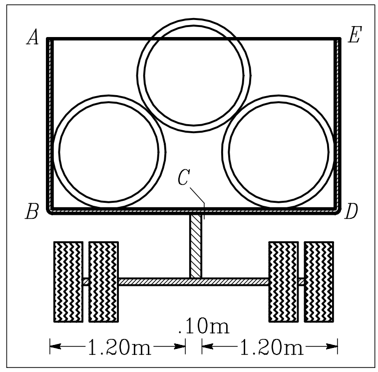
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{0.33}{0.4167} = 0.7920 \;\rightarrow\; \alpha = 38.38^\circ.$$

Sila športnika je

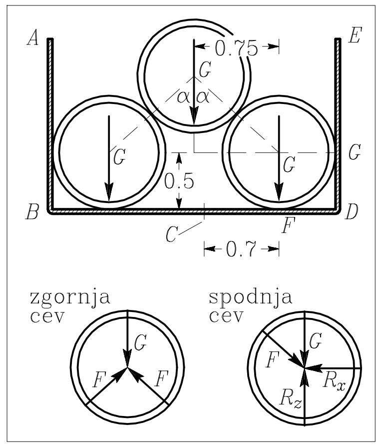
$$F = F_v\,\mathrm{tg}\alpha = 0.9233\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

Na 2.5 m širok tovornjak naložimo tri betonske cevi z zunanjim premerom 1 m. Teža en meter dolgega dela cevi je 2.3 kN. Cevi so podprte z nosilci $ABCDE$, ki so razporejeni na razdalji 0.5 m. Določite osno silo N in upogibni moment M ter ekstremni normalni napetosti σ_{min} in σ_{max} v prerezu C konzolnega nosilca CDE. Upoštevajte, da v stikih med cevmi ter cevmi in nosilci ni trenja. Nosilci so pravokotne oblike z višino $h = 2\,\mathrm{cm}$ in širino $b = 5\,\mathrm{cm}$.



$$\sigma_{min} = \frac{N}{b\,h} - \frac{6\,M}{b\,h^2} \qquad \sigma_{max} = \frac{N}{b\,h} + \frac{6\,M}{b\,h^2}$$



Rešitev: Teža cevi, ki jo mora prevzeti posamezni nosilec, je enaka

$$G = 2.3 \cdot 0.5 = 1.15\,\mathrm{kN}.$$

Kot α izračunamo po enačbi

$$\sin\alpha = \frac{0.75}{1.00} \;\rightarrow\; \alpha = 48.59^\circ.$$

Ker so stiki med cevmi gladki, spodnji cevi držita zgornjo cev s centričnima silama F. Velikost sile F lahko izračunamo iz ravnotežnih pogojev za zgornjo cev (glej sliko):

$$\sum F_z = 0 \;\rightarrow\; 2\,F\,\cos\alpha - G = 0 \;\rightarrow\; F = \frac{G}{2\,\cos\alpha} = 0.8693\,\mathrm{kN}.$$

Ker je tudi stik med cevjo in nosilcem gladek, cev deluje na nosilec z navpično silo R_z v točki F in vodoravno silo R_x v točki G. Sili izračunamo iz ravnotežnih pogojev za spodnjo cev (glej sliko):

$$R_z = G + F\cos\alpha = 1.725\,\mathrm{kN}, \qquad R_x = F\sin\alpha = 0.652\,\mathrm{kN}.$$

Izračunajmo osno silo in upogibni moment v točki C:

$$N = R_x = 0.652\,\mathrm{kN}, \quad M = 0.5\,R_x + 0.7R_z = 1.5335\,\mathrm{kNm} = 153.35\,\mathrm{kNcm}.$$

Najmanjšo in največjo napetost izračunamo po enačbah:

$$\sigma_{min} = \frac{N}{b\,h} - \frac{6\,M}{b\,h^2} = -45.94\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}, \quad \sigma_{max} = \frac{N}{b\,h} + \frac{6\,M}{b\,h^2} = 46.07\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}.$$

4. naloga

Na stolček so položene steklene šipe konstantne gostote in debeline. Vsaka šipa tehta 1 kg. Na prvo polje je položenih $n_1 = 13$, na drugo $n_2 = 6$, na tretje $n_3 = 9$ in na četrto polje sta položeni $n_4 = 2$ šipi. Stolček stoji na gladki podlagi. Izračunaj reakcije tal (sile R_A, R_B, R_C in R_D), ki zagotavljajo ravnotežje tako obteženega stolčka. Teže stolčka ni treba upoštevati.

Podatki: $a = 7.5\,\text{cm},\ b = 45\,\text{cm},\ c = 35\,\text{cm},\ g = 9.81 \approx 10\text{m/s}^2$.

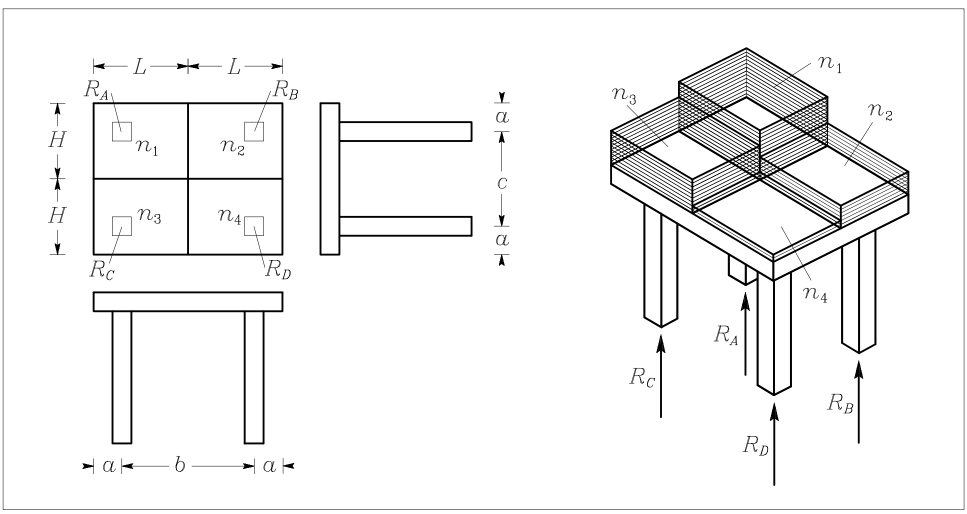
Namig: Stolček je statično nedoločena konstrukcija, zato pri poljubni razporeditvi šip reakcij ne moremo izračunati neposredno iz ravnotežnih enačb. Vseeno lahko v našem primeru izračunamo reakcije. Postopamo lahko takole:

- Pri določeni simetrični obtežbi moremo reakcije izračunati z upoštevanjem simetrije.
- Upoštevamo pravilo, da lahko reakcije zaradi skupne obteže q določimo z vsoto reakcij zaradi obtežbnih primerov q_1, q_2 in q_3.

Zgled: Obtežni primer

$$\begin{array}{|c|c|} \hline n_1 & n_2 \\ \hline n_3 & n_4 \\ \hline \end{array} = \overset{q}{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}} = 2 \overset{q_1}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}} + 1 \overset{q_2}{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}} + 2 \overset{q_3}{\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}}$$

smo razstavili na tri obtežne primere, za katere znamo izračunati reakcije.



Rešitev: Določimo najprej, s kolikšnimi faktorji moramo upoštevati posamezne obtežne primere q_1, q_2 in q_3. To naredimo tako, da zapišemo štiri enačbe, od katerih so tri neodvisne, četrta pa nam lahko služi za kontrolo:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= 13 = 1\,x_1 + 1\,x_2 + 0\,x_3 = x_1 + x_2,\\
n_2 &= 6 = 1\,x_1 + 1\,x_2 + 1\,x_3 = x_1 + x_2 + x_3,\\
n_3 &= 9 = 1\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = x_1,\\
n_4 &= 2 = 1\,x_1 + 0\,x_2 + 1\,x_3 = x_1 + x_3.
\end{aligned}
$$

Iz tretje enačbe lahko izračunamo $x_1 = 9$, iz prve določimo $x_2 = 13 - 9 = 4$ in iz četrte še $x_3 = 2 - 9 = -7$. Preverimo, če je izpolnjena druga enačba, ki je do sedaj nismo uporabili:

$$6 = x_1 + x_2 + x_3 = 9 + 4 - 7 = 6.$$

Ugotovili smo torej faktorje, s katerimi bomo morali upoštevati obtežne primere. Sedaj moramo določiti še reakcije tal za posamezne obtežne primere. Prvi primer je najpreprostejši, kjer so zaradi simetrije vse štiri podpore enake teži ene šipe:

$$R_A^1 = R_B^1 = R_C^1 = R_D^1 = G = 10\,\mathrm{N}.$$

Reakcije za drugega obtežnega primera določimo iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na os CD oziroma os AB. Pri tem upoštevamo, da sta zaradi simetrije reakciji v A in B enaki ($R_A^2 = R_B^2$). Podobno velja tudi $R_C^2 = R_D^2$.

$$
\begin{aligned}
\sum M^{CD} &= 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot R_A^2 \cdot 35 - 2 \cdot G \cdot 30 = 0 \;\rightarrow\; R_A^2 = R_B^2 = 8.571\,\mathrm{N},\\
\sum M^{AB} &= 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot R_C^2 \cdot 35 - 2 \cdot G \cdot 5 = 0 \;\rightarrow\; R_C^2 = R_D^2 = 1.429\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Podobno določimo tudi reakcije zaradi tretjega obtežnega primera, pri katerem zaradi simetrije valja $R_A^3 = R_C^3$ in $R_B^3 = R_D^3$.

$$
\begin{aligned}
\sum M^{BD} &= 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot R_A^3 \cdot 45 - 2 \cdot G \cdot 7.5 = 0 \;\rightarrow\; R_A^3 = R_C^3 = 1.667\,\mathrm{N},\\
\sum M^{AC} &= 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot R_B^3 \cdot 45 - 2 \cdot G \cdot 37.5 = 0 \;\rightarrow\; R_B^3 = R_D^3 = 8.333\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

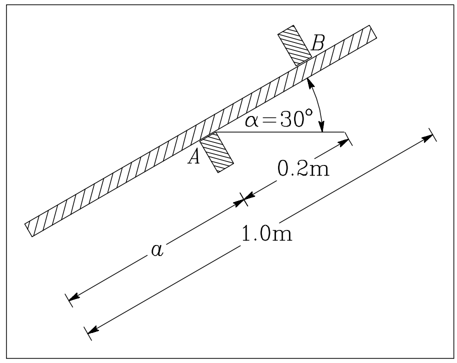
Reakcije zaradi skupne obtežbe izračunamo po enačbah:

$$
\begin{aligned}
R_A &= x_1\,R_A^1 + x_2\,R_A^2 + x_3\,R_A^3 = 112.6\,\mathrm{N},\\
R_B &= x_1\,R_B^1 + x_2\,R_B^2 + x_3\,R_B^3 = 66.0\,\mathrm{N},\\
R_C &= x_1\,R_C^1 + x_2\,R_C^2 + x_3\,R_C^3 = 84.0\,\mathrm{N},\\
R_D &= x_1\,R_D^1 + x_2\,R_D^2 + x_3\,R_D^3 = 37.4\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Ravno palico položimo med dve podpori A in B. Določi razdaljo a tako, da bo normalna sila v podpori B enaka teži palice. Kolikšen najmanj mora biti tedaj koeficient trenja (lepenja) k_t, da palica ne zdrsne. Dolžina palice je enaka 1 m. Upoštevamo le lastno težo palice.



Rešitev: Reakciji podpor v normalni smeri A_n in B_n izračunamo iz momentnih ravnotežnih pogojev glede na podpori A in B:

$$\sum M^A = 0 \quad \rightarrow \quad G\,\cos\alpha\,(a-0.5) - B_n\,0.2 = 0,$$
$$\sum M^B = 0 \quad \rightarrow \quad G\,\cos\alpha\,(a-0.5+0.2) - A_n\,0.2 = 0.$$

Dodatni pogoj je, da je normalna reakcija B_n po absolutni vrednosti enaka teži palice.

$$B_n = G.$$

Iz teh enačb lahko določimo razdaljo a

$$a = \frac{0.5\,\cos\alpha + 0.2}{\cos\alpha} = 0.7309\,\mathrm{m}$$

in drugo normalno reakcijo A_n

$$A_n = \frac{1}{0.2}\,[G\,\cos\alpha(a-0.5+0.2)] = 1.866\,G.$$

Iz vsote vseh sil vzdolž osi nosilca dobimo še pogoj za koeficient trenja (lepenja)

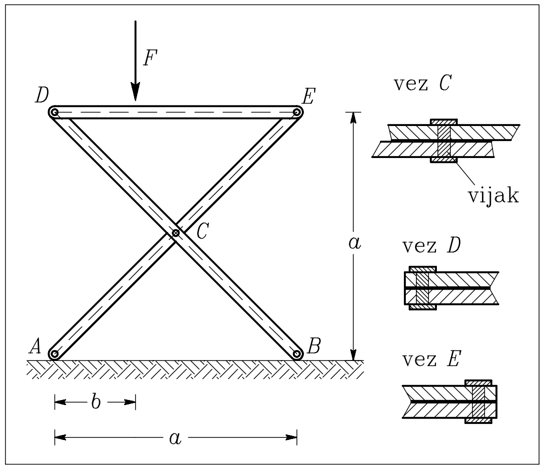
$$\sum F_t = 0 \quad \rightarrow \quad G\,\sin\alpha - A_n\,k_t - B_n\,k_t = 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \quad G\,\sin\alpha - 2.866\,G\,k_t = 0 \;\rightarrow\; k_t = 0.1745.$$

2. naloga

Glej 2. nalogo s sklepnega tekmovanja za 3. letnike.

3. naloga

Konstrukcija je položena na gladko podlago. Elementi konstrukcije so povezani z vijaki.



Določi največje strižne napetosti v vijakih v vozliščih C, D in E. Največjo strižno napetost v vijaku (prerez vijaka je okrogel) izračunamo z enačbo

$$\tau_{max} = \frac{4\,Q}{3\,\pi\,R^2}.$$

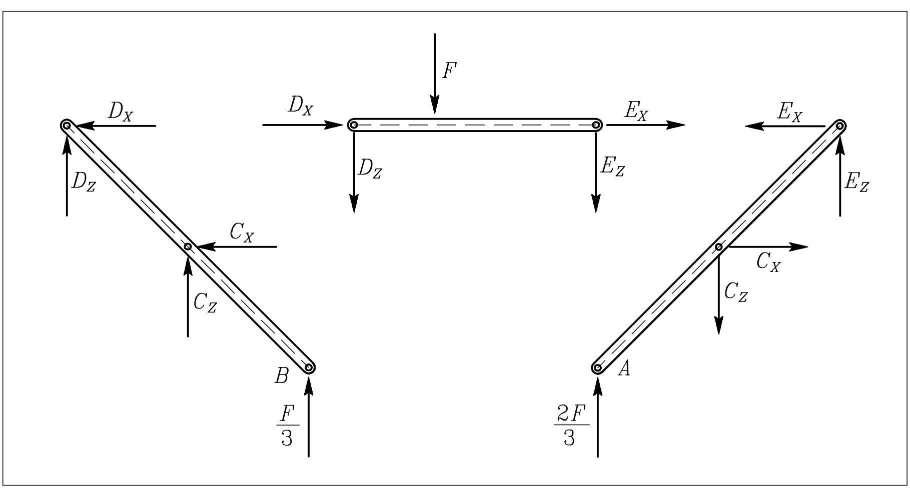
Q je prečna sila, s katero je obremenjen vijak oziroma sila v vezi, ki povezuje dva elementa konstrukcije. $R = 1.5$ cm je polmer prečnega prereza vijaka.
$F = 2$ kN, $a = 3$ m, $b = 1$ m.

Rešitev: Ker je konstrukcija prosto položena na gladko podlago, lahko izračunamo reakcije iz momentnih pogojev glede na točke A in B

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z\,a + F\,b = 0 \;\rightarrow\; B_Z = -\frac{F}{3} = -\frac{2}{3}\,\text{kN},$$

$$\sum M_Y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z\,a + F\,(a-b) = 0 \;\rightarrow\; A_Z = -\frac{2\,F}{3} = -\frac{4}{3}\,\text{kN}.$$

Sile v vezeh izračunamo tako, da konstrukcijo razstavimo na elemente in na mestih prerezov predpostavimo sile v vezeh (glej sliko). Nato iz ravnotežnih pogojev postopoma izračunamo vse sile v vezeh.



$$
\begin{array}{llll}
\sum\limits_{DE} M_Y^D = 0 & \rightarrow\ E_Z\, a + F\, b = 0 & & \rightarrow\ E_Z = -\dfrac{F}{3} = -\dfrac{2}{3}\,\mathrm{kN} \\
\sum\limits_{DE} M_Y^E = 0 & \rightarrow\ D_Z\, a + F\,(a-b) = 0 & & \rightarrow\ D_Z = -\dfrac{2\,F}{3} = -\dfrac{4}{3}\,\mathrm{kN} \\
\sum\limits_{AE} M_Y^C = 0 & \rightarrow\ E_Z\,\dfrac{a}{2} + E_X\,\dfrac{a}{2} - 2\,\dfrac{F}{3}\,\dfrac{a}{2} = 0 & & \rightarrow\ E_X = F = 2\,\mathrm{kN} \\
\sum\limits_{AE} X = 0 & \rightarrow\ C_X - E_X = 0 & & \rightarrow\ C_X = F = 2\,\mathrm{kN} \\
\sum\limits_{AE} Z = 0 & \rightarrow\ C_Z - E_Z - \dfrac{2\,F}{3} = 0 & & \rightarrow\ C_Z = \dfrac{F}{3} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{kN} \\
\sum\limits_{DE} X = 0 & \rightarrow\ D_X + E_X = 0 & & \rightarrow\ D_X = -F = -2\,\mathrm{kN}
\end{array}
$$

Sile v vezeh, ki jih morajo prevzeti vijaki, izračunamo po naslednjih enačbah

$$
\begin{aligned}
C_v &= \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} = 2.108\,\mathrm{kN}, \\
D_v &= \sqrt{D_X^2 + D_Z^2} = 2.404\,\mathrm{kN}, \\
E_v &= \sqrt{E_X^2 + E_Z^2} = 2.108\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

Končno lahko izračunamo največje strižne napetosti

$$
\begin{aligned}
\tau_{C,max} &= \frac{4\,C_v}{3\,\pi\,R^2} = 0.398\,\mathrm{kN/cm^2}, \\
\tau_{D,max} &= \frac{4\,D_v}{3\,\pi\,R^2} = 0.453\,\mathrm{kN/cm^2}, \\
\tau_{E,max} &= \frac{4\,E_v}{3\,\pi\,R^2} = 0.398\,\mathrm{kN/cm^2}.
\end{aligned}
$$

4. naloga

Glej 4. nalogo s sklepnega tekmovanja za 3. letnike.

TURK, Goran; STANEK, Marjan; FLAJS, Rado
5. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana

Tisk: TIČ d.o.o., Ljubljana

Obseg: 17 strani

Naklada: 100 izvodov

Ljubljana, 1999