

:Kuhljevi dnevi 2005

:zbornik del

20

05

# :KUHLJEVI DNEVI

:zbornik del

:uredila Jože Korelc in Dejan Zupan

:izdalo Slovensko društvo za mehaniko

:Podčetrtek, 22.-23. september 2005

:Slovensko društvo za mehaniko

:september 2005

*Zbornik del*

# *Kuhljevi dnevi 2005*

Podčetrtek, 22. – 23. september 2005

*Uredila:*

**Jože Korelc**  
**Dejan Zupan**



# *Kuhljevi dnevi 2005*

Podčetrtek, 22. – 23. september 2005

## **ZBORNİK DEL**

### **Uredila:**

Jože Korelc  
Dejan Zupan

### **Recenzija:**

Miha Boltežar  
Boštjan Brank  
Jože Korelc  
Franc Kosel  
George Mejak  
Miran Saje  
Leopold Škerget  
Boris Štok  
Dejan Zupan

### **Izdalo in založilo:**

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO

Jamova 2, Ljubljana  
september, 2005

### **Grafično oblikovanje:**

Veronika Saje

### **Tisk in vezava:**

Laserprint grafika, Ljubljana

### **Naklada:**

90 izvodov

## Kazalo

<b>J. Avsec in M. Oblak</b> <i>Vibracijska analiza krmilnega sistema v dieselskem motorju</i> .....	1 – 8
<b>J. Avsec in M. Oblak</b> <i>Uporaba statistične mehanike v nanotehnologijah</i> .....	9 – 16
<b>M. Batista</b> <i>Nekateri modeli trenja pri kotaljenju togih teles po ravnini</i> .....	17 – 24
<b>B. Bezenšek Z. Ren J. Flašker in J.W. Hancock</b> <i>Eksperimentalno ovrednotenje novega statističnega modela krhkega loma nehomogenih materialov</i> .....	25 – 32
<b>U. Bohinc in A. Ibrahimbegović</b> <i>Robustni končni elementi za plošče</i> .....	33 – 40
<b>A. Bombač in I. Žun</b> <i>Eksperimentalna raziskava učinkovitosti modificiranega turbinskega mešala</i> ..	41 – 48
<b>S. Bratina, M. Saje in I. Planinc</b> <i>Uklonske sile armiranobetonskih stebrov</i> .....	49 – 56
<b>M. Brojan, F. Kosel in T. Videnič</b> <i>Analiza nosilnosti palic v nadkritičnem območju</i> .....	57 – 64
<b>B. Čas, M. Saje in I. Planinc</b> <i>Lokalni uklon ravninskih paličnih konstrukcij</i> .....	65 – 76
<b>G. Čepon in M. Boltežar</b> <i>O prečnih, viskozno dušenih nihanjih osno premikajočega se prednapetega nosilca</i> .....	77 – 84
<b>P. Čermelj in M. Boltežar</b> <i>Vključitev lokaliziranih nelinearnosti v dinamske modele kompleksnih struktur</i>	85 – 92



<b>R. Flajs in M. Saje</b> <i>O konvergenzi nekonformnega štirikotnega končnega elementa RQ6</i> .....	93 – 100
<b>M. Gams, M. Saje in I. Planinc</b> <i>Nelinearna dinamična analiza ravninskih elastičnih nosilcev</i> .....	101 – 108
<b>B. Harl in M. Kegl</b> <i>Optimizacija prerezov plastičnih okvirjev</i> .....	109 – 116
<b>M. Jakomin, F. Kosel, M. Batista in T. Kosel</b> <i>Preskok sistema plitke osnosimetrične bimetalne lupine z nelinearno teorijo</i>	117 – 126
<b>M. Kegl, B. Brank in M. Oblak</b> <i>Optimiranje oblike uklonsko občutljivih ploskovnih konstrukcij</i> .....	127 – 134
<b>M. Knez, S. Glodež in Z. Ren</b> <i>Zmanjšanje poligonskega efekta verižnih gonil z uporabo kardanskega zgloba</i>	135 – 142
<b>F. Kosel, C. Jin, T. Kosel in T. Videnič</b> <i>Postopno krivljenje ločnih nosilcev z elastično linearno utrjevalnim reološkim modelom</i> .....	143 – 150
<b>F. Kosel in J. Stropnik</b> <i>Eksperimentalno spremljanje poteka temperature v dinamično obremenjenem konzolnem nosilcu</i> .....	151 – 158
<b>J. Kramer, R. Jecl in L. Škerget</b> <i>Nevrtinčni tok tekočine okrog kvadra</i> .....	159 – 166
<b>N. Kristanič in J. Korelc</b> <i>Simbolno-numerični pristop k občutljivostni analizi in optimizaciji konstrukcij</i> .....	167 – 174
<b>A. Lesnika, B. Harl in M. Kegl</b> <i>Elasto-plastični nosilec: nadomeščanje meritev z numeriko</i> .....	175 – 182
<b>G. Mejak</b> <i>Kompatibilnostni pogoji napetostnega tenzorja linearnega elastičnega materiala</i> .....	183 – 190
<b>N. Mole, G. Bobovnik, J. Kutin, B. Štok in I. Bajsić</b> <i>Simulacija odziva Coriolisovega merilnika masnega toka upoštevajoč sklopljenost tekočine in trdnine</i> .....	191 – 198

**M. Otrin in M. Boltežar**

*Prenos vibracij preko ukrivljene jeklene vrvi z upoštevanjem strukturnega dušenja* ..... 199 – 206

**L. Pavlovčič in D. Beg**

*Vpliv začetnih geometrijskih nepopolnosti na strižno nosilnost vzdolžno ojačanih panelov* ..... 207 – 214

**M. Požarnik, A. Racina in M. Kind**

*Eksperimentalna analiza mešanja v Taylor-Couettovem reaktorju na makro in mezo nivojih s pomočjo metode LIF* ..... 215 – 222

**R. Pušenjak**

*Dinamika harmoničnega nihala s suhim trenjem* ..... 223 – 230

**R. Pušenjak in M. Oblak**

*Kombinacijska resonanca nosilca s togo-členkastim vpetjem z uporabo modificirane Lindstedt-Poincarejeve metode in metode koračnega harmonskega ravnovesja* ..... 231 – 238

**M. Ramšak in M. Hriberšek**

*Numerična simulacija ploščatega prenosnika toplote s kovinsko peno* ..... 239 – 246

**J. Ravnik, L. Škerget in M. Hriberšek**

*Nasproti hitrostno vrtinčni formulaciji simulacije velikih vrtincev z metodo robnih elementov* ..... 247 – 254

**Z. Rek in I. Žun**

*Vpliv parametra Aspect Ratio na konvergenco numerične simulacije toka tekočine v mikro kanalu* ..... 255 – 262

**T. Rojc in B. Štok**

*Dva pristopa k uporabi konvektnega koordinatnega sistema v analizi deformabilnih teles pri velikih deformacijah* ..... 263 – 266

**S. Schnabl, I. Planinc, M. Saje in G. Turk**

*Točna analiza dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem striga in zdrsa* ..... 267 – 274

**I. Simonovski, K.-F. Nilsson in L. Cizelj**

*Vpliv kristalografske orientacije zrn na mikrostrukturno razpoke v nerjavnem jeklu 316L* ..... 275 – 282

<b>V. Šajn, B. Juriševič, F. Kosel in M. Junkar</b> <i>Numerična in eksperimentalna analiza vodnega toka skozi šobo</i> .....	283 – 290
<b>V. Šajn, D. Nožak in F. Kosel</b> <i>Gradientna metoda zgostitve mreže pri simulaciji stisljivih tokov</i> .....	291 – 298
<b>P. Ternik, J. Marn in Z. Žunič</b> <i>Turbulent flow of inelastic generalized Newtonian fluid in a channel : Comparison of turbulent models</i> .....	299 – 310
<b>M. Vesenjajk, Z. Ren in A. Öchsner</b> <i>Vpliv tlaka v zaprtih porah na makroskopske lastnosti celičnega materiala</i> ..	311 – 318
<b>T. Videnič in F. Kosel</b> <i>Snovno nelinearna mehanika in ovirana povračljivost pri gradivih z oblikovnim spominom</i> .....	319 – 326
<b>M. Zadravec in M. Hriberšek</b> <i>Primerjava turbulentnih modelov pri numeričnem preračunu mešalne posode z Rushtonovim mešalom</i> .....	327 – 334
<b>B. Zafošnik, Z. Ren, J. Flašker in G. Mishuris</b> <i>Določevanje parametrov mehanike loma v Williamsovi enačbi</i> .....	335 – 342
<b>D. Zupan in M. Saje</b> <i>Nelinearna statična analiza vodnih toboganov</i> .....	343 – 352



## *Vibracijska analiza krmilnega sistema v dieselskem motorju*

J. Avsec<sup>1</sup> in M. Oblak<sup>2</sup>

### *The vibrational analysis of diesel engine valve gear*

**Povzetek.** V dieselskem motorju se pri projektiranju krmilnega sistema srečujemo z velikim številom prepletajočih se problemov. Velike napetosti, ki so se pojavljale, so bile vzrok pretirane obrabe dročnikov na odmični gredi dieselskega motorja. Članek opisuje vibracijsko analizo za nov tip odmikala MULTICAM. Hkrati smo s pomočjo Runge-Kutta metode analizirali tudi vpliv nelinearnosti ventilske vzmeti. S pomočjo novega tipa odmikala smo zmanjšali Hertzove tlake na kontaktu med odmikalom ter dročnikom [1,2,3].

**Abstract.** In any diesel engine, valve gear design is often accompanied by a large numbers of perplexing problems which have to be solved. In our case the problem is the big wear of exhaust cam profile after 3000 h on the engine. The reason lies because of big stresses at the top of cam. This paper describes the vibrational analysis of a new cam type MULTICAM. We have analyzed on the basis of Runge-Kutta method the influence of nonlinearity of valve spring. With the new cam profile we reduced the Hertz pressure on the contact between cam and cam follower.

## 1 Uvod

Osnovna naloga krmilja [1,2] je krmiljenje izpušnih in polnilnih ventilov. Pri motorjih z notranjim zgorevanjem ima krmilni sistem pomemben vpliv na potek moči in momentov kakor tudi na kemično sestavo izpušnih plinov. Sile, ki so potrebne za krmiljenje so zelo velike zaradi ogromnih pospeškov, ki se pojavljajo v krmilnem sistemu. Razen sil pa povzročajo obrabo in poškodbe krmilnega sistema tudi reaktivni reagensi ter visoke temperature, ki se pojavljajo predvsem na izpušni strani.

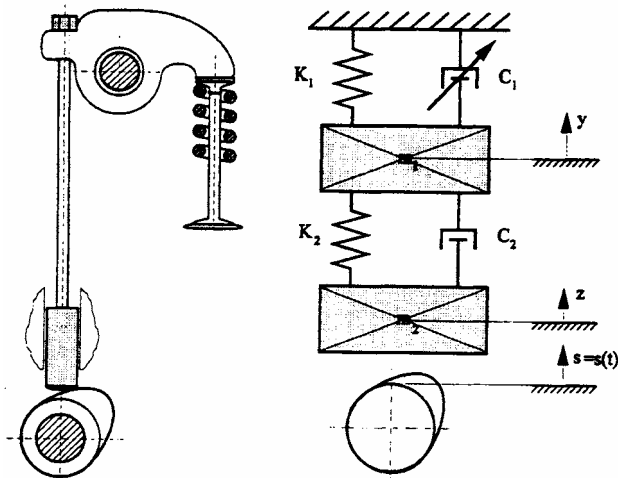
Krmilni sistem v motorjih z notranjim zgorevanjem v tovornjakih in avtobusih je v zadnjem desetletju dosegel velik napredek. Kljub temu je v večini dieselskih motorjev še ostal klasični sistem krmiljenja kot je prikazan na sliki 1. V Otto motorjih se že uveljavlja

---

<sup>1</sup> Doc. Dr., Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

<sup>2</sup> Red. Prof. Dr., Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

elektro-hidravlični sistem za odpiranje ventilov v serijski proizvodnji. V dirkalnih motorjih so v uporabi ventili krmiljeni s pnevmatskimi sistemi ali drugimi visoko sofisticiranimi sistemi.



Slika 1: Krmilni diagram dieselskega motorja [1]

## 2 Obstoječi krmilni sistem

V našem primeru smo s pomočjo meritev na dieselskem motorju opazili veliko obrabo še posebej na izpušnem odmikalu [2]. Zato smo v ta namen razvili odmikala MULTICAM izdelana posebej za naš obstoječi krmilni sistem [3]. MULTICAM odmikala so razvita na osnovi sedmih krivulj. Hkrati smo izbrali optimalne vrednosti koeficientov za doseglo najugodnejših karakteristik in lastnosti opisanega motorja.

## 3 Vibracijski linearni dinamični model

Dinamično analizo realnega krmilnega sistema lahko zapišemo s pomočjo parcialnih diferencialnih enačb. Rešitev teh enačb je zahtevna naloga. Med različnimi pristopi k rešitvi problema, smo uporabili model, ki ga lahko popišemo s pomočjo treh navadnih diferencialnih enačb drugega reda [4]. V tem matematičnem modelu so elementi krmilja (glej sliko 2) predstavljeni s koncentriranimi masami, ki so medsebojno povezane z vzmetmi brez mase s togostmi  $c_i$ . Med posameznimi masami delujejo tudi dušilne sile z dušilnimi konstantami  $b_i$ . Tudi rotacijsko gibanje nihalk je zamenjano s translatorskim gibanjem.

Masa  $m_0$  predstavlja maso dela odmične gredi, ki pripada krmilnemu sistemu.

$$m_0 = m_{bv} \quad (1)$$

Za gibanje mase  $m_1$  lahko zapišemo naslednjo enačbo:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_0 \ddot{x}_0 + b_s (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_v \dot{x}_0 + c_s (x_1 - x_2) + c_{bv} x_0 \quad (2)$$

$$x_0 = x_1 - h_p \quad (3)$$

kjer  $x_1$  predstavlja dejanski dvig dročnika,  $h_p$  pa predstavlja teoretični dvig dročnika, ki je določen na osnovi oblike odmikala. Za maso  $m_2$  lahko zapišemo naslednjo enačbo:

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_k(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + c_k(x_2 - x_3) + c_s(x_2 - x_1) + b_s(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (4)$$

Ko je dvig dročnika manjši od zračnosti v motorju  $h_p < h_z$ , lahko zapišemo naslednjo enačbo:

$$m_3 \ddot{x}_3 + b_k(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_k(x_3 - x_2) = 0 \quad (4)$$

V trenutku, ko postane dvig dročnika večji od zračnosti v motorju ( $h_p \geq h_z$ ) se vključi v dinamiko krmilnega sistema tudi masa  $m_4$ . Njej nasprotuje tako vzmetna sila  $F_0$ , kot tudi plinska sila  $F_g$  v valju motorja delujoča na ventile:

$$(m_3 + m_4) \ddot{x}_3 + (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) b_k + (x_3 - x_2) c_k + b_0 \dot{x}_3 + c_0 x_3 = -F_0 - F_g \quad (5)$$

Z ureditvijo enačb (2) in (3) lahko zapišemo naslednjo enačbo:

$$(m_1 + m_0) \ddot{x}_1 + b_s(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_s(x_1 - x_2) + b_v \dot{x}_1 + c_v x_1 = m_0 \ddot{h}_p + c_{bv} h_p \quad (6)$$

Z ureditvijo enačb (4) in (5) dobimo naslednjo enačbo:

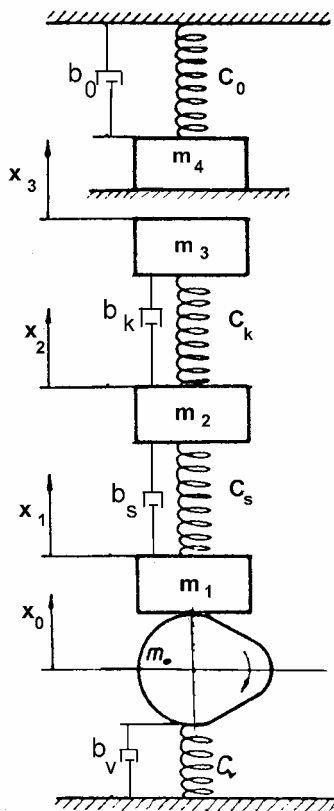
$$m_3^* \ddot{x}_3 + b_k(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + c_k(x_3 - x_2) + b_0^* \dot{x}_3 + c_0^* x_3 = F^* \quad (7)$$

$$\text{za } h_p < h_z, \quad m_3^* = m_3, \quad b_0^* = 0, \quad c_0^* = 0, \quad F^* = 0 \quad (8)$$

$$\text{za } h_p \geq h_z, \quad m_3^* = m_3 + m_4, \quad b_0^* = 0, \quad c_0^* = c_0, \quad F^* = -F_0 - F_g \quad (9)$$

Oznaka  $x_0$  (enačba 3) predstavlja pomik, oziroma deformacijo odmične gredi. Vpeljimo v system enačb (2-9) nove spremenljivke:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - \text{dejanski dvig dročnika,} \\ z_2 &= \text{deformacija odmičnega droga,} \\ z_3 &= \text{deformacija nihalk} \end{aligned} \quad (10)$$



Slika 2: Predstavitev matematičnega modela

S pomočjo enačbe (10) lahko zapišemo enačbe (2-9) v naslednji obliki:

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = x_1 - z_2 = z_1 - z_2, \quad x_3 = x_2 - z_3 = z_1 - z_2 - z_3 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_0 & 0 & 0 \\ m_2 & -m_2 & 0 \\ m_3^* & -m_3^* & -m_3^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{bv} & b_s & 0 \\ 0 & -b_s & b_k \\ b_0^* & -b_0^* & -(b_0^* + b_k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{bv} & C_s & 0 \\ 0 & -C_s & C_k \\ C_0^* & -C_0^* & -(C_0^* + C_k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_0 \ddot{h}_p + C_{bv} h_p \\ 0 \\ F^* \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Zapišimo enačbo (12) v matrični obliki:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{F_t\} \quad (13)$$

Predstavljeno diferencialno enačbo lahko rešimo z metodo končnih razlik.

$$\{z\}_{t+\Delta t} = [A]^{-1}(\{F\}_t - [B]\{z\}_t - [G]\{z\}_{t-\Delta t}) \quad (14)$$

$$[A] = \frac{1}{\Delta t^2}[M] + \frac{1}{2\Delta t}[C], [B] = [K] - \frac{2}{\Delta t^2}[M], [G] = \frac{1}{\Delta t^2}[M] - \frac{1}{2\Delta t}[C] \quad (15)$$

Za nedušene sisteme lahko zapišemo enačbo (12) v obliki, ki je primerna za reševanje s pomočjo Runge-Kutta metode.

$$\dot{z}_1 = z_4, \dot{z}_2 = z_5, \dot{z}_3 = z_6 \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{Bmatrix} = [M]^{-1} \left[ \{F\} - [C] \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} - [K] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} \right] \quad (17)$$

#### 4 Reševanje nelinearnega modela z metodo Runge-Kutta

V članku smo raziskovali tudi vplive nelinearnosti ventilske vzmeti. Vzmetna sila je predstavljena v modelu z naslednjo enačbo:

$$F_{\text{spring}} = C_{01}x + C_{02}x^n \quad (18)$$

Prvi člen v enačbi (18) je linearni člen, drugi člen pa popisuje nelinearno obnašanje ventilske vzmeti. S pomočjo enačbe (18) lahko zapišemo model za uporabo Runge-Kutta numerične metode:

$$\dot{z}_1 = z_4, \dot{z}_2 = z_5, \dot{z}_3 = z_6 \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{Bmatrix} = [M]^{-1} \left[ \{F\} - [C] \begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{Bmatrix} - [K] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{02}(z_1 - z_2 - z_3)^n \end{Bmatrix} \right] \quad (20)$$

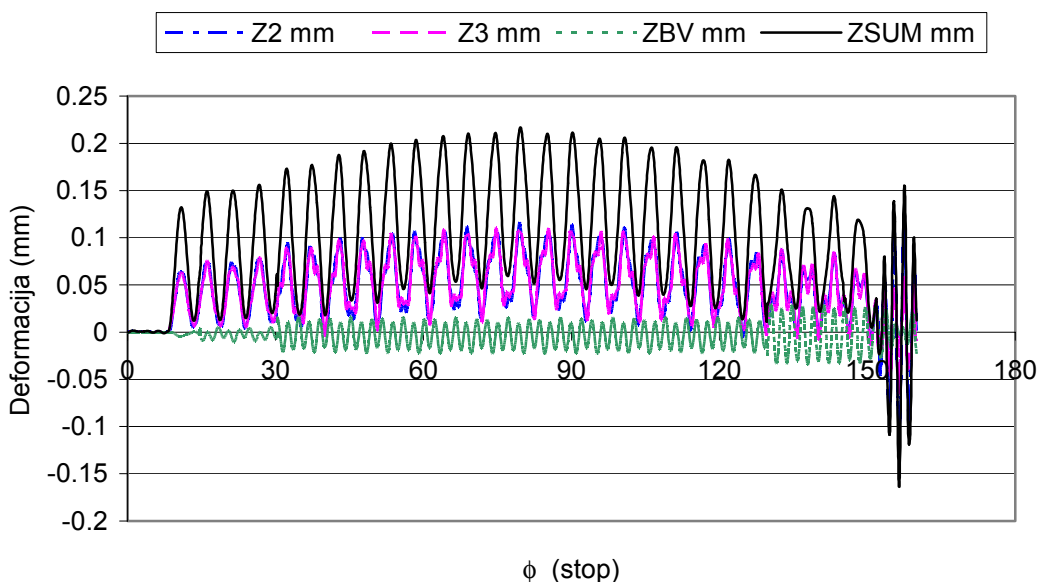


## 5 Rezultati ter diskusija

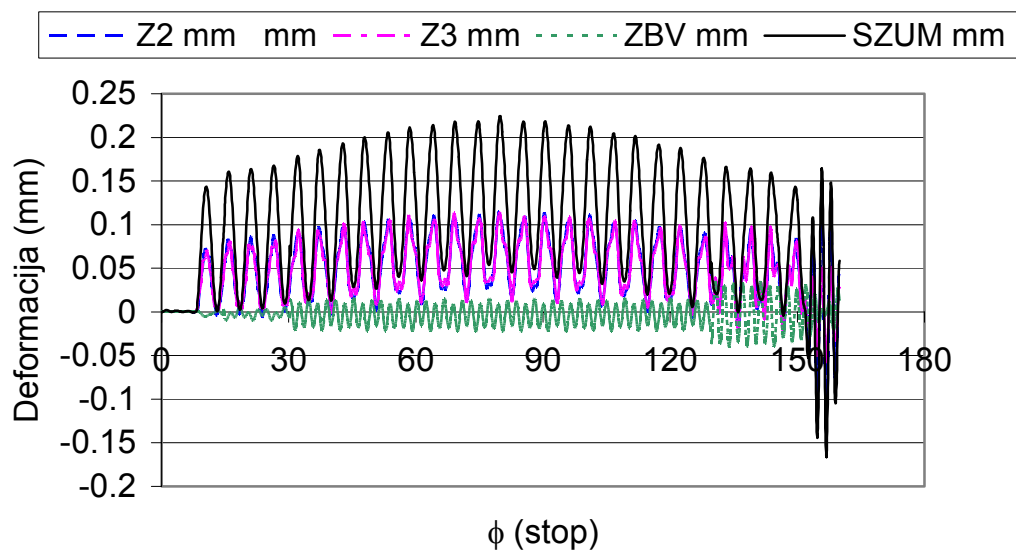
Na osnovi predstavljenega vibracijskega modela lahko izračunavamo in analiziramo nekatere zelo pomembne parametre. Pri konstruiranju in analizi odmikala smo želeli zmanjšati napetosti še posebej na vrhu odmikala. Zaradi omenjenih problemov smo uporabili lasten model odmikala MULTICAM. Istočasno smo želeli analizirati vpliv nelinearnosti ventilske vzmeti in analizirati deformacije, ki nastopajo pri omenjenem dinamičnem modelu.

Slika 3 prikazuje deformacijo odmičnega droga (Z2), deformacijo nihanke (Z3), deformacijo odmične gredi (ZBV) in celotno deformacijo mehanizma (ZSUM) s pomočjo metode končnih razlik. Slika 4 prikazuje deformacije dobljene s pomočjo Runge-Kutta 4 metode. Sliki 5 in 6 pa prikazujeta dvig dročnika (Z1) in pomike analitično izračunanih s pomočjo Runge-Kutta metode za rešitev nelinearnega modela za četrto stopnjo nelinearnosti. Slike (3-6) so izračunane za število obratov ročične gredi  $n=500 \text{ min}^{-1}$ .

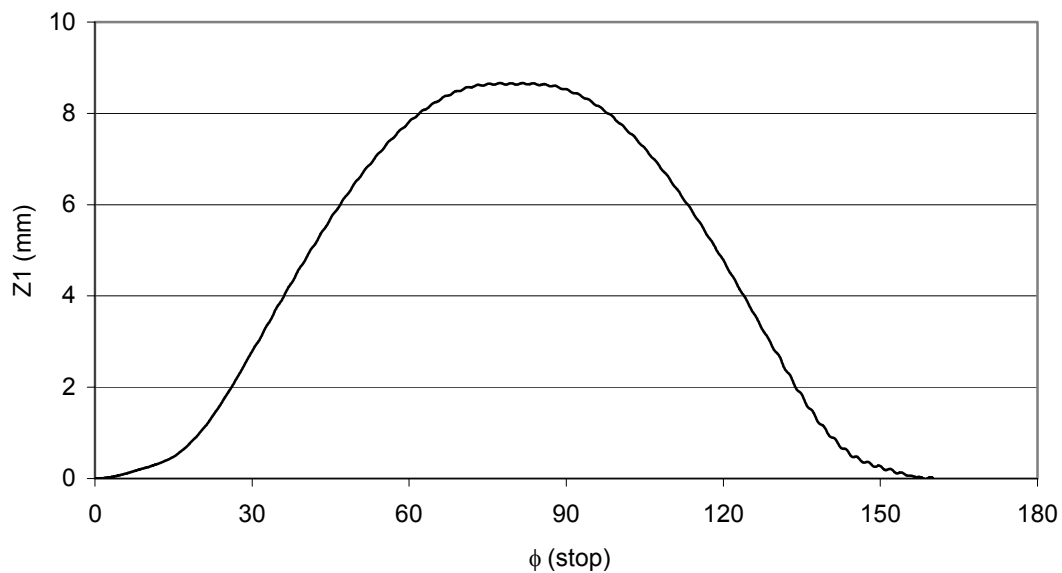
Kot je razvidno iz slik 3 in 4 se rezultati med obema numeričnima metodama zelo dobro ujemajo. Sliki 5 in 6 pa nakazujeta da ima nelinearnost ventilske vzmeti majhen vpliv velikost največjih pomikov in tudi na obliko frekvenčnega spektra.



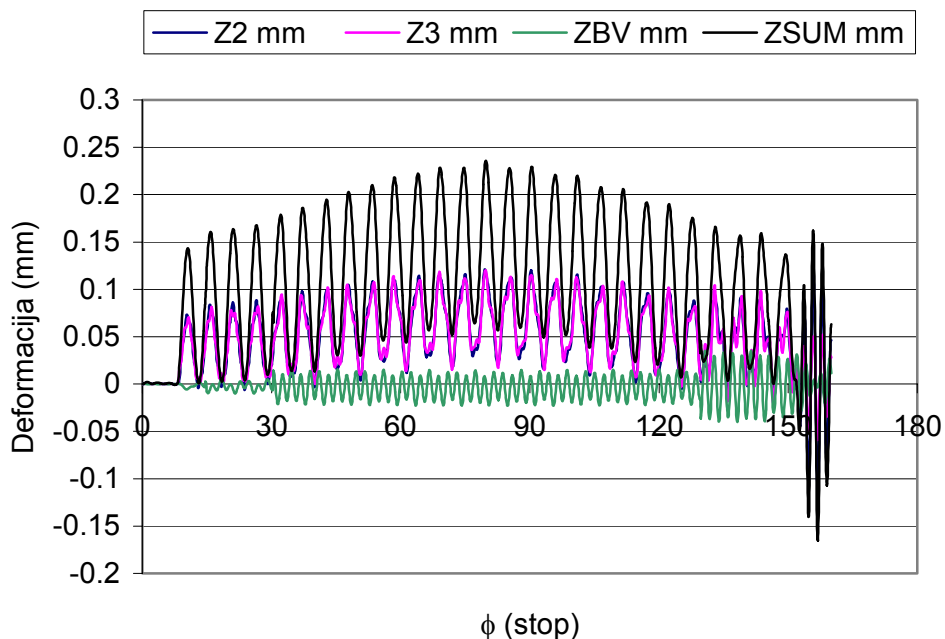
Slika 3: Numerični rezultati dobljeni s pomočjo metode končnih razlik



Slika 4: Numerični rezultati dobljeni s pomočjo Runge-Kutta 4 metode



Slika 5: Dvig odmikala za primer nelinearnosti ventilske vzmeti četrtega reda



Slika 6: Deformacije za nelinearnost ventilske vzmeti četrtega reda

## 6 Zaključek

Članek prikazuje vibracijsko analizo za nov tip odmikala MULTICAM. Predstavljeno odmikalo je bilo razvito z namenom, da smo zmanjšali obrabo izpušnega odmikala. Hkrati smo s pomočjo modela analizirali vpliv nelinearnosti ventilske vzmeti. Končni cilj raziskav je ugotoviti pogoje in parametre, ki vodijo do kaotičnega obnašanja krmilnega sistema [5].

## Literatura

- [1] OBLAK, M., CIGLARIČ, I., BUTINAR, B., "Optimal design of pushrod actuated valve train cam-follower mechanism", Ninth World Congress on the Theory of the Machines and Mechanisms, 1995, Milano, Italija.
- [2] AVSEC, J., MARČIČ, M. "Izboljšave na krmilnem sistemu", Konferenca in razstava Inovativna avtomobilska tehnologija IAT'97, Novo mesto, 17.-18. april 1997. *Zbornik referatov*, (IAT). Ljubljana: Zveza strojnih inženirjev in tehnikov Slovenije, Skupina za vozila in motorje, 1997, str. 45-52.
- [3] AVSEC, J., MARČIČ, M., Oblak M. "Valve gear refinement". *Journal of Mechanical Design*. 2002, vol. 124, No. 1, pp. 86-90.
- [4] AVSEC, J., OBLAK, M., "Valve Gear Vibrational analysis and development of new cam design". V: The International Conference on Computational Methods, December 15-17, 2004, Furama RiverFront, Singapore. *Conference digest*. [Faculty of engineering, National university of Singapore, cop. 2004].
- [5] ZAVODNEY, L.D., "The response of a single-degree-of-freedom system with quadratic and cubic non-linearities to a principal parametric resonance", *Journal of Sound and Vibration*, 1989, Vol. 129, No. 3, pp. 417-442.



## *Uporaba statistične mehanike v nanotehnologijah*

J. Avsec<sup>1</sup> in M. Oblak<sup>2</sup>

### *The application of statistical mechanics for nanotechnology*

**Povzetek.** Članek obravnava model izračuna toplotne prevodnosti za nanostrukture s pomočjo statistične mehanike. V tem trenutku so nanofluidi izjemno zanimivo raziskovalno področje zaradi veliko še nepojasnjenih efektov. Analitični rezultati so primerjani z izmerjenimi rezultati in kažejo relativno dobro ujemanje.

**Abstract.** The paper features the mathematical model of computing of thermal conductivity for nanofluids. At that moment the study of nanostructures is very attractive study due to many unknown phenomena. Analytical results are compared with experimental data and they show on a relatively good agreement.

## 1 Uvod

Še pred enim ali dvema desetletjema so mnogi priznani strokovnjaki menili, da so modeli in teorije klasičnega strojništva v principu že razviti in možnosti nadaljnjega razvoja povsem izčrpane. To pomeni, da bo preostalo nam inženirjem v prihodnosti samo področje "finega brušenja" in prilagajanja modelov. Na srečo so se povsem zmotili. Naštejmo le nekaj osnovnih novosti pri modeliranju oziroma pri uporabi in prenosu temeljnih znanj v inženirsko prakso.

1. Teorija kaosa je v področju celotne mehanike prinesla revolucijo, kakršne področje strojništva ni doživelo že dolgo časa. Kar na enkrat so bili nelinearni členi v enačbah izjemnega pomena. Do danes so uspeli s pomočjo teorije kaosa pojasniti in napovedovati večino problemov iz področja nelinearne mehanike, nekaj problemov kot je na primer turbulence pa še ni zadovoljivo rešenih.

2. Nanomehanika in mikromehanika postajata iz leta v leto bolj pomembni v moderni industriji. Ideje o nevidnih letalih, črpalkah.. so danes realnost. Hkrati so se v moderni mehaniki pojavili problemi, o katerih se nam prej še sanjalo ni. V toku plina s premerom

---

<sup>1</sup> Doc. Dr., Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

<sup>2</sup> Red. Prof. Dr., Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

cevi nekaj nanometrov, se termodinamične in transportne lastnosti plina zaradi velikega vpliva površinskih efektov modelirajo povsem drugače. Tudi enačbe klasične hidromehanike ne veljajo. Poleg temperature in tlaka postaja pomembna tudi število Knudsena. Eulerjeva enačba daje slabe rezultate skoraj v celotnem področju, Navier-Stokesova enačba pri številu Knudsena 0.1, Burnettova enačba pa pri številu Knudsena 10. Če pa želimo analizirati prosti molekularni tok v mikro in nanokanalih se moramo poslužiti neravnotežne mehanike in originalne Boltzmannove enačbe. V tem primeru lahko izračunavamo hidromehanske probleme v celotnem območju Knudsena, temperatur in tlakov.

3. Nanofluidi izjemnih lastnosti postajajo gospodarsko vse bolj pomembni. Zaenkrat se poslužuje pri modeliranju nanodelci-fluid empiričnih mešalnih pravil, ki pa dejansko ne obravnavajo bistva. Poleg nanofluidov prodira v inženersko prakso tudi uporaba nanotub, ki imajo še boljše lastnosti.....

4. Neravnotežna mehanika bo prinesla revolucijo v področju modeliranja neravnotežnih pojavov. Danes teorija še ni v celoti analitično rešena. Teorija Boltzmann je osnova teorije, vendar do danes še niso razviti analitični postopki za več-atomne molekule in za sisteme v področjih velikih gostot. S pomočjo teorije neravnotežne mehanike bomo lahko v prihodnosti reševali probleme mehanike fluidov in termomehanike v strojništvu na povsem drugačen način kot jih danes.

Toplotno prevodnost v splošnem lahko popišemo kot  $\underline{\lambda}$  s komponentami  $\lambda_{ij}$  ( $i,j=x,y,z$ ) in  $i$ -ta komponento toplotnega toka  $q_i$  lahko popišemo s pomočjo Fourierjevega zakona [1]:

$$q_i = - \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} (\nabla T)_j \quad (1)$$

Za snovi kjer je  $\lambda_{ij}$  z lastnostmi kubične simetričnosti je tenzor toplotne prevodnosti diagonalen ( $\lambda_{ii}=\lambda$ , and  $\lambda_{ij}=0$  ko  $i \neq j$ ). V tem primeru je toplotni tok vzporeden s temperaturnim gradientom in enačba (1) postane skalarne oblike.

## 2 Analitični model za izračunavanje toplotne prevodnosti v tekočinah

S pomočjo statistične neravnotežne mehanike [2,3] lahko izrazimo toplotno prevodnost  $\lambda$ , viskoznost  $\eta$  in dilatacijsko viskoznost  $\kappa$ :

$$\lambda = \frac{2k^2T}{3m} [A, A], \quad \eta = \frac{1}{10} kT [B, B], \quad \kappa = kT [\Gamma, \Gamma], \quad (2)$$

kjer so A,B in  $\Gamma$  zapletene skalarne, vektorske in tenzorske funkcije. V predstavljenem članku je uvedena predpostavka da so pri ne zelo visokih temperaturah zasedena samo osnovna vibracijska stanja ter da trki med rotirajočimi molekulami izmenjajo le nekaj kvantov energije, torej je vpliv rotacije molekul okoli svojih glavnih osi majhen. Članek zajema sisteme več-atomnih molekul za izračun viskoznosti in toplotne prevodnosti. S pomočjo Boltzmannove enačbe lahko s pomočjo teorije, ki obravnava majhne temperaturne in hitrostne gradiente v sistemu molekul, izračunamo viskoznost  $\eta_0$  in toplotno prevodnost  $\lambda_0$  za idealne pline:

$$\eta_0 = \frac{5kT}{8\Omega^{(2,2)}} \left( 1 + \frac{3}{49} \left( \frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)^2 \right), \lambda_0 = \frac{25kTC_V}{16M\Omega^{(2,2)}} \left( 1 + \frac{2}{21} \left( \frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)^2 \right), \quad (3)$$

v enačbi (3) predstavlja  $M$  molekulska masa snovi,  $\Omega^{(l,s)}$  pa je transportni integral trka. Za primere zapletenih medmolekularnih potencialov ne obstajajo analitične rešitve integralov trka. V tem primeru se poslužimo numeričnih simulacij in interpolacij. V našem primeru smo uporabili interpolacijo za Lennard-Jonesov medmolekularni potencial [2]:

$$\Omega^{(l,s)*} = \frac{A}{T^{*B}} + \frac{C}{\exp(DT^*)} + \frac{E}{\exp(FT^*)} + \frac{G}{\exp(HT^*)} + RT^{*B} \sin(ST^{*W} - P). \quad (4)$$

Enačba (4) vsebuje 12 koeficientov ( $A, B, C, D, E, F, G, H, R, S, W, P$ ) za 16 različnih integralov trka. V predstavljenem članku smo uporabili Chung-Lee-Starlingov model [3] za določevanje viskoznosti in toplotne prevodnosti. Predstavljene enačbe so dobljene s pomočjo kinetične teorije plinov in korelacij z izmerjenimi rezultati. V korelacijah uporabljamo acentrični faktor  $\omega$ , reduciran dipolni moment  $\mu_r$  in asociacijski parameter  $\kappa$ , ki je rezultat prisotnosti vodikove vezi med atomi v molekulah. Zapišimo viskoznost v razredčenih sistemih:

$$\eta_0(T) = 26.69579 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{MT}}{\Omega^{(2,2)*} \sigma^2} F_c. \quad (5)$$

Koeficient  $F_c$  je določen na osnovi primerjave med analitičnimi rezultati in izmerjenimi vrednostmi:

$$F_c = 1 - 0.2756\omega + 0.059035\mu_r^4 + \kappa, \quad (6)$$

Pri višjih tlakih se enačba (5) razširi, tako da upoštevamo tudi vplive temperaturnih in tlačnih polj na viskoznost:

$$\eta = \eta_k + \eta_p, \quad (7)$$

$$\eta_k = \eta_0 \left( \frac{1}{G_2} + A_6 Y \right), \quad (8)$$

Podoben postopek naredimo za toplotno prevodnost:

$$\lambda = \lambda_k + \lambda_p, \quad (9)$$

$$\lambda_k = \lambda_0 \left( \frac{1}{H_2} + B_6 Y \right). \quad (10)$$

Za področje nizkih tlakov lahko zapišemo toplotno prevodnost s pomočjo kinetične teorije plinov:

$$\lambda_0 = 3119.41 \left( \frac{\eta_0}{M} \right) \psi. \quad (11)$$

kjer  $\psi$  predstavlja vpliv prispevka energije zaradi večatomnih molekul. V našem primeru smo uporabili teorijo Taxmana [2].

$$\psi = 1 + C_{\text{int}}^* \left\{ \frac{0.2665 + \frac{(0.215 - 1.061\beta)}{Z_{\text{coll}}} + 0.28288 \frac{C_{\text{int}}^*}{Z_{\text{coll}}}}{\beta + \frac{0.6366}{Z_{\text{coll}}} + \frac{1.061\beta C_{\text{int}}^*}{Z_{\text{coll}}}} \right\}, \quad (12)$$

kjer je  $C_{\text{int}}^*$  je reducirana izohorna toplotna kapaciteta in  $Z_{\text{coll}}$  imenujemo število trkov, ki je definirano kot število, ki je potrebno za izmenjavo kvanta energije pri izmenjavi notranje energije z translacijsko energijo. Za število trkov smo uporabili naslednjo aproksimacijo:

$$Z_{\text{coll}} = 2.0 + 10.5 \frac{T}{T_c}. \quad (13)$$

Toplotne kapacitete smo izračunali s pomočjo ravnotežne statistične mehanike. Transportni faktor  $\beta$  lahko izračunamo analitično kot razmerje med viskoznostjo in produktom z difuzivnostjo in gostoto. V našem primeru smo uporabili korelacijsko funkcijo, ki je bila dobljena s pomočjo faktorja acentričnosti  $\omega$  [1]:

$$\beta = 0.786231 - 0.710907\omega + 1.31583\omega^2, \quad (14)$$

Za višje tlake je potrebno upoštevati še:

$$\lambda_p = \left( 0.1272 \left( \frac{T_c}{M} \right)^{1/2} \frac{1}{V_c^{2/3}} \right) B_7 Y^2 H_2 \left( \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad (15)$$

kjer je  $\lambda_p$  v W/mK.

$$H_2 = \left\{ B_1 [1 - \exp(-B_4 Y)] \frac{1}{Y} + B_2 G_1 \exp(B_5 Y) + B_3 G_1 \right\} \frac{1}{B_1 B_4 + B_2 + B_3} \quad (16)$$

Konstante  $B_1$ - $B_7$  so linearne funkcije faktorja acentričnosti, reduciranega dipolnega momenta in asociacijskega faktorja.

$$B_i = b_0(i) + b_1(i)\omega + b_2(i)\mu_r^4 + b_3(i)\kappa, \quad i=1, 10 \quad (17)$$

### 3 Izračun toplotne prevodnosti v trdnih snoveh

Za izračun toplotne prevodnosti v trdnih snoveh sta najpomembnejša dva prispevka, prispevek toplotne prevodnosti zaradi elektronov in fononov.

$$\lambda = \lambda_{\text{el}} + \lambda_{\text{ph}} \quad (18)$$

Še posebej v kovinah je glavni izvor prenosa električnega in toplotnega toka množica prevodniških elektronov. V kvantni mehaniki je nihanje atomov v kristalni mreži kvantizirano, podobno kot je kvantizirano elektromagnetno valovanje. Kvantom elektromagnetnega valovanja (fotonom) ustrezajo kvanti mrežnega nihanja (fononi). Za fonone velja Bosejeva porazdelitev. Vpliv fononov na velikost toplotne prevodnosti je še posebej velik pri vseh nekovinah.

**Prispevek elektronov k toplotni prevodnosti**

Osnovni izraz za toplotno prevodnost  $\lambda_{el}$  lahko izračunamo s pomočjo teorije za elektronski plin

$$\lambda_{el} = \frac{1}{3} n c_{el} v_{el} l_{el} \quad (19)$$

kjer je  $c_{el}$  specifična toplota elektronskega plina,  $n$  je število prevodnih elektronov v določenem volumnu,  $v_{el}$  je hitrost elektronov in  $l_{el}$  je elektronska srednja prosta pot. V predstavljenem članku smo za izračun toplotne prevodnosti zaradi elektronov uporabili model Eliashberga [3].

$$\frac{1}{\lambda_{el}} = \frac{(4\pi)^2}{L_0 T \omega_{pl}^2} \times \int_0^{\omega_{max}} \frac{\hbar\omega / k_B T}{\left[ \exp(\hbar\omega / k_B T - 1) \right] \left[ 1 - \exp(-\hbar\omega / k_B T) \right]} \times \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \right] \alpha_{tr}^2 F(\omega) + \frac{3}{2\pi^2} \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \alpha_{tr}^2 F(\omega) \right\} d\omega \quad (20)$$

S pomočjo Einsteinovega modela za popis obnašanja fononov lahko na osnovi enačbe (20) izpeljemo naslednjo enačbo [3]:

$$\frac{1}{\lambda_{el}} = k_E C_{har} (T / \theta_E) \left[ \frac{A}{B} + \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{1}{2\pi^2} \left( 3 - \frac{A}{B} \right) \right] \quad (21)$$

V enačbi (21) predstavlja  $k_E$  konstanto,  $\theta_E$  Einsteinovo temperaturo in  $C_{har}$  specifično toploto za Einsteinov model:

$$C_{har} = 3Nk_B T \left( \frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)}{\left[ \exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right) - 1 \right]^2} \quad (22)$$

Motokabbir and Grimwall (1981) sta raziskovala omenjeno enačbo in ugotovila, da je razmerje  $A/B$  skoraj v vseh primerih približno 1.

**Prispevek fononov k toplotni prevodnosti**

V izotropni trdnini lahko izračunamo toplotno prevodnost kot integral:

$$\lambda_{ph} = \frac{N}{3V} v_g^2 \int_0^{\omega_{max}} \tau(\omega) C(\omega) F(\omega) d\omega \quad (23)$$



Za področje nižjih temperature lahko s pomočjo kvantne mehanike izpeljemo naslednjo enačbo:

$$\lambda_{ph} = \lambda_0 \exp\left(-\frac{\theta_D}{T}\right) \quad (24)$$

kjer je  $\lambda_0$  is the konstanta. Za visoke temperature ( $T \gg \theta_D$ ) nam kvantna mehanika daje naslednjo rešitev:

$$\lambda_{ph} = \frac{B}{(2\pi)^3} \frac{M\Omega_a^{1/3} k_B^3 \theta_D^3}{\hbar^3 \gamma^2 T} \quad (25)$$

kjer predstavlja B brezdimenzijsko konstanto,  $\Omega_a$  imenujemo atomski volumen in  $\gamma$  Grüneisen konstanto. Povezavo med Einsteinovo in Debyeovo temperaturo lahko zapišemo z naslednjo enačbo:

$$\theta_E = (0.72..0.75)\theta_D \quad (26)$$

#### 4 Izračun toplotne prevodnosti v nanostrukturah

V zmech ki jih tvorijo nanodelci s tekočinami se pojavljajo različni še ne povsem raziskani vplivi kot je na primer: mikronsko gibanje delcev, tudi površinske lastnosti mikrodolcev lahko bistveno prispevajo k prenosu toplote v nanofluidih. Kot so pokazali eksperimentalni rezultati je toplotna prevodnost v nanofluidih odvisna od volumske koncentracije delcev v void in to mnogo bolj kot je to pridelcih, ki so večji od 15 nanometrov. Hamilton in Crosser (HC) sta razvila model in teorijo za dvofazne zmesi v odvisnosti od volumske koncentracije delcev:

$$\lambda = \lambda_0 \left\{ \frac{\lambda_p + (n-1)\lambda_0 - (n-1)\alpha(\lambda_0 - \lambda_p)}{\lambda_p + (n-1)\lambda_0 + \alpha(\lambda_0 - \lambda_p)} \right\} \quad (26)$$

kjer  $\lambda$  predstavlja toplotno prevodnost zmesi,  $\lambda_0$  je toplotna prevodnost kapljevine,  $\lambda_p$  je toplotna prevodnost delcev,  $\alpha$  je volumska koncentracija delcev in  $n$  imenujemo factor oblike, ki je podan z naslednjo enačbo:

$$n = \frac{3}{\Psi} \quad (27)$$

V enačbi (27) imenujemo koeficient  $\psi$  is sferičnost. Volumska koncentracija delcev  $\alpha$  je definirana z naslednjo enačbo:

$$\alpha = \frac{V_p}{V_0 + V_p} = n \frac{\pi}{6} d_p^3 \quad (28)$$

kjer predstavlja koeficient  $n$  število delcev v volumnu in  $d_p$  je povprečni premer delcev.

HC model daje zelo dobre rezultate za dvofazne zmesi kjer je premer delcev večji kot 15nm. Danes obstaja v svetu več teorij zakaj prihaja pri delcih, kateri imajo povprečni premer

manjši kot 15 nm do izjemnega skoka v toplotni prevodnosti. Mi smo uporabili model, kjer okrog nanodelcev prihaja do tvorbe mejne plasti, ki je debela nekaj nm. Ni še popolnoma raziskano, kakšne termomehanske lastnosti ima omenjena mejna plast.



Slika 1: Tvorba mejne plasti v nanofluidih

Uporabili smo model, da ima omenjena mejna plast nekoliko drugačne lastnosti kot nanodelci. V ta namen smo uporabili teorijo Xue-ja [4], ki je razvil model na osnovi Maxwellove teorije in povprečne polarizacijske teorije.

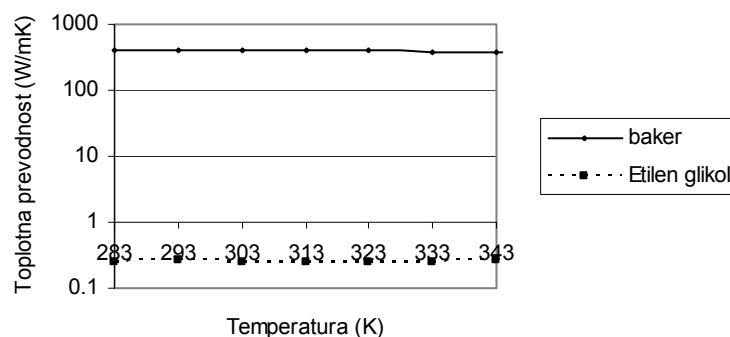
$$9 \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda_r} \right) \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda + \lambda_0} + \frac{\alpha}{\lambda_r} \left[ \frac{\lambda - \lambda_{c,x}}{\lambda + B_{2,x}(\lambda_{c,x} - \lambda_e)} + 4 \frac{\lambda - \lambda_{c,y}}{2\lambda + (1 - B_{2,x})(\lambda_{c,y} - \lambda)} \right] = 0 \quad (29)$$

$$\lambda_{c,j} = \lambda_1 \frac{(1 - B_{2,j})\lambda_1 + B_{2,j}\lambda_2 + (1 - B_{2,j})\lambda_r(\lambda_2 - \lambda_1)}{(1 - B_{2,j})\lambda_1 + B_{2,j}\lambda_2 - B_{2,j}\lambda_r(\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (30)$$

Predpostavili smo, da ima naš nanodelec eliptično obliko in toplotno prevodnost  $\lambda_2$  z dimenzijami (a,b,c). Eliptična mejna plast pa ima toplotno prevodnost  $\lambda_1$  in debelino mejne plasti  $t$ . V enačbah (30) in (31) je  $\lambda_r$  povprečni toplotni tok [3]. V predstavljenem članku je uvedena predpostavka da so vsi nanodelci majhne kroglice z enakimi premeri.

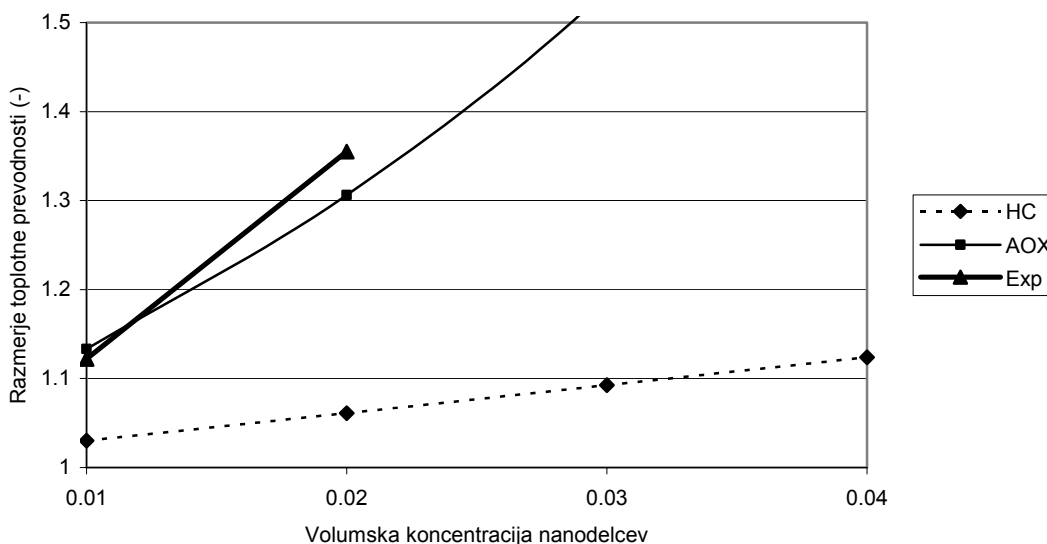
## 5 Rezultati in diskusija

Slika 2 prikazuje izračun toplotne prevodnosti s pomočjo statistične mehanike za baker in etilen glikol. Primerjava analitičnih rezultatov z eksperimentalnimi rezultati [3] kaže na zelo dobro ujemanje [3].



Slika 2: Izračun toplotne prevodnosti za baker in etilen glikol

Slika 3 prikazuje primerjavo med izmerjenimi rezultati ter analitičnim izračunom, ki je dobljen an osnovi statistične mehanike in Xue modela (AOX). Hkrati je prestavljen tudi izračun za Hamilton-Crosserjev model (HC). Kot pokaže slika 1 daje HC model povsem napačne rezultate. Uporabljeni X model pa daje rezultate, ki kažejo na zelo dobro ujemanje med analitičnimi rezultati in izmerjenimi vrednostmi.



Slika 3: Toplotna prevodnost za zmes etilen glikol+nanodelci pri 303 K.

## Literatura

- [1] AVSEC, Jurij, OBLAK, Maks. Thermal conductivity, viscosity and thermal diffusivity calculation for binary and ternary mixtures. *J. thermophys. heat transf.*, July-September 2004, vol. 18, no 3, str. 379-387.
- [2] AVSEC, Jurij, OBLAK, Maks. The calculation of thermal conductivity for metals. V: *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 10-13 January 2005, Reno, Nevada.* : American Institute of Aeronautics and Astronautics, cop. 2005, str. 1-10, AIAA 2005-758.
- [3] AVSEC, Jurij, OBLAK, Maks. The calculation of thermal conductivity for nanofluids on the basis of statistical nano-mechanics. V: *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 10-13 January 2005, Reno, Nevada.* American Institute of Aeronautics and Astronautics, cop. 2005, str. 1-10, AIAA 2005-759.
- [4] XUE, Q.-Z., Model for effective thermal conductivity of nanofluids, *Physics Letters A*, Vol. 307, 2003, pp.: 313-317.



## *Nekateri modeli trenja pri kotaljenju togih teles po ravnini*

*M. Batista<sup>2</sup>*

### *Some Models of Friction in the Rolling Motion of a Rigid Body on the Plane*

**Povzetek.** Prispevek obravnava nekatere modele kontakte sile in moment pri kotaljenju togega telesa po ravnini. Podan je teoretičen okvir izpeljave različnih modelov, ki temelji na principih mehanike zveznih snovi. Numerični primer obravnava gibanje rotacijskega elipsoida.

**Abstract.** This article discusses some models of contact force and moment in rolling of a rigid body on the plane. As theoretical framework of modeling the principle of continuum, mechanics are used. Numerical example shows the rolling of rotational ellipsoid.

#### **1 Gibalne enačbe**

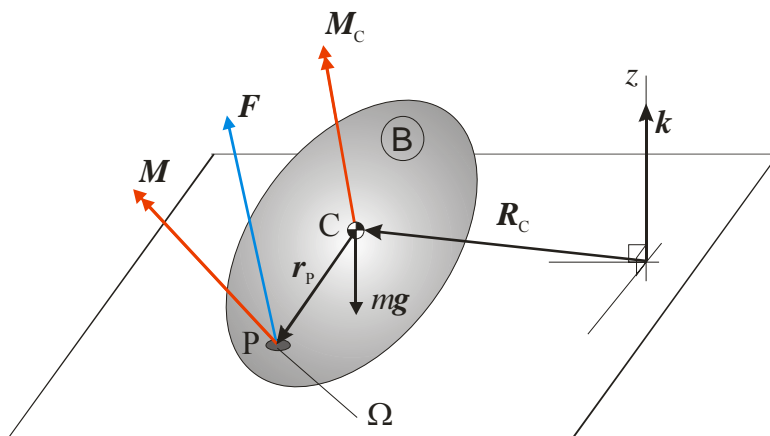
Gibanje togega telesa uravnava zakona o gibalni in vrtilni količini. V primeru, ko se telo kotali po vodoravni ravnini, ju zapišemo v obliki ([5],[6])

$$m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = -mg \mathbf{k} + \mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} + \mathbf{M} \quad (1)$$

pri čemer je  $g$  zemeljski pospešek,  $m$  masa telesa,  $\mathbf{R}_C$  lega masnega središča telesa v inercialnem sistemu,  $\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{R}_C}{dt}$  hitrost masnega središča telesa,  $\mathbf{L}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$  vrtilna količina,  $\mathbf{J}_C$  vztrajnostni tenzor telesa glede na masno središče,  $\boldsymbol{\omega}$  kotna hitrost,  $\mathbf{r}_P$  lega dotikališča telesa z ravnino,  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{M}$  pa sta reakcijska sila in moment podlage (slika 1).

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Pomorstvo in Promet



Slika 1: Telo na ravnini

Hitrost dotikališča  $v_p$  je določena z Eulerjevim izrazom

$$v_p = v_C + \omega \times r_p \quad (2)$$

Dotik telesa z ravnino določa kinematična omejitev

$$k \cdot v_p = 0 \quad (3)$$

Pogoj (3) omogoča izračun vertikalne komponente sile podlage

$$F_z \equiv k \cdot F = mg + m \frac{d}{dt}(k \cdot v_C) = mg - m \frac{d}{dt}(k \cdot \omega \times r_p) \quad (4)$$

Dotik telesa z ravnino se ohranja dokler je  $F_z > 0$ . K enačbam (1) dodamo še energijsko enačbo, ki se glasi

$$\frac{dE}{dt} = v_p \cdot F_t + \omega \cdot M \quad (5)$$

pri čemer je  $E \equiv \frac{\omega \cdot L_C}{2} + \frac{mv_C \cdot v_C}{2} + mg R_C \cdot k$  celotna mehanska energija telesa in

$F_t = k \times (F \times k)$  torzna sila. Ker celotna energija ne more naraščati veljata omejitvi

$$v_p \cdot F_t \leq 0 \quad \omega \cdot M \leq 0 \quad (6)$$

Enačbi (1) omogočata skupaj s kinematičnimi enačbami, ki podajajo zvezo med koti, ki popisujejo orjentacijo telesa in kotno hitrostjo, izračun neznanih kotov, lege  $R_C$  in hitrosti  $v_C$  ter  $\omega$ . V primeru čistega kotaljenja, ki je definirano s pogojema  $v_p = 0$  in  $M = 0$ , je iz

(2)  $v_C = r_p \times \omega$ , iz prve izmed (1) pa  $F = mgk + m \frac{dv_C}{dt}$ . Sila podlage je na ta način

določena, celotna naloga pa je rešljiva v okviru dinamike togega telesa. V primeru spodsavanja pa sta tangencialna komponenta  $F$  in  $M$  neznaniki, ki ju določata konstitutivna zakona ([6]).

### 3 Konstitutivne enačbe

Po načelu enakopravnosti ([8]) sta splošna konstitutivna zakona  $F_t = \hat{F}_t(\mathbf{r}_p, \mathbf{v}_p, \boldsymbol{\omega})$  in  $M = \hat{M}(\mathbf{r}_p, \mathbf{v}_p, \boldsymbol{\omega})$ . Za določitev oblike iskanih funkcij opustimo predpostavko absolutne togosti teles. Na ta način sta reakcijska sila in moment v dotikališču posledica napetosti  $\mathbf{p} = \sigma \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}$ , ki deluje na majhnem, od geometrije telesa neodvisnem, območju dotikališča  $\Omega = \{\boldsymbol{\rho} | \sigma(\boldsymbol{\rho}, t) > 0\}$ . Pri tem sta  $\sigma$  normalna napetost in  $\boldsymbol{\tau}$  vektor strižne napetosti. Reakcijska sila  $\mathbf{F}$  in moment  $\mathbf{M}$  sta v tem primeru definirana

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\equiv \int_{\Omega} \mathbf{p} dA = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{n} dA + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} dA \\ \mathbf{M} &\equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p} dA = \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \sigma \mathbf{n} dA + \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\tau} dA \end{aligned} \quad (7)$$

V nadaljevanju predpostavimo, da je območje dotikališča, približno ravno t.j. da približno velja  $\mathbf{n} \approx \mathbf{k}$  in  $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{k} \approx 0$ . V tem primeru lahko silo podlage  $\mathbf{F}$  razstavimo v smeri normale na ravnino in smeri ravninev obliko  $\mathbf{F} = F_z \mathbf{k} + \mathbf{F}_t$  pri čemer sta

$$\begin{aligned} F_z &\equiv \mathbf{k} \cdot \int_{\Omega} \sigma \mathbf{n} dA \quad \text{normalna reakcija} \\ \mathbf{F}_t &\equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} dA \quad \text{torna sila} \end{aligned} \quad (8)$$

Podobno razstavimo moment podlage v obliko  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t + M_z \mathbf{k}$ , pri čemer sta

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_t &\equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \sigma \mathbf{n} dA \quad \text{kotalni moment} \\ M_z &\equiv \mathbf{k} \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\tau} dA \quad \text{vrtalni moment} \end{aligned} \quad (9)$$

Nadalje predpostavimo, da je normalna napetost  $\sigma$  konstantna. Iz (8) sledi v tem primeru

$$\sigma = \frac{F_z}{A} \quad (10)$$

Dodajmo še, da je porazdelitev hitrosti na območju  $\Omega$  podana z obrazcem  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ . Če to hitrost razstavimo v dve smeri kot  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + v_z \mathbf{k}$ , pri čemer je  $\mathbf{v}_t$  drsna komponenta hitrost, ter podobno  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_t + \omega_z \mathbf{k}$ , pri čemer je  $\boldsymbol{\omega}_t$  kotalna komponenta kotne hitrost, ter upoštevamo pogoj dotika  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_p = 0$  in predpostavko  $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{k} = 0$ , dobimo

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_p + \omega_z \mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho} \quad v_z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_t \times \boldsymbol{\rho} \quad (11)$$

#### 3.1 Kotalni moment

Z upoštevanjem navedenih predpostavk je kotalni moment

$$\mathbf{M}_t = \sigma \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} dA \times \mathbf{k} = F_z \boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{k} \quad (12)$$

pri čemer je  $\boldsymbol{\rho}_0 \equiv \frac{1}{A} \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} dA$  geometrijsko središče območja dotikališča  $\Omega$ . Če to sovpada s dotikališčem potem je  $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0}$  in posledično  $\mathbf{M}_t = \mathbf{0}$ .

V primeru kotalnega momenta se pogoj (6) glasi  $\boldsymbol{\omega}_t \cdot \mathbf{M}_t \leq 0$ . Z upoštevanjem (12) in omejitve  $F_z > 0$  dobimo  $\boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}_t \leq 0$ . Najpreprostejši model kotalnega momenta, ki zadošča navedeni omejitvi dobimo, če predpostavimo  $\boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{k} = -\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}_t$ , pri čemer je  $\mathbf{K}$  pozitivno definitni tenzor kotalnega upora. Ker je  $\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$  je  $\boldsymbol{\rho}_0 = -\mathbf{k} \times \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\omega}_t$ . Če je tenzor  $\mathbf{K}$  izotropen, t.j.  $\mathbf{K} = \mu_K \mathbf{I}$  potem je  $\boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{k} = -\mu_K \boldsymbol{\omega}_t$  in  $\boldsymbol{\rho}_0 = -\mu_K \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_t$ . Navedeni model vključuje kot poseben primer klasični zakon kotalnega momenta, ki ga zapišemo v obliki

$$\boxed{\mathbf{M}_t = -\mu_K F_z \frac{\boldsymbol{\omega}_t}{|\boldsymbol{\omega}_t|}} \quad (13)$$

pri čemer ima parameter  $\mu_K$  dimenzijo dolžine. Drug enostaven primer kotalnega momenta pa dobimo, če predpostavimo, da je proporcionalen kotalni hitrosti (viskozno kotaljenje)

$$\boxed{\mathbf{M}_t = -\nu_K F_z \boldsymbol{\omega}_t} \quad (14)$$

V tem primeru ima parameter  $\nu_K$  dimenzijo  $[L][s]$ .

## 3.2 Torna sila in vrtni moment

### 3.2.1 Suho trenje

V primeru suhega trenja privzamemo, da na območju dotikališča velja Coulombov zakon ([2]).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -\mu\sigma \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|}, & \mathbf{v}_t &\neq \mathbf{0} \\ |\boldsymbol{\tau}| &\leq \mu\sigma, & \mathbf{v}_t &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

pri čemer je  $\mu \geq 0$  koeficient drsnega trenja, ki je odvisen od stanja stičnih površin. V nadaljevanju privzamemo, da je koeficient trenja konstanten. V primeru  $\mathbf{v}_t \neq \mathbf{0}$  sta torna sila in vrtni moment

$$\mathbf{F}_t = -\mu\sigma \int_{\Omega} \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} dA \quad \mathbf{M}_t = -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{F}_t - \mu\sigma \mathbf{k} \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho}' \times \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} dA \quad (16)$$

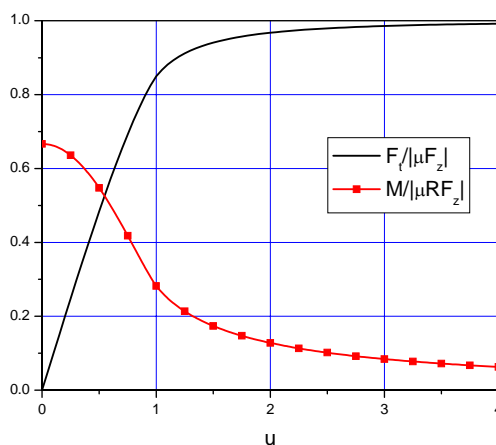
pri čemer je  $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0$ . Gornja izraza kažeta, da v splošnem kotalni upor vpliva na torno silo in vrtni moment. V primeru, ko je  $|\boldsymbol{\rho}_0| \ll \mu$  dobimo

$$\mathbf{F}_t = -\mu\sigma \int_{\Omega} \frac{\mathbf{v}'_t}{|\mathbf{v}_t|} dA \quad M_t = -\mu\sigma \mathbf{k} \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} dA \quad (17)$$

Če usmerimo koordinatni sistem v dotikalnišću v smer drsne hitrosti t.j. če je  $\mathbf{v}_p = v_p \mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}' = \mathbf{k} \times \mathbf{i}'$  in zapišemo  $\boldsymbol{\rho} = \rho(\cos\alpha \mathbf{i}' + \sin\alpha \mathbf{j}')$ , potem lahko (16) prepišemo v obliko

$$\mathbf{F}_t = -\mu\sigma \left( \int_{\Omega} \frac{v_p - \omega_z \sin\alpha}{|\mathbf{v}_t|} dS \mathbf{i}' + \omega_z \int_{\Omega} \frac{\rho \cos\alpha}{|\mathbf{v}_t|} dS \mathbf{j}' \right) \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_n = -\mu\sigma \left( -v_p \int_{\Omega} \frac{\rho \sin\alpha}{|\mathbf{v}_t|} dS + \omega_z \int_{\Omega} \frac{\rho^2}{|\mathbf{v}_t|} dS \right) \mathbf{k}$$



Slika 2: Normalizirana torna sila in vrtni moment kot funkciji parametra  $u$

V primeru ko je dotikalno območje krožno z radijem  $R$  se da integrale (18) izraziti z eliptičnimi funkcijami. Za praktične potrebe preprostejša je izražava v oblik vrst ([4])

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= -\mu F_z \begin{cases} u - \frac{u^3}{8} - \frac{u^5}{64} - \frac{5u^7}{1024} - \frac{35u^9}{16384} - \dots & u < 1 \\ 1 - \frac{1}{8u^2} - \frac{1}{64u^4} - \frac{5}{1024u^6} - \frac{35}{16384u^8} - \dots & u \geq 1 \end{cases} \\ F'_y &= 0 \\ M_z &= -\mu F_z R \frac{\omega_z}{|\omega_z|} \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{u^2}{2} + \frac{3u^4}{32} + \frac{5u^6}{384} + \frac{35u^8}{8192} + \dots & u < 1 \\ \frac{1}{4u} + \frac{1}{48u^3} + \frac{3}{412u^5} + \frac{5}{2048u^7} + \dots & u \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



pri čemer je  $u \equiv \frac{v_p}{|\omega_z|R}$ . Graf (19) prikazuje slika 2. Zadovoljivo aproksimacijo (19) dobimo z izrazoma

$$F'_x \approx -\mu F_z \left( 1 - e^{-\frac{\pi}{2}u} \right) \quad M_z \approx -\frac{2}{3} \mu R F_z \frac{1}{1 + \frac{3}{4}u^2} \frac{\omega_z}{|\omega_z|} \quad (20)$$

V primeru čistega kotaljenja  $v_p = 0$  in  $\omega_z \neq 0$  je  $u = 0$  in posledično  $F'_x = 0$  ter  $M_z = \frac{2}{3} \mu F_z R$ . V primeru, ko pa sta  $v_p \neq 0$  in  $\omega_z = 0$  pa je  $u = \infty$  in torej  $F'_x = -\mu F_z$  ter  $M_z = 0$ .

### 3.2.2 Viskozno trenje

V primeru viskozne trenja je vektor tangencialne napetosti  $\boldsymbol{\tau}$  proporcionalen drsni hitrosti  $\mathbf{v}_t$

$$\boldsymbol{\tau} = -\nu \sigma \mathbf{v}_t \quad (21)$$

kjer je  $\nu$  koeficien viskozne trenja. Če (21) vstavimo v (12) in upoštevamo (11) dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t &= -\nu \sigma \int_{\Omega} \mathbf{v}_t dS = -\nu F_z (\mathbf{v}_p + \omega_z \mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_0) \\ M_t &= -\nu \sigma \int_{\Omega} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v}_t dS = -\nu F_z \left[ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 \times \mathbf{v}_p + \omega_z \left( \rho_0^2 + \frac{1}{A} \int_{\Omega} \rho'^2 dA \right) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Tudi v tem primeru sta torna sila in vrtilni moment odvisna od kotalnih lastosti. Če pa je  $|\boldsymbol{\rho}_0| \ll \nu$  se (22) poenostavi

$$\mathbf{F}_t = -\nu F_z \mathbf{v}_p \quad M_t = -\nu F_z \omega_z \frac{\int_{\Omega} \rho^2 dA}{A} \quad (23)$$

Za krožno območja z radijem  $R$  je  $\frac{1}{A} \int_{\Omega} \rho^2 dA = \frac{R^2}{2}$ . V tem primeru sta torna sila in vrtilni moment podana z izrazoma

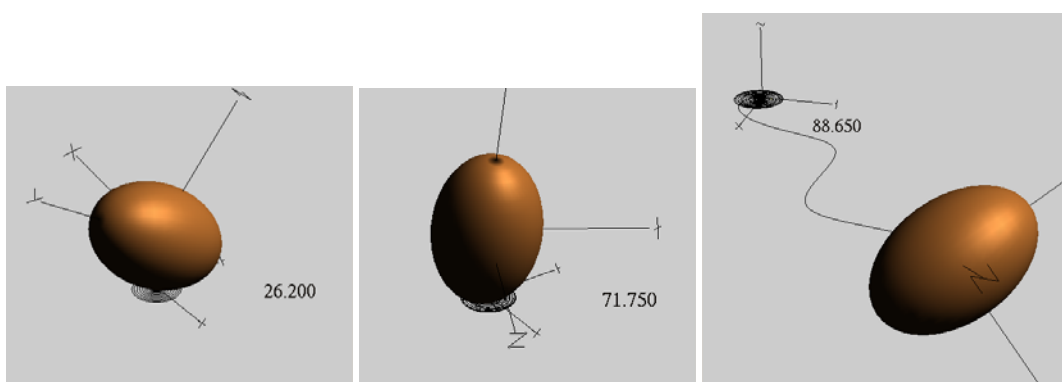
$$\boxed{\mathbf{F}_t = -\nu F_z \mathbf{v}_p \quad M_t = -\nu \frac{F_z R^2}{2} \omega_z} \quad (24)$$

#### 4 Primer

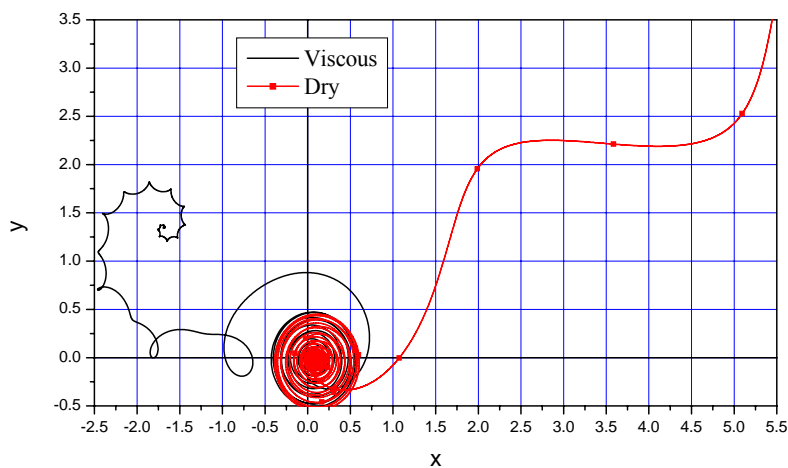
Za praktični preskus smo izvedli numerično simulacijo kotaljenja rotacijskega elipsoida z razmerjem osi  $a/b = 1.5$  ([7]) v primeru suhega in vizkoznega trenja za katere smo izbrali  $\mu = \nu = 0.5$  in  $R = 0.2$ . Kot integracijski program smo uporabili podprogram DOP835 ([3]) pri katerem sta bili absolutna in relativna toleranca  $ATOL = RTOL = 10^{-9}$ . Od nič različni začetni pogoji integracije so bili naslednji (za pomen oznak glej [1]):

$$v_{Cx} = -2 \times 10^{-6} \quad v_{Cy} = 7 \times 10^{-5} \quad \theta = 10^{-4} \quad \omega_1 = 10^{-4} \quad \omega_2 = 2 \times 10^{-2} \quad \Omega = 10.2$$

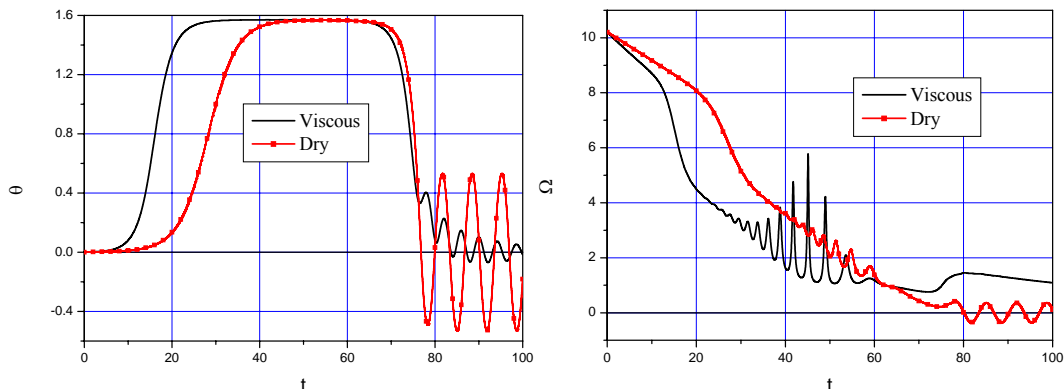
Rezultate simulacije prikazujejo slike 2,3,4 in 5.



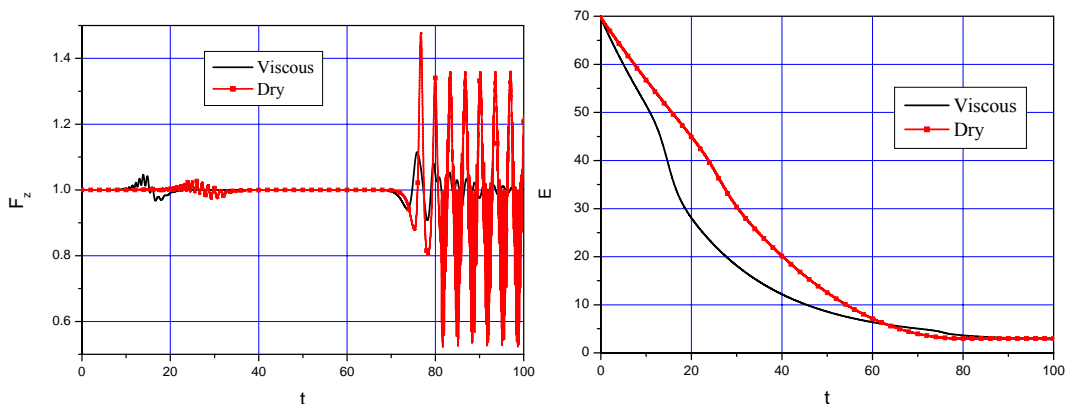
Slika 3: Računalniška simulacija gibanja elipsoida v primeru suhega trenja



Slika 4: Sled stične točke



Slika 5: Potek naklonskega kota in kotne hitrosti.



Slika 6: Potek normalne reakcije in celotne energije.

## Literatura

- [1] M.Batista, *Kotaljenje diska po horizontalni ravnini*, Kuhljevi dnevi 2004
- [2] P.Contensou. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans le theorie de la toupie. 201-216 ( H.Ziegler *Gyrodynamics*,) Springer Verlag,1963
- [3] E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer-Verlag, 1993
- [4] R.I.Leine, Ch.Glocker, A Set-valued Force Law for Spatial Coulomb-Contensou Friction, *European Journal of Mechanics* 22,2, 193-216, 2003.
- [5] W.D.MacMillan, *Dynamics of Rigid Bodies*, Dover Publications, New York, 1936
- [6] J.G.Papastavridis, *Analytical Mechanics*, Oxford University Press, 2002
- [7] Y. Shimomura, M. Branicki, H.K. Moffatt, Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. II. Self-induced jumping, *Proc. R. Soc. A* 461, 1753-1774, 2005.
- [8] C.Truesdell. *Six Lectures on Modern Natural Phylosophy*. Springer Verlag, 1966



## *Eksperimentalno ovrednotenje novega statističnega modela krhkega loma nehomogenih materialov*

*B. Bezenšek<sup>1</sup> Z. Ren<sup>1</sup> J. Flašker<sup>1</sup> in J.W. Hancock<sup>2</sup>*

### *Experimental evaluation of a new statistical model for brittle fracture of heterogeneous materials*

**Povzetek.** V prispevku je ovrednoten nov statistični model krhkega loma nehomogenih materialov z uporabo namenskih preizkusov, v katerih je bila vzpostavljena zvezna prostorsko spremenljiva napetost tečenja in lomna žilavost materiala. V primerjavi z homogenimi konfiguracijami je izmerjena lomna žilavost za nehomogene konfiguracije višja ob izbrani verjetnosti porušitve. Simulacijski izračuni novega statističnega modela se ujemajo z eksperimentalnimi meritvami in dajejo podlago nadaljnjemu razvoju modela.

**Abstract.** A new statistical model for brittle fracture has been experimentally verified using standard and customized fracture mechanic specimens. A procedure where a temperature gradient was established along a length of a bend bar was used. This gives spatially graded mechanical properties across the specimen. Amplified values of fracture toughness values were measured on the temperature graded configuration and these are in agreement with the predictions from the new model.

#### **1 Uvod**

Nehomogeni materiali se v praksi pogosto uporabljajo za izpolnitev zastavljenih fizikalnih, mehanskih in ekonomskih zahtev. Tipičen primer uporabe nehomogenih materialov so zvarni spoji v kovinskih konstrukcijah. Navkljub izpopolnjeni varilni tehnologiji se zvarni spoji razlikujejo po kemični sestavi in mikrostrukturi od osnovnega (varjenega) materiala. Posledica takšne nehomogenosti so različne fizikalne in mehanske lastnosti posamezne mikrostrukturne faze, ki sestavlja zvarni spoj, in s tem neizbežen vnos makroskopske nehomogenosti v konstrukcijo.

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, Slovenija

<sup>2</sup> University of Glasgow, Faculty of Mechanical Engineering., Glasgow, Velika Britanija

Za zagotovitev strukturne celovitosti varjene konstrukcije v prisotnosti razpok se uporabljajo standardizirani udarni (Charpy) ali lomno-mehanski preizkušanci, z razpoko ali zarezo v varnem materialu. Rezultati so običajno interpretirani v obliki udarne energije ali lomne žilavosti, ovrednotene preko J-integrala ali odprtja konice razpoke (parameter CTOD). Vendar pa lomni proces v temperaturnem območju žilavo-krhkega prehodnega področja in žilavega loma vrednoti celoten varni spoj, preko vseh prisotnih mikrostrukturnih faz. Rezultati takšnih testov so tako navidezne (ang. "apparent") vrednosti lomne žilavosti in ne predstavljajo vrednosti lomne žilavosti za izbrano mikrostrukturo (Sumpter [1]).

Izmed verjetnostnih modelov, uporabljenih pri zagotovitvi strukturne celovitosti v prisotnosti razpok, se pogosto uporablja tako imenovani lokalni pristop (Beremin [2]). Pristop temelji na principu najšibkejšega člena v verigi: fronta razpoke dolžine  $s$  ali, ekvivalentno, tro-dimenzionalno napetostno polje z volumnom  $V$  pred konico razpoke, se razdeli na statistično enakovredne segmente. Za poljuben segment  $V_o$  je verjetnost porušitve ob napetosti  $\sigma$  opisana z dvo-parametrično Weibull-ovo verjetnostno funkcijo  $P_o$  (Weibull [3]):

$$P_o(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right] \quad (1)$$

kjer je  $\sigma_u$  poljubna konstanta z dimenzijo napetosti in  $m$  Weibullov modul, ki opisuje zanesljivost materiala. Porušitev fronte razpoke, sestavljene iz  $V/V_o$  volumskih segmentov, sledi neposredno iz porušitve najšibkejšega segmenta. Pripadajoča verjetnost porušitve tako sledi v obliki (Freudenthal [4]):

$$P = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_o}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right] \quad (2)$$

Beremin je izhajal iz stališča, da je porušitev v okviru statistične mehanike loma odvisna od lokalne napetosti v procesnem območju v okolici razpoke, t.i. Weibull-ove napetosti  $\sigma_w$ . Le-ta pa je odvisna od velikosti procesnega območja  $V$  in zanesljivosti materiala  $m$  v obliki:

$$\sigma_w = \int_V (\sigma_1)^m \frac{dV}{V_o} \quad (3)$$

Pri lokalnem pristopu se  $\sigma_w$  pojavlja kot lokalni lomni parameter, neodvisen od globalne geometrije in načina obremenitve. V trenutku loma je  $\sigma_w$  enaka tako v laboratorijskemu preizkušancu kot na realni konstrukciji in se lahko uporablja kot lomnomehanski parameter.

Pomankljivost enačbe (2) je v tem, da vsebuje dva neodvisna prosta parametra, ki ju je težje določiti na enoviti bazi podatkov. Minami et al [5] so predstavili postopek za določitev obeh konstant, vendar se je izkazalo, da njihov postopek ne daje enoličnih vrednosti. V novejšem času se za določitev konstant  $m$  in  $\sigma_u$  uporablja postopek, kjer je napetost  $\sigma_w$  določena na dveh različnih laboratorijskih preiskušancih, pri čemer je eden v stanju visoke omejitve (ang. constraint) in drugi v stanju nizke omejitve plastičnega tečenja (Gao et al [6]).

## 2 Nov statistični model za vrednotenje celovitosti nehomogenih materialov

Bezenšek et al [7,8] so predstavili nov pristop k vrednotenju strukturne celovitosti v žilavo-krhkem prehodnem območju z uporabo lokalnega pristopa, ki temelji na Bereminovem statističnem modelu krhkega loma. V nasprotju z obstoječim Bereminovim pristopom dopušča nov model lokalno prostorsko spremenljivo trdnost, lomno žilavost in zanesljivost materiala in je primeren za vrednotenje loma nehomogenih materialov. Podrobnosti novega modela so predstavljene v Bezenšek et al [7,8]. Ključen pristop novemu modelu je povezava poljubne konstantne  $\sigma_u$  v enačbi (2) s povprečno trdnostjo volumna  $V_o$ . V naslednjem koraku se Weibullova napetost razdeli na parametre odvisne od obremenitve ( $J/\sigma_o$ ) in na brezdimenzijski parameter ( $\Omega$ ), ki zgolj opisuje strukturo napetostnega polja pred razpoko in je neodvisen od obremenitve (Lei et al [9]). Povprečna trdnost volumna  $V$  se lahko opiše s povprečno vrednostjo Weibullove napetosti  $\sigma_w$ . V trenutku loma je dosežena lokalna lomna žilavost materiala, tako da velja:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_w}{\Gamma(1 + \frac{1}{m})} = \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{1}{m})} \left( \frac{B}{V_o} \right)^{\frac{1}{m}} \sigma_o^{\frac{m-2}{m}} J_c^{\frac{2}{m}} \Omega^{\frac{1}{m}} \quad (4)$$

kjer je  $\sigma_o$  napetost tečenja,  $J_c$  lokalna lomna žilavost,  $E$  modul elastičnosti in  $B$  debelina preizkušanca,  $\Gamma(1 + \frac{1}{m})$  pa predstavlja Gamma funkcijo. S tem se verjetnost loma nehomogenega materiala v prisotnosti razpoke lahko zapiše v obliki:

$$P_f = 1 - \exp \left\{ - \left[ \int_V \frac{\sigma_f^m}{\sigma_o^{m-2} \Omega} \left( \frac{J}{J_c} \right)^{-m} dV \right] \frac{(\Gamma(1 + \frac{1}{m}))^m}{B} \right\} \quad (5)$$

Izraz (5) zajema vpliv prostorsko porazdeljene lokalne lomne žilavosti (ang. "Intrinsic toughness"), napetosti tečenja ter zanesljivosti, ovrednotene z  $m$ .

## 3 Eksperimentalne meritve

Za vrednotenje novega modela krhkega loma je bila pripravljena baza podatkov, ki vsebuje lomno žilavost za homogeni in nehomogeni material. Material je nizkoogljeno jeklo En32 po Britanskem standardu. Lomnomehanski podatki so bili izmerjeni na štiri-točkovnih upogibnih preiskušancih dimezij  $B \times W \times L = 11 \times 24 \times 120(370)$  mm, z razpoko dolžine  $a/w = 0.5$  v temperaturnem območju krhkega loma ob znatni plastifikaciji pred porušitvijo. Izmed mehanskih veličin sta bili med testom merjeni sila in odpiranje ustja razpoke. Na osnovi teh vrednosti je bil določen J-integral preko dekompozicije na elastični in plastični del, kjer elastični del sledi iz faktorja intenzitete napetosti:

$$J_{el} = K_I^2 / E / (1 - \nu^2) \quad (6)$$

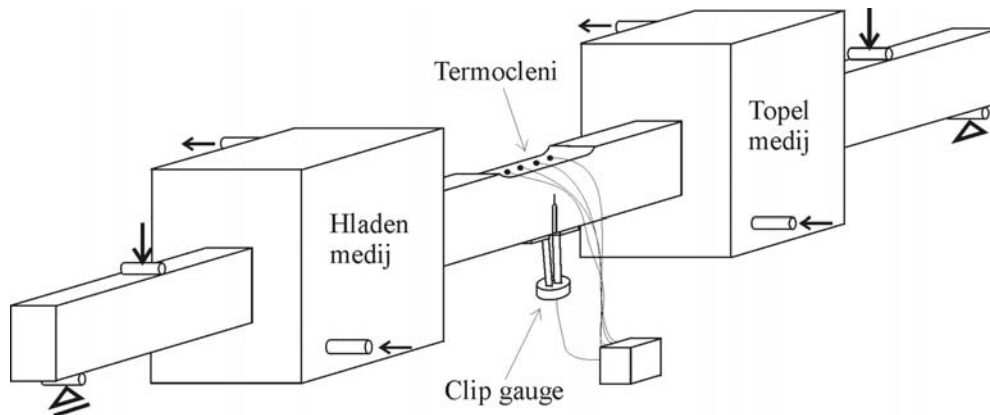
Iz opravljenega plastičnega dela za odprtje ustja razpoke ( $A_{pl}^{MOD}$ ) sledi plastična komponenta J-integrala v obliki:

$$J_{pl} = \eta \cdot A_{pl}^{CMOD} \quad (7)$$

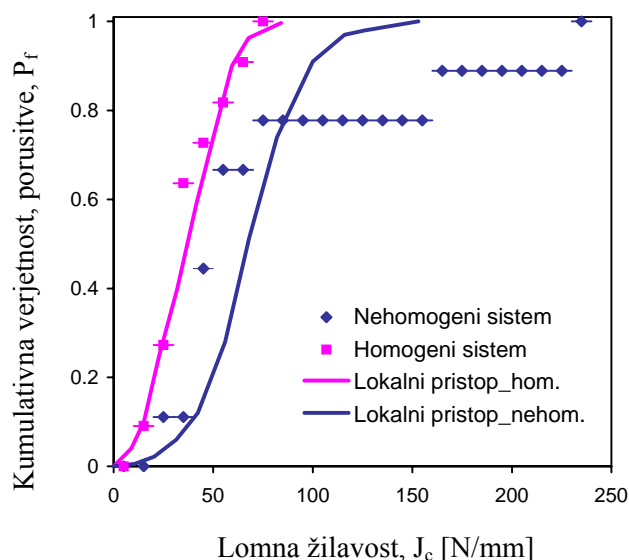
Kalibracijska konstanta  $\eta$  je bila določena iz numeričnega modela preizkušanca za testno postavitev, predstavljenega v poglavju 4.

Za konfiguracije z nehomogenimi materialnimi lastnostmi so bili uporabljeni namenski upogibni preizkušanci, vzdolž katerih je bila vzpostavljena temperaturna razlika. Slednja je bila dosežena s segrevanjem enega konca in ohlajanjem nasprotnega konca preizkušanca. Pri tem je bila deformacija preizkušanca v vzdolžni smeri neovirana. Shema eksperimentalne postavitve je prikazana na Sliki 1. Posledica temperaturne razlike je vzpostavitev gradienta mehanskih lastnosti: napetosti tečenja in lomni žilavosti, ki sta v feritnih jeklih nasprotnega značaja. Temperaturna porazdelitev je bila merjena na hrbtni strani preizkušanca, kjer je bil merjen temperaturni gradient v območju med 3.5 in 6.2 °C/mm. Termična analiza preizkušanca z uporabo numeričnega paketa ABAQUS (HKS [10]) je bila uporabljena za določitev realne temperaturne porazdelitve v neposredni okolici konice razpoke, saj je zaradi omejenega prevoda toplote preko priprtih bokov razpoke prevod toplote lokalno povečan. V radialnem območju do premera 0.5 mm pred konico razpoke, kjer je aktiven lomni proces, je bil določen povprečni temperaturni gradient 13.1 °C/mm.

Rezultati eksperimentalnega dela so predstavljeni na Sliki 2 v obliki kumulativne verjetnosti porušitve v odvisnosti od izmerjene lomne žilavosti. Baza podatkov vsebuje 11 vrednosti za homogeno konfiguracijo in 9 vrednosti za nehomogeno konfiguracijo. Iz Slike 2 je razvidno, da je povprečna lomna žilavost nehomogene konfiguracije višja v primerjavi s homogeno konfiguracijo ob izbrani verjetnosti porušitve.



**Slika 1:** Shema eksperimentalne postavitve za testiranje nehomogenih konfiguracij.



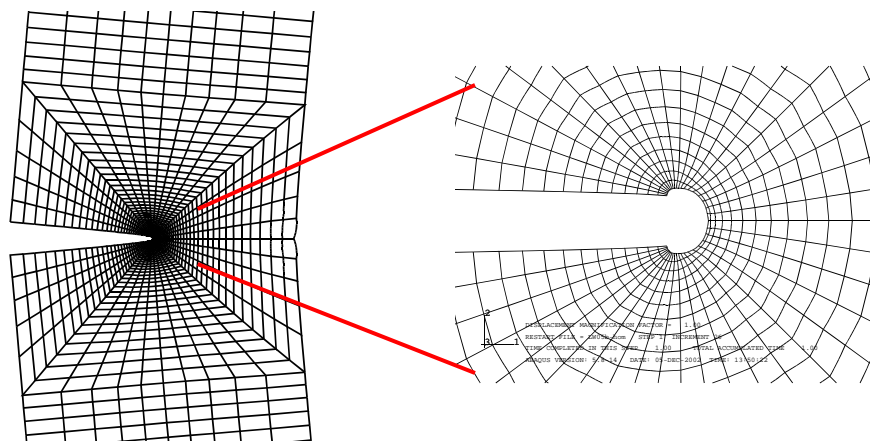
**Slika 2:** Kumulativna verjetnost porušitve za izmerjene vrednosti in napoved ob uporabi lokalnega pristopa.

Za izdelano bazo podatkov sta bila določena povprečna vrednost in standardni odstopek, ki znašata 39.2 N/mm in 18.8 N/mm za homogeno konfiguracijo ter 90.0 N/mm in 66.1 N/mm za nehomogeno konfiguracijo.

#### 4 Simulacijski izračuni

Preizkušanci so bili modelirani z metodo končnih elementov ob predpostavki dvo-dimenzionalnega ravninsko deformacijskega stanja. Mreža končnih elementov vsebuje 3550 elementov in je bila zgoščena v okolici razpoke, kot prikazuje Slika 3. Konica razpoke je bila modelirana z majhnim radiusom (5  $\mu\text{m}$ ). Uporabljena je bila teorija velikih deformacij. Material se odziva linearno elastično v območju pod napetostjo tečenja. Za vrednosti nad napetostjo tečenja so bili uporabljeni izmerjeni plastični deli krivulj napetost-raztezek, pretvorjeni v dejansko napetost in deformacijo. J-integral je bil ovrednoten preko 40 kontur z uporabo domain integral metode definirane v ABAQUS-u. Prostorsko spremenljiva napetost tečenja je bila simulirana preko proste spremenljivke: vozliščne temperature. Za nehomogene konfiguracije je bila najprej izvršena termična analiza posamezne konfiguracije, na osnovi katere je bilo določeno temperaturno polje za vsa vozlišča modela. V naslednjem koraku je bila izvršena strukturna analiza in rezultati termične analize so služili za določitev prostorske porazdelitve napetosti tečenja. Ob uporabi postprocesorske rutine, zapisane v programskem paketu Matlab<sup>®</sup>, je bila ovrednotena kumulativna verjetnost porušitve preko vrednotenja enačbe (5). Pri tem je bila uporabljena vrednost Weibullovega modula, določenega na testnih rezultatih, ki je blizu teoretični vrednosti  $m=2$ , določeni iz vpliva velikosti preizkušanca na lomno žilavost (angl. "size effect") (Wallin [11]). Prostorsko odvisna lomna žilavost (ang. "Intrinsic toughness") je bila izmerjena s standardnimi lomno-mehanskimi testi na homogenem materialu ob izbrani temperaturi.





**Slika 3:** Mreža končnih elementov v okolici konice razpoke.

Kumulativna verjetnostna funkcija, določena z uporabo novega modela krhkega loma nehomogenih materialov, je prikazana na Sliki 2 v odvisnosti od obremenitve, merjene preko J-integrala. Razvidno je odlično ujemanje med eksperimentalnimi rezultati in simulacijskimi izračuni za homogeni sistem. Majhne razlike za nehomogeni sistem med drugim nastopijo zaradi relativno skromne baze eksperimentalnih podatkov in uporabe poenostavljenega numeričnega modela.

## 5 Zaključek

Nov model krhkega loma homogenih in nehomogenih materialov je ovrednoten na standardnih homogenih in namenskih nehomogenih lomnomehanskih konfiguracijah. Za slednjo je bil uporabljen postopek, kjer je bila vzpostavljena temperaturna razlika med nasprotnima koncema jeklene palice in s tem dosežena posledična razlika v napetosti tečenja in lomni žilavosti. Ob izbrani verjetnosti porušitve ima nehomogena konfiguracija višjo navidezno lomno žilavost v primerjavi s homogeno konfiguracijo. Napovedi simulacijskih izračunov ob uporabi novega modela krhkega loma se ujemajo z meritvami. Predstavljeno delo daje podlago nadaljnjemu razvoju novega modela krhkega loma, kjer bo upoštevan vpliv statistične porazdelitve kritične mikrorazpoke (Bordet et al [12]). Predstavljen model omogoča tudi vzpostavitev povezave med vrednostmi lomne žilavosti posamezne mikrostrukture (angl. "intrinsic toughness"), ki je materialna vrednost, in vrednostjo lomne žilavosti izmerjene na celotni konstrukciji (angl. "apparent toughness") ob izbrani verjetnosti porušitve. Slednja je pomembna za povezavo meritev med Charpy in lomno-mehanskimi preizkušanji.

## 6 Zahvala

Avtor se zahvaljuje Hibbitu, Carlssonu in Sorrensenu za dostop do ABAQUS-a pod akademsko licenco na Univerzi v Mariboru ter Ministrstvu za šolstvo, znanost in šport za podporo projektu Št. Z2-6641-0795-04/2.11. Avtor je hvaležen podpori University of Glasgow, Department of Mechanical Engineering, Velika Britanija, za podporo eksperimentalnemu delu ter koristnim razgovorom z Dr. A Banerjee, Massachusetts Institute of Technology, ZDA.

## 7 Literatura

- [1] Sumpter JDG, *Fracture toughness of laser welds in ship steel*, Advanced Performance Materials, 3, 393-405, 1996
- [2] Beremin FM, *A local criterion for cleavage fracture of nuclear pressure vessel steel*, Metall. Trans., 14(A), 2277-2287, 1983
- [3] Weibull W, *A statistical distribution function of wide applicability*, J. Applied Mechanics, 18, 293-297, 1951
- [4] Freudenthal AM, *Statistical approach to brittle fracture*, In: "Fracture", Ed: Liebowitz H., Academic Press: New York. Vol.2, pp.591-619, 1968
- [5] Minami F, Bruckner-Foit A, Munz D, Trollenier B, *Estimation procedure for the Weibull parameters used in the local approach*, Int. J. Fracture, 54, 197-210, 1992
- [6] Gao X, Ruggieri C, Dodds RH, *Calibration of Weibull stress parameters using fracture toughness data*, Int. J. Fracture, 92, 175-200, 1998
- [7] Bezensek B, Hancock JW, *Statistični model loma nehomogenih materialov*, V: Proc. Kuhljevi dnevi 2004, Otočec, Slo, September 2004
- [8] Bezensek B, Banerjee A, Hancock JW, *A statistical model for brittle fracture of functionally graded materials*, V: Proc ASME Pressure Vessels and Piping 2005, Ed: PS Lam, Denver, Co, ZDA, Julij 2005
- [9] Lei Y, O'Dowd NP, Busso EP, Webster GA, *Weibull stress solutions for 2-D cracks in elastic and elastic-plastic materials*, Int. J. Fracture, 89, p. 245, 1998
- [10] ABAQUS HKS, (2004), ABAQUS/Standard, V 6.4, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, inc, Providence, Rhode Island
- [11] Wallin K, *The scatter in  $K_{IC}$  results*, Eng. Fract. Mech. 19, 1085, 1984
- [12] Bordet SR, Karstensen AD, Knowles DM, Wiesner CS, *A new statistical local criterion for cleavage fracture in steel. Part I: Model presentation*, Eng. Fract. Mech., 72, 435-452, 2004





## *Robustni končni elementi za plošče*

U. Bohinc<sup>1</sup> in A. Ibrahimbegović<sup>2</sup>

### *Robust finite elements for plates*

**Povzetek.** Predstavljena je družina 4-robnih končnih elementov za plošče, ki temelji na 'Reissner-Mindlinovi' teoriji plošč. Interpolacije pomikov in zasukov so med seboj konsistentne in omogočajo odpravo strižnega blokiranja. Posebna primera iz predstavljene družine sta diskretni Kirchhoffov element (DKQ) in element z nekompatibilnimi deformacijskimi oblikami. Programska koda je izpeljana avtomatično s programskim paketom AceGen.

**Abstract.** A family of quadrilateral plate finite elements based on 'Reissner-Mindlin' theory is presented. Interpolations of displacements and rotations are mutually consistent in order to avoid shear locking. Two special cases from the presented family are discrete Kirchhoff element (DKQ) and an element with incompatible modes. The computer code is obtained automatically by using software package AceGen.

## 1 Uvod

Robustnost končnih elementov za plošče se izkaže predvsem pri analizi tankih plošč. Če končni element temelji na 'Reissner-Mindlinovi' teoriji - ki je primernejša za uporabo metode končnih elementov kot Kirchhoffova teorija, ker ne zahteva zvezne odvedljivosti pomikov - nastopi pri analizi tankih plošč strižno blokiranje. To je posledica dejstva, da sta interpolaciji pomika in zasukov medsebojno neodvisni. Ena od uspešnih rešitev problema strižnega blokiranja je t.i. AS (assumed strain) metoda, ki direktno interpolira strižne deformacije po elementu.

V tem delu je predstavljena implementacija družine 4-robnih elementov za plošče, ki problem strižnega blokiranja rešujejo s hierarhično interpolacijo pomikov in zasukov in z uporabo AS metode; detajli so podani v Ibrahimbegović [1], [2]. Orodje za implementacijo končnih elementov je bil programski paket AceGen, Korelc [3], ki teče znotraj Mathematice in omogoča zapis računskih postopkov v simbolični obliki.

---

<sup>1</sup> Zavod za gradbeništvo Slovenije

<sup>2</sup> L.M.T. Cahan, Paris, France

## 2 Družina 'Reissner-Mindlinovih' elementov za plošče

### 2.1 Variacijska formulacija

Variacijska formulacija za linearni končni element, ki temelji na 'Reissner-Mindlinovi' teoriji plošč, in leži v ravnini  $x_1x_2$ , je

$$\begin{aligned}\delta\Pi(w, \theta; \hat{w}, \hat{\theta}) &= \delta\Pi^{not} + \delta\Pi^{zun} = 0 \\ \delta\Pi^{not} &= \int_{\Omega} \hat{\kappa}^T \mathbf{C}^B \kappa d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\gamma}^T \mathbf{C}^S \gamma d\Omega \\ -\delta\Pi^{zun} &= \int_{\Omega} q \hat{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\bar{q} \hat{w} + \bar{m}_1 \hat{\theta}_1 + \bar{m}_2 \hat{\theta}_2) d\Gamma\end{aligned}\quad (1)$$

Vektor ukrivljenosti  $\kappa$  in vektor strižnih deformacij  $\gamma$  sta izražena s pomikom  $w$  v smeri  $x_3$  in zasukoma  $\theta = \langle \theta_1, \theta_2 \rangle^T$ , ki vrtita normalo na  $x_3$  okoli  $x_1$  in  $x_2$

$$\kappa = \langle -\partial\theta_2/\partial x_1; \partial\theta_1/\partial x_2; \partial\theta_1/\partial x_1 - \partial\theta_2/\partial x_2 \rangle^T \quad (2)$$

$$\gamma = \langle \partial w/\partial x_1 + \theta_2; \partial w/\partial x_2 - \theta_1 \rangle^T \quad (3)$$

S strešico so v (1) označene virtualne količine. Konstitutivni matriki sta v primeru izotropne, linearno elastične plošče

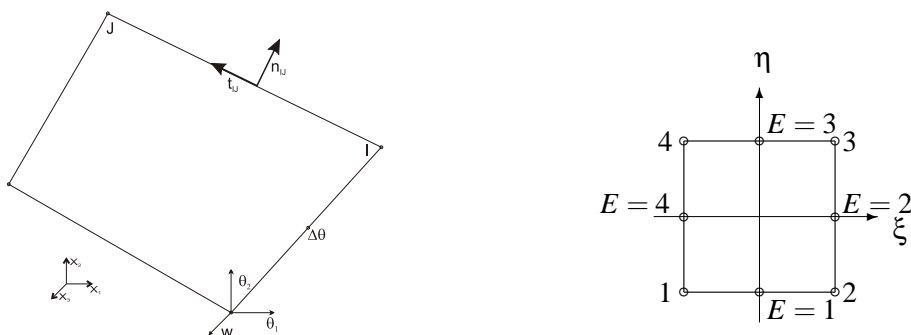
$$\mathbf{C}^B = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^S = \frac{Etc}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kjer je  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  in  $t$  debelina plošče,  $E$  Youngov elastični modul ter  $\nu$  Poissonovo razmerje. Strižni korekcijski faktor  $c$  je običajno nastavljen na 5/6. V (1) imamo površinsko zunanjo obtežbo  $q$  in obtežbo v obliki robnih sil in momentov na dolžinsko enoto;  $\bar{q}$ ,  $\bar{m}_1$  in  $\bar{m}_2$ .

Če se hočemo izogniti strižnemu blokiranju, mora biti element sposoben opisati homogeno (konstantno) strižno deformacijsko stanje. To dosežemo, če je polinomska interpolacija pomika za en red višja od polinomske interpolacije zasukov, Ibrahimbegović [2]; če je torej interpolacija zasukov linearna, mora biti interpolacija pomika kvadratična. V našem primeru uporabimo takšno interpolacijo, da je stanje konstantnega striga doseženo po robovih končnega elementa. Interpolacija pomikov in zasukov po vsakem od štirih robov končnega elementa je natanko takšna, kot bi jo naredili pri linijskem 'Timošenkovem' končnem elementu, da bi se izognili strižnemu blokiranju.

### 2.2 Element s kvadratično interpolacijo pomika (element 1)

Referenčna konfiguracija elementa je definirana s preslikavo  $\mathbf{x} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I$ , kjer je  $\mathbf{x} = \langle x_1; x_2 \rangle^T$  krajevni vektor točke elementa,  $\mathbf{x}_I$  pa so vozliščne vrednosti tega vektorja.  $N_I$  so standardne bilinearne bazne funkcije  $N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)$ . Naravne koordinate  $(\xi, \eta)$  so definirane na območju  $[-1, +1]$ ;  $\xi_I$  in  $\eta_I$  sta vrednosti naravnih koordinat v vozlišču  $I$ .



Slika 1 : Oznake prostostnih stopenj

Interpolaciji za pomike in zasuke konstruiramo s posplošenjem relacij, ki jih poznamo za ‘Timošenkov’ nosilec

$$w = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) w_I + \sum_{E=1}^4 M_E(\xi, \eta) \frac{l_E}{8} \mathbf{n}_E \cdot (\theta_J - \theta_I), \quad \theta = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \theta_I \quad (4)$$

V (4) je  $l_E$  dolžina in  $\mathbf{n}_E$  normala na stranico  $E$ , ki leži med vozlišči  $I$  in  $J$ ;  $\theta_I$  je vektor vozliščnih zasukov  $\langle \theta_{1I}; \theta_{2I} \rangle^T$ . Bazne funkcije  $M_E$  se nanašajo na stranice

$M_E(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_E \eta)$ ,  $E = 1, 3$ ;  $M_E(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_E \xi)$ ,  $E = 2, 4$ , kjer sta  $\xi_E$  in  $\eta_E$  vrednosti naravnih koordinat po stranici  $E$ . Interpolacijo pomika je mogoče zapisati tudi v bolj kompaktni obliki, kjer vsota teče le po vozliščih

$$w = \sum_{I=1}^4 (N_I(\xi, \eta) w_I + \hat{\mathbf{M}}_I(\xi, \eta) \theta_I), \quad \hat{\mathbf{M}}_I(\xi, \eta) = M_{\underline{L}}(\xi, \eta) \frac{l_{\underline{L}}}{8} \mathbf{n}_{\underline{L}}^T - M_{\underline{M}}(\xi, \eta) \frac{l_{\underline{M}}}{8} \mathbf{n}_{\underline{M}}^T \quad (5)$$

Indeksa  $\underline{L}$  in  $\underline{M}$  v (5) sta indeksa stranic, ki se stikata v vozlišču  $I$ . Interpolacijo virtualnega pomika in virtualnih pomikov opravimo na enak način kot  $w$  in  $\theta$  v (4). Vektor ukrivljenosti  $\kappa$  določimo tako, da vstavimo interpolacijo zasukov  $\theta$  v izraz (2):

$$\kappa = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I, \quad \mathbf{u}_I = \langle w_I; \theta_{1I}; \theta_{2I} \rangle^T, \quad \mathbf{B}_I(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_I(\xi, \eta) / \partial x_1 \\ 0 & \partial N_I(\xi, \eta) / \partial x_2 & 0 \\ 0 & \partial N_I(\xi, \eta) / \partial x_1 & -\partial N_I(\xi, \eta) / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Z izbrano interpolacijo pomikov in zasukov (4) zagotovimo opis konstantnega striga po robovih, ne pa tudi v notranjosti elementa, zato je strižno blokiranje še vedno prisotno. Da bi ga odpravili, uporabimo AS metodo. Za interpolacijo  $\gamma$  izberemo bilinearno porazdelitev v obliki:

$$\gamma = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \gamma_I \quad (7)$$

V (7) so  $\gamma_I = \langle \gamma_{I1}; \gamma_{I2} \rangle^T$  vozliščne strižne deformacije, ki so izražene glede na koordinatni sistem  $x_1, x_2, x_3$ . Povezane so s strižnimi deformacijami po obeh robovih, ki se stikata v vozlišču  $I$  (z  $J$  in  $K$  sta označeni vozlišču  $I$  sosednji vozlišči)

$$\mathbf{t}_{IJ} \cdot \boldsymbol{\gamma}_I = \gamma_{t_{IJ}}, \quad \mathbf{t}_{IK} \cdot \boldsymbol{\gamma}_I = \gamma_{t_{IK}} \quad (8)$$

Vrednost strižne deformacij po stranici  $IJ$  je torej projekcija strižne deformacije v vozlišču  $\gamma_I$  na enotski tangenti vektor  $\mathbf{t}_{IJ}$ . Ker strižne deformacije po stranicah izhajajo iz (3) in (4), so konstantne po stranici in enake kot pri 'Timošenkovem' nosilcu; na stranici, ki je napeta med vozliščema  $I$  in  $J$ , so  $\gamma_{t_{IJ}} = 1/l_{IJ}(w_J - w_I) - 1/2 \mathbf{n}_{IJ} \cdot (\boldsymbol{\theta}_J + \boldsymbol{\theta}_I)$ , kjer je  $l_{IJ}$  dolžina stranice,  $\mathbf{n}_{IJ}$  pa je normala nanjo. Rešitev sistema enačb (8) je  $\boldsymbol{\gamma}_I = 1/\mathbf{t}_{IJ} \cdot \mathbf{n}_{IK} (\mathbf{n}_{IK} \gamma_{t_{IJ}} - \mathbf{n}_{IJ} \gamma_{t_{IK}})$ . Ko v slednji izraz vstavimo vrednosti konstantnih strižnih deformacij, dobimo

$$\boldsymbol{\gamma}_I = \frac{\left[ 2 \frac{\mathbf{n}_{\underline{L}} w_{\underline{K}}}{l_{\underline{M}}} + 2 \frac{\mathbf{n}_{\underline{M}} w_{\underline{J}}}{l_{\underline{L}}} - 2 \left( \frac{\mathbf{n}_{\underline{L}}}{l_{\underline{M}}} + \frac{\mathbf{n}_{\underline{M}}}{l_{\underline{L}}} \right) w_I + \mathbf{n}_{\underline{L}} \otimes \mathbf{n}_{\underline{M}} \boldsymbol{\theta}_K - \mathbf{n}_{\underline{M}} \otimes \mathbf{n}_{\underline{L}} \boldsymbol{\theta}_J + (\mathbf{n}_{\underline{L}} \otimes \mathbf{n}_{\underline{M}} - \mathbf{n}_{\underline{M}} \otimes \mathbf{n}_{\underline{L}}) \boldsymbol{\theta}_I \right]}{2 \mathbf{t}_{\underline{L}} \cdot \mathbf{n}_{\underline{M}}} \quad (9)$$

Indeksi stranic v (9) so namesto z oznakama pripadajočih vozlišč označeni s podčrtajem; indeksa  $\underline{L}$  in  $\underline{M}$  predstavljata sosednja robova vozlišču  $I$ . Končno lahko z (7) in (9) zapišemo  $\boldsymbol{\gamma}$  v kompaktni obliki

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{I=1}^4 \hat{\mathbf{B}}_I(\xi, \eta) \mathbf{u}_I \quad (10)$$

Ko opisane interpolacije vstavimo v (1) - variacijske količine interpoliramo na enak način kot dejanske - dobimo algebraične enačbe končnega elementa.

### 2.3 Končni element s kubično interpolacijo pomika (element 2)

Interpolacijo zasukov lahko še razširimo v

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_I + \sum_{E=1}^4 M_E(\xi, \eta) \mathbf{n}_E \Delta \boldsymbol{\theta}_E \quad (11)$$

kjer je  $\Delta \boldsymbol{\theta}_E$  hierarhična rotacija definirana na sredini stranice  $E$ . Interpolacija pomikov se, skladno s pripadajočim 'Timošenkovim' nosilcem, razširi v

$$w = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) w_I + \sum_{E=1}^4 M_E(\xi, \eta) \frac{l_E}{8} \mathbf{n}_E \cdot (\boldsymbol{\theta}_J - \boldsymbol{\theta}_K) + \sum_{E=1}^4 \tilde{M}_E(\xi, \eta) \frac{l_E}{6} \Delta \boldsymbol{\theta}_E \quad (12)$$

kjer so  $\tilde{M}_E$  dodatne bazne funkcije, ki se nanašajo na stranice elementa

$$\tilde{M}_E(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi (1 + \eta_E \eta) (1 - \xi^2), \quad E = 1, 3 \quad \tilde{M}_E(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta (1 + \xi_E \xi) (1 - \eta^2), \quad E = 2, 4 \quad (13)$$

Vektor ukrivljenosti  $\boldsymbol{\kappa}$  postane

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I(\xi, \eta) \boldsymbol{\theta}_I + \sum_{E=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_E(\xi, \eta) \mathbf{n}_E \Delta \boldsymbol{\theta}_E \quad (14)$$

Matrike  $\tilde{\mathbf{B}}_E$  imajo podobno obliko kot matrike  $\mathbf{B}_I$ , le da so namesto baznih funkcij  $N_I$  uporabljene bazne funkcije  $\tilde{M}_E$ . Izkaže se, da se vozliščne vrednosti strižnih deformacij  $\gamma_I$  razlikujejo od tistih pri kvadratični interpolaciji pomika (9) le za dodaten člen ( $\gamma_I^*$  je  $\gamma_I$  iz izraza (9))

$$\gamma_I = \gamma_I^* + \frac{1}{\mathbf{t}_L \cdot \mathbf{n}_M} \left[ \frac{2}{3} \mathbf{n}_L \Delta \theta_M - \frac{2}{3} \mathbf{n}_M \Delta \theta_L \right] \quad (15)$$

#### 2.4 Diskretni Kirchhoffov element (element 3)

Če pri elementu 2 postavimo zahtevo, da po posamezni stranici ni strižnih deformacij, npr.  $\gamma_{IK} = 0$ , lahko izrazimo  $\Delta \theta_E$  v zaključeni obliki

$$\Delta \theta_E = \frac{3}{2l_E} (w_K - w_I) - \frac{3}{4} \mathbf{n}_E \cdot (\theta_I + \theta_K) \quad (16)$$

Če izraz (16) nesemo v interpolacije za pomik (12) in zasuka (11), ugotovimo, da le-te postanejo identične interpolacijam za diskretni Kirchhoffov element (DKQ). Ker so vse vozliščne vrednosti striga nične, je tudi prispevek strižne energije v funkcionalu (1) ničen. Z eksplicitno definirami interpolacijami za pomike in zasuka lahko iz  $\delta \Pi^{zum}$  v (1) konsistentno izpeljemo obtežni vektor. Podobno velja za masno matriko.

#### 2.5 Element z nekompatibilnimi deformacijskimi načini (element 4)

Dodatne prostostne stopnje, ki jih vpeljemo pri elementu 2,  $\Delta \theta_E$ , nimajo zelo jasne fizikalne slike, zato jim je težko definirati robne pogoje. Zaželeno je torej, da se dodatne prostostne stopnje nekako izloči, kar je mogoče doseči s statično kondenzacijo na nivoju elementa, če jih obravnavamo kot nekompatibilne deformacijske oblike, Ibrahimbegović, Wilson [1]. Vektor ukrivljenosti  $\kappa$  zato zapišemo kot vsoto

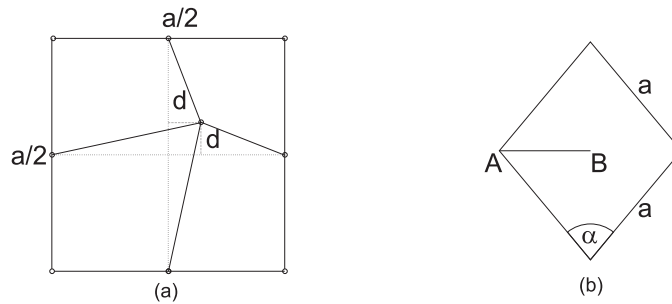
$$\kappa = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I(\xi, \eta) \theta_I + \sum_{E=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_E^*(\xi, \eta) \mathbf{n}_E \alpha_E \quad (17)$$

kjer parametri  $\alpha_E$  ustrezajo hierarhičnim rotacijam na sredini stranic. Potrebno je tudi poskrbeti, da je prispevek k deformacijski energiji zaradi nekompatibilnih deformacijskih oblik enak nič, kar se doseže z modifikacijo

$$\tilde{\mathbf{B}}_E^*(\xi, \eta) = \tilde{\mathbf{B}}_E(\xi, \eta) - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_E^*(\xi, \eta) d\Omega \quad (18)$$

Interpolacija strižnih deformacij je enaka kakor pri elementu s kubično interpolacijo pomikov (15), le da namesto parametrov  $\Delta \theta_E$  nastopajo  $\alpha_E$ . Z definirano interpolacijo ukrivljenosti in strižnih deformacij zapišemo togostno matriko velikosti  $16 \times 16$ . Po statični kondenzaciji, s katero izločimo parametre  $\alpha_E$ , ostane togostna matrika velikosti  $12 \times 12$ . V variacijski formulaciji metode nekompatibilnih deformacijskih načinov s parametri  $\alpha_E$  ni povezana nobena obtežba, zato je izračun obtežnega vektorja standarden.





Slika 2 : (a) pravokotna plošča, deformirana mreža (b) romboidna plošča

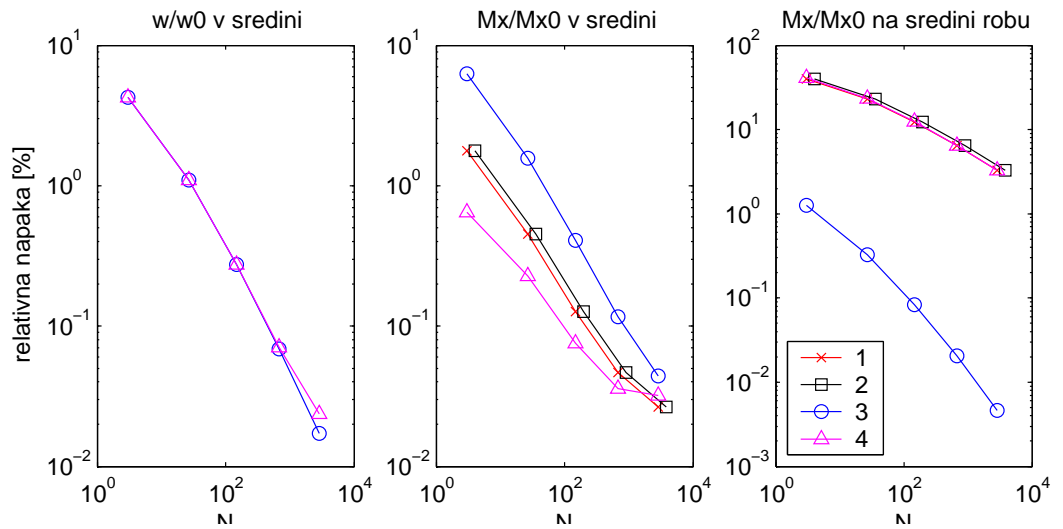
### 3 Numerični primeri

Predstavljene končne elemente smo implementirali v programskem okolju AceGen, ki ga je razvil J. Korelc [3]. Bistvena prednost implementacije v AceGen-u je simbolni zapis, zato je programska koda transparentna in sledi predstavljeni matematični notaciji. Druga pomembna prednost take implementacije je, da je sorazmerno preprosto implementirati element znotraj različnih programskih paketov za analizo z metodo končnih elementov, kot so npr. FEAP, ELFEN in ABAQUS. S prevajanjem programske kode namreč dobimo izvorno kodo za izbrano kombinacijo programskega jezika in okolja za analizo.

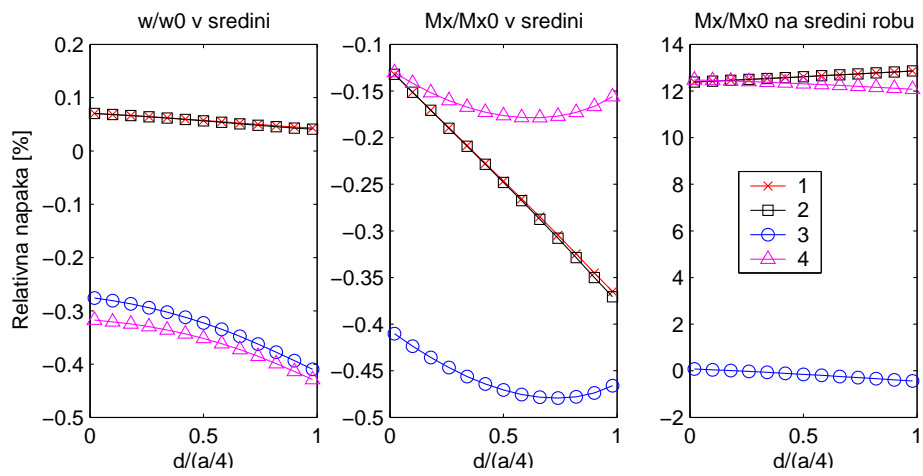
Preskus razvitih elementov na sorazmerno preprostih primerih lahko opravimo kar v okolju AceGen, saj ima vgrajen lasten modul za analizo (CDriver). Primerjava končnih elementov je predstavljena na dveh značilnih numeričnih primerih. V obeh primerih obravnavamo togo vpeto ploščo debeline  $t = 1\text{ cm}$  z enotsko površinsko obtežbo  $q = 1\text{ N/m}^2$ .

#### 3.1 Kvadratna plošča

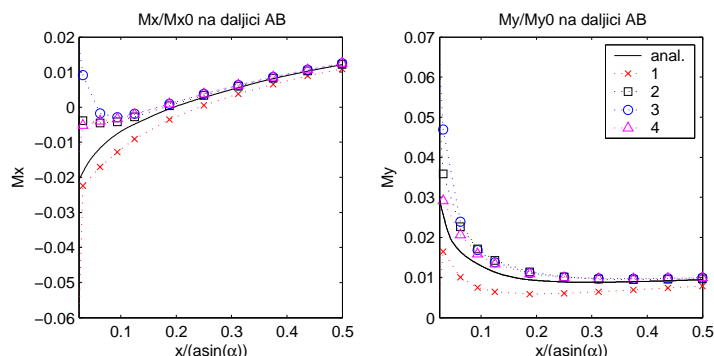
Prvi primer predstavlja vpeta plošča kvadratne oblike s stranico  $a = 10\text{ m}$ . Zaradi simetrije računamo le s četrtino območja in upoštevamo simetrijske robne pogoje. Da bi pokazali, da je rešitev elementov pri zelo tanki plošči enaka Kirchhoffovi rešitvi, je izbrano razmerje  $a/t = 1000$ , kjer je  $t$  debelina plošče. Mreža končnih elementov ni strukturirana. Osnovno mrežo predstavljajo 4 končni elementi na sliki 3a, ki pa se pri zgoščanju strukturirano delijo. Prikazani pomiki in momenti so normirani in sicer pomik glede na  $w_0 = 0.001qa^4/D$  in moment glede na  $M_0 = 0.01qa^2$ . Momenti so iz vrednotenih s pomočjo konstitutivnih enačb v integracijskih točkah, nato pa so z metodo najmanjših kvadratov in glajenjem preko elementov določene tudi vrednosti v vozliščih. Na sliki 3 je predstavljena konvergenca v odvisnosti od števila prostostnih stopenj za nedeformirano mrežo. Opaziti je, da pri vseh elementih, razen pri elementu 4, konvergenca pomika poteka z zgornje strani. Konvergenca momentov je pri vseh elementih z zgornje strani; najhitrejša je pri elementu 3. Rezultati vseh elementov konvergirajo k analitično napovedanim vrednostim.



Slika 3 : Tanka pravokotna plošča - konvergenca



Slika 4 : Tanka pravokotna plošča - neregularna mreža



Slika 5 : Potek momentov na daljici AB pri romboidni plošči

Ker je natančnost izračuna odvisna od oblike mreže, prikazujemo na sliki 4 odvisnost rezultatov od deformiranosti mreže. Plošča je najprej razdeljena na 4 območja (slika 3a), nato pa je vsako območje razdeljeno na  $8 \times 8$  elementov. Stopnjo določa parameter  $d$ , ki teče od 0 do  $a/8$ .

### 3.2 Romboidna plošča

Drugi primer obravnava togo vpeto ploščo romboidne oblike s stranico  $a = 10m$  in ostrim kotom  $\alpha = 60^\circ$ . Primer je posebej zanimiv zaradi singularnosti v momentih, ki se pojavi pri ogliščih s topimi koti. Za predstavljen primer je na voljo tudi primerjava z analitično rešitvijo.

## 4 Zaključek

Predstavljeni elementi so izkazali svojo robustnost na primeru tankih plošč, kjer ne prihaja do fenomena blokiranja. Vsi razviti elementi temeljijo na enakih predpostavkah, zato je mogoče vzpostaviti hierarhično urejenost. Ker so elementi razviti na podlagi Reissner Mindlinove teorije, delujejo tudi v primeru debelih plošč.

## Literatura

- [1] A. Ibrahimbegovič. Plate quadrilateral finite element with incompatible modes. *Communications in applied numerical methods*, 8:497–504, 1992.
- [2] A. Ibrahimbegovič. Quadrilateral finite elements for analysis of thick and thin plates. *Computers methods in applied mechanics and Engineering*, 110:195–209, 1993.
- [3] J. Korelc. Multi-language and multi-environment generation of nonlinear finite element codes. *Engineering with Computers*, 18(4):312–327, 2002.



## **Ekperimentalna raziskava učinkovitosti modificiranega turbinskega mešala**

**A. Bombač in I. Žun**

### **Experimental Research of Efficiency of Modified Disk Type Impellers**

**Povzetek.** Predstavljena je učinkovitost mešanja v posodi z različnimi modificiranimi mešali, ki temelji na času pomešanja in disipirani energiji mešala. Časi pomešanja so določeni z eksperimentalno metodo po principu motnja-odziv, kjer je bila kot motnjo dodana manjša količina vroče vode. Rezultati so prikazani v odvisnosti  $t_m$ - $P$  ter primerjani z vrednostmi iz literature. Krajše čase pomešanja od tistih z Rushtonovim mešalom ima dvoje modificiranih mešal. Ugotovljeno je tudi, da se časi pomešanja krajšajo z večanjem vrtilne hitrosti mešala.

**Abstract.** Mixing efficiency based on mixing time and dissipated impeller power is given for stirred vessel using different modified impellers. Mixing time was measured using the pulse-response method using smaller quantity of a hot water. Results were shown as  $t_m$ - $P$  dependency and compared with those from the literature. It was found that mixing times of two modified impellers were shorter compared to that of Rushton turbine. In general, mixing times shorten with increasing of impeller speed.

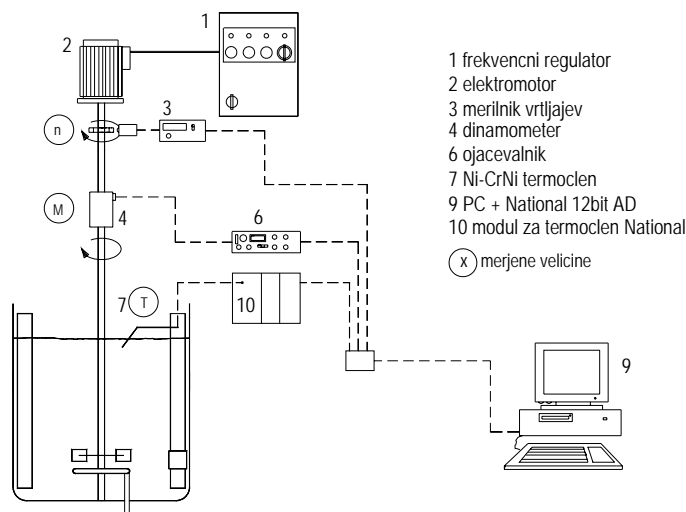
## **1 UVOD**

Pred kratkim so bili predstavljeni izsledki primerjav modificiranih turbinskih mešal [8], katerih namen je bil predvsem ugotoviti katero od mešal je najprimernejše oziroma najučinkovitejše za dispergiranje plina v kapljevini. Pri tem sta disipacija energije mešala in čas pomešanja osnovna atributa primerjave, saj odločilno vplivata na učinkovitost mešala ter mešalne naprave kot celote, odločata pa tudi o stroških mešalnega procesa. Pri enaki disipirani energiji mešala je najbolj učinkovito tisto mešalo, ki ima najkrajši čas pomešanja. Na disipacijo energije mešala vplivajo različni parametri kot npr. oblika oziroma izvedba mešala (radialno, aksialno mešalo)[4], lahko tudi različne oblike lopatic enakih geometrijskih razmerij[6,9] ali pa oblika in izvedba motilnikov toka [10].

V tem delu so obravnavani časi pomešanja in disipacija energije pri mešanju kapljevine z različnimi turbinskimi mešali, ki ga modificirana mešala dosegajo ob predpisani stopnji pomešanja. Pri tem so bila uporabljena: standardno Rushtonovo mešalo (RuT), mešalo z dvema diski (DDT), mešalo z zapognjenimi lopaticami z zarezo (SBT) in mešalo z zavrtimi lopaticami (TBT). Za delovno sredstvo je bila uporabljena voda. Časi pomešanja so bili merjeni po metodi motnja-odziv, kjer je bila za motnjo uporabljena manjša količina vroče vode. Razvita je bila procedura, ki od že predstavljene [8] natančneje določa čase pomešanja. Iz rezultatov je razvidno, da so časi pomešanja modificiranih mešal različni pri enakih hidrodinamskih parametrih ( $n, q$ ), z večanjem vrtilne hitrosti mešala pa se krajšajo.

## 2 MERILNA LINIJA IN PREIZKUS

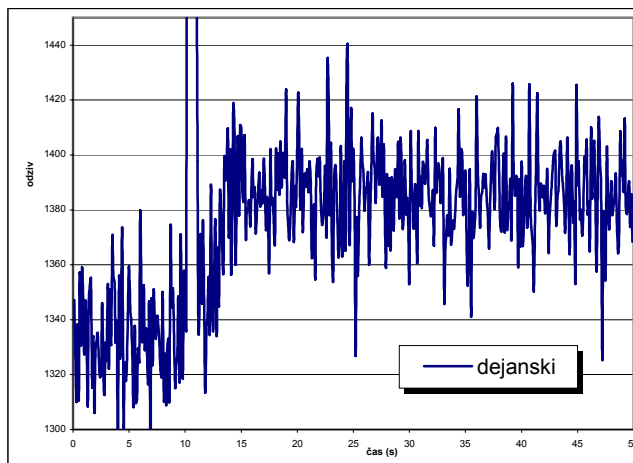
Mešanje kapljevine v posodi z mešalom je potekalo v cilindrični posodi premera 450 mm z različnimi turbinskimi mešali premera 150 mm. Ostala geometrijska razmerja so podrobneje opisana v delih [1,2,3]. Za delovno sredstvo je bila uporabljena vodovodna voda. Eksperiment je bil opravljen pri različnih vrtilnih frekvencah mešala. Za medsebojno primerjavo je bilo za osnovo vzeto standardno Rushtonovo mešalo. Ostala primerjana mešala so bila predstavljena v delu[8], ter izdelana v LFDT (načrt: A.Bombač). Merilna linija s katero so bile izvedene meritve različnih parametrov je prikazana na sliki 1.



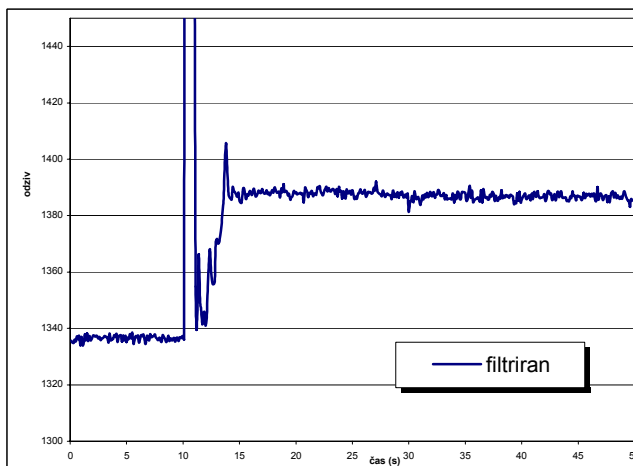
Slika1: Merilna linija

Časi pomešanja so bili merjeni z metodo motnja – odziv [4,7,9]. Tako je bila za motnjo uporabljena manjša količina vode ( $1 \text{ dm}^3$ ) temperature  $90\text{--}95^\circ\text{C}$ , vlita na gladino vode nad lokacijo termočlena, to je pri razdalji 50 mm od gredi mešala in 30 mm pod gladino ( $r, z$ ) = (65, 420mm). Ta lokacija je bila določena glede na raziskave drugih avtorjev [4], kjer so bili časi pomešanja merjeni na treh različnih lokacijah (tik pod gladino, v iztekajočem toku iz mešala in ob steni posode), se niso veliko razlikovali od medsebojnega povprečja. Najkrajši čas je bil dosežen v bližini mešala in je bil za 11% krajši od povprečja vseh treh lokacij, v bližini stene posode je bil daljši za 6% od povprečja, medtem ko je bil na lokaciji pod gladino za približno 4% večji od povprečja. Za termočlen je bil uporabljen par *Ni-CrNi* (tip K), premer tipala 0,2 mm. Tipalo je bilo priključeno na pred-ojačevalnik proizvajalca National Instruments. Hitrost maksimalnega temperaturnega odziva termočlena je bila pri 3 kratni ponovitvi med  $440$  in  $550^\circ\text{C/s}$ , kar je zadoščalo za meritev časov pomešanja, hkrati pa je bil odziv bistveno »počasnejši« od motenj, ki so bile prisotne v osnovnem signalu. Beleženje odziva je potekala s frekvenco 1000 Hz, čas posamezne meritve je bil 60 s. Na sliki 2 je prikazan časovni odziv kot arbitražna vrednost (temperatura izražena z napetostjo v binarni skali), kot ga zazna AD (National Instruments) 12 bitni AD pretvornik z vsemi motnjami, ki nastopijo v osnovnem signalu. Iz analize motenj pri zajemu z višjimi frekvencami zajemanja podatkov je bil analiziran čas motenj. Ta je bil krajši od  $10^{-4}$  s, kar je omogočilo enostavno

prepoznavo in izločanje motenj. Očiščen signal je prikazan na sliki 3. Z nadaljnjo proceduro je bil takšen signal s 1000 zapisi/s povprečen in preveden na 10 zapisov/s.



Slika 2: Dejanski temperaturni odziv



Slika 3: Filtriran temperaturni odziv

Računanje časov pomešanja je bilo izvedeno pri zahtevani 95% stopnji pomešanja, kar je izraženo kot 95% razlika med začetno in končno temperaturo, čas pomešanja je enak:

$$t_{\text{meš}} = t_{\text{kon}} - t_{\text{zač}} . \quad (1)$$

Začetni čas odziva je bil določen pri  $t_{\text{zač}} = t_i$ , ko je dosežen pogoj:

$$T_i \geq \text{Avg}(T_{i-10}; T_i) \cdot 1,05; \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

kjer pomenijo:  $T_i$  - arbitražna vrednost temperature in  $t_i$  - čas pri  $i$ -tem koraku zapisa. Končni čas je bil določen pri  $t_{\text{kon}} = t_i$ , ko je temperatura v  $i$ -tem koraku dosegla povprečno vrednost naslednjih 10 izmerkov v odstopanju  $\pm 5\%$  od povišanja temperature pomešanja

$$T_i \geq \text{Avg}(T_i; T_{i+10}) - 0,095 \cdot \Delta T \wedge T_i \leq (\text{Avg}(T_i; T_{i+10}) + 0,095 \cdot \Delta T, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

kjer je temperaturna razlika med začetno in končno temperaturo enaka  $\Delta T = T_{\text{zač}} - T_{\text{kon}}$ . Pri tem je bila dosežena relativna ponovljivost časa pomešanja na osnovi treh ponovitev manjša od 10%. V našem primeru izvajanja meritev temperaturnega odziva je bila izbrana samo ena lokacija, saj je šlo predvsem za medsebojno primerjavo različnih mešal pri enakih parametrih  $n$  in  $q$ .

### 3 REZULTATI IN RAZPRAVA

Časi pomešanja modificiranih mešal pri mešanju kapljevine so predstavljeni na slikah 3 - 6 v odvisnosti od disipirane moči mešala, vrisane krivulje so aproksimirane po enačbi

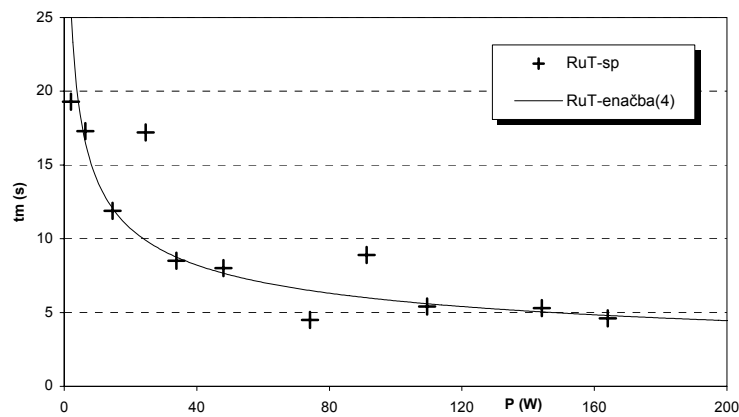
$$t_m = aP^b, \quad (4)$$

kjer so koeficienti  $a$  in  $b$  ter  $R$  prikazani v tabeli 1.

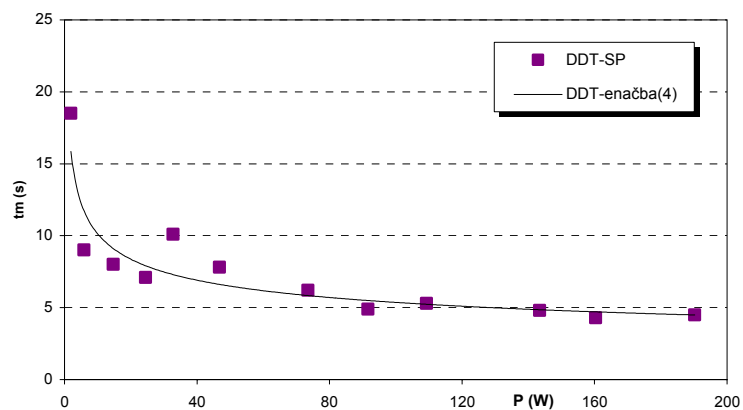
**Tabela 1:** Parametri regresijske krivulje po enačbi (4).

Mešalo	$a$	$b$	$R$
RuT	32,978	-0,3780	0,9231
DDT	19,483	-0,2789	0,9260
SBT	26,26	-0,2932	0,9120
TBT	19,913	-0,3162	0,9600

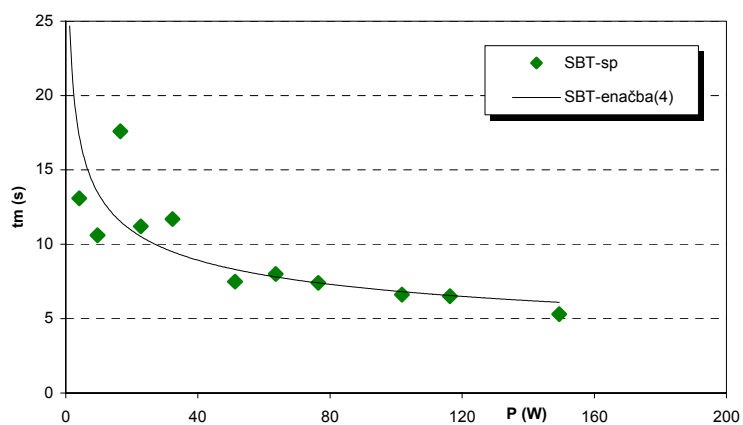
S slik je razvidna značilnost, da se z večanjem moči mešanja čas pomešanja pri vseh izvedbah mešal eksponento krajša. Nadalje je opazen tudi večji raztros časov pomešanja pri manjših močeh mešala ter posebej pri mešalih RuT, DDT in SBT. Omenjena mešala imajo radialno izstopajoč tok iz mešala, ki se ob steni posode razdeli na zgornjo ter spodnjo cirkulacijsko zanko. Od omenjenih mešal najkrajši čas dosega DDT mešalo nato RuT mešalo in SBT mešalo kot zadnje. Večja dispirana moč mešala torej posredno predstavlja večjo črpalno zmogljivost mešala oziroma intenzivnejšo cirkulacijo, ter s tem povezano krajši čas pomešanja.



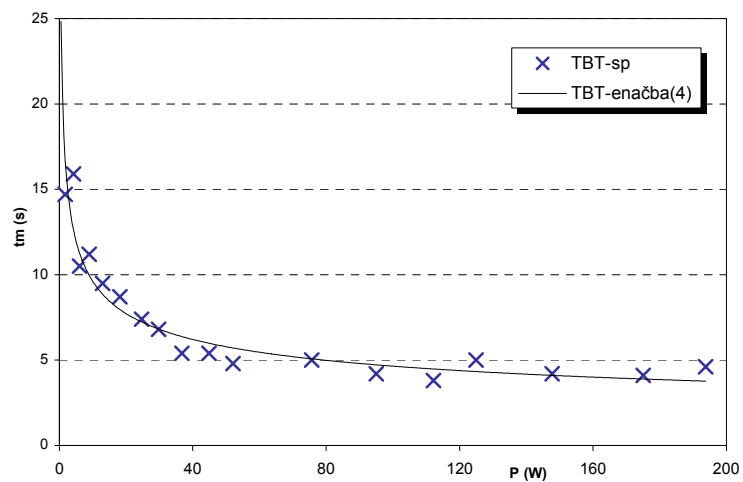
**Slika 3:** Odvisnost časa pomešanja od disipirane moči RuT mešala



Slika 4: Odvisnost časa pomešanja od disipirane moči DDT mešala



Slika 5: Odvisnost časa pomešanja od disipirane moči SBT mešala



Slika 6: Odvisnost časa pomešanja od disipirane moči TBT mešala



Zaradi posebne konstrukcije lopatice pri TBT mešalu izstopa tok iz mešala poševno navzdol v smeri med radialno in aksialno smerjo iztekanja in tvori eno samo cirkulacijsko zanko, kar se odraža z hitrejšim pomešanjem kapljevine po celotnem volumnu kapljevine. Kot je razvidno iz slike 6 je raztros merjenih časov manjši ( $R=0,96$ ), mešalo pa dosega najkrajše čase pomešanja, glej tabelo 2.

**Tabela 2:** Časi pomešanja različnih mešal pri različni vrtilni frekvenci mešala

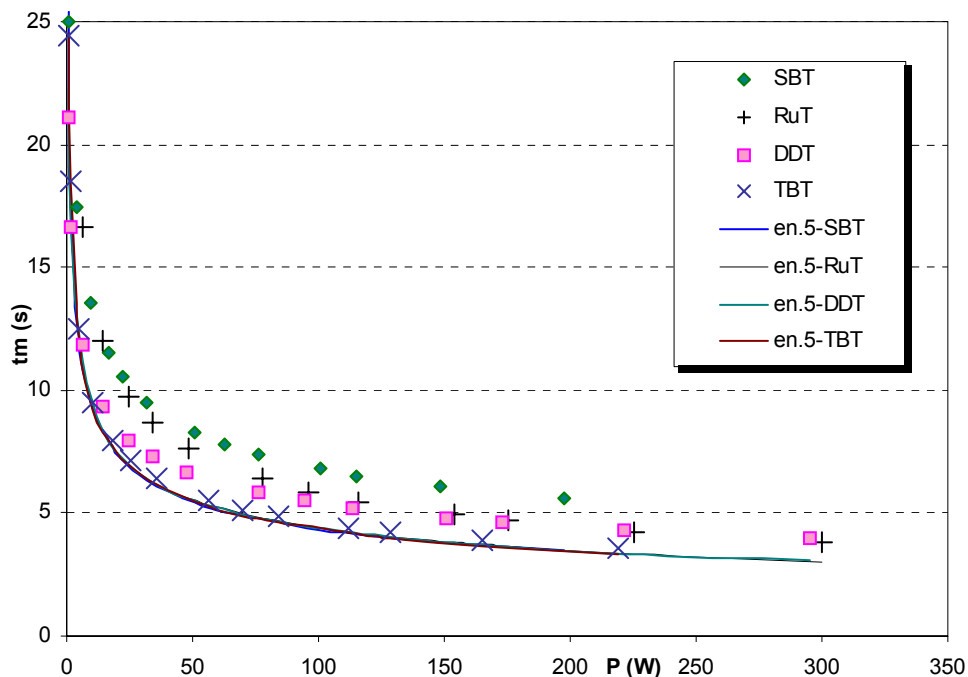
$n$ (/min)	Čas pomešanja $t_m$ (s)			
	DDT	RuT	SBT	TBT
100	18,5	19,3	26,9	14,7
150	9	17,3	13,1	
200	8	11,9	10,6	
240	7,1	15,2	17,6	
267	10,1	8,5	11,2	4,7
300	7,8	8	11,7	5,4
350	6,2	4,5	7,5	
376	4,9	8,9	8	
400	5,3	5,4	7,4	
440	4,8	5,3	6,6	
460	4,3	4,6	6,5	5
500	4,5	4	5,3	

Grafični prikaz odvisnosti časov pomešanja od disipirane moči za različna mešala je podan na sliki 7. Najkrajše čase pomešanja dosega TBT mešalo, sledijo DDT, RuT in SBT mešalo. Čas pomešanja predstavlja samo čas, pri katerem so nehomogenosti prisotne v posodi, kar ne pomeni, da dosega različna mešala enake rezultate procesa. Za kvaliteten produkt procesa pa je pomembna tudi velikost odstopanja homogenosti v posodi [5]. Iz povedanega sledi, da je čas pomešanja dokaj groba ocena mešalne učinkovitosti.

Izmerjeni časi pomešanja so bili primerjani tudi z izračunanimi po kriteriju iz literature (Ruszkowski (1994)<sup>cit.[5]</sup>, Grenville s sod. (1995)<sup>cit.[5]</sup>), ki velja za poljubno obliko mešala:

$$t_m = 5,3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{Ne^{\frac{1}{3}}}\right) \cdot \left(\frac{T}{D}\right)^2. \quad (5)$$

Enačba (5) velja pri pogojih  $1/3 < D/T < 1/2$  in  $H=T$ . Časi pomešanja modificiranih mešal izračunani po en.5 sovpadajo s krivuljo Rus.(94) na sliki 7. Primerjava naših izmerjenih vrednosti z izračunanimi po en.5 kaže relativno dobro ujemanje v medsebojni odvisnosti parametrov  $P-t_m$ , pojavi pa se vprašanje smiselnosti primerjave absolutnih vrednosti. Že sama vrednost  $Ne$  števila Rushtonovega mešala se pri standardni konfiguraciji nahaja po virih iz literature [6] med 4,8 in 6,3, kar predstavlja odstopanje od naše povprečne vrednosti od -7 do 22%. Poleg tega se tudi različne eksperimentalne metode določanja časa pomešanja medsebojno precej razlikujejo; tako v fizikalni osnovi (temperaturni odziv, sprememba konduktivnosti, metoda razbarvanja,...), kot tudi po kriteriju določanja doseženega stanja pomešanja. Tako je lahko pomešanje doseženo po kriteriju (i)  $A_{\infty} = \pm 0,5 \cdot \Delta A$  [5,9] ali pa (ii)  $A'_{\infty} = \pm 1\%$  [4], kjer  $A$  predstavlja poljubno merjeno veličino,  $A'$  pa njeno fluktuacijo. Če izhajamo iz lokalnih meritev na lokaciji  $(r, z, \phi)$ , potem je dodatno še upoštevati vpliv same



Slika 7: Odvisnost časov pomešanja od disipirane moči mešala

lokacije, saj so medsebojna odstopanja od -6% do 11% od skupne srednje vrednosti [4]. Metoda določa tudi neko minimalno količino vnesene snovi, ki predstavlja motnjo. V našem primeru izlitje enega litra vroče vode (kot motnje) traja ocenjeno med 0,75 in 1 s. Ta čas ulitja je neposredno vključen v čas pomešanja, medtem ko so časi vnosa motnje po metodi spremembe konduktivnosti, razbarvanja,  $pH$  (vnos 3 ml kisline, solne raztopine,...) precej krajši.

**Učinkovitost mešala** je postulirana z najkrajšim časom pomešanja pri enaki disipirani moči modificiranega mešala. Ta enakost je lahko dosežena pri ohranitvi enake vrtilne frekvence in momenta le s spremembo premera mešala, ki izhaja iz relacije  $D \propto Ne^{1/5}$ . V primeru zamenjave RuT z SBT mešalom je povečan premer SBT mešala na 0,163 m; pri RuT z TBT na 0,157 m, pri DDT je sprememba zanemarljiva. Če sedaj uporabimo kriterij (5) za izračun časa pomešanja SBT in TBT mešala s povečanim premerom, se v primerjavi (s časom pomešanja z RuT mešalom) zmanjša pri SBT v povprečju za 15% in pri TBT za 11%.

## 5 ZAKLJUČKI

Pri mešanju kapljevine v posodi z mešalom so bile opravljene meritve časov pomešanja s RuT, DDT, SBT in TBT mešalom. Za delovno sredstvo je bila uporabljena vodovodna voda.

Pri enaki vrtilni frekvenci mešala so najkrajši časi pomešanja doseženi pri TBT mešalu, sledijo DDT in RuT in SBT. Na splošno velja, da se časi pomešanja krajšajo z večanjem vrtilne hitrosti mešala oziroma z večanjem disipirane moči mešala.

Najbolj učinkovito mešalo je glede na dosežen najkrajši čas pomešanja pri enaki disipirani moči TBT mešalo, sledijo DDT in RuT in SBT. Ob eventualni zamenjavi Rushtonovega

mešala z ustrezno večjim modificiranim mešalom, se lahko čas pomešanja zmanjša pri uporabi SBT mešala v povprečju za 15% in pri TBT mešalu za 11%.

### Zahvala

To delo je del večjega projekta št. P2-162, ki ga financira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije.

### Oznake

$D$  - premer mešala (m)

$g$  - zemeljski pospešek ( $m/s^2$ )

$H$  - višina vode v posodi (m)

$M$  - moment na gredi mešala (Nm)

$n$  - vrtilna frekvenca mešala ( $s^{-1}$ )

$P$  - moč potrebna za mešanje (W)

$T$  - premer posode (m)

$t_m$  - čas pomešanja (s)

$q$  - pretok zraka ( $m^3/s$ )

$\nu$  - kinematična viskoznost ( $m^2/s$ )

$\rho$  - gostota ( $kg/m^3$ )

Newtonovo število:  $Ne = P / (\rho n^3 D^5)$

### Literatura

- [1] Bombač, A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, *Strojniški vestnik* (44) št. 3-4, **1998**, 105--116
- [2] Bombač, A., Žun, I., Filipič, B., Žumer, M., Gas-Filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Aerated Stirred Vessel, *AIChE J.*, **1997**, 2921--2931
- [3] Bombač, A., Žun, I. Gas-filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Vessel with Dual-Impellers, *Chem.Eng.Sci.*, (55), **2000**, 2995--3001
- [4] Haucine, I., Plasari, E., David, R., Effects of the Stirred Tank's Design on Power Consumption and Mixing time in Liquid Phase, *Chem.Eng.Technol.* (23), **2001**, 7--15
- [5] Nienow, A.W., On impeller circulation and mixing effectiveness in the turbulent flow regime, *Chem. Eng. Science*, (52), **1997**, 2557 -- 2565
- [6] Roman, R.V., Tudoze, R.Z., Studies on Transfer processes in Mixing Vessels, *Chem.Eng.J.*, (61), **1996**, 83--93
- [7] Levenspiel, O., Chemical Reaction Engineering, 3<sup>rd</sup> Ed., Wiley & Sons, **1999**
- [8] Bombač, A., Dernikovič, A., Žun, I., Eksperimentalna raziskava časov pomešanja modificiranih turbinskih mešal. Kuhljevi dnevi 2004, Otočec, Slovensko društvo za mehaniko, **2004**
- [9] Vasconcelos, J.M.T., Orvalho, C.P., Rodrigues, A.M.A.F., Alves, S.S. Effect of Blade Shape on the Performance of Six Bladed Disk Turbine Impellers, *Ind.Eng.Chem.Res.* (39), **2000**, 203--213
- [10] Karcz, J., Major, M. An Effect of a Baffle Length on the Power Consumption in an Agitated Vessel, *Chem.Eng.Proc.* (37), **1998**, 249--256



## *Uklonske sile armiranobetonskih stebrov*

S. Bratina, M. Saje in I. Planinc<sup>1</sup>

### *Buckling loads of reinforced concrete columns*

**Povzetek.** V članku izpeljemo točne izraze za uklonske sile armiranobetonskih stebrov. Izhodišče izpeljave je geometrijsko točna Reissnerjeva teorija nosilcev. Pri izpeljavi izrazov upoštevamo poleg upogibnega tudi osno deformiranje stebrov ter materialno nelinearnost betona in armature.

**Abstract.** The exact solutions for the buckling loads of straight reinforced concrete columns are presented. They provide the generalization of Euler's buckling loads for elastic, axially inextensible columns to columns where both the finite axial deformation and the nonlinear material models are also taken into account.

## 1 Uvod

Stabilnostni pojavi so značilnost nelinearnega obnašanja konstrukcij. Nerazumevanje ali pa tudi zmanjševanje njihovega pomena je v zgodovini gradbenih konstrukcij pripeljalo do porušitve številnih konstrukcij. Omenimo samo dobro znani primer porušitve mostu Tacoma Narrows Bridge, ki se je porušil zaradi dinamične nestabilnosti že pri relativno nizki hitrosti vetra (cca 70 km/h) [1]. Armiranobetonske konstrukcije praviloma niso tako vitke kot jeklene, zato se zdi, da zanje pojav nestabilnosti ni prav dosti pomemben; posledica je, da se v gradbeni praksi problemom uklonske nosilnosti armiranobetonskih konstrukcij pogosto namenja premalo pozornosti. Prav gotovo pa pojavov uklonske nosilnosti ne smemo zanemariti pri montažnih betonskih konstrukcijah in pri vseh vrstah konstrukcij, če so te izpostavljene požarom.

Začetek analize stabilnosti konstrukcij povezujemo z Eulerjevimi raziskavami uklonskih sil elastičnih stebrov v 18. stoletju [5]. Vendar kasnejši eksperimenti na stebrih niso v celoti potrdili pravilnosti Eulerjevih izrazov za uklonske sile. Neskladje med eksperimentalnimi in teoretičnimi rezultati je bila posledica vpliva geometrijskih in materialnih nepopolnosti stebrov ter nepopolne centričnosti zunanje obtežbe [1]. Kljub matematični zahtevnosti je stabilnostna

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

analiza vseh vrst elastičnih konstrukcij danes dobro razvita [1], zato jo večina sodobnih pravilnikov za projektiranje armiranobetonskih gradbenih konstrukcij priporoča za dokaz varnosti proti uklonu [3]. Matematično bistveno bolj zahtevna je stabilnostna analiza konstrukcij iz elastično plastičnih materialov. Med začetnike stabilnostne analize elastično plastičnih konstrukcij prištevamo Engesserja [4]. Engesser je – podobno kot Euler – raziskoval uklonsko obnašanje stebrov, vendar pa je upošteval tudi plastične deformacije materiala. Ugotovil je, da ima materialna nelinearnost velik vpliv na velikost uklonskih sil. Zato je predlagal, da se izrazi za Eulerjeve uklonske sile elastičnih stebrov v primeru elastično plastičnih stebrov spremenijo tako, da se elastični modul nadomesti s tangentskim modulom. Kasneje je z namenom, da bi v stabilnostni analizi elastično plastičnih stebrov upošteval tudi elastično razbremenitev, tangentski modul v izrazih za določitev uklonskih sil nadomestil s t.i. *reduciranim modulom*. Naknadne raziskave so pokazale, da je osnovna Engesserjeva teorija uklonske nosilnosti elastično plastičnih stebrov pravilnejša [9]. Zato praktično vse nadaljnje raziskave o uklonski nosilnosti elastično plastičnih stebrov sledijo kar osnovni Engesserjevi ideji [1, 6].

V članku se ne ukvarjamo s stabilnostno analizo v celoti, temveč samo z določitvijo točnih izrazov za uklonske sile armiranobetonskih stebrov s simetričnim prerezom za štiri osnovne Eulerjeve primere stebra. V analizi zanemarimo vse vrste možnih nepopolnosti. Izhodišče naše izpeljave uklonskih sil armiranobetonskih stebrov je geometrijsko točna Reissnerjeva teorija nosilcev [8]. Novost je v tem, da pri izpeljavi izrazov za določitev uklonskih sil upoštevamo poleg upogibnega tudi osno deformiranje stebrov ter materialno nelinearno obnašanje betona in armature. Zato bi tako izpeljane sile lahko imenovali tudi *posplošene Eulerjeve uklonske sile*. Sile izpeljemo s pomočjo t.i. *linearizirane teorije stabilnosti* [7]. Osnovna predpostavka te teorije je, da so lastnosti kritične točke nelinearnega sistema diferencialnih enačb skoraj vedno enake lastnostim sistema, lineariziranega v kritični točki. Uporabljena metoda pomeni posplošitev standardnega postopka za določitev uklonskih sil elastičnih stebrov na armiranobetonske stebre.

## 2 Uklonske sile armiranobetonskih stebrov

Opazujemo ravne armiranobetonske stebre dolžine  $L$  s konstantnimi prečnimi prerezi, pri katerih se masno in geometrijsko središče ujemata (slika 1). Stebri so obteženi samo z osnimi točkovnimi silami. Uklonske sile takih stebrov izpeljemo s pomočjo t.i. *linearizirane teorije stabilnosti* [7]. Izhodišče izpeljave predstavlja Reissnerjev model ravninskega nosilca [8]. S tem modelom upoštevamo membranske, strižne in upogibne deformacije, ki lahko skupaj s pomiki in zasuki zavzamejo poljubno velike vrednosti. Ker je pri standardnih dimenzijah armiranobetonskih stebrov vpliv strižnih deformacij na njihovo obnašanje zanemarljiv, ta vpliv v nadaljevanju zanemarimo. Tako so vodilne enačbe Reissnerjeve teorije ravninskih nosilcev oziroma stebrov naslednje:

$$f_1 = 1 + u' - (1 + \varepsilon) \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

$$f_2 = w' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

$$f_3 = \varphi' - \kappa = 0, \quad (3)$$

$$f_4 = \mathcal{H}' = 0, \quad (4)$$

$$f_5 = \mathcal{V}' = 0, \quad (5)$$

$$f_6 = \mathcal{M}' - (1 + \varepsilon)Q = 0, \quad (6)$$

$$f_7 = \mathcal{N}_c - \mathcal{N} = 0, \quad (7)$$

$$f_8 = \mathcal{M}_c - \mathcal{M} = 0, \quad (8)$$

kjer ( )' označuje odvod po koordinati  $x$ , s katero so identificirane točke na referenčni osi stebra;  $u$  in  $w$  označujeta komponenti vektorja pomika poljubne točke  $x$  referenčne osi stebra v vzdolžni in prečni smeri,  $\varphi$  je zasuk prečnega prereza pri  $x$ , količini  $\varepsilon$  in  $\kappa$  pa sta osna in upogibna deformacija osi pri  $x$ . V enačbah (4)–(8) je  $\mathcal{M}$  ravnotežni upogibni moment,  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{V}$  pa sta horizontalna in vertikalna komponenta ravnotežne notranje sile, ki sta z ravnotežno osno ( $\mathcal{N}$ ) ter prečno silo ( $Q$ ) povezani z enačbama

$$\mathcal{N} = \mathcal{H} \cos \varphi - \mathcal{V} \sin \varphi, \quad (9)$$

$$Q = \mathcal{H} \sin \varphi + \mathcal{V} \cos \varphi. \quad (10)$$

V enačbah (7)–(8) predstavljata  $\mathcal{N}_c$  in  $\mathcal{M}_c$  konstitucijsko osno silo in konstitucijski upogibni moment. Konstitucijski količini sta odvisni od izbranega materialnega modela betona in armature ter razporeditve armature po prečnem prerezu [2].

Kot smo že povedali, izračunamo uklonske sile armiranobetonskih stebrov s pomočjo linearizirane teorije stabilnosti. Linearizirane enačbe obravnavanih stebrov so:

$$\delta f_1 = \delta u' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi \delta \varphi - \cos \varphi \delta \varepsilon = 0, \quad (11)$$

$$\delta f_2 = \delta w' + (1 + \varepsilon) \cos \varphi \delta \varphi - \sin \varphi \delta \varepsilon = 0, \quad (12)$$

$$\delta f_3 = \delta \varphi' - \delta \kappa = 0, \quad (13)$$

$$\delta f_4 = \delta \mathcal{H}' = 0, \quad (14)$$

$$\delta f_5 = \delta \mathcal{V}' = 0, \quad (15)$$

$$\delta f_6 = \delta \mathcal{M}' - Q \delta \varepsilon - (1 + \varepsilon) \mathcal{N} \delta \varphi - (1 + \varepsilon) \sin \varphi \delta \mathcal{H} - (1 + \varepsilon) \cos \varphi \delta \mathcal{V} = 0, \quad (16)$$

$$\delta f_7 = C_{11} \delta \varepsilon + C_{12} \delta \kappa + Q \delta \varphi - \cos \varphi \delta \mathcal{H} + \sin \varphi \delta \mathcal{V} = 0, \quad (17)$$

$$\delta f_8 = C_{21} \delta \varepsilon + C_{22} \delta \kappa - \delta \mathcal{M} = 0, \quad (18)$$

pri čemer smo komponente tangentne konstitucijske matrike prečnega prereza stebra označili s

$$C_{11} = \frac{\partial \mathcal{N}_c}{\partial \varepsilon}, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \text{in} \quad C_{22} = \frac{\partial \mathcal{M}_c}{\partial \kappa}. \quad (19)$$

$C_{12} = C_{21} = 0$  sledi iz predpostavljenega pogoja, da je armiranobetonski prerez simetričen. V nadaljevanju s pomočjo enačb (1)–(8) izračunamo primarne ravnotežne lege stebrov, s pomočjo

teh ravnotežnih rešitev zapišemo linearni sistem diferencialnih enačb (11)–(18), ga rešimo ter na koncu poiščemo kritično rešitev dobljenega sistema. Ta pa že predstavlja uklonsko silo.

Primarno ravnotežno lego stebrov, obteženih z osno točkovno silo  $F$  v krajiščih, določa pogoj, da je zasuk vseh prečnih prereзов stebra pred uklonom enak nič. S tem pogojem dobi rešitev enačb (1)–(8) obliko:

$$u(x) = \varepsilon(x - L), \quad w(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0, \quad (20)$$

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{N}(x) = -F, \quad \mathcal{V}(x) = Q(x) = 0, \quad \mathcal{M}(x) = 0, \quad (21)$$

$$\varepsilon(x) = \text{konst.}, \quad \kappa(x) = 0. \quad (22)$$

Oсно deформacijo stebra  $\varepsilon$  izračunamo iz znane sile  $F$  s pomočjo konstitucijske enačbe  $\mathcal{N}_c(\varepsilon, \kappa = 0) + F = 0$ . Ko enačbe (19)–(22) upoštevamo v sistemu (11)–(18), se ta poenostavi:

$$\delta f_1 = \delta u' - \delta \varepsilon = 0, \quad (23)$$

$$\delta f_2 = \delta w' + (1 + \varepsilon) \delta \varphi = 0, \quad (24)$$

$$\delta f_3 = \delta \varphi' - \delta \kappa = 0, \quad (25)$$

$$\delta f_4 = \delta \mathcal{H}' = 0, \quad (26)$$

$$\delta f_5 = \delta \mathcal{V}' = 0, \quad (27)$$

$$\delta f_6 = \delta \mathcal{M}' + (1 + \varepsilon)F \delta \varphi - (1 + \varepsilon) \delta \mathcal{V}' = 0, \quad (28)$$

$$\delta f_7 = C_{11} \delta \varepsilon - \delta \mathcal{H} = 0, \quad (29)$$

$$\delta f_8 = C_{22} \delta \kappa - \delta \mathcal{M} = 0. \quad (30)$$

S pomočjo enačb (24)–(27) in (30) lahko linearizirano momentno ravnotežno enačbo (28) izrazimo samo s prečnim pomikom  $w$  referenčne osi armiranobetonskega stebra

$$C_{22} \delta w^{IV} + (1 + \varepsilon)F \delta w'' = 0. \quad (31)$$

Pri izbrani sili  $F$  ta enačba predstavlja homogeno diferencialno enačbo četrtega reda s konstantnimi koeficienti. Ko v enačbi (31) upoštevamo  $C_{22} > 0$  in  $(1 + \varepsilon)F > 0$ , lahko s pomočjo t.i. uklonskega obtežnega parametra

$$k^2 = \frac{(1 + \varepsilon)F}{C_{22}} \quad (32)$$

zapišemo diferencialno enačbo (31) v preprosti obliki

$$\delta w^{IV} + k^2 \delta w'' = 0. \quad (33)$$

Splošna rešitev zgornje enačbe ima obliko

$$\delta w(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx + B_3 x + B_4. \quad (34)$$

Neznane konstante  $B_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) v enačbi (34) določajo statični in kinematični robni pogoji, ki so za različne Eulerjeve osnovne primere različni. Tako so za vrtljivo podprti steber kinematični in statični robni pogoji naslednji:  $w(0) = 0$ ,  $\mathcal{M}(0) = 0$ ,  $w(L) = 0$ ,  $\mathcal{M}(L) = 0$ . S pomočjo statičnih in kinematičnih robnih pogojev dobimo za določitev neznanih konstant homogeni sistem linearnih enačb. Ta ima netrivialno rešitev, če je determinanta sistema enaka nič. V primeru vrtljivo podprtega stebra to pomeni zahtevek  $\sin(kL) = 0$  oziroma  $kL = \pm n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Uklonsko silo vrtljivo podprtega stebra določa najmanjša sila, ki pa nastopi pri  $n = 1$ , in je:

$$(1 + \epsilon_{cr})F_{cr} = \frac{C_{22}\pi^2}{L^2}. \quad (35)$$

K tej enačbi dodamo še enačbo  $\mathcal{N}_c(\epsilon_{cr}, \kappa_{cr} = 0) + F_{cr} = 0$  in dobimo dve enačbi za neznanke  $F_{cr}$  in  $\epsilon_{cr}$ . Če je material neraztegljiv in elastičen, v enačbi (35) upoštevamo  $\epsilon_{cr} = 0$  in  $C_{22} = EI$ . Ob teh pogojih se (35) poenostavi v znano Eulerjevo uklonsko silo vrtljivo podprtega elastičnega stebra  $F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$  [10]. Za Eulerjeve uklonske primere armiranobetonskih stebrov so uklonske sile zbrane v tabeli 1.

Oznaka stebra	armiranobetonski steber	elastični steber ( $\epsilon = 0$ )
vrtljivo podprti steber - VPS	$(1 + \epsilon_{cr})F_{cr} = \frac{C_{22}\pi^2}{L^2}$	$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{L^2}$
konzolni steber - KS	$(1 + \epsilon_{cr})F_{cr} = \frac{C_{22}\pi^2}{(2L)^2}$	$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{(2L)^2}$
enostransko vpeti steber - EVS	$(1 + \epsilon_{cr})F_{cr} = \frac{C_{22}\pi^2}{(0.69915565\dots L)^2}$	$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{(0.69915565\dots L)^2}$
obojestransko vpeti steber - OVS	$(1 + \epsilon_{cr})F_{cr} = \frac{C_{22}\pi^2}{(0.5L)^2}$	$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{(0.5L)^2}$

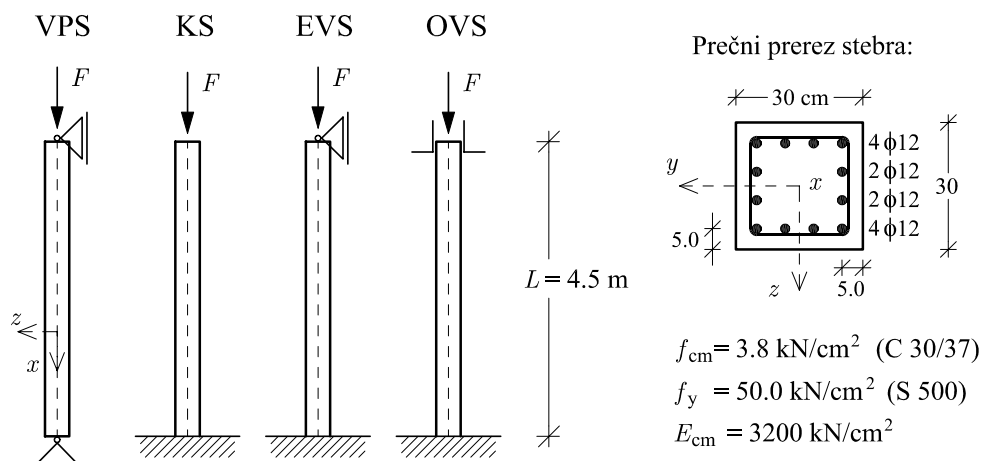
**Tabela 1 :** Uklonske sile  $F_{cr}$  armiranobetonskih stebrov.

### 3 Številčni primer

V tem poglavju za konkretne armiranobetonske stebre izračunamo točne vrednosti uklonskih sil (slika 1). Te primerjamo z vrednostmi, ki jih dobimo z metodo končnih elementov [2] in s točnimi vrednostmi Eulerjevih uklonskih sil elastičnih stebrov.

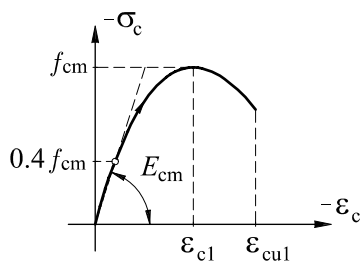
Geometrijske in materialne karakteristike armiranobetonskih stebrov dolžine  $L = 4.5$  m so izbrane tako, da se obravnavani stebri prej uklonijo, kot dosežejo mejno nosilnost prečnega prereza  $\mathcal{N}_{mej}$ . To pomeni, da osna deformacija v nobenem betonskem vlaknu ne sme doseči ali celo preseči deformacije pri tlačni trdnosti betona  $\epsilon_{c1}$ , deformacija v armaturi pa ne deformacije na meji tečenja  $\epsilon_{y1} = \frac{f_y}{E_s}$ . Nelinearno obnašanje armiranobetonskega vlakna oziroma armature opišemo s konstitucijskima modeloma, ki ju za analizo armiranobetonskih okvirnih konstrukcij priporoča evropski standard EuroCode 2 (slika 2).



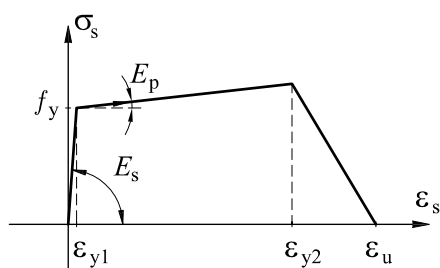


Slika 1 : Armiranobetonski stebri. Geometrijski in materialni podatki.

(a) konstitucijski model betona



(b) konstitucijski model armature



Slika 2 : Konstitucijski model betona (a) in armature (b) skladno z EuroCode 2 [3].

Glede na izbrano tlačno trdnost betona in armature v nadaljevanju izberemo skladno z EuroCode 2 [3] še preostale materialne parametre betona oziroma armature. Ti so:  $\epsilon_{c1} = -2.2 \text{ ‰}$ ,  $\epsilon_{cu} = -3.5 \text{ ‰}$ ,  $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $E_p = 0 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\epsilon_{y2} = 40 \text{ ‰}$  in  $\epsilon_u = 40 \text{ ‰}$  (slika 2).

Točne vrednosti uklonskih sil obravnavanih stebrov prikazuje tabela 2. V njej podajamo tudi točne vrednosti za  $F_{cr}$  elastičnih stebrov in vrednosti za  $F_{cr}$  armiranobetonskih stebrov, izračunanih z metodo končnih elementov [2]. Opazimo, da je vpliv izbire materialnega modela stebrov na velikosti  $F_{cr}$  zelo velik, posebno v primeru OVS, kjer je uklonska dolžina najmanjša. Tako je razlika v velikosti  $F_{cr}$ , ki je posledica materialnega modela, najmanjša pri konzolnih stebrih, največja pa pri obojestransko vpetih stebrih. Ujemanje rezultatov uklonskih sil numerične in točne analize je odlično, kar po eni strani potrjuje pravilnost izpeljanih izrazov za uklonske sile armiranobetonskih stebrov in po drugi strani veliko natančnost družine deformacijskih končnih elementov v [2]. To ugotovitev potrjujejo tudi rezultati v tabeli 3, kjer smo primerjali osne deformacije  $\epsilon_{cr}$  pri  $F_{cr}$  za vse obravnavane armiranobetonske stebre. Tabela opozarja tudi na dejstvo, da so osne deformacije pri uklonu lahko veliko manjše od kritične deformacije materiala; v primeru KS je faktor enak okrog tri.

$F_{cr}$ [kN]	način podpiranja stebra			
	KS	VPS	EVS	OVS
točen postopek	2124.270	3668.307	3936.186	4012.639
MKE [2]	2124.27	3668.31	3936.19	4012.67
elastična analiza	2631.89	10527.58	21534.05	42110.31

**Tabela 2** : Vrednosti uklonskih sil  $F_{cr}$  armiranobetonskih stebrov.

$\epsilon_{cr}$ [‰]	način podpiranja stebra			
	KS	VPS	EVS	OVS
točen postopek	-0.7361	-1.6585	-2.0020	-2.1858
MKE [2]	-0.736	-1.658	-2.002	-2.186

**Tabela 3** : Osne deformacije  $\epsilon_{cr}$  armiranobetonskih stebrov pri  $F_{cr}$ .

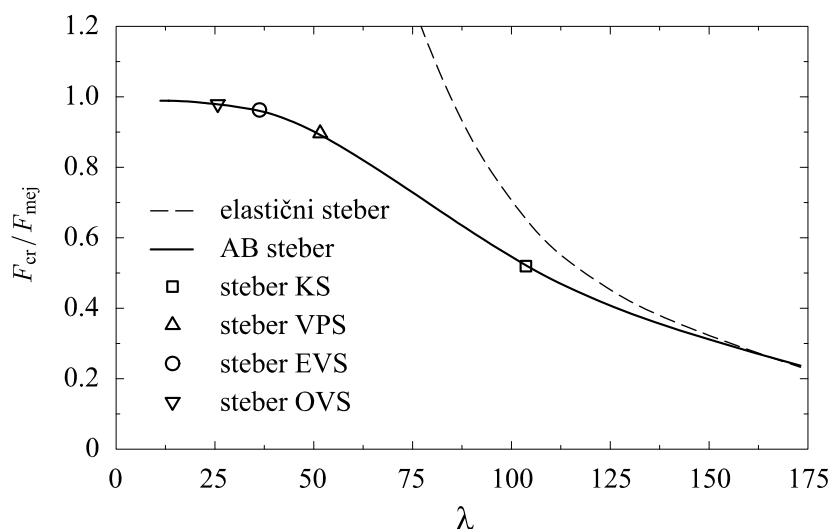
Slika 3 nazorno prikazuje vpliv materialne nelinearnosti na velikosti uklonskih sil armiranobetonskih stebrov. Detajlno je prikazano spreminjanje normirane velikosti kritične sile  $F_{cr}/F_{mej}$  v odvisnosti od vitkosti stebra  $\lambda = L\sqrt{A/I}$ . Na sliki tudi vidimo, da se armiranobetonski stebri uklonijo že, ko je vitkost stebra večja od cca 25 ( $F_{cr}/F_{mej} < 1$ ), medtem ko je vpliv materialne nelinearnosti na vrednosti  $F_{cr}$  zanemarljiv šele pri stebrih z vitkostjo večjo kot 125.

#### 4 Sklep

V članku smo izpeljali točne izraze za uklonske sile armiranobetonskih stebrov. Izhodišče izpeljave je bila geometrijsko točna Reissnerjeva teorija ravninskih nosilcev. Pri izpeljavi izrazov za določitev uklonskih sil armiranobetonskih stebrov smo upoštevali poleg upogibnega tudi osno deformiranje stebrov ter materialno nelinearno obnašanje betona in armature. Računska analiza je pokazala velik vpliv materialne nelinearnosti na velikost uklonskih sil.

#### Literatura

- [1] Z.P. Bažant, L. Cedolin, *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, New York, 1991.
- [2] S. Bratina, M. Saje, I. Planinc, *Materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames*, International Journal of Solids and Structures, 41, 7181–7207, 2004.



**Slika 3** : Spreminjanje normirane uklonske sile armiranobetonskih stebrov v odvisnosti od njihove vitkosti.

- [3] Eurocode 2, *Design of Concrete Structures, Part 1: General rules and rules for buildings*, prEN 1992-1: 2001 (Rev. final draft), 2002.
- [4] F. Engesser, *Über die knickfestigkeit gerader stäbe*, Zeitschrift für Architekten Ing. Vereins zu Hannover, 35, 455–462, 1889.
- [5] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne, 1744.
- [6] M. Groper, M.J. Kenig, *Inelastic buckling of non-prismatic columns*, Journal of Engineering Mechanics ASCE, 113, 1233–1239, 1987.
- [7] H.B. Keller, *Nonlinear bifurcation*, Journal of Differential Equations, 7, 417–434, 1970.
- [8] E. Reissner, *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 23, 795–804, 1972.
- [9] F.R. Shanley, *Inelastic column theory*, Journal of Aeronautical Sciences, 14, 261–264, 1947.
- [10] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy, *Exact solutions for buckling of structural members*, CRC Press LLC, 2005.



## *Analiza nosilnosti palic v nadkritičnem območju*

M. Brojan<sup>1</sup>, F. Kosel<sup>2</sup>, T. Videnič<sup>3</sup>

### *Load-capacity analysis of columns in postbuckling region*

**Povzetek.** V sestavku je predstavljena analiza nosilnosti palic v nadkritičnem območju za III in IV Eulerjev primer vpetja. Osnovne enačbe problema so zgrajene z uporabo teorije velikih premikov. Reševanje problema se prevede na integriranje eliptičnih funkcij, ki ga lahko izvedemo le numerično. Pri obravnavi III Eulerjevega primera opazimo v nadkritičnem območju novo nestabilnost, podobno kot pri preskoku sistema.

**Abstract.** The article presents load-capacity analysis of columns in postbuckling region for III and IV Euler's case. Basic equations are built using large displacement theory. Solution of the problem is obtained in terms of integrating elliptic functions, which can only be solved numerically. Studying the III Euler's case in postbuckling region provides new instability, similar to snap-trough phenomenon.

## 1 Uvod

Razumevanje upogibnega uklona z razvejitvijo za Eulerjeve primere vpetja palic je osnovnega pomena za razumevanje uklona zapletenejših sistemov. Vodilne enačbe tega problema lahko v splošnem rešujemo na dva načina, t.j. z energijsko ali pa ravnotežno metodo, pri čemer si v primeru uporabe energijske metode pomagamo z iskanjem minimuma elastičnega potenciala, pri uporabi ravnotežne metode pa pretežno z Newtonovimi zakoni. V tem sestavku se bomo omejili na uporabo slednje metode. Ravnotežne enačbe bomo zapisali v skladu s teorijo III reda. Omenjena teorija upošteva vpliv premikov na napetostno in deformacijsko stanje s tem, da zahteva opis ravnotežnih pogojev na deformiranem telesu in upošteva eksakten izraz za ukrivljenost, s tem pa omogoča določanje elementov vektorja premika v nadkritičnem območju [2], [4].

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

<sup>3</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Po teoriji III reda bomo v nadaljevanju obravnavali le take ravninske primere palic, pri katerih je, v primeru uklona z razvejitvijo, vektor premika  $\vec{u} = (u, v, 0)$ . Silo v točki razvejišča  $A_1$ , slika 7, imenujemo kritična uklonska sila  $F_{kr}$ . Točka razvejišča  $A_1$  deli graf  $v-F(v)$  na dve območji, t.j.  $F < F_{kr}$  in  $F \geq F_{kr}$ . Pri tem je območje, kjer je  $F < F_{kr}$  stabilno, pot a), območje  $F \geq F_{kr}$  pa je lahko stabilno, pot b) in nestabilno, pot c), [5].

V tabeli 1 sta izbrana dva izmed štirih Eulerjevih primerov podprtja palic, obremenjenih na tlak.

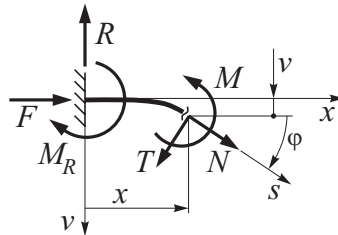
Tabela 1: III in IV Eulerjev primer

Eulerjev primer	tip podprtja	robni pogoji
III	<i>togo – členek</i>	$\varphi(s=0) = 0, \frac{d\varphi}{ds}(s=L) = 0$
IV	<i>togo – togo</i>	$\varphi(s=0) = 0, \varphi(s=L) = 0$

Za oba primera bomo predpostavili idealno ravno, nestisljivo, homogeno in izotropno palico, ki je obremenjena le z osno tlačno silo  $F$ , ki mora delovati centrično v težišču prereza. Izberemo palico konstantne upogibne togosti  $EI$  in dolžine  $L$ .

## 2 Osnovna enačba uklona

Iz slike 1, ki prikazuje sile in momente na odrezanem deformiranem delu palice, je možno zapisati ravnotežno stanje sil in momentov.



Slika 1: Odrezani del deformiranega sistema

Iz zveze med notranjim upogibnim momentom in ukrivljenostjo ter izraza, ki na eksakten način opiše ukrivljenost zapišemo:

$$\begin{aligned}
 M &= -EI \frac{1}{\rho} = \\
 &= -EI \frac{d\varphi}{ds}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Pri tem je  $\varphi = \varphi(s)$  naklon tangente na deformirano palico glede na  $x$ -os in  $s$  dolžina loka vzdolž osi palice ( $0 \leq s \leq L$ ). Enačbo (1) odvajamo po spremenljivki  $s$ :

$$\frac{dM}{ds} = -EI \frac{d^2\varphi}{ds^2}
 \tag{2}$$

Notranja strižna sila  $T$  sledi iz ravnotežja sil v smeri  $T$  na deformiranem sistemu, slika 1:

$$\sum F_{iT} = 0 : \quad T = F \sin \varphi + R \cos \varphi, \quad (3)$$

Z upoštevanjem zveze:

$$T = \frac{dM}{ds} \quad (4)$$

ter uporabo enačb (2) in (3), lahko izpeljemo diferencialno enačbo ravnotežja sil, ki v splošnem velja za oba navedena primera, tabela 1:

$$EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + F \sin \varphi + R \cos \varphi = 0 \quad (5)$$

Dobljeno enačbo (5) pomnožimo z  $d\varphi$  in nato integriramo. Tako lahko zapišemo ravnotežno enačbo v naslednji diferencialni obliki:

$$\frac{1}{2} EI \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - F \cos \varphi + R \sin \varphi + k = 0, \quad (6)$$

kjer je  $k$  neznana integracijska konstanta. Z upoštevanjem izbranih robnih pogojev, tabela 1, sledi ravnotežna enačba za vsak primer posebej.

### 3 Reševanje diferencialne enačbe problema

V tem poglavju bomo zapisali rešitev diferencialne enačbe (6) za III in IV Eulerjev primer. Zanimivo je, da dobimo pri obravnavi I, II in IV Eulerjevega primera, podobne integralske enačbe tipa (20) in celo isto sliko za graf obremenitve  $F/F_{kr}$  v odvisnosti od maksimalnega odklona  $v_{max}/L$ , slika 7. Poleg tega pa sta I in II Eulerjev primer že obravnavana v dostopni literaturi [2]-[4], v tem prispevku pa smo pokazali, da dobimo tudi za IV Eulerjev primer sorodne rezultate. Za III Eulerjev primer pa dobimo povsem drugačne rezultate, kar kažeta izraz (11) in slika 4.

#### 3.1 III Eulerjev primer

V tem primeru podprtja palice velja, slika 2:

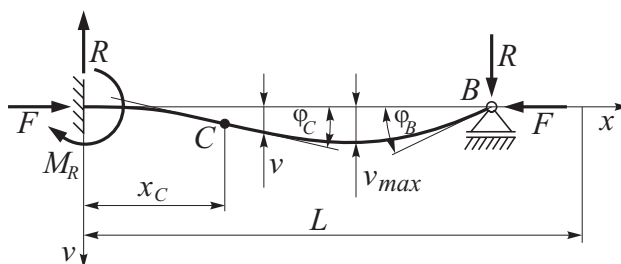
$$\frac{d\varphi}{ds}(s = L) = 0, \quad (7)$$

Ob dejstvu, da je zasuk v členkasti podpori:

$$\varphi(s = L) = -\varphi_B, \quad \varphi_B \geq 0 \quad (8)$$

in pogojev prehoda preko prevojnne točke  $C$ , kjer je vrednost momenta enaka nič in naklon tangente  $\varphi_C \geq 0$ :

$$\frac{d\varphi}{ds}(s = s_C) = 0 \quad \text{in} \quad \varphi(s = s_C) = \varphi_C, \quad (9)$$



Slika 2: III Eulerjev primer

lahko iz izraza (6), z nekaj koraki izpeljemo:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm \sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \varphi + \sin \varphi_B) + \cos \varphi - \cos \varphi_B \right)}. \quad (10)$$

Integriranje zadnje enačbe nas privede do naslednje enakosti

$$L = \int_0^{\varphi_C} - \int_{\varphi_C}^{-\varphi_B} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \varphi + \sin \varphi_B) + \cos \varphi - \cos \varphi_B \right)}}, \quad (11)$$

iz katere lahko, s pomočjo dodatnega pogoja  $v(s = L) = 0$  in ustrezne zveze

$$dv = \sin \varphi ds \quad \text{oz.} \quad dx = \cos \varphi ds, \quad (12)$$

izračunamo povezavo med kotoma  $\varphi_B$  in  $\varphi_C$ .

$$\int_0^{\varphi_C} - \int_{\varphi_C}^{-\varphi_B} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{-\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \varphi + \sin \varphi_B) + \cos \varphi - \cos \varphi_B}} = 0 \quad (13)$$

Integral (13) predstavlja eliptični integral, ki ga računamo numerično, z uporabo Gaussove kvadrature [1]. Pri tem za izbrani kot  $\varphi_B$  iščemo ustrezen kot  $\varphi_C$ , n.pr. z bisekcijsko metodo. Silo  $F$  lahko izračunamo naknadno z vstavljanjem obeh kotov v (11), saj upoštevamo, da ostane dolžina nosilca  $L$  ves čas konstantna. Z vsemi tremi vrednostmi ( $\varphi_B$ ,  $\varphi_C$ ,  $F$ ) lahko z upoštevanjem izrazov (10) in (12) izračunamo koordinati  $x/L$  in  $v/L$ . Pri tem razdelimo območje integracije na tri podobmočja:

- za območje  $0 \leq \varphi \leq \varphi_C$

$$x/L = \int_0^{\varphi} \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \vartheta + \sin \varphi_B) + \cos \vartheta - \cos \varphi_B \right)}} \quad (14)$$

$$v/L = \int_0^\varphi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \vartheta + \sin \varphi_B) + \cos \vartheta - \cos \varphi_B \right)}} \quad (15)$$

- za območje  $\varphi_C \leq \varphi \leq 0$

$$x/L = \int_0^{\varphi_C} - \int_{\varphi_C}^\varphi \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \vartheta + \sin \varphi_B) + \cos \vartheta - \cos \varphi_B \right)}} \quad (16)$$

$$v/L = \int_0^{\varphi_C} - \int_{\varphi_C}^\varphi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \vartheta + \sin \varphi_B) + \cos \vartheta - \cos \varphi_B \right)}} \quad (17)$$

- za območje  $0 \leq \varphi \leq -\varphi_B$

$$x/L = 2 \int_0^{\varphi_C} - \int_0^\varphi \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \vartheta + \sin \varphi_B) + \cos \vartheta - \cos \varphi_B \right)}} \quad (18)$$

$$v/L = 2 \int_0^{\varphi_C} - \int_0^\varphi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{\frac{2F}{EI} \left( -\frac{\cos \varphi_C - \cos \varphi_B}{\sin \varphi_C + \sin \varphi_B} (\sin \vartheta + \sin \varphi_B) + \cos \vartheta - \cos \varphi_B \right)}} \quad (19)$$

### 3.2 IV Eulerjev primer

Podobno kot v III Eulerjevem primeru, izpeljemo tudi enačbe za IV Eulerjev (kot tudi za I in II) primer. Tako dobimo enačbi (11) ekvivalentno enačbo

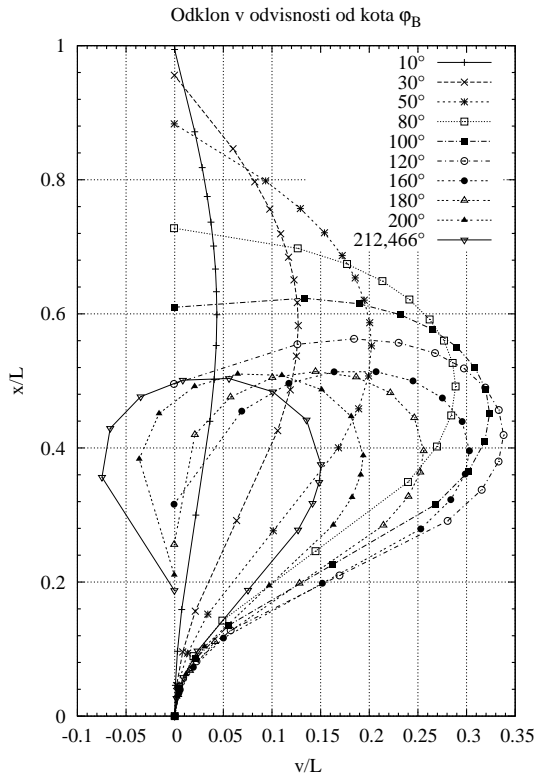
$$L = \int_0^{\varphi_C} - \int_{\varphi_C}^{-\varphi_D} + \int_{-\varphi_D}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2F}{EI} (\cos \varphi - \cos \varphi_C)}}. \quad (20)$$

Pri tem sta  $\varphi_C \geq 0$  in  $\varphi_D \geq 0$  naklonska kota tangent v obeh prevojnih točkah. Izrazov za  $x/L$  in  $v/L$  v tem primeru ne bomo pisali; izpeljejo se namreč na podoben način kot (14)-(19).

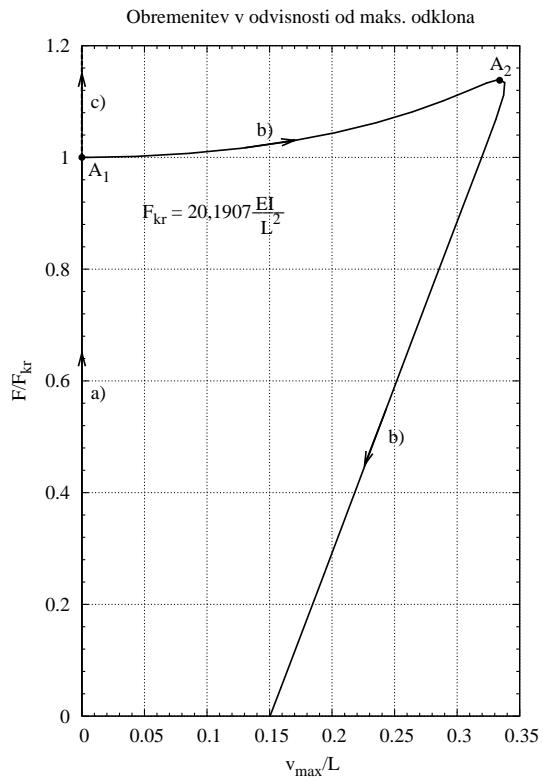
## 4 Rezultati

Grafični prikaz rešitve III Eulerjevega primera je prikazan na slikah 3 do 5. Posebej zanimiv je rezultat na sliki 4, ki v nadkritičnem območju prikazuje nestabilnost, podobno kot pri preskoku sistema. Po poti *b*), na sliki 4, obremenitev  $F$  v skladu s pričakovanji raste, dokler, v točki  $A_2$ , kot  $\varphi_B$  ne doseže vrednosti  $\varphi_B \approx 110,96^\circ$ . V točki  $A_2$  je vrednost  $F/F_{kr} \approx 1,1396$ . Od te točke naprej vrednost obremenitve  $F$  pada.



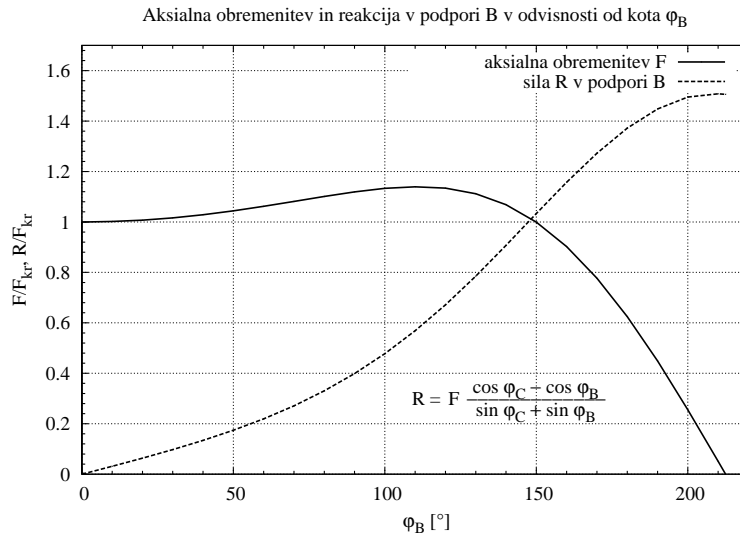


Slika 3: Odklon pri kotu  $\varphi_B$

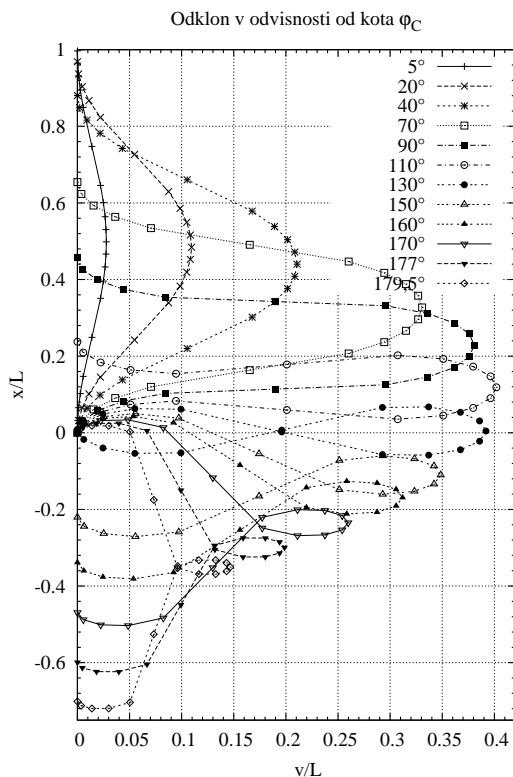


Slika 4: Obremenitev pri maks. odklonu

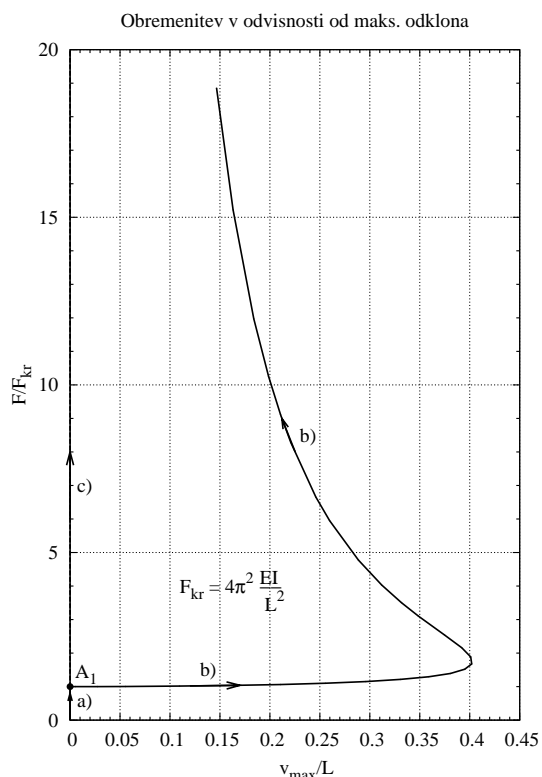
Ravnotežno stanje, ki ga zavzame sistem po prehodu točke  $A_2$  na poti  $b$ ), je nestabilno, [2]. V trenutku, ko vrednost  $F/F_{kr}$  pade na 0, ležita členek  $B$  in prevojna točka  $C$  na vodoravni premici, naklonski kot tangente v členkasti podpori je  $\varphi_B \approx 212,466^\circ$ , obremenitev  $F$  pa spremeni smer. Ravnotežno stanje, ki se pojavi v sistemu po tem kotu, pa v tem prispevku ni obravnavano.



Slika 5: Aksialna obremenitev in reakcija v podpori  $B$  pri kotu  $\varphi_B$

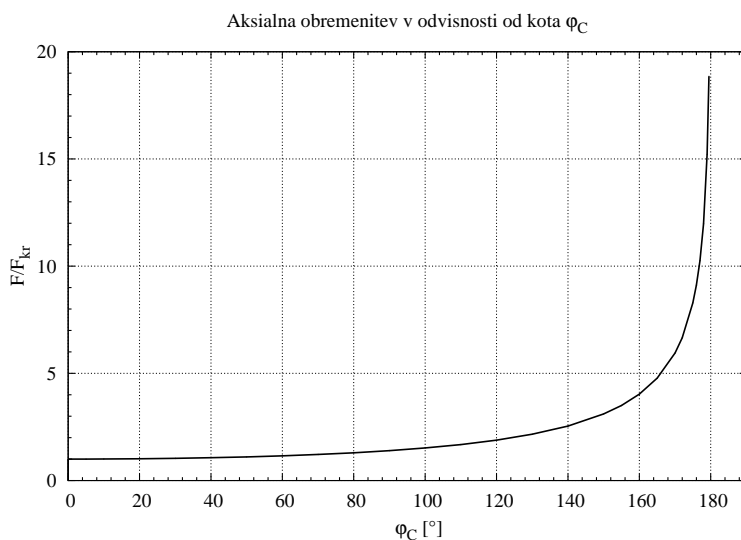


Slika 6: Odklon pri kotu  $\varphi_C$



Slika 7: Obremenitev pri maks. odklonu

Grafični prikaz rešitve IV Eulerjevega primera je prikazan na slikah 6 do 8. Kot smo že omenili, dobimo tudi pri I in II Eulerjevem primeru enak graf kot na sliki 7. V III in IV primeru se po opisanem postopku reševanja, poleg točk  $A_1$  in  $A_2$ , ne pojavijo nobene druge točke nestabilnosti.



Slika 8: Aksialna obremenitev pri kotu  $\varphi_C$

## 5 Komentar

Pri obravnavanju uklona palice v nadkritičnem območju smo podrobneje obdelali III Eulerjev primer, za katerega se je izkazalo, da je nekoliko drugačen od preostalih treh. Izmed teh smo obravnavali le še IV primer, pri tem pa ugotovili, da je končna rešitev v teh treh primerih zelo podobna, [2]-[4]. To je razvidno iz končnih enačb posameznega primera in predvsem grafov obremenitve  $F/F_{kr}$  v odvisnosti od maksimalnega premika  $v_{\max}/L$ . V vseh treh primerih gre namreč za isti graf, slika 7.

Na slikah 3 in 6 je predstavljeno deformirano stanje palice za obe vrsti vpetij. Po analognem izračunu lahko pridemo do podobnih rezultatov tudi za preostala dva Eulerjeva primera, ki pa sta že opisana v dostopni literaturi [2]-[4].

Posebej zanimiv rezultat je razviden iz slike 4, ki v povezavi s sliko 5 prikazuje sekundarno nestabilnost v obliki preskoka sistema. Torej smo po prehodu razvejišča našli novo točko nestabilnosti (slika 4, točka  $A_2$ ). Od te točke naprej, po poti  $b$ ) obremenitev pada, dokler, pri kotu  $\varphi_B \approx 212,466^\circ$  v členkasti podpori, ne pade na vrednost 0. Ravnotežno stanje, ki ga zavzame sistem po tem kotu, pa v tem prispevku ni obravnavano.

## Literatura

- [1] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, 7th edition, Brooks/Cole, California, 2001.
- [2] N. G. R. Iyengar, *Structural stability of columns and plates*, Halsted Press, New York, 1988.
- [3] S. V. Levyakov, *States of Equilibrium and Secondary Loss of Stability of a Straight Rod Loaded by an Axial Force*, J. Appl. Mech. and Tech. Phys., Vol. 42, 321-327, 2001.
- [4] S. P. Timoshenko, J. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [5] C. M. Wang, C. Y. Wang, J. N. Reddy, *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2005.



## *Lokalni uklon ravninskih paličnih konstrukcij*

B. Čas, M. Saje in I. Planinc<sup>1</sup>

### *Local buckling of planar truss structures*

**Povzetek.** V članku smo izpeljali točne izraze za določitev lokalne in globalne uklonske nosilnosti poljubne ravninske palične konstrukcije. Te smo izpeljali s pomočjo linearizirane teorije stabilnosti. Paliče smo modelirali z geometrijsko točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev in s poljubnim nelinearnim materialnim modelom. Zato izrazi za uklonsko nosilnost paličja upoštevajo materialno nelinearnost ter poleg upogibnih tudi membranske in strižne deformacije.

**Abstract.** In this paper an exact analytical solution for the global and local buckling load of an arbitrary planar materially non-linear truss is presented. The buckling load is derived on the basis of the linearized buckling theory. The mechanical formulation of the truss element is based on Reissner's finite-strain beam theory and an arbitrary non-linear material model.

## 1 Uvod

Poznamo več načinov porušitve konstrukcij. Med njimi je porušitev konstrukcije zaradi lokalnega in globalnega uklona med najbolj pogostimi. Ta oblika porušitve je bistveno odvisna od geometrijskih in materialnih lastnosti konstrukcij, kot sta to na primer vitkost in togost, in je posledica nelinearnosti kinematičnih enačb [1].

Čeprav je uklonska analiza konstrukcij relativno dobro razvita, je pogosto omejena predvsem na elastične konstrukcije in posamezne konstrukcijske elemente [1, 6]. V tem članku želimo ti pomankljivosti delno odpraviti predvsem s pedagoškega stališča, čeprav upamo, da bodo rezultati dela koristili tudi gradbenim projektantom. V ta namen v članku predstavljamo stabilnostno analizo poljubne ravninske materialno nelinearne (npr. elastično plastične) palične konstrukcije. Omejili se bomo na analizo stabilnosti primarne ravnotežne lege paličja. Zelo pomembne vplive geometrijskih, materialnih in obtežnih nepopolnosti na uklonsko nosilnost paličja v tej analizi zanemarjamo. Detajlno pa se sprašujemo, kako na uklonsko nosilnost paličja vplivajo:

---

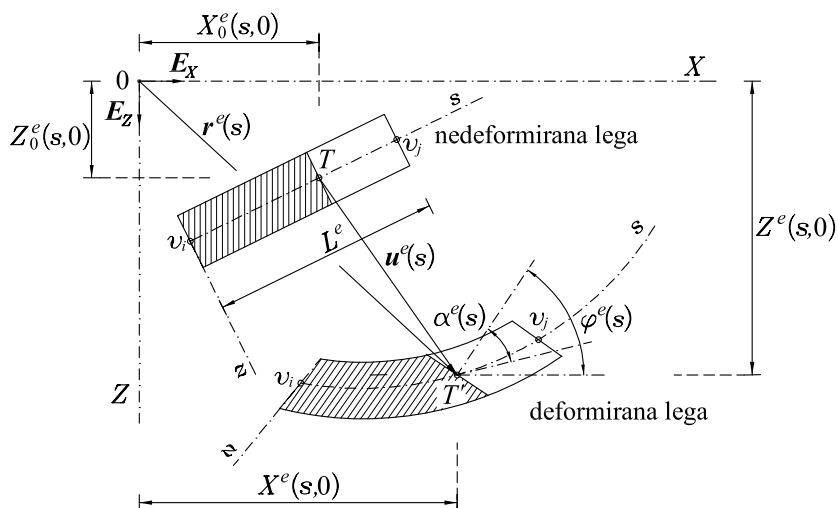
<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Jamova 2, Ljubljana

(i) lokalni uklon posamezne palice, (ii) upogibne, osne in strižne deformacije in (iii) materialna nelinearnost.

Za mehansko izhodišče uklonske (ali splošneje *stabilnostne*) analize ravninskih paličnih konstrukcij izberemo geometrijsko točen Reissnerjev model ravninskega nosilca [5]. Pri analizi upoštevamo membranske, upogibne in strižne deformacije, ki skupaj s pomiki in zasuki lahko zavzamejo številčno poljubno velike vrednosti. Poleg znane (i) Bernoullijeve predpostavke, ki določa, da ravninski prerezi, pravokotni na težiščno os nosilca v nedeformirani legi, ostanejo ravninski tudi v deformirani legi, toda ne več pravokotni na težiščno os nosilca, predpostavimo tudi, (ii) da oblika in velikost prečnega prereza ostaneta med deformiranjem nosilca nespremenjena. Uklonske sile palične konstrukcije izpeljemo s pomočjo t.i. *linearizirane teorije stabilnosti*. Skladno s to teorijo so uklonske sile nelinearnega sistema enake uklonskim silam osnovnega sistema, lineariziranega v ravnotežnem stanju [2, 3]. Uporabljena metoda predstavlja razširitev standardne metode za določitev Eulerjevih uklonskih sil elastičnih stebrov tudi na materialno nelinearne nosilce in palice z upoštevanjem upogibnih, membranskih in strižnih deformacij.

## 2 Osnovne enačbe

Paličje je sestavljeno iz ne nujno ravnih nosilcev, medsebojno povezanih s členki. Povezave med nosilci so le v krajiščih nosilcev. Stik dveh ali več nosilcev imenujemo vozlišče. Paliče po svoji dolžini niso obremenjene. Opazujemo stabilno podprto ravninsko paličje, ki je v nepodprtih vozliščih obteženo s konservativnimi točkovnimi silami. Paličje sestavlja  $E$  palic in  $V$  vozlišč. Nedeformirano in deformirano lego palice  $e$  in geometrijski pomen kinematičnih količin prikazuje slika 1.



**Slika 1** : Nedeformirana in deformirana lega palice  $e$  ter geometrijski pomen kinematičnih količin.

Osnovne enačbe Reissnerjevega modela nosilcev, s katerimi opišemo napetostno in deformacijsko stanje ravninskih paličij, so dobro znane. Sestavljajo jih kinematične, ravnotežne in konstitucijske enačbe z ustreznimi statičnimi in kinematičnimi robnimi pogoji [5]. Za vsako palico  $e$  paličja ( $e = 1, 2, \dots, E$ ) so te enačbe take:

$$X_0^{e'} + u^{e'} - (1 + \varepsilon^e) \cos \varphi^e - \gamma^e \sin \varphi^e = 0, \quad (1)$$

$$Z_0^{e'} + w^{e'} + (1 + \varepsilon^e) \sin \varphi^e - \gamma^e \cos \varphi^e = 0, \quad (2)$$

$$\varphi^{e'} - \kappa^e = 0, \quad (3)$$

$$u_{v_i} = u^e(0), \quad (4)$$

$$w_{v_i} = w^e(0), \quad (5)$$

$$u_{v_j} = u^e(L^e), \quad (6)$$

$$w_{v_j} = w^e(L^e), \quad (7)$$

$$\mathcal{H}^{e'} = 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{V}^{e'} = 0, \quad (9)$$

$$\mathcal{M}^{e'} - (1 + \varepsilon^e) Q^e + \gamma^e \mathcal{N}^e = 0, \quad (10)$$

$$\mathcal{N}^e = \mathcal{H}^e \cos \varphi^e - \mathcal{V}^e \sin \varphi^e, \quad (11)$$

$$Q^e = \mathcal{H}^e \sin \varphi^e + \mathcal{V}^e \cos \varphi^e, \quad (12)$$

$$\mathcal{M}^e(0) = 0, \quad (13)$$

$$\mathcal{M}^e(L^e) = 0, \quad (14)$$

$$\mathcal{N}^e = \int_{\mathcal{A}^e} \sigma^e dA, \quad (15)$$

$$\mathcal{M}^e = \int_{\mathcal{A}^e} z \sigma^e dA, \quad (16)$$

$$Q^e = G^e A_s^e \gamma^e, \quad (17)$$

kjer  $(\bullet)'$  predstavlja odvod po materialni koordinati  $s$ , s katero identificiramo delce na osi palice. V enačbah (1)–(17) predstavljajo  $\varepsilon^e$ ,  $\kappa^e$  in  $\gamma^e$  mere za membransko, upogibno in strižno deformiranje nosilca oziroma palice  $e$ . Statične količine smo v enačbah (1)–(17) označili s  $\mathcal{H}^e$ ,  $\mathcal{V}^e$ ,  $\mathcal{N}^e$ ,  $Q^e$  in  $\mathcal{M}^e$ . Tako predstavljata  $\mathcal{N}^e$  in  $Q^e$  osno in prečno silo ter  $\mathcal{M}^e$  upogibni moment. Enačbe (4)–(7) predstavljajo kompatibilnostne enačbe in hkrati robne pogoje k diferencialnim enačbam (1)–(2). Z njimi palice povežemo v konstrukcijo (paličje) in upoštevamo kinematične robne pogoje v podporah. Pri tem smo vzeli, da je palica  $e$  povezana v konstrukcijo prek

vozlisch  $v_i$  in  $v_j$ . Tudi pomen enačb (13) in (14) je preprost: predstavljata momentna statična robna pogoja v členkih in hkrati robni pogoj k diferencialni enačbi (10). Enačbe (15)–(17) so konstitucijske enačbe. Te povezujejo ravnotežne količine  $\mathcal{N}^e$ ,  $Q^e$ ,  $\mathcal{M}^e$  z deformacijskimi količinami  $\varepsilon^e$ ,  $\kappa^e$ ,  $\gamma^e$ . Materialne parametre v teh enačbah določimo z meritvami.

V vsakem posameznem vozlišču paličja ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) moramo zagotoviti ravnotežje sil. Če označimo z  $n_v$  število palic, ki se stikajo v vozlišču  $v$ , ravnotežne enačbe zapišemo z enačbami ( $v = 1, 2, \dots, V$ )

$$\sum_{n_v} X_v = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{n_v} Z_v = 0. \quad (19)$$

Ko v nadaljevanju s pomočjo enačb (4)–(7) upoštevamo kinematične robne pogoje in vzajemnost med statičnimi in kinematičnimi robnimi pogoji, dobimo za določitev ravnotežne lege paličja prav toliko enačb, kot je neznanih funkcij in parametrov. Ta sistem enačb v nadaljevanju točno rešimo samo za primarne ravnotežne lege paličja, ki jih določata pogoja ravnih in neizklonjenih palic, tj.  $\kappa^e = 0$  in  $\gamma^e = 0$ .

### 3 Primarne ravnotežne lege ravninskih paličij

Kot rečeno, primarne ravnotežne lege paličnih konstrukcij določata pogoja  $\kappa^e = 0$  in  $\gamma^e = 0$ . V tem primeru velja  $D^e = \varepsilon^e$ . S pomočjo konstitucijskih enačb (15)–(17) ugotovimo, da je  $\mathcal{N}^e = \sigma^e A^e$ ,  $\mathcal{M}^e = 0$  in  $Q^e = 0$ . Ker so  $\mathcal{M}^e = 0$ ,  $Q^e = 0$  in  $\gamma^e = 0$ , je momentnemu ravnotežnemu pogoju (10) ter robnima pogojema (13) in (14) identično zadoščeno. V nadaljevanju rešimo kinematično enačbo (3) ter ravnotežni enačbi (8) in (9). Z integriranjem dobimo

$$\varphi^e = C_\varphi^e = \text{konst.}, \quad (20)$$

$$\mathcal{H}^e = C_{\mathcal{H}}^e = \text{konst.}, \quad (21)$$

$$\mathcal{V}^e = C_{\mathcal{V}}^e = \text{konst.}, \quad (22)$$

kjer so  $C_\varphi^e$ ,  $C_{\mathcal{H}}^e$  in  $C_{\mathcal{V}}^e$  integracijske konstante. Glede na zgornje ugotovitve in s pomočjo enačbe (11) ugotovimo tudi, da velja

$$\mathcal{N}^e = C_{\mathcal{N}}^e = \text{konst.} \quad (23)$$

V nadaljevanju predpostavimo enolično, vendar poljubno nelinearno konstitucijsko zvezo med normalno napetostjo  $\sigma^e$  in deformacijsko količino  $D^e = \varepsilon^e + z\kappa^e$ . V tem primeru velja  $\sigma^e(\varepsilon^e, \kappa^e = 0)A^e = \mathcal{N}^e = \text{konst.}$ , zato je

$$\varepsilon^e = C_\varepsilon^e = \text{konst.} \quad (24)$$

Glede na zgornje ugotovitve lahko z integriranjem rešimo tudi kinematični enačbi (1) in (2). Komponenti vektorja pomika težiščne osi palice  $e$  sta:

$$u^e(s) = ((1 + C_\varepsilon^e) \cos C_\varphi^e) s - \Delta X_0^e + C_u^e, \quad (25)$$

$$w^e(s) = -((1 + C_\varepsilon^e) \sin C_\varphi^e) s - \Delta Z_0^e + C_w^e, \quad (26)$$

kjer sta  $C_u^e$  in  $C_w^e$  integracijski konstanti.

Za določitev  $2V$  pomikov  $u_v, w_v$  v vozliščih paličja ( $v = 1, 2, \dots, V$ ) in  $7E$  konstant  $C_\varphi^e, C_{\mathcal{H}}^e, C_\psi^e, C_{\mathcal{N}}^e, C_\varepsilon^e, C_u^e$  in  $C_w^e$  ( $e = 1, 2, \dots, E$ ) nam je glede na osnovni sistem posplošenih ravnotežnih enačb (1)–(17) paličja na voljo sistem  $7E$  algebraskih nelinearnih enačb ( $e = 1, 2, \dots, E$ ):

$$u_{v_i} = C_u^e, \quad (27)$$

$$w_{v_i} = C_w^e, \quad (28)$$

$$u_{v_j} = ((1 + C_\varepsilon^e) \cos C_\varphi^e) L^e - \Delta L_X^e + C_u^e, \quad (29)$$

$$w_{v_j} = -((1 + C_\varepsilon^e) \sin C_\varphi^e) L^e - \Delta L_Z^e + C_w^e, \quad (30)$$

$$C_{\mathcal{N}}^e = C_{\mathcal{H}}^e \cos C_\varphi^e - C_\psi^e \sin C_\varphi^e, \quad (31)$$

$$C_{\mathcal{H}}^e \sin C_\varphi^e + C_\psi^e \cos C_\varphi^e = 0, \quad (32)$$

$$C_{\mathcal{N}}^e = \sigma^e (C_\varepsilon^e) A^e \quad (33)$$

ter sistem  $2V$  ravnotežnih enačb v vseh členkih paličja ( $v = 1, 2, \dots, V$ )

$$\sum_{n_v} X_v = 0, \quad (34)$$

$$\sum_{n_v} Z_v = 0. \quad (35)$$

Sistem nelinearnih algebraskih enačb (27)–(35) rešimo za dano obtežbo in dane kinematične robne pogoje z Newtonovo iteracijsko metodo.

#### 4 Lokalni uklon ravninskih paličnih konstrukcij

Uklonske sile ravninskega paličja izračunamo s pomočjo *linearizirane teorije stabilnosti* [2, 3]. Postopek določitve uklonskih sil paličja s pomočjo lineariziranega sistema opisujemo v nadaljevanju.

Predpostavimo, da za obravnavano paličje poznamo primarno ravnotežno lego. Določajo jo rešitve sistema nelinearnih algebraskih enačb (27)–(35). Rešitve sistema (27)–(35) v ravnotežju za nekatere količine so trivialne:  $\kappa^e = 0, \gamma^e = 0, \mathcal{M}^e = 0, Q^e = 0$ . Preostale rešitve so:  $\varphi^e = C_\varphi^e, \varepsilon^e = C_\varepsilon^e, \mathcal{H}^e = C_{\mathcal{H}}^e, \psi^e = C_\psi^e, \mathcal{N}^e = C_{\mathcal{N}}^e \neq 0$  ( $e = 1, 2, \dots, E$ ), komponente vektorjev pomikov v vseh vozliščih paličja označimo z  $u_v$  in  $w_v$  ( $v = 1, 2, \dots, V$ ). V nadaljevanju osnovni sistem enačb paličja (1)–(17) lineariziramo okoli primarne ravnotežne lege. Linearizirani sistem enačb je ( $e = 1, 2, \dots, E$ ):

$$\delta u^{e'l} + (1 + C_\varepsilon^e) \sin C_\varphi^e \delta \varphi^e - \cos C_\varphi^e \delta \varepsilon^e - \sin C_\varphi^e \delta \gamma^e = 0 \quad (36)$$

$$\delta w^{e'l} + (1 + C_\varepsilon^e) \cos C_\varphi^e \delta \varphi^e + \sin C_\varphi^e \delta \varepsilon^e - \cos C_\varphi^e \delta \gamma^e = 0 \quad (37)$$

$$\delta \varphi^{e'l} - \delta \kappa^e = 0, \quad (38)$$



$$\delta u_{v_i} = \delta u^e(0), \quad (39)$$

$$\delta w_{v_i} = \delta w^e(0), \quad (40)$$

$$\delta u_{v_j} = \delta u^e(L^e), \quad (41)$$

$$\delta w_{v_j} = \delta w^e(L^e), \quad (42)$$

$$\delta \mathcal{H}^{e'} = 0, \quad (43)$$

$$\delta \mathcal{V}^{e'} = 0, \quad (44)$$

$$\delta \mathcal{M}^{e'} - (1 + C_\varepsilon^e) \delta Q^e + C_{\mathcal{N}}^e \delta \gamma^e = 0, \quad (45)$$

$$\delta \mathcal{N}^e = \cos C_\varphi^e \delta \mathcal{H}^e - \sin C_\varphi^e \delta \mathcal{V}^e, \quad (46)$$

$$\delta Q^e = \sin C_\varphi^e \delta \mathcal{H}^e + \cos C_\varphi^e \delta \mathcal{V}^e + C_{\mathcal{N}}^e \delta \varphi^e, \quad (47)$$

$$\delta \mathcal{M}^e(0) = 0, \quad (48)$$

$$\delta \mathcal{M}^e(L^e) = 0, \quad (49)$$

$$\delta \mathcal{N}^e = \left( \int_{\mathcal{A}^e} \frac{\partial \sigma^e}{\partial D^e} dA \right) \delta \varepsilon^e + \left( \int_{\mathcal{A}^e} \frac{\partial \sigma^e}{\partial D^e} z dA \right) \delta \kappa^e = C_{11}^e \delta \varepsilon^e + C_{12}^e \delta \kappa^e, \quad (50)$$

$$\delta \mathcal{M}^e = \left( \int_{\mathcal{A}^e} \frac{\partial \sigma^e}{\partial D^e} z dA \right) \delta \varepsilon^e + \left( \int_{\mathcal{A}^e} \frac{\partial \sigma^e}{\partial D^e} z^2 dA \right) \delta \kappa^e = C_{21}^e \delta \varepsilon^e + C_{22}^e \delta \kappa^e, \quad (51)$$

$$\delta Q^e = G^e A_s^e \delta \gamma^e. \quad (52)$$

Tu so  $C_{11}^e(C_\varepsilon^e, \kappa^e = 0) = \partial \sigma^e(C_\varepsilon^e) / \partial D^e A^e = \text{konst.}$ ,  $C_{12}^e = C_{21}^e(C_\varepsilon^e, \kappa^e = 0) = 0$  in  $C_{22}^e(C_\varepsilon^e, \kappa^e = 0) = \partial \sigma^e(C_\varepsilon^e) / \partial D^e J^e = \text{konst.}$  Linearizirani sistem ravnotežnih enačb v vozliščih formalno zapišemo z enačbami ( $v = 1, 2, \dots, V$ )

$$\delta \sum_{n_v} X_v = 0, \quad (53)$$

$$\delta \sum_{n_v} Z_v = 0. \quad (54)$$

Tudi linearizirani sistem posplošenih ravnotežnih enačb (36)–(54) rešimo ob upoštevanju kinematičnih robnih pogojev. Reševanje sistema (36)–(54) poteka takole.

Z integriranjem ravnotežnih diferencialnih enačb (43)–(44) ugotovimo

$$\delta \mathcal{H}^e = K_{\mathcal{H}}^e = \text{konst.}, \quad (55)$$

$$\delta \mathcal{V}^e = K_{\mathcal{V}}^e = \text{konst.} \quad (56)$$

in nato s pomočjo enačb (46) in (50) tudi  $\delta\mathcal{N}^e = \text{konst.}$  in  $\delta\varepsilon^e = \delta\mathcal{N}^e/C_{11}^e = \text{konst.}$  Ko v enačbi (45) upoštevamo enačbe (38), (47), (51) in (52) ter enačbi (55) in (56), dobimo

$$C_{22}^e \delta\varphi^{e''} - (1 + C_\varepsilon^e - \frac{C_{\mathcal{N}}^e}{G^e A_s^e}) C_{\mathcal{N}}^e \delta\varphi^e = (1 + C_\varepsilon^e - \frac{C_{\mathcal{N}}^e}{G^e A_s^e}) (\sin C_\varphi^e K_{\mathcal{H}}^e + \cos C_\varphi^e K_{\mathcal{V}}^e). \quad (57)$$

Enačba (57) predstavlja navadno linearno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti. Rešitev enačbe (57) je odvisna od velikosti oziroma predznaka osne sile v palici.

Najprej poiščemo rešitev enačbe (57) za tlačno obremenjene palice. V tem primeru je  $C_{\mathcal{N}}^{e_j} = -|C_{\mathcal{N}}^{e_j}|$  ( $e_j = 1, 2, \dots, E_t$ ), kjer  $E_t$  predstavlja število tlačno obremenjenih palic. Rešitev enačbe (57) je odvisna od predznaka izraza  $(1 + C_\varepsilon^{e_j} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_j}}{G^{e_j} A_s^{e_j}}) C_{\mathcal{N}}^{e_j}$ . Ker je  $C_{\mathcal{N}}^{e_j} < 0$  ( $C_{\mathcal{N}}^{e_j} = -|C_{\mathcal{N}}^{e_j}|$ ) ter  $C_\varepsilon^{e_j} > -1$ , velja

$$-((1 + C_\varepsilon^{e_j}) |C_{\mathcal{N}}^{e_j}| + \frac{|C_{\mathcal{N}}^{e_j}|^2}{G^{e_j} A_s^{e_j}}) < 0. \quad (58)$$

Enačbo (57) sedaj zapišemo v zgoščeni obliki

$$\delta\varphi^{e_j''} + k_t^{e_j^2} \delta\varphi^{e_j} = c_t^{e_j}, \quad (59)$$

kjer smo dodatno upoštevali  $C_{22}^{e_j} > 0$  ter vpeljali novi oznaki

$$k_t^{e_j^2} = \frac{1}{C_{22}^{e_j}} ((1 + C_\varepsilon^{e_j}) |C_{\mathcal{N}}^{e_j}| + \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_j^2}}{G^{e_j} A_s^{e_j}}), \quad (60)$$

$$c_t^{e_j} = \frac{1}{C_{22}^{e_j}} (1 + C_\varepsilon^{e_j} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_j}}{G^{e_j} A_s^{e_j}}) (\sin C_\varphi^{e_j} K_{\mathcal{H}}^{e_j} + \cos C_\varphi^{e_j} K_{\mathcal{V}}^{e_j}). \quad (61)$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe (59) je

$$\delta\varphi^{e_j}(s) = K_{1,t}^{e_j} \cos(k_t^{e_j} s) + K_{2,t}^{e_j} \sin(k_t^{e_j} s) + \frac{c_t^{e_j}}{k_t^{e_j^2}}. \quad (62)$$

S pomočjo rešitve  $\delta\varphi^{e_j}(s)$  ter enačb (36), (37) in (38) izračunamo  $\delta u^{e_j}(s)$ ,  $\delta w^{e_j}(s)$  in  $\delta \kappa^{e_j}(s)$  ter nato z enačbami (47), (51) in (52) še  $\delta Q^{e_j}(s)$ ,  $\delta \mathcal{M}^{e_j}(s)$  in  $\delta \gamma^{e_j}(s)$ . Z dobljenimi rešitvami dobimo momentna statična robna pogoja (48) in (49) obliko

$$K_{2,t}^{e_j} = 0, \quad (63)$$

$$K_{2,t}^{e_j} \cos(k_t^{e_j} L^{e_j}) - K_{1,t}^{e_j} \sin(k_t^{e_j} L^{e_j}) = 0. \quad (64)$$

V nadaljevanju poiščimo rešitev enačbe (57) za natezno obremenjene palice. V tem primeru je  $C_{\mathcal{N}}^{e_i} > 0$  ( $e_i = 1, 2, \dots, E_n$ ), kjer je  $E_n$  število natezno obremenjenih palic v obravnavanem paličju. Tudi sedaj je postopek reševanja enačbe (57) odvisen od predznaka izraza  $(1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}}) C_{\mathcal{N}}^{e_i}$  oziroma, ker je  $C_{\mathcal{N}}^{e_i} > 0$ , od izraza  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}}$ . Imamo tri možnosti:

$$1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} < 0, \quad 1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} = 0, \quad 1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} > 0. \quad (65)$$

Ko je  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} < 0$ , je postopek reševanja enak reševanju tlačno obremenjenih palic. V primeru, ko je  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} > 0$ , lahko enačbo (57) zapišemo v zgoščeni obliki

$$\delta\varphi^{e_i''} - k_n^{e_i 2} \delta\varphi^{e_i} = c_n^{e_i}, \quad (66)$$

kjer smo upoštevali tudi  $C_{22}^{e_i} > 0$  ter vpeljali novi oznaki

$$k_n^{e_i 2} = \frac{1}{C_{22}^{e_i}} \left( 1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} \right) C_{\mathcal{N}}^{e_i}, \quad (67)$$

$$c_n^{e_i} = \frac{1}{C_{22}^{e_i}} \left( 1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} \right) (\sin C_\varphi^{e_i} K_{\mathcal{H}}^{e_i} + \cos C_\varphi^{e_i} K_{\mathcal{V}}^{e_i}). \quad (68)$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe (66) je

$$\delta\varphi^{e_i}(s) = K_{1,n}^{e_i} e^{k_n^{e_i} s} + K_{2,n}^{e_i} e^{-k_n^{e_i} s} - \frac{c_n^{e_i}}{k_n^{e_i 2}}. \quad (69)$$

Tudi sedaj, kot v primeru tlačno obremenjenih palic, s pomočjo  $\delta\varphi^{e_i}(s)$  in enačb (36), (37) in (38) izračunamo  $\delta u^{e_i}(s)$ ,  $\delta w^{e_i}(s)$  in  $\delta\kappa^{e_i}(s)$  ter z enačbami (47), (51) in (52) še  $\delta Q^{e_i}(s)$ ,  $\delta\mathcal{M}^{e_i}(s)$  in  $\delta\gamma^{e_i}(s)$ . Robna pogoja (48) in (49) sta

$$K_{1,n}^{e_i} + K_{2,n}^{e_i} = 0, \quad (70)$$

$$K_{1,n}^{e_i} e^{k_n^{e_i} L^{e_i}} - K_{2,n}^{e_i} e^{-k_n^{e_i} L^{e_i}} = 0. \quad (71)$$

Najbolj zanimiva in tudi najbolj nenavadna je zadnja možnost. To določa pogoj, da je  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} = 0$ . Momentna ravnotežna enačba (57) ima sedaj zelo preprosto obliko

$$\delta\varphi^{e_i''} = 0, \quad (72)$$

katere splošna rešitev je

$$\delta\varphi^{e_i} = K_{1,n}^{e_i} s + K_{2,n}^{e_i}. \quad (73)$$

Nadaljnji postopek reševanja je enak kot prej. Momentna robna pogoja (48) in (49) dajeta

$$K_{1,n}^{e_i} = 0, \quad (74)$$

$$K_{1,n}^{e_i} = 0. \quad (75)$$

Linearizirani sistem posplošenih ravnotežnih enačb paličja smo tako zreducirali na sistem linearnih enačb:

( $e_i = 1, 2, \dots, E_n$ ):

$$1 + C_{\varepsilon}^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} > 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} K_{1,n}^{e_i} + K_{2,n}^{e_i} &= 0, \\ K_{1,n}^{e_i} e^{k_n^{e_i} L^{e_i}} - K_{2,n}^{e_i} e^{-k_n^{e_i} L^{e_i}} &= 0, \end{aligned} \quad (76)$$

$$1 + C_{\varepsilon}^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} < 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} K_{2,n}^{e_i} &= 0, \\ K_{2,n}^{e_i} \cos(k_n^{e_i} L^{e_i}) - K_{1,n}^{e_i} \sin(k_n^{e_i} L^{e_i}) &= 0, \end{aligned} \quad (77)$$

$$1 + C_{\varepsilon}^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} K_{1,n}^{e_i} &= 0, \\ K_{1,n}^{e_i} &= 0, \end{aligned} \quad (78)$$

( $e_j = 1, 2, \dots, E_t$ ):

$$K_{2,t}^{e_j} = 0, \quad (79)$$

$$K_{2,t}^{e_j} \cos(k_t^{e_j} L^{e_j}) - K_{1,t}^{e_j} \sin(k_t^{e_j} L^{e_j}) = 0, \quad (80)$$

( $e_i = 1, 2, \dots, E_n$ ):

$$l_{1,n}^{e_i}(K_{\mathcal{H}}^{e_i}, K_{\mathcal{Q}}^{e_i}, \dots, \delta u_{v_i}) = 0, \quad (81)$$

$$l_{2,n}^{e_i}(K_{\mathcal{H}}^{e_i}, K_{\mathcal{Q}}^{e_i}, \dots, \delta w_{v_i}) = 0, \quad (82)$$

$$l_{3,n}^{e_i}(K_{\mathcal{H}}^{e_i}, K_{\mathcal{Q}}^{e_i}, \dots, \delta u_{v_j}) = 0, \quad (83)$$

$$l_{4,n}^{e_i}(K_{\mathcal{H}}^{e_i}, K_{\mathcal{Q}}^{e_i}, \dots, \delta w_{v_j}) = 0, \quad (84)$$

( $e_j = 1, 2, \dots, E_t$ ):

$$l_{1,t}^{e_j}(K_{\mathcal{H}}^{e_j}, K_{\mathcal{Q}}^{e_j}, \dots, \delta u_{v_i}) = 0, \quad (85)$$

$$l_{2,t}^{e_j}(K_{\mathcal{H}}^{e_j}, K_{\mathcal{Q}}^{e_j}, \dots, \delta w_{v_i}) = 0, \quad (86)$$

$$l_{3,t}^{e_j}(K_{\mathcal{H}}^{e_j}, K_{\mathcal{Q}}^{e_j}, \dots, \delta u_{v_j}) = 0, \quad (87)$$

$$l_{4,t}^{e_j}(K_{\mathcal{H}}^{e_j}, K_{\mathcal{Q}}^{e_j}, \dots, \delta w_{v_j}) = 0, \quad (88)$$

( $v = 1, 2, \dots, V$ ):

$$\delta \sum_{n_v} X_v = 0, \quad (89)$$

$$\delta \sum_{n_v} Z_v = 0, \quad (90)$$

kjer enačbe (81)–(88) predstavljajo kinematične robne pogoje. Ker je sistem enačb (76)–(90) linearen, ga lahko zapišemo v matrični obliki

$$L_T \mathbf{x} = \mathbf{P}, \quad (91)$$

kjer je  $\mathbf{L}_T$  tangenta matrika palične konstrukcije v primarni ravnotežni legi,  $\mathbf{x}$  vektor neznanih parametrov oziroma konstant in  $\mathbf{P}$  vektor desnih strani. Kritične točke na primarni veji obtežno-deformacijske krivulje palične konstrukcije določa pogoj [4]

$$\det \mathbf{L}_T = 0. \quad (92)$$

Glede na posebno strukturo tangente matrike palične konstrukcije (76)–(90) lahko pogoj (92) zapišemo kot produkt poddeterminant

$$\det \mathbf{K}_n^{e_1} \dots \det \mathbf{K}_n^{E_n} \det \mathbf{K}_t^{e_1} \dots \det \mathbf{K}_t^{E_t} \det \mathbf{K}_T = 0, \quad (93)$$

kjer je:

$$(e_i = 1, 2, \dots, E_n)$$

$$1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} > 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}_n^{e_i} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_n^{e_i} L^{e_i}} & e^{-k_n^{e_i} L^{e_i}} \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} < 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}_n^{e_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(k_n^{e_i} L^{e_i}) & \cos(k_n^{e_i} L^{e_i}) \end{bmatrix}, \quad (95)$$

$$1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}_n^{e_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

in

$$(e_j = 1, 2, \dots, E_t)$$

$$\mathbf{K}_t^{e_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(k_t^{e_j} L^{e_j}) & \cos(k_t^{e_j} L^{e_j}) \end{bmatrix}. \quad (97)$$

Matriko  $\mathbf{K}_T$  imenujemo tangenta togostna matrika konstrukcije.

Enačbi (93) je zadoščeno, ko je izpolnjen vsaj eden izmed pogojev

$$\det \mathbf{K}_n^{e_i} = 0, \quad (e_i = 1, 2, \dots, E_n) \quad (98)$$

$$\det \mathbf{K}_t^{e_j} = 0, \quad (e_j = 1, 2, \dots, E_t) \quad (99)$$

$$\det \mathbf{K}_T = 0. \quad (100)$$

Ker sta pogoja (98) in (99) posledica enačb posamezne palice in ne povezovanja palic v konstrukcijo, jih pogosto imenujemo lokalni stabilnostni pogoji. Pogoj (100) pripada paličju kot celoti, zato ga imenujemo globalni stabilnostni pogoj. V nadaljevanju detajlneje analiziramo lokalne stabilnostne pogoje.

Najprej analiziramo lokalne stabilnostne pogoje za natezno obremenjene palice. Ko je  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} > 0$  ( $k_n^{e_i} > 0$ ), velja  $\det \mathbf{K}_n^{e_i} = e^{-k_n^{e_i} L^{e_i}} - e^{k_n^{e_i} L^{e_i}} \neq 0$  in pogoj ni nikoli izpolnjen. Ko je  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} < 0$  ( $k_n^{e_i} < 0$ ), tudi vedno velja  $\det \mathbf{K}_n^{e_i} = \sin(k_n^{e_i} L^{e_i}) \neq 0$ . V tretjem primeru je  $1 + C_\varepsilon^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} = 0$  ( $k_n^{e_i} = 0$ ) in  $\det \mathbf{K}_n^{e_i} = 0$ . Lokalni stabilnostni pogoj natezno obremenjenih palic je tako

$$1 + C_{\varepsilon}^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}} = 0. \quad (101)$$

V nadaljevanju analiziramo tlačno obremenjene palice. V tem primeru določa lokalni stabilnostni pogoj enačba

$$\det \mathbf{K}_t^{e_j} = \sin(k_t^{e_j} L^{e_j}) = 0, \quad (e_j = 1, 2, \dots, E_t) \quad (102)$$

ki je izpolnjena, ko je  $k_t^{e_j} L^{e_j} = n\pi$  in  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Za  $n = 1$  ugotovimo, da uklonsko osno silo tlačno obremenjenih palic določa enačba

$$(1 + C_{\varepsilon}^{e_j}) |C_{\mathcal{N}}^{e_j}| + \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_j^2}}{G^{e_j} A_s^{e_j}} = \frac{C_{22}^{e_j} \pi^2}{L^{e_j^2}}. \quad (103)$$

Kot smo že povedali, pripada pogoj  $\det \mathbf{K}_T = 0$  paličju kot celoti. Ta pogoj določa globalni uklon (limitne in bifurkacijske točke) paličja kot celote.

Lokalni uklon ravninskega paličja določa sistem algebrajskih nelinearnih enačb (27)–(35) in pogoj

$$\prod_{e_i=1}^{E_n} \left(1 + C_{\varepsilon}^{e_i} - \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_i}}{G^{e_i} A_s^{e_i}}\right) \cdot \prod_{e_j=1}^{E_t} \left( (1 + C_{\varepsilon}^{e_j}) |C_{\mathcal{N}}^{e_j}| + \frac{C_{\mathcal{N}}^{e_j^2}}{G^{e_j} A_s^{e_j}} - \frac{C_{22}^{e_j} \pi^2}{L^{e_j^2}} \right) = 0. \quad (104)$$

Sistem nelinearnih algebrajskih enačb (27)–(35) in (104) rešimo ob upoštevanju kinematičnih robnih pogojev z Newtonovo metodo.

## 5 Sklep

V članku smo izpeljali točne izraze za določitev uklonske nosilnosti poljubnega ravninskega paličja. Izraze smo izpeljali s pomočjo linearizirane teorije stabilnosti. Vse palice paličja smo modelirali z geometrijsko točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev in s poljubnim nelinearnim materialnim modelom. S tako splošnim modelom smo lahko pri določitvi uklonske nosilnosti paličja upoštevali materialno nelinearnost paličja ter poleg upogibnih tudi membranske in strižne deformacije.

V nadaljnjih raziskavah bi bilo smiselno postopek za določitev uklonske nosilnosti paličja dopolniti tako, da bi omogočal tudi analizo vpliva geometrijske in materialne nepopolnosti paličja na njegovo uklonsko nosilnost.

## Literatura

- [1] Z.P. Bažant, L. Cedolin, *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, New York, 1991.
- [2] R. Flajs, *Obstoj in enoličnost rešitve enačb Reissnerjevega modela elastično - plastične konzole*, Magistrska naloga, FGG, Univerza v Ljubljani, 1998.

- [3] H.B. Keller, *Nonlinear bifurcation*, Journal of Differential Equations, 7, 417–434, 1970.
- [4] I. Planinc, M. Saje, *A quadratically convergent algorithm for the computation of stability points: the application of the determinant of the tangent stiffness matrix*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 169, 89–105, 1999.
- [5] E. Reissner, *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 23, 795–804, 1972.
- [6] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N. Reddy, *Exact solutions for buckling of structural members*, CRC Press LLC, 2005.



## *O prečnih, viskozno dušenih nihanjih osno premikajočega se prednapetega nosilca*

G. Čepon<sup>1</sup> in M. Boltežar<sup>2</sup>

### *On the damped transverse vibrations of the axially moving pre-tensioned beam*

**Povzetek.** V tem prispevku predstavljamo postopek izračuna lastnih frekvenc in časovnega odziva osno premikajočega se viskozno dušenega prednapetega nosilca z uporabo *Galerkinove metode končnih elementov*. Pri zapisu robnih pogojev smo upoštevali nihanje podpor nosilca v vertikalni smeri. Na numeričnem primeru smo predstavili časovni odziv osno premikajočega se nosilca pri dveh tipih robnih pogojev ter odvisnost lastnih frekvenc od osne hitrosti in sile prednapetja nosilca.

**Abstract.** In this article the *Galerkin finite element method* for analyzing of the natural frequencies of an axially moving pre-tensioned beam is presented. The excitation of the beam was generated with the moving boundary conditions. Two responses of an axially moving beam under two types of boundary conditions were presented in numerical examples. The dependence of natural frequencies on the axial velocity and the longitudinal tension is also presented.

## 1 Uvod

Modeliranje osno premikajočih se linijskih struktur sega v šestdeseta leta prejšnjega stoletja. Tematika se navezuje na jermenska gonila, tračne žage, verižne prenose, audio-video trakove ter na ostale podobne aplikacije. Obsežen pregled modeliranja vej jermena in jermenskih gonil je podan v prispevku [5]. V omenjenem prispevku je med drugimi predstavljen tudi model prečnega nihanja veje jermena z osno premikajočim se prednapetim nosilcem. Prečne vibracije veje jermena so navadno posledica neugodnega stika med jermenom in jermenico, površinskih napak na jermenici in jermenu, variiranja debeline veje jermena, ekscentričnosti jermenic, itd. Postopek določitve časovnega odziva osno premikajočega se prednapetega nosilca je za primer členkastega podprtja nosilca ( $w(0,t) = 0$ ,  $w(L,t) = 0$ ,  $M(0,t) = 0$ ,  $M(L,t) = 0$ ) podan v prispevku [1]. V [2] sta avtorja v gibalni enačbi osno premikajoče se strune upoštevala tudi viskozno

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; gregor.cepon@fs.uni-lj.si

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; miha.boltezar@fs.uni-lj.si



dušenje v obliki:  $d \frac{Dw(x,t)}{Dt}$ . Omenjeni izraz za viskozno dušenje smo upoštevali tudi v našem prispevku osno premikajočega se nosilca. Izračuna lastnih frekvenc in časovnega odziva tako dobljene gibalne enačbe smo se lotili z uporabo *Galerkinove metode končnih elementov*, pri čemer smo pri zapisu robnih pogojev upoštevali nihanje podpor nosilca v vertikalni smeri. V računskem primeru smo predstavili odvisnost lastnih frekvenc od osne hitrosti in sile prednapetja ter časovni odziv za dva tipa robnih pogojev.

## 2 Gibalna enačba osno premikajočega se nosilca

Euler-Bernoullijev model nosilca (slika 1) popisuje linearna parcialna diferencialna enačba četrtega reda.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + d \frac{Dw(x,t)}{Dt} + m \frac{D^2 w(x,t)}{Dt^2} = f(x,t), \quad (1)$$

Četrti red se nanaša na koordinato lege, medtem ko je koordinata časa opredeljena le z odvodi do drugega reda. Ob upoštevanju diferencialnih operatorjev [2]

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{in} \quad \frac{D^2}{Dt^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (2)$$

dobimo gibalno enačbo premikajočega se viskozno dušenega prednapetega nosilca [1] v obliki

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (T - mv^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2vm \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + d \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) = f. \quad (3)$$

Oznake v enačbi (3) predstavljajo:

$E$  – nadomestni elastični modul jermena

$I$  – vztrajnostni moment prereza

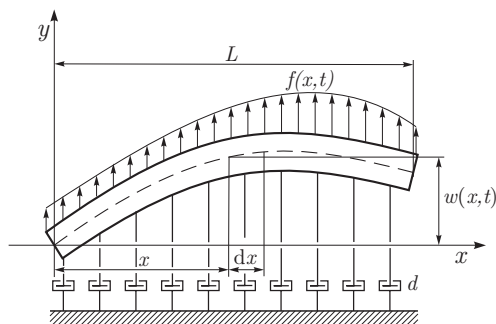
$T$  – konstantna osna sila v jermenu

$v$  – konstantna osna hitrost jermena

$m$  – masa na enoto dolžine jermena

$d$  – koeficient viskoznega dušenja

$f(x,t)$  – obremenitev po polju nosilca



Slika 1 : Nosilec obremenjen z zvezno obtežbo

Diferencialna enačba (3) na robovih izpolnjuje robne pogoje (slika 2)

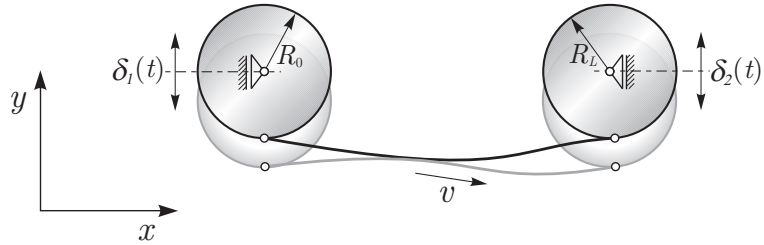
$$w(0,t) = \delta_1(t), \quad w(L,t) = \delta_2(t), \quad t > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(0,t) = 1/R_0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(L,t) = 1/R_L, \quad t > 0 \quad (5)$$

ter pri času  $t = 0$  začetna pogoja oblike:

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (6)$$

Z  $\delta_1(t)$  in  $\delta_2(t)$  smo označili funkciji kinematičnega vzbujanja na obeh robovih nosilca ter z  $L$  dolžino obravnavanega nosilca. Zaradi naleganja jermena na jermenico je potrebno upoštevati začetno ukrivljenost nosilca na obeh robovih. Ukrivljenost nosilca je enaka radiju prve  $R_0$  oziroma druge  $R_L$  jermenice. Začetne vrednosti prečnega pomika po polju nosilca podaja funkcija  $w_0(x)$ , medtem ko funkcija  $g(x)$  podaja začetno hitrost prečnega pomika po polju nosilca. Narava robnih pogojev se navezuje na problem nihanja veje jermena med dvema ekscentričnima jermenicama (slika 2), kjer pomik  $\delta_i$  predstavlja vertikalni pomik zaradi ekscentričnosti jermenic. Radij ukrivljenosti nosilca na obeh robovih je posledica zaokroženosti jermenic ter glede na postavitev koordinatnega sistema na sliki 2 sovpada z radijem prve oziroma druge jermenice.



Slika 2 : Model veje jermena med dvema jermenicama

### 3 Aproksimacija gibalne enačbe (3) po metodi končnih elementov

Prostorske diskretizacije parcialne diferencialne enačbe (3) se lotimo na osnovi Galerkinove metode končnih elementov. Preden pa se lotimo reševanja problema bomo parcialno diferencialno enačbo (7) zapisali nekoliko splošneje:

$$A \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + B \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} + D \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + E_s \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + F \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = G f(x,t), \quad (7)$$

pri čemer upoštevamo enakosti:

$$A = \frac{EI}{m}, \quad B = \left( v^2 - \frac{T}{m} \right), \quad C = 2v, \quad D = 1, \quad E_s = \frac{d}{m}, \quad F = v \frac{d}{m}, \quad G = \frac{1}{m} \quad (8)$$

#### 3.1 Upoštevanje nihanj podpor nosilca, kot robni pogoj

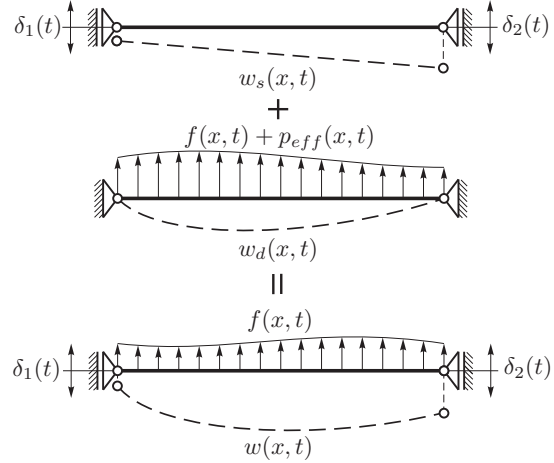
Osnovni korak pri reševanju robnega problema nihanj podpor nosilca predstavlja razdelitev celotnega prečnega pomika nosilca  $w(x,t)$  na vsoto dveh pomikov

$$w(x,t) = w_s(x,t) + w_d(x,t) \quad (9)$$

Z  $w_s(x,t)$  smo označili pseudo statični pomik nosilca, ki predstavlja pomik po polju nosilca zaradi pomika podpor, pri čemer upoštevamo, da je obremenitev po polju nosilca enaka  $f(x,t) = 0$  N/m (slika 3). Zapišemo ga lahko v obliki vsote dveh funkcij:

$$w_s(x,t) = \sum_{j=1}^2 \delta_j(t) \varphi_j(x) = \delta_1(t) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \delta_2(t) \frac{x}{L} \quad (10)$$

Z  $w_d(x,t)$  smo označili relativni pomik po polju nosilca glede na trenutni pseudo statični pomik  $w_s(x,t)$ .  $w_d(x,t)$  torej predstavlja pomik zaradi dinamične obremenitve  $f(x,t)$  in efektivne obremenitve  $p_{eff}(x,t)$ , ki je posledica kinematičnega vzbujanja podpor. Pri delitvi pomikov posameznih obremenitev smo upoštevali superpozicijo, ki je lastnost linearnih sistemov, slika 3. Ob upoštevanju izrazov (9) in (10) se enačba (7) preoblikuje v obliko



Slika 3 : Razdelitev obremenitev, ki delujejo na nosilec

$$A \frac{\partial^4 w_d(x,t)}{\partial x^4} + B \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial x \partial t} + D \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial t^2} + E_s \frac{\partial w_d(x,t)}{\partial t} + F \frac{\partial w_d(x,t)}{\partial x} = \underbrace{Gf(x,t) - \sum_{j=1}^2 \left( (C\dot{\delta}_j(t) + F\delta_j(t)) \frac{d\phi_j(x)}{dx} + D\ddot{\delta}_j(t)\phi_j(x) \right)}_{p_{eff}} \quad (11)$$

Pri zapisu enačbe (11) smo v izrazu za efektivno obtežbo  $p_{eff}$  zanemarili dušenje  $d = 0$  [3]. Robna pogoja (4) priredimo parcialni diferencialni enačbi (11)

$$w_d(0,t) = w_d(L,t) = 0, \quad t > 0, \quad (12)$$

medtem ko robna pogoja (5) nad sekundarno spremenljivko ostaneta enaka.

### 3.2 Prostorska diskretizacija gibalne enačbe nosilca na osnovi končnih elementov

Galerkinovo metodo končnih elementov apliciramo na šibki obliki integralske formulacije. Vse člene enačbe (11) zapišemo na levo stran enačbe ter jih množimo s funkcijo  $\phi(x)$ , ki je definirana na območju  $x \in [0, L]$ . Tako ustvarjeni funkcijski produkt integriramo po celotnem območju. Ob predpostavki, da je funkcija  $\phi(x)$  vsaj dvakrat diferenciable, jo lahko integriramo *per partes*.

$$A \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) dx + B \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial x^2} \phi(x) \right) dx + C \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial x \partial t} \phi(x) \right) dx + (13)$$

$$D \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w_d(x,t)}{\partial t^2} \phi(x) \right) dx + E_s \int_0^L \left( \frac{\partial w_d(x,t)}{\partial t} \phi(x) \right) dx + F \int_0^L \left( \frac{\partial w_d(x,t)}{\partial x} \phi(x) \right) dx =$$

$$G \int_0^L f(x,t) \phi(x) dx - \sum_{j=1}^2 \left( C\dot{\delta}_j(t) + F\delta_j(t) \right) \int_0^L \frac{d\phi_j(x)}{dx} \phi(x) dx - \sum_{j=1}^2 D\ddot{\delta}_j(t) \int_0^L \phi_j(x) \phi(x) dx -$$

$$G [T(x)\phi(x)]_0^L + G \left[ M(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_0^L$$

Obravnavamo podinterval  $\Omega \in [x_{e-1}, x_e]$  dolžine  $h_e$ , na katerem aproksimiramo potek primarne spremenljivke  $w_d^e(x, t)$  s *Hermitovimi polinomi*  $\psi_j^e(t)$  tretje stopnje [4]

$$w_d^e(x, t) = \sum_{j=1}^4 U_j^e(t) \psi_j^e(x) \quad (14)$$

z  $U_j^e(t)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  kot vozliščnimi vrednostmi primarne spremenljivke v krajiščih končnega elementa. Vozliščni vrednosti  $U_1^e$  in  $U_3^e$  predstavljata prečna pomika obeh vozlišč končnega elementa, medtem ko vozliščni vrednosti  $U_2^e$  in  $U_4^e$  predstavljata zasuk prve oziroma druge vozliščne točke končnega elementa. Skladno z *Galerkinovim pristopom* in izbranimi oblikovnimi funkcijami  $\psi_i^e(x)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , ki jih zapovrstjo nadomestimo na mestu funkcije  $\phi(x)$ , dobimo sistem štirih enačb končnega elementa. Algebrajsko seštetje razširjenih enačb končnega elementa, izraženih z globalnimi primarnimi spremenljivkami  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, 2n + 2$ , da rezultirajoč sistem enačb, tako imenovano **enačbo problema**, ki jo zapišemo v obliki:

$$[M] \{\dot{U}(t)\} + [C] \{\dot{U}(t)\} + [K] \{U(t)\} = \{F(t)\}. \quad (15)$$

$Z \{U(t)\} = \{U_1, U_2, \dots, U_{2n}\}^T$  smo označili vektor primarnih vozliščnih vrednosti ter z  $[M]$ ,  $[C]$  in  $[K]$  masno, dušilno in togostno matriko velikosti  $2n \times 2n$ . Pri zapisu matrične enačbe (15) smo upoštevali robna pogoja (12), zaradi česar imamo opravka z  $2n$  enačbami, kjer  $n$  označuje število končnih elementov. S  $\{F(t)\}$  smo označili vektor desnih strani, ki podaja obremenitev po polju nosilca  $f(x, t)$ , prispevek zaradi efektivne obremenitve  $p_{eff}(x, t)$  in vektor z vrednostmi sekundarnih spremenljivk, ki predstavlja seštevek vrednosti sekundarnih spremenljivk vseh končnih elementov. Prvi in zadnji člen vektorja z vrednostmi sekundarnih spremenljivk predstavljata robne pogoje, medtem ko ostali členi predstavljajo prispevek nezveznosti sekundarne spremenljivke na meji med dvema sosednjima elementoma. V primeru, da je po polju nosilca potek sekundarnih spremenljivk zvezen, potem so vsi členi vektorja sekundarnih spremenljivk razen prvega in zadnjega enaki nič.

### 3.3 Časovni odziv osno premikajočega se nosilca in določitev lastnih frekvenc

Pri diskretizaciji časovne spremenljivke izhajamo iz matrične enačbe (15). Odvode vozliščnih vrednosti primarne spremenljivke  $U_i(t)$  po času bomo aproksimirali na osnovi centralnih diferenc. Vektorja prvih in drugih odvodov primarnih vozliščnih vrednosti po času  $\{\dot{U}(t)\}$  in  $\{\ddot{U}(t)\}$  lahko zapišemo z diferenčnimi shemami:

$$\{\dot{U}(t_k)\} = \frac{1}{2\Delta t} \left( -\{U^{k-1}\} + \{U^{k+1}\} \right), \quad \{\ddot{U}(t_k)\} = \frac{1}{\Delta t^2} \left( \{U^{k-1}\} - 2\{U^k\} + \{U^{k+1}\} \right), \quad (16)$$

pri čemer smo upoštevali enakost med zapisoma  $\{U(t_k = k\Delta t)\} = \{U^k\}$ . Izraza (16) upoštevamo v matrični enačbi (15)

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{U^{k+1}\} = \left( \frac{2}{\Delta t^2} [M] - [K] \right) \{U^k\} + \left( \frac{1}{2\Delta t} [C] - \frac{1}{\Delta t^2} [M] \right) \{U^{k-1}\} + \{F^k\} \quad (17)$$

pri čemer velja  $k = 1, 2, \dots$ . V prvem koraku integracije  $k = 0$  imamo opravka s tako imenovanim začetnim problemom, katerega reševanja se lotimo na osnovi začetnih pogojev (6).

### 3.3.1 CFL stabilnostni kriterij in določitev lastnih frekvenc sistema

Računska shema (17) je pogojno stabilna, kar pomeni, da je potrebno določiti ustrezno razmerje med časovnim  $\Delta t$  in prostorskim  $h$  korakom integracije. To razmerje bomo določili na osnovi CFL stabilnostnega kriterija, katerega utemeljitelji so Courant, Friedrichs in Lewy. Izhajali bomo iz matrične enačbe (15), pri čemer predpostavimo, da je časovna spremenljivka diskretizirana na osnovi centralnih diferenc. Obravnavali bomo poseben primer, kjer bomo predpostavili, da je vektor desnih strani  $\{F(t)\} = \{0\}$  ničelni vektor. Z uvedbo nove vektorske spremenljivke  $\{\dot{U}(t)\} = \{V(t)\}$  zapišemo matrično enačbo (15) v obliki sistema dveh matričnih enačb

$$\begin{Bmatrix} \{U(t)\} \\ \{V(t)\} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} [0] & -[I] \\ [M]^{-1}[K] & [M]^{-1}[C] \end{bmatrix}}_D \begin{Bmatrix} \{U(t)\} \\ \{V(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

oziroma krajše

$$\{\dot{\Psi}(t)\} + [D]\{\Psi(t)\} = \{0\}, \quad (19)$$

kjer smo s  $\{\Psi(t)\} = \{\{U(t)\}, \{V(t)\}\}^T$  označili vektor velikosti  $4n$  ter z  $[D]$  matriko velikosti  $4n \times 4n$ . V nadaljevanju uvedemo nastavek  $\{\Psi(t)\} = \{\Theta\}e^{\lambda t}$ , z lastnim vektorjem  $\{\Theta\}$  ter pripadajočo lastno vrednostjo  $\lambda$ , ki ga vstavimo v enačbo (18) in dobimo:

$$([D] + [I]\lambda_i)\{\Theta\} = \{0\} \quad (20)$$

Matrično enačbo (18) smo prevedli na tako imenovan posplošen problem lastnih vrednosti. Reševanja problema se lahko lotimo z uporabo metode *QR-razcepa* realne *Hessenbergove matrike*. Kot rešitev dobimo  $4n$  lastnih vrednosti, ki nastopajo v konjugirano kompleksnih parih. Koeficient imaginarnega dela lastnih vrednosti predstavlja lastno dušeno krožno frekvenco osno premikajočega se viskozno dušenega nosilca in jo bomo označili z  $\omega_{0Di}$ . Courant, Friedrichs in Lewy so pokazali, da je potreben in hkrati tudi zadosten pogoj, da je shema (17) stabilna, ko je zadoščeno pogoju  $\Delta t < \Delta t_{kr} = 2/|\omega_{0Dmax}|$ , kjer smo z  $\omega_{0Dmax}$  označili maksimalno lastno dušeno frekvenco.

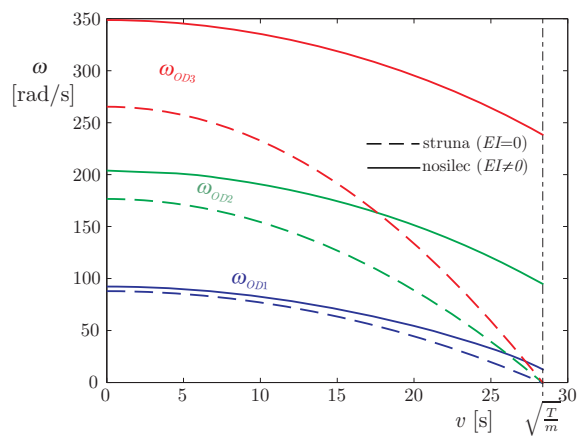
### 3.4 Primer določitve lastnih frekvenc in časovnega odziva

V tem podpoglavju bomo na numeričnem primeru predstavili odvisnost lastnih frekvenc od osne hitrosti nosilca in sile prednapetja ter odziv nosilca v času pri dveh tipih robnih pogojev. Podatki jermenskega gonila (slika 2) ter oblike robnih in začetnih pogojev so podane v tabeli 1. Nosilec ob začetku nihanja miruje. Na sliki 4 je prikazana odvisnost lastne dušene frekvence  $\omega_{0D}$  od osne hitrosti nosilca oziroma strune. Pri struni uporabimo enake podatke kot v primeru nosilca, le da je za struno upogibna togost enaka  $EI = 0$ . Vidimo lahko, da se s povečevanjem osne hitrosti jermena lastne frekvence nosilca in strune zmanjšujejo. Pri struni so lastne frekvence enake nič tedaj, ko je osna hitrost strune enaka kritični hitrosti  $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$ . Ugotovimo lahko, da so lastne frekvence osno premikajočega se nosilca v primerjavi s pripadajočimi lastnimi frekvencami osno premikajoče se strune nekoliko višje, razlika med njimi pa se povečuje s povečevanjem osne hitrosti  $v$ . Lastne frekvence nosilca in strune se večajo s povečevanjem osne sile prednapetja. S povečevanjem osne sile se lastne frekvence nosilca približujejo lastnim

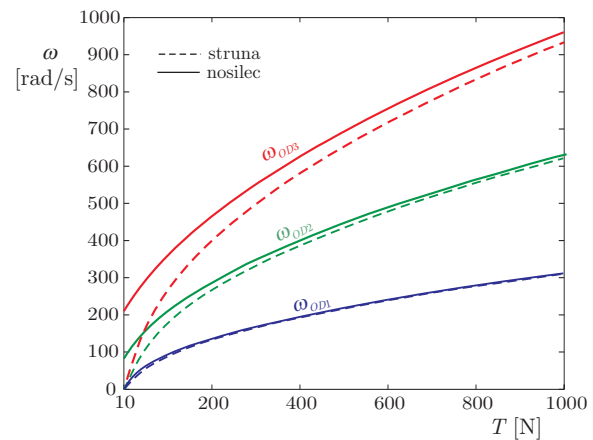
**Tabela 1** : Podatki jermenskega gonila ter oblika začetnih in robnih pogojev

$d$ [Ns/m]	$EI$ [Nm <sup>2</sup> ]	$h$ [m]	$L$ [m]	$m$ [kg/m]	$T$ [N]
1	0.64	0.1	1	0.1	80
$\delta_1(t)$ [m]	$\delta_2(t)$ [m]	$w_0(x)$ [m]	$v$ [m/s]	$g(x)$ [m/s]	$f(x,t)$ [N/m]
$0.04(1 - \cos(20\pi t))$	$0.04(1 - \cos(10\pi t))$	$0.08 \sin(\frac{\pi x}{L})$	10	0	0

frekvencam strune, na podlagi česar lahko sklepamo, da s povečevanjem osne sile upogibna togost izgublja vpliv na velikost lastnih frekvenc. Pri določitvi časovnega odziva nosilca si



**Slika 4** : Odvisnost lastnih frekvenc od osne hitrosti  $v$



**Slika 5** : Odvisnost lastnih frekvenc od sile prednapetja  $T$

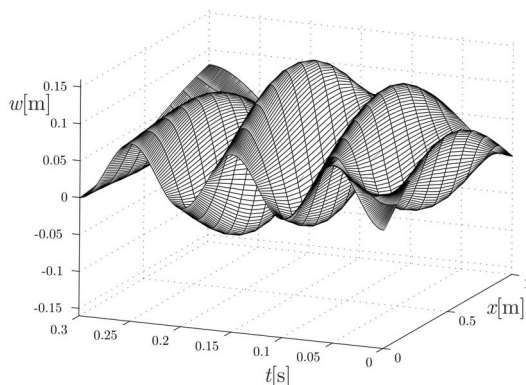
bomo pogledali odziv nosilca v času pri dveh različnih tipih robnih pogojev nad sekundarno spremenljivko. V obeh primerih bodo robni pogoji nad primarno spremenljivko<sup>3</sup> enaki (tabela 1), medtem ko robna pogoja nad sekundarno spremenljivko predpostavimo v dveh oblikah:

$$1 : \begin{aligned} R_0 = \infty &\implies \partial^2 w(0,t)/\partial x^2 = 0 \\ R_L = \infty &\implies \partial^2 w(L,t)/\partial x^2 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

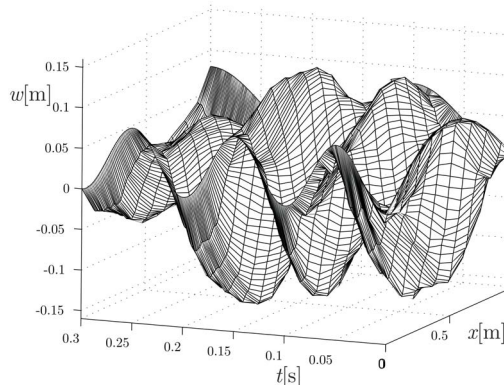
$$2 : \begin{aligned} R_0 = 0.15 \text{ m} &\implies \partial^2 w(0,t)/\partial x^2 = 1/R_0 \\ R_L = 0.16 \text{ m} &\implies \partial^2 w(L,t)/\partial x^2 = 1/R_L \end{aligned} \quad (22)$$

Na sliki 6 je prikazan časovni odziv osno premikajočega se nosilca ob upoštevanju robnih pogojev v obliki (21). Na sliki 7 pa je prikazan časovni odziv osno premikajočega se nosilca ob upoštevanju robnih pogojev v obliki (22). Vidimo lahko, da ima zaokroženost jermenic precejšen vpliv na odziv jermena. Reševanja gibalne enačbe osno premikajočega se nosilca (3) smo se lotili tudi z uporabo metode končnih diferenc ter tako verificirali postopek reševanja z uporabo metode končnih elementov [6].

<sup>3</sup> pomikom robnih točk nosilca



**Slika 6** : Časovni odziv nosilca ob upoštevanju robnih pogojev (21)



**Slika 7** : Časovni odziv nosilca ob upoštevanju robnih pogojev (22)

#### 4 Zaključek

V prispevku smo predstavili prečna nihanja osno premikajočega se viskozno dušenega nosilca. Z gibalno enačbo osno premikajočega se nosilca smo modelirali vejo jermena med dvema jermenicama. Analitični izraz za določitev lastnih frekvenc osno premikajočega se nosilca v zaključeni obliki ne obstaja, zaradi česar smo se izračuna lastnih frekvenc in določitve časovnega odziva lotili z uporabo *Galerkinove metode končnih elementov*. Vidimo, da se s povečanjem hitrosti gibanja jermena lastne frekvence prečnega nihanja nosilca zmanjšujejo, medtem ko se s povečevanjem osne sile prednapetja nosilca lastne frekvence prečnega nihanja povečujejo. Na osnovi dobljenih časovnih odzivov, predstavljenih na slikah 6 in 7, lahko sklepamo, da ima pri naši izbiri parametrov jermenskega gonila (tabela 1) ekscentričnost in zaokroženost jermenic precejšen vpliv na odziv veje jermena, zaradi česar omenjena vpliva vsekakor nista zanemarljiva.

#### Literatura

- [1] A. Pramila, J. Lukkanen, M. Pautamo, *Vibration of axially moving material using the FEM* The American society of mechanical engineers, 1983.
- [2] N. Jakšić, M. Boltežar, *O lastnih viskozno dušenih prečnih nihanjih osno premikajoče se strune*, Kuhljevi dnevi, 2004, 115–124.
- [3] R. W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of structures*, Kosaido printing, 1975.
- [4] B. Štok, N. Mole, *Računalniška analiza konstrukcij-zapiski s predavanj*, UL Fakulteta za strojništvo, 2002.
- [5] S. Abrate, *Noise and vibration in power transmission belts*, Mechanical mechanism theory, 1992.
- [6] G. Čepon, *Numerično reševanje gibalne enačbe osno premikajočega se viskozno dušenega prednapetega nosilca - Podiplomski izpit*, Fakulteta za strojništvo, 2004.



## *Vključitev lokaliziranih nelinearnosti v dinamske modele kompleksnih struktur*

P. Čermelj<sup>1</sup> in M. Boltežar<sup>1</sup>

### *Incorporating localised nonlinearities into dynamic models of complex structures*

**Povzetek.** V današnjem času, ko v dinamiki modeliramo vse bolj kompleksne sisteme - strukture za potrebe predikcije dinamskih lastnosti ter za potrebe simulacije obnašanja na zunanje obremenitve, smo v večini primerov zaradi velikega števila prostosti omejeni na linearne modele. Vseeno pa obstajajo posebni primeri, ko določenih, izrazito nelinearnih podsistemov strukture, brez uporabe izboljšave ne moremo več predstaviti v obliki veljavnih linearnih modelov. Namreč, če se hočemo izogniti časovno in denarno potratnemu procesu izboljšave oz. identifikacije ekvivalentnih linearnih lastnosti lokaliziranih nelinearnosti, moramo izhajati iz veljavnega nelinearnega modela neke lokalizirane nelinearnosti. Zaradi zmožnosti numeričnega reševanja samega in eventuelno, zaradi zmožnosti parametričnega preučevanja modela celotne strukture, pa je tak model nadalje potrebno ustrezno poenostaviti v čim bolj enostaven a še vedno ustrezno veljaven, linearen ali celo nelinearen model. Tak model mora biti primeren tako za vključitev v model linearne strukture kot za učinkovito numerično, največkrat parametrično reševanje.

**Abstract.** Along with the rising needs to model more and more complex structures in the field of structural dynamics, especially in terms of a large number of degrees-of-freedom, in most cases we are still limited to the use of linear models of such structures. But, there are cases when there are some highly nonlinear sub-systems present in the form of localised nonlinearities which are usually modelled as equivalent linear models whose parameters are determined using updating. In order to avoid the time- and cost-expensive updating we must provide a detailed model of certain nonlinearity and then, simplify such a nonlinear model into the form that is suitable for coupling with the linear part of the model and also, into the form that enables an effective numerical solving of the whole structure's model, even in parametric sense.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta strojništvo, Laboratorij za dinamiko strojev in konstrukcij



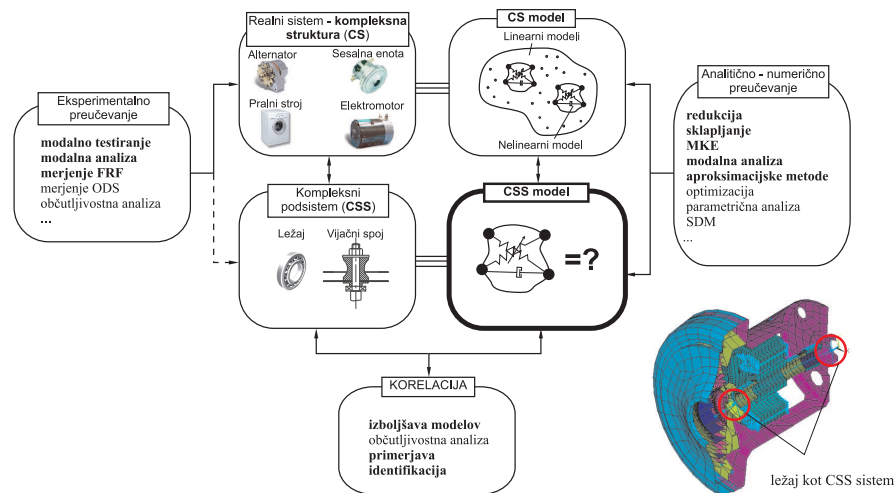
## 1 Uvod

Za potrebe simulacije dinamičnega obnašanja neke strukture v splošnem potrebujemo čim bolj veljaven model celotne strukture. Navkljub naraščajoči računalniški zmogljivosti, pa se povečujejo tudi zahteve po modeliranju vse bolj kompleksnih sestavov kot so pralni stroji, sesalne enote, razni motorji ipd., katerih modeli v splošnem obsegajo veliko število prostosti (sl. 1). Četudi tak, celoten model *kompleksne strukture* (CS) z veliko prostostmi predstavimo v obliki linearnega modela, danes to predstavlja izziv v smislu reševanja, če pa želimo vključiti še nelinearne lastnosti, največkrat v obliki t.i. *lokaliziranih nelinearnosti*, pa se kompleksnost problema še dodatno poveča. Direktna uporaba modela lokaliziranih nelinearnosti, imenovali jih bomo *kompleksni podsistemi* (CSS), v sklopu CS s stališča reševanja v dinamiki ni primerna, zato se danes še največ uporablja identifikacija nadomestnih, linearnih lastnosti CSS, npr. [11, 10, 6, 9, 3]. Tak pristop zahteva izvedbo eksperimenta na že obstoječem izdelku, prototipu ali celo namenski napravi in še več, tako identificirani parametri so veljavni le za t.i. obratovalne pogoje, za pogoje prisotne pri identifikaciji sami.

Tokrat bomo prikazali način vključitve enostavnega in hkrati veljavnega modela nekega CSS v model ostale, linearne strukture. Tak način modeliranja sledi eni glavnih tendenc v dinamiki struktur, namreč, *modeli morajo biti čim bolj enostavni, hkrati pa morajo še vedno odražati bistvene dinamske lastnosti* (linearne in eventuelno tudi nelinearne) [1, 2]. To največkrat pomeni, da težimo k čim manjšemu številu prostostnih stopenj in, ker največkrat dovolj dobro velja predpostavka o ustaljenem stanju, se lahko poslužimo metod v frekvenčnem prostoru kot učinkoviti alternativni določevanja tako dinamskih lastnosti kot odziva CS. Pri mnogih avtorjih, npr. [7, 4, 8], zasledimo vključitev CSS modelov v model CS v obliki *paralelnih vzmeti*, kar sicer omogoča dokaj enostavno reševanje, bistvena slabost takega pristopa pa je, da takšni modeli nimajo ustrezne fizikalne povezave z dejanskimi CSS kot so npr. ležaji, vijačni spoji, kontakti itd. in so zato uporabni le za enostavne, enoosne nelinearne vzmeti. Po drugi strani pa najdemo dela, kjer avtorji sicer detajlno obravnavajo nek CSS v lokalnem smislu, npr. ob močno poenostavljeni ostali strukturi (v obliki togih mas) kot to podaja Gaul [5]. V tem prispevku bomo zato prikazali bolj splošen pristop tako izgradnje enostavnega modela CSS kot tudi način vključitve le-tega v model celotne CS, ki je primeren tudi za parametrično preučevanje.

## 2 Celostni pristop določevanja odziva v frekvenčni domeni

Glede na v uvodu predstavljene argumente, je v tem poglavju prikazan pristop k reševanju odziva CS z lokaliziranimi nelinearnostmi, v frekvenčnem prostoru. Izhajajoč iz detajlnega modela celotne CS, le-to razdelimo na linearni del (LS) in na nelinearni del, CSS. Določitev veljavnega modela LS je danes že dokaj ustaljen postopek, ki pa ni nujno enostaven [10] in največkrat obsega redukcijo, modalno testiranje, korelacijo in izboljšavo. Po drugi strani pa lahko zgradimo detajlni model CSS, ki pa je zaradi velikega števila prostostnih stopenj a priori neprimeren za reševanje celotne CS v dinamiki. To še posebej velja za klasični pristop reševanja odziva CS v časovni domeni, kjer težko najdemo še kako potrebno redukcijo celotnega sistema in še več, v takem primeru niti ne moremo ločiti CSS dela strukture od LS dela [7], kar je osnovni pogoj učinkovitega reševanja CS. V našem primeru bomo nelinearni del, CSS model,

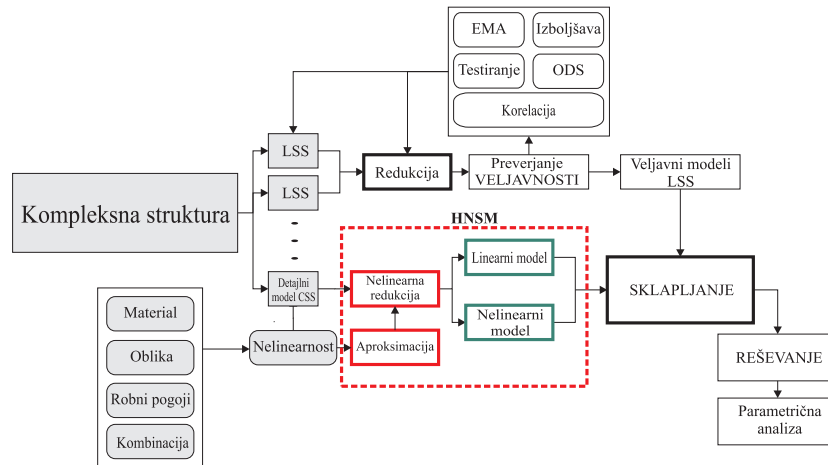


**Slika 1** : Shematski prikaz osnovnega problema modeliranja kompleksnih struktur, vključitev lokaliziranih nelinearnosti v model celotne strukture. Odebeljeno so označena glavna področja strukturne dinamike uporabljena pri reševanju omenjene problematike.

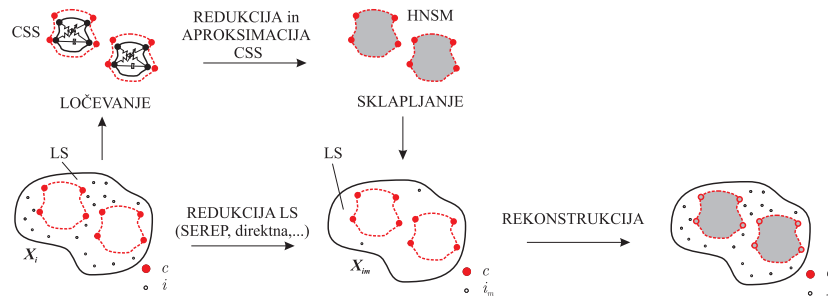
najprej dodatno reducirali, nato bomo uporabili dodatno aproksimacijo in na koncu le-tega predstavili v obliki t.i. *harmonskega nelinearnega supermodela* (HNSM). Takšen model bo primeren za *sklapljanje* z ostalo LS v frekvenčnem prostoru, vse skupaj pa bo primerno za določevanja bodisi t.i. nelinearnih *frekvenčno prenosnih funkcij* (FRF) prvega reda ali pa kar amplitudnega odziva na numerično učinkovitejši način. Omenjeni postopek shematsko prikazuje sl. 2, kjer bistveno pridobitev predstavlja prav določitev HNSM v obliki, primerni za sklapljanje z ostalo, linearno strukturo. Še več, omenjeno učinkovitost določevanja odziva celotne CS dosežemo z uporabo redukcije LS in CSS dela CS, povsem na koncu pa prej reducirane (odstranjene) koordinate lahko tudi rekonstruiramo, sl. 3. Tak postopek je povsem splošen, le celotno CS moramo preurediti v smislu notranjih (*i*) in povezovalnih (*c*) koordinat, HNSM model CSS dela CS pa ima lahko le *c* koordinate. Zadnja omejitev pravzaprav niti ni omejitev, saj že a priori izhajamo iz zahteve po čim bolj enostavnem modelu CSS. Pri teh pogojih lahko namreč zapišemo splošno veljavni izraz za določitev FRF CS [11], tako linearnih, nelinearnih kot mešanih,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_I \\ \mathbf{X}_C \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{ii} - \mathbf{H}_{ic} (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_{CSS} \mathbf{H}_{cc})^{-1} \mathbf{Z}_{CSS} \mathbf{H}_{ci} & \mathbf{H}_{ic} (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_{CSS} \mathbf{H}_{cc})^{-1} \\ \mathbf{H}_{ci} - \mathbf{H}_{cc} (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_{CSS} \mathbf{H}_{cc})^{-1} \mathbf{Z}_{CSS} \mathbf{H}_{ci} & \mathbf{H}_{cc} (\mathbf{I} + \mathbf{Z}_{CSS} \mathbf{H}_{cc})^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_I \\ \mathbf{F}_C \end{pmatrix}. \quad (1)$$

V izrazu (1) sklapljanja FRF  $\mathbf{H}$  predstavlja linearne FRF posameznih delov LS,  $\mathbf{Z}_{CSS}$  predstavlja nelinearno impedančno matriko HNSM,  $\mathbf{X}$  je vektor nelinearnih odzivov,  $\mathbf{F}$  je vektor amplitud vzbujevalnih sil, matrika v (1) pa predstavlja nelinearno matriko FRF prvega reda, ki je odvisna tako od frekvence kot od amplitud povezovalnih koordinat med LS in CSS delom. En. (1) predstavlja sistem nelinearnih algebrskih enačb, ki pa je za reševanje zaradi uporabe redukcije LS in CSS dela, uporabe HNSM pristopa in nenazadnje uporabe sklapljanja, veliko bolj ugoden kot bi bil sistem diferencialnih enačb nereduciranega sistema v časovni domeni. Za potrebe numeričnega reševanja, sistem (1) razširimo v enakovredni, razširjeni realni sistem enačb.



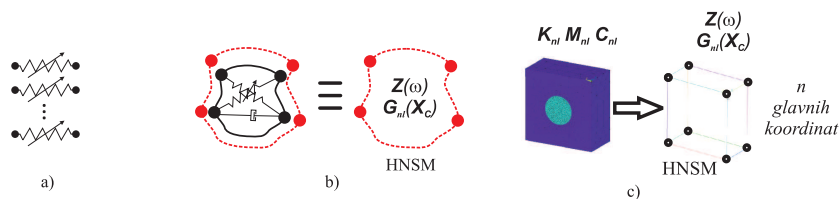
**Slika 2** : Shema celostnega pristopa pri reševanju CS v frekvenčni domeni ob upoštevanju lokaliziranih nelinearnosti.



**Slika 3** : Prikaz virtualnega ločevanja LS in CSS dela CS, prikaz redukcije obeh delov, določitev HNSM in sklapljanja ter eventualno tudi rekonstrukcije povsem na koncu.

### 3 Harmonski nelinearni supermodel

Osnovni namen določitve HNSM je, kot smo že omenili, v posplošitvi pristopa določitve nadomestnih modelov CSS. Nasprotno od avtorjev, ki uporabljajo modele paralelnih vzmeti [7, 4, 8] (sl. 4 - a) in katerih uporaba je, kot smo omenili, močno omejena, bomo tokrat naš, detajlni model CSS, predstavili v obliki reduciranega modela, ki še vedno odraža bistvene fizikalne lastnosti, sl. 4 - b).



**Slika 4** : Nelinearni model paralelnih vzmeti - a), shematski prikaz HNSM - b) in shematski prikaz nelinearne redukcije - c).

Določitev HNSM v prvi fazi temelji na izbiri le nekaj, t.i. *glavnih koordinat*, za katere določimo zvezo med t.i. notranjimi silami in pomiki v statičnem smislu, maso CSS sistema pa predstavimo v obliki diskretizirane porazdelitve na glavne koordinate. Ta postopek bomo imenovali nelinearna redukcija in je povsem primeren za lokalizirane nelinearnosti. Če se npr. omejimo na simetrične togostne nelinearnosti, potem bi bila ena od možnih aproksimacij  $k$ -te notranje sile reduciranega CSS modela, sl. 4 - c), ob upoštevanju vseh možnih kombinacij za linearne in kubične člene,

$$\hat{f}_{in_k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{k_j} x_j + \sum_{j=1}^n b_{k_j} x_j^3 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n c_{k_j} x_j^2 x_i + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n d_{k_j} x_j x_i^2. \quad (2)$$

Ker dejansko notranjo silo lahko določimo na podlagi znanega detajlnega modela, lahko ob različnih konfiguracijah pomikov in uporabi najmanjših kvadratov določimo neznane koeficiente v (2). Generiranje naključnih nizov točk glavnih koordinat,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se izkaže za najbolj primeren pristop za potrebe določevanja koeficientov  $\{a_k\}, \{b_k\}, \dots$

Tokrat bomo uporabili že dolgo znani, iz teorije kontrole znani pristop uporabe opisnih funkcij kot ene od možnosti ekvivalentne linearizacije sistema, kar je je pravzaprav poseben primer metode harmonskega ravnovesja prvega reda. Uporaba tega pristopa v dinamiki struktur, npr. [7, 4, 8], je omejena na eno ali dvo-prostostne sisteme, v primeru več prostosti pa se avtorji poslužujejo t.i. med-koordinatne notacije in s tem povezane omejitve, uporabe modela paralelnih vzmeti.

Metoda opisnih funkcij omogoča določiti analitično povezavo med notranjimi silami in pomiki v frekvenčni domeni, kar predstavlja učinkovitejši pristop od klasične metode harmonskega ravnovesja, poleg tega pa na podlagi tega lahko uporabimo prej predstavljeni način ločevanja in sklapanja posameznih, linearnih in nelinearnih delov CS (sl. 3). En. (2) zaradi vsebnosti mešanih nelinearnih členov, npr. členov oblike  $a_k x_i^r x_j^q$ , ne predstavlja oblike, primerne za uporabo klasičnega pristopa opisnih funkcij, zato bomo omenjeni pristop opisnih funkcij še nekoliko posplošili, tokrat za uporabo polinomskih nelinearnost v obliki (2). Pri simetričnih nelinearnostih in eno-harmonskem vzbujanju, po metodi opisnih funkcij največkrat predpostavimo odziv  $i$ -te in  $j$ -te koordinate v aproksimativni obliki

$$\begin{aligned} x_i &\approx X_i e^{i\omega t}, & \bar{x}_i &= \Im(x_i) = \bar{X}_i \sin(\omega t + \phi_i), & X_i &\in \mathbb{C}, & \bar{X}_i &\in \mathbb{R} \\ x_j &\approx X_j e^{i\omega t}, & \bar{x}_j &= \Im(x_j) = \bar{X}_j \sin(\omega t + \phi_j), & X_j &\in \mathbb{C}, & \bar{X}_j &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ker klasični pristop ne omogoča analitične določitve opisnih funkcij za člene oblike  $a_k x_i^r x_j^q$ , bomo v prvi fazi predpostavili  $\phi_i \approx \phi_j = \phi_{ij}$ , kar pomeni, da uvedemo dodatno linearizacijo h klasičnemu pristopu opisnih funkcij. To potem vodi v substitucijo

$$\omega t = \tau, \quad \tau + \phi_{ij} = \psi_{ij}. \quad (4)$$

Ker tudi notranjo silo, v splošnem je nelinearna, predpostavimo v obliki periodične sile, lahko določimo pripadajoče Fourierove koeficiente te,  $k$ -te notranje sile

$$F_k = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}_{in_k}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) e^{-i\psi_{ij}} d\psi_{ij}. \quad (5)$$

Ob upoštevanju eno-harmonskega vzbujanja ter uporabi enačb (3), (4) in (5), lahko časovno odvisno notranjo nelinearno silo aproksimativno določimo ob uporabi zgolj prvega harmonika notranje nelinearne sile

$$\hat{f}_{in_k} \approx F_k e^{i\psi_{ij}} = a_k C \bar{X}_i^r \bar{X}_j^q e^{i\psi_{ij}} \quad (6)$$

in je  $C$  konstanta odvisna od  $r$  in  $q$ . Upoštevajmo sedaj

$$\begin{aligned} \bar{X}_i e^{i\psi_{ij}} &= \bar{X}_i e^{i\phi_{ij}} e^{i\tau} = X_i e^{i\tau} = x_i \\ \bar{X}_j e^{i\psi_{ij}} &= \bar{X}_j e^{i\phi_{ij}} e^{i\tau} = X_j e^{i\tau} = x_j, \end{aligned} \quad (7)$$

izraz (6) pa umetno razširimo na toliko členov, kolikor koordinat nastopa v (6), tokrat v vsoto dveh členov oblike

$$a_k x_i^r x_j^q = \frac{1}{2} a_k C \bar{X}_i^{r-1} \bar{X}_j^q x_i + \frac{1}{2} a_k C \bar{X}_i^r \bar{X}_j^{q-1} x_j = \nu^{(i)}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) x_i + \nu^{(j)}(\bar{X}_i, \bar{X}_j) x_j. \quad (8)$$

Prikazana razširitev nam omogoča uvedbo več-koordinatnih opisnih funkcij (MCDF), ki so nekakšni delni prispevki k členu  $a_k x_i^r x_j^q$ . Dodatno lahko opazimo, da pogoj  $\phi_i \approx \phi_j = \phi_{ij}$  ni več potreben in končno, sledi izraz za notranjo silo v odvisnosti od pomikov preko uporabe MCDF,  $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}})$ ,

$$\hat{\mathbf{f}}_{in} = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}}) \mathbf{X} e^{i\tau}, \quad \mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{K}_{lin} + \mathbf{G}_{nl}(\bar{\mathbf{X}}), \quad \mathbf{G}, \mathbf{X} \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}})$  skupaj z masno in dušilno matriko predstavlja HNSM, nelinearno impedančno matriko  $\mathbf{Z}_{CSS}$ , ki jo uporabimo v izrazu sklapanja LS in CSS delov CS (1)

$$\mathbf{Z}_{CSS}(\omega, \bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}}) + i\omega \mathbf{C}_{CSS} - \omega^2 \mathbf{M}_{CSS}. \quad (10)$$

#### 4 Primera

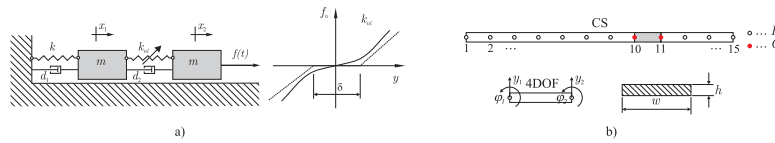
Sl. 6 prikazuje primerjavo med različnimi FRF sistema s sl. 5 s progresivno nelinearno togostjo v drugi vzmeti  $k_{nl} = 50k$ , maso  $m = 0.1$  kg in linearno togostjo  $k = 1000$  N/m. DF označuje klasični pristop po metodi opisnih funkcij, ki ga je tokrat zaradi enostavnosti modela moč uporabiti, HNSM pa predlagani pristop. Aproksimacijski model za HNSM je bil model iz (2) ob uporabi linearnih in kubičnih členov, nelinearni del eksaktne notranje sile v drugi vzmeti pa je bil

$$\mathbf{f}_{nl} = (-k_n(x_2 - x_1)^3 \quad k_n(x_2 - x_1)^3)^T. \quad (11)$$

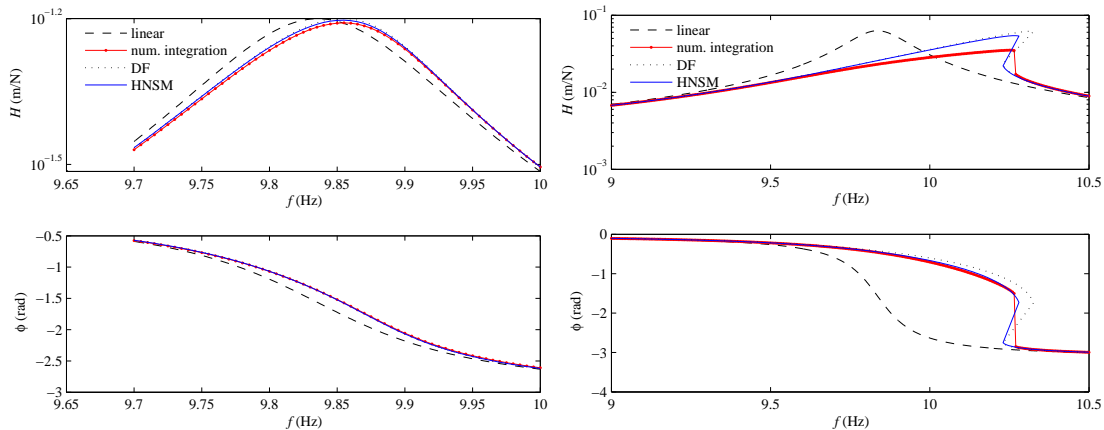
V primeru zračnosti sistema s sl. 5 - a), pa je bila eksatna notranja sila v drugi vzmeti

$$\mathbf{f}_{nl} = \left( -k(y - \frac{\delta}{2} \text{sgn}(y)) \quad k(y - \frac{\delta}{2} \text{sgn}(y)) \right)^T, \quad y \geq 0, \quad y = x_2 - x_1 \quad (12)$$

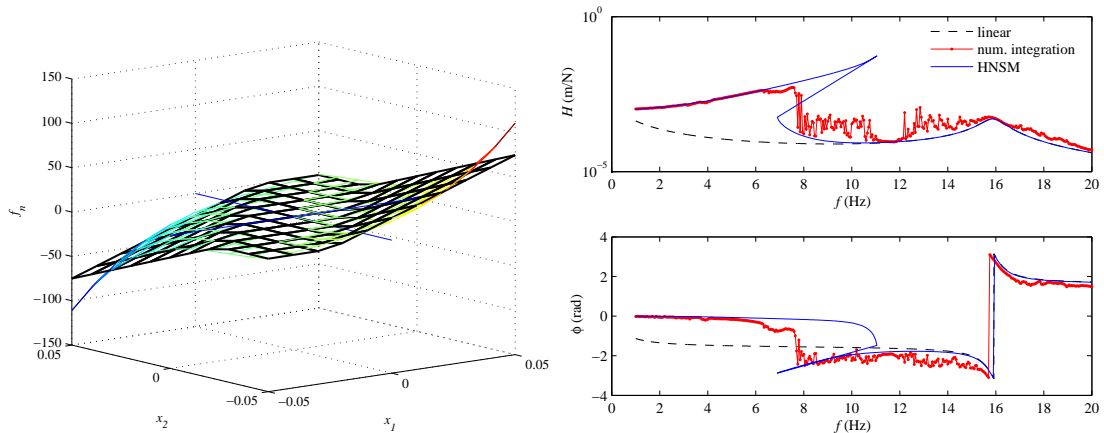
za aproksimacijski mode HNSM pa smo v tem primeru izbrali le kubične člene iz (2). Rezultate med različnimi FRF za primer zračnosti prikazuje sl. 7 (desno). Sl. 8 prikazuje amplitude odziva nosilca za različne primere določevanja FRF, tudi linearne.



**Slika 5** : Dvo-masni sistem z nelinearno vzmetjo  $k_{nl}$  - a) in več-prostostni nosilec z nelinearnim elementom - b).



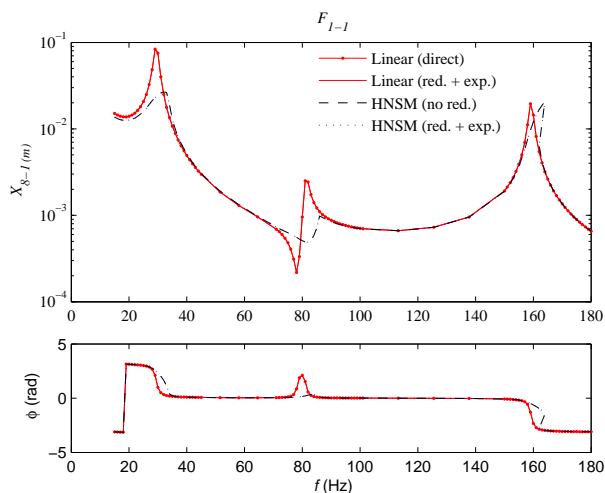
**Slika 6** : Tri nelinearne FRF prvega reda s FRF pripadajočega linearnega sistema s sl. 5 - a). Amplituda vzbujevalne sile je bila 0.5 N (levo) in 5 N (desno).



**Slika 7** : Odvisnost notranje sile v drugi vzmeti od obeh pomikov (levo) ter eksaktna in aproksimativne FRF za primer zračnosti dvo-masnega sistema (desno). Amplituda vzbujevalne sile je bila 3 N.

## 5 Zaključek

Predlagani pristop gradnje HNSM in vključitev le-tega v linearni model linearnega dela strukture omogoča numerično učinkovito določitev odziva celotne CS, kar se še dodatno poveča ob uporabi rekonstrukcije. Glede na ujemanja z eksaktnim (uporaba numerične integracije)



**Slika 8** : Nelinearne amplitude pomika nosilca pri amplitudi vzbujevalne sile 40 N za različne pristope, tudi z uporabo rekonstrukcije.

pristopom kot pristopom klasičnih opisnih funkcij, kjer je to mogoče, je predlagani način predstavitve lokaliziranih nelinearnosti primeren v pogojih ustaljenega stanja, torej v večini tehničnih problemov. Še več, tak način nam omogoča določiti enostaven, a veljaven model lokalizirane nelinearnosti, oz. napraviti oceno o primernosti zanemaritve nelinearnosti.

## Literatura

- [1] D. J. Ewins in D. J. Inman, *Structural Dynamics @ 2000: current status and future directions*, Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 2001.
- [2] E. Dascotte in R. Swindell, "Beyond modal animations: Modal pre-test planning, structural dynamics modifications & integration with fea," v *Signal Acquisition, Modal Analysis and Lab Test Simulation seminar*, Signal Acquisition, Modal Analysis and Lab Test Simulation seminar, m+p International UK, 2003.
- [3] P. Čermelj in M. Boltežar, "An indirect approach to investigating the dynamics of a structure containing ball bearings," *Journal of Sound and Vibration*, **276**(1-2), str. 401–417, 2004.
- [4] J. V. Ferreira, *Dynamic Response Analysis of Structures with Nonlinear Components*, Doktorska disertacija, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, 1998.
- [5] L. Gaul in J. Lenz, "Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints," *Acta Mechanica*, **125**(1-4), str. 169–181, 1997.
- [6] W. L. Li, "A new method for structural model updating and joint stiffness identification," *Mechanical Systems and Signal Processing*, **16**(1), str. 155–167, 2002.
- [7] M. I. Friswell, J. E. T. Penny in S. D. Garvey, "Using linear-model reduction to investigate the dynamics of structures with local nonlinearities," *Mechanical Systems and Signal Processing*, **9**(3), str. 317–328, 1995.
- [8] S. Meyer in M. Link, "Modelling and updating of local non-linearities using frequency response residuals," *Mechanical Systems and Signal Processing*, **17**(1), str. 219–226, 2003.
- [9] J. E. Mottershead in M. I. Friswell, "Model updating of joints and connections," v *International conference on Structural Dynamics Modelling*, International conference on Structural Dynamics Modelling, 2002.
- [10] D. W. Fotsch, *Development of Valid FE Models for Structural Dynamic Design*, Doktorska disertacija, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, 2001.
- [11] W. Liu in D. J. Ewins, "Substructure synthesis via elastic media part ii: Coupling analysis," v *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC*, Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC, SEM, Bethel, CT, USA, 2000.



## *O konvergenzi modificiranega nekonformnega štirikotnega končnega elementa RQ6*

R. Flajs<sup>1</sup> in M. Saje<sup>1</sup>

### *On convergence of the quadrilateral rotated nonconforming finite element RQ6*

**Povzetek.** V prispevku je z uporabo Stummelovega posplošenega patch testa [10] dokazana konvergenca modificiranega nekonformnega štirikotnega končnega elementa RQ6, ki ga je v članku [3] razvil Cheung s sodelavci. Ob običajnih pogojih je izpeljana tudi standardna ocena za napako. Za razliko od izoparametričnih elementov lahko pri aproksimaciji uporabljamo tudi nekonveksne štirikotnike.

**Abstract.** The convergence of the nonconvex quadrilateral rotated nonconforming finite element RQ6 [3] is proven using Stummel's generalised patch test [10]. Under usual conditions the standard error estimates are also derived.

## 1 Uvod

V prispevku je dokazana konvergenca modificiranega nekonformnega, ne nujno konveksnega štirikotnega končnega elementa RQ6, ki ga je v članku [3] razvil Cheung s sodelavci. Pri dokazu je uporabljen Stummelov posplošeni patch test [10]. Pri obravnavi se omejimo na linearne eliptične probleme prvega reda s predpisanimi Dirichletovimi robnimi pogoji. Končni element RQ6 zadosti Ironsovemu patch testu, vendar je v virih [9, 10] pokazano, da Ironsov patch test ne podaja niti potrebnega niti zadostnega pogoja za konvergenco. Prav tako ne moremo neposredno uporabiti izsledkov v [12], zato – podobno kot v [9] – konvergenco dokažemo z uporabo Stummelovega posplošenega patch testa. Z uporabo in priredbo idej v [2, 9, 7] izpeljemo tudi oceno za napako. Za razliko od izoparametričnih elementov lahko pri običajnih pogojih uporabljamo tudi nekonveksne štirikotnike.

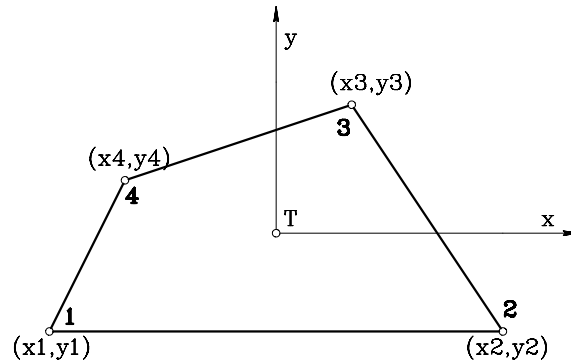
## 2 Modificiran končni element RQ6

Podrobnejši opis končnega elementa RQ6 je podan v članku [3].

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo





Slika 1: Štirikotni končni element RQ6

Uvedemo okrajšave:

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ xy \\ x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3^2 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & x_4^2 & y_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz nastavka

$$\mathbf{v}_h := \mathbf{x}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}^T A^{-1} \mathbf{q}$$

Cheung tvori nov nastavek

$$v_h := v_h + \lambda_1 x + \lambda_2 y = \mathbf{x}^T A^{-1} \mathbf{q} + \lambda_1 x + \lambda_2 y. \quad (1)$$

Kot smo že nakazali, v nadaljevanju uporabljamo naslednje oznake:  $V_h$ -prostor, v katerem iščemo numerično rešitev,  $v_h$ -poljubna funkcija (Cheungova aproksimacija) iz tega prostora,  $v_h$ -poljubna funkcija (pomožna Wilsonova aproksimacija),  $u_h^*$ -numerična rešitev (Cheungova aproksimacija),  $u^*$ -točna rešitev šibko formulirane naloge,  $v$ -poljubna funkcija iz prostorov, kakršne zahteva izpeljava in  $W_2^m(K) \equiv H^m(K)$ -prostor Soboljeva z normami  $\|\cdot\|_{m,2,K} \equiv \|\cdot\|_{m,K}$  in polnormami  $|\cdot|_{m,2,K} \equiv |\cdot|_{m,K}$  za  $0 \leq m \leq 2$ . Velja omeniti, da se začetek koordinatnega sistema  $xy$  nahaja v težišču štirikotnika. Konstanti  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  po [3] določimo iz pogojev

$$\int_{\partial K} (v_h - \tilde{v}_h) l ds = 0, \quad \int_{\partial K} (v_h - \tilde{v}_h) m ds = 0. \quad (2)$$

V gornji enačbi  $\partial K$  predstavlja rob končnega elementa  $K$ ,  $\tilde{v}_h$  odsekoma gladko funkcijo z linearnim potekom na robu  $\partial K$ , katere vrednosti se v ogliščih štirikotnika ujemajo z vrednostmi funkcije  $v_h$ ,  $l$  in  $m$  pa sta komponenti zunanje normale na rob. Kratak račun da

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{|K|} \left( \int_{\partial K} \tilde{v}_h l ds - \int_K \frac{\partial v_h}{\partial x} dx dy \right) = \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} (\tilde{v}_h - v_h) l ds, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{|K|} \left( \int_{\partial K} \tilde{v}_h m ds - \int_K \frac{\partial v_h}{\partial y} dx dy \right) = \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} (\tilde{v}_h - v_h) m ds. \end{aligned} \quad (3)$$

$|K|$  označuje ploščino štrikotnika  $K$ . Končni element po [3] zadošča Ironsovemu patch testu. V računu potrebujemo inverz matrike  $A$ , zato si najprej oglejmo determinanto matrike  $A$ , tj.  $|A|$ . V ta namen štrikotnik zasukamo tako, da ena od osi sovpade z osjo  $x$  koordinatnega sistema (glej sliko 1) in izračunamo  $|A| = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4)$ . Determinanta je pri nedegeneriranem konveksnem štrikotniku različna od 0. Pri nedegeneriranem nekonveksnem štrikotniku  $K$  pa lahko nastopijo težave, ko je  $x_3 \approx x_4$ . Takrat štrikotnik  $K$  zasučemo tako, da  $|A|$  postane reda  $O(h^4)$ , kjer smo s  $h$  označili premer največjega štrikotnika  $K$  v delitvi.

**Pogoj 1.** Označimo s  $h_K := \text{diam}(K)$ , z  $\rho_K := \sup\{\text{diam}(S), \text{krog } S \subset K, \forall x \in K \forall y \in S \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow (1 - \lambda)x + \lambda y \in K\}$  in s  $h'_K$  dolžino najkrajšega robu. Naj obstaja konstanta  $\gamma$ , za katero za vsak štrikotnik  $K$  v delitvi velja  $\max\left(\frac{h_K}{\rho_K}, \frac{h_K}{h'_K}\right) \leq \gamma$  in naj bo  $K$  takšen, da bo  $|A| = O(h^4)$ .

### 3 Robni problem

Iščemo rešitev  $u^*$  Dirichletove robne naloge na konveksnem območju  $\Omega$

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} \right) + a u^* = f \text{ na } \Omega,$$

$$u^* = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

ob poljubni funkciji  $f \in L_2(\Omega)$  in gladkih funkcijah  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a > 0$ , ki zadoščajo pogoju

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \beta (\xi_1^2 + \xi_2^2) \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$$

pri neki konstanti  $\beta > 0$ . V šibki obliki iščemo rešitev  $u^* \in H_0^1(\Omega)$  enačbe

$$a(u^*, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ pri}$$

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + a u v \right) dx dy, \quad (4)$$

$$(f, v) := \int_{\Omega} f v dx dy.$$

Po [6, izrek 3.2.1.3, str. 149] obstaja enolična rešitev  $u^* \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  enačbe (4). Nekonformna aproksimacija  $u_h^* \in V_h$  zadosti enačbi

$$a_h(u_h^*, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \text{ pri}$$

$$a_h(u_h^*, v_h) := \sum_{K \in K_h} \int_K \left( \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} u_{h x_i}^* v_{h x_j} + a u_h^* v_h \right) dx dy. \quad (5)$$

Enačba (5) je po [9] pri dovolj majhnem  $h$  enolično rešljiva. Velikost napake je po drugi Strangovi lemi [4] odvisna od kvalitete aproksimacije (angl. approximability term) in velikosti člena konsistence (angl. consistency term)

$$\|u^* - u_h^*\|_{1,h} \leq c \left( \inf_{v_h \in V_h} \|u^* - v_h\|_{1,h} + \sup_{v_h \in V_h} \frac{|(f, v_h) - a_h(u^*, v_h)|}{\|v_h\|_{1,h}} \right). \quad (6)$$

## 4 Ocena napake v energijski normi

### 4.1 Ocena velikosti člena konsistence

V [10] in [12] preberemo: Zaporedje  $V_{h0}, H_0^m(\Omega)$  zadosti posplošenemu patch testu natanko takrat, ko velja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{v_h \in V_{h0}, \|v_h\|_{m,h} \leq 1} |T_{\alpha,i}(\varphi, v_h)| = 0 \text{ za } |\alpha| < m, i \in [1, \dots, n], \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}), \text{ kjer je}$$

$$T_{\alpha,i}(\varphi, v_h) := \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_K \left( \varphi \frac{\partial}{\partial x_i} \partial^\alpha v_h + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \partial^\alpha v_h \right) dx = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_{\partial K} \varphi \partial^\alpha v_h N_i ds.$$

Posplošeni patch test prvega reda je po [10] izpolnjen natanko takrat, ko velja za vsako omejeno zaporedje  $\{V_h\}$  in vsak  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  relacija

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_r(\psi, v_h) := \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_{\partial K} \psi v_h N_r ds = 0, \quad N_r = l, m.$$

Ker je funkcija  $\tilde{v}_h$  in s tem tudi funkcija  $\psi \tilde{v}_h$  po robovih konformna, velja

$$T_r(\psi, \tilde{v}_h) = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_{\partial K} \psi \tilde{v}_h N_r ds = 0, \quad N_r = l, m. \quad (7)$$

Za odsekoma konstantno funkcijo  $\psi_0$  zaradi veljavnosti enačbe (2) velja tudi

$$T_r(\psi_0, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \int_{\partial K} \psi_0 (v_h - \tilde{v}_h) N_r ds = 0, \quad N_r = l, m.$$

V nadaljevanju bomo pri ocenah različne konstante, neodvisne od spremenljivke  $h$ , označili kar z isto črko  $c$ . Afino preslikavo, s katero referenčni štirikotnik  $\hat{K}$  z oglišči  $(0,0) - \hat{\mathbf{x}}_T$ ,  $(1,0) - \hat{\mathbf{x}}_T$ ,  $(\hat{x}_3, \hat{y}_3) - \hat{\mathbf{x}}_T$  in  $(0,1) - \hat{\mathbf{x}}_T$  preslikamo na poljuben štirikotnik  $K$ , označimo s  $F_K$ , odvod preslikave po referenčnih koordinatah označimo s  $F'_K$ , Jakobijan preslikave pa z  $J_K$ . Z  $\hat{\mathbf{x}}_T$  smo označili koordinati težišča referenčnega štirikotnika  $\hat{K}$ . Referenčnih štirikotnikov je v splošnem več. Po [9] pri pogoju 1 veljajo spodnje ocene:

**Lema 1.** Pri pogoju 1 lahko najdemo konstanti  $C_1(\gamma)$  in  $C_2(\gamma)$ , pri katerih za vsak štirikotnik  $K$  iz delitve veljajo neenakosti

$$C_1 h_K^2 \leq J_K \leq C_2 h_K^2, \quad C_1 h_K \leq \|F'_K\| \leq C_2 h_K, \quad \frac{C_1}{h_K} \leq \|(F'_K)^{-1}\| \leq \frac{C_2}{h_K}.$$

Definiramo linearni operator  $P_0$ , ki vsaki integrabilni funkciji  $v$  na  $K$  priredi konstanto

$$P_0 v := \frac{1}{|\hat{K}|} \int_K J_k^{-1}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dx = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} J_k^{-1}(\mathbf{x}) J_k(\hat{\mathbf{x}}) \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} =: \hat{P}_0 \hat{v}.$$

**Lema 2.** Pri pogoju 1 ob uvedbi ostanka  $R_0 v := v - P_0 v$  obstaja konstanta  $c = c(\gamma)$ , za katero velja

$$\int_{\partial K} (R_0 v)^2 ds \leq c h_K |v|_{1,K}^2 \text{ za vsak } v \in H^1(K).$$

Lemo lahko dokažemo z uporabo izrekov v [1, str. 97, primer B, str. 144 del I] ali z uporabo posplošenega izreka Soboljeva [8, str. 60] in leme 1. Ker se funkcija  $v_h$  v ogliščih robu  $\partial K$  ujema z odsekoma linearno funkcijo  $\tilde{v}_h$ , velja

$$|\lambda_1| \leq c |v_h|_{2,\infty,K} h, \quad |\lambda_2| \leq c |v_h|_{2,\infty,K} h.$$

Ker imata funkciji  $v_h$  in  $\tilde{v}_h$  enake druge odvode, velja tudi  $|v_h|_{2,\infty,K} = |\tilde{v}_h|_{2,\infty,K}$ .

Upoštevamo enačbo (1) in pišemo

$$T_r(\psi, v_h) = T_r(P_0\psi, v_h - \tilde{v}_h) + T_r(\psi, \tilde{v}_h) + T_r(R_0\psi, v_h - \tilde{v}_h + \lambda_1 x + \lambda_2 y).$$

Prvi in drugi člen na desni strani gornje enačbe sta enaka nič. Ocenimo tretji člen:

$$\begin{aligned} |T_r(R_0\psi, v_h - \tilde{v}_h + \lambda_1 x + \lambda_2 y)| &\leq \sum_{K \in K_h} \left| \int_{\partial K} R_0\psi (v_h - \tilde{v}_h + \lambda_1 x + \lambda_2 y) N_r ds \right| \\ &\leq \sum_{K \in K_h} \left| \int_{\partial K} R_0\psi (v_h - \tilde{v}_h) N_r ds \right| + \sum_{K \in K_h} \left| \int_{\partial K} R_0\psi (\lambda_1 x + \lambda_2 y) N_r ds \right| \\ &\leq \sum_{K \in K_h} \left( \int_{\partial K} (R_0\psi)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\partial K} (v_h - \tilde{v}_h)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \sum_{K \in K_h} \left( \int_{\partial K} (R_0\psi)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\partial K} (\lambda_1 x + \lambda_2 y)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \sum_{K \in K_h} |\psi|_{1,2,K} \sqrt{h} |v_h|_{2,\infty,K} h^2 \sqrt{h} \\ &= c \sum_{K \in K_h} |\psi|_{1,2,K} \sqrt{h} |v_h|_{2,\infty,K} h^2 \sqrt{h} \\ &\leq ch \sum_{K \in K_h} |\psi|_{1,2,K} |v_h|_{1,2,K} \\ &\leq ch \left( \sum_{K \in K_h} |\psi|_{1,2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in K_h} |v_h|_{1,2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = ch |\psi|_1 |v_h|_{1,h}. \end{aligned}$$

Peta neenakost v gornji enačbi je posledica inverzne neenakosti, ki velja pri pogoju 1. Povzamemo

$$|T_r(\psi, v_h)| \leq ch |\psi|_1 |v_h|_{1,h}. \quad (8)$$

Oceno kvalitete aproksimacije izpeljemo v nadaljevanju. Po [10] s tem zagotovimo konvergenco. Integriramo po delih in uvedemo napako člena konsistence (consistency error functional)

$$\begin{aligned} E_h(u^*, v_h) &:= (f, v_h) - a_h(u^*, v_h) = \sum_{K \in K_h} \int_{\partial K} \left( \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} u^*_{x_i} N_j \right) v_h ds = \sum_{j=1}^2 T_j(\varphi_j, v_h) \\ &\text{za } \varphi_j := \sum_{i=1}^2 a_{ij} u^*_{x_i}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Z uporabo enačbe (8) neposredno dobimo

$$|E_h(u^*, v_h)| \leq ch |u^*|_{2,h} |v_h|_{1,h}. \quad (9)$$

## 4.2 Ocena kvalitete aproksimacije

Z upoštevanjem enačb (1), (3) in linearnosti razlike  $\Delta v_h := v_h - v_h$  dobimo  $v_h = v_h + \Delta v_h$  in  $\tilde{v}_h = \tilde{v}_h + \tilde{\Delta} v_h$  ter od tod zvezo  $\tilde{v}_h - v_h = \tilde{v}_h - v_h$ . Tvorimo linearne funkcionale  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, 6\}$  in linearne funkcionale  $\{\mu_i, i = 1, \dots, 6\}$ :

$$\begin{aligned} \mu_i(v_h) &:= v_h(\mathbf{x}_i) = v_h(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{|K|} \left( \int_{\partial K} (\tilde{v}_h - v_h) l ds x_i + \int_{\partial K} (\tilde{v}_h - v_h) m ds y_i \right) =: \lambda_i(v_h), 1 \leq i \leq 4, \\ \mu_5(v_h) &:= \frac{1}{|K|} \int_K \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} d\mathbf{x} = \frac{1}{|K|} \int_K \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} d\mathbf{x} = \lambda_5(v_h), \quad \mu_6(v_h) := \frac{1}{|K|} \int_K \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} d\mathbf{x} = \lambda_6(v_h). \end{aligned}$$

Neposredno iz definicije sledi, da je množica  $\{\lambda_i, i = 1, \dots, 6\}$  baza za  $P_2(K)'$  natanko takrat, ko je množica  $\{\mu_i, i = 1, \dots, 6\}$  baza za  $P_2(K)'$ .  $P_2(K)'$  označuje dual prostora  $P_2(K) = \mathcal{L}\{x^i y^j, 0 \leq i + j \leq 2\}$ . Označimo z  $\mathcal{N}^h$  množico vseh vozlišč, z  $\mathcal{E}^h$  množico vseh elementov, z  $\mathcal{E}^h(\mathbf{v})$  pa množico elementov, ki se stikajo v vozlišču  $\mathbf{v}$ . Označimo z  $\mathcal{E}_1^h(\mathbf{v})$  prvi element iz  $\mathcal{E}^h(\mathbf{v})$ . Za štirikotnik  $K$  z vozlišči  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  in  $\mathbf{v}_4$  tvorimo funkcionalne  $\lambda_{\mathbf{v}_j}^K = \lambda_j, j = 1, 2, 3, 4$  ter  $\lambda_l^K = \lambda_l, l = 5, 6$ . Konstruiramo prostor končnih elementov

$$X_h := \{v_h \in \prod_{K \in T_h} P_K, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}^h, \forall K, Q \in \mathcal{E}^h(\mathbf{v}), \lambda_{\mathbf{v}}^K(v_h) = \lambda_{\mathbf{v}}^Q(v_h)\}.$$

Prostor končnih elementov  $X_h$  je z množico funkcionalov

$$\Sigma_h := \{\lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{v}}^{\mathcal{E}_1^h(\mathbf{v})}, \mathbf{v} \in \mathcal{N}^h\} \cup \{\lambda_5^K, K \in \mathcal{E}^h\} \cup \{\lambda_6^K, K \in \mathcal{E}^h\}$$

enolično določen. Označimo z  $\Omega_h = \Omega - \cup_{K \in T_h} \partial K$ . Funkcionalom  $\lambda_{\mathbf{v}}^K, \lambda_l^K$  poiščemo dualne bazne funkcije  $\varphi_{\mathbf{v}}^K, \varphi_l^K$ . Na  $\Omega_h$  predpišemo bazne funkcije  $\varphi_{\mathbf{v}} = \sum_{K \in \mathcal{E}^h(\mathbf{v})} \varphi_{\mathbf{v}}^K$  in interpolacijski operator

$$I_h : v \mapsto \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{N}^h} \lambda_{\mathbf{v}}(v) \varphi_{\mathbf{v}} + \sum_{K \in \mathcal{E}^h, l=5,6} \lambda_l^K(v) \varphi_l^K.$$

Za naše potrebe priredimo definicijo 4.4.2 v [2, str. 105] in izrek 4.4.4 v [2, str. 106] v obliko

**Lema 3.** Naj bo  $(K, P, \Sigma)$  končni element, ki zadošča pogojem

- (i)  $K$  je zvezdast (star-shaped) glede na krog,
- (ii)  $P_1 \subset P \subset W_{\infty}^2(K)$  in
- (iii)  $\Sigma \subset (W_2^2(K))'$ .

Naj bo  $p = 2$ . Potem za  $0 \leq i \leq 2$  in  $v \in W_2^2(K)$  velja ocena

$$|v - I_h v|_{i,2,K} \leq C_{\gamma, \sigma(\hat{K})} (\text{diam } K)^{2-i} |v|_{2,2,K}, \text{ kjer sta}$$

$\hat{K} := \left\{ \frac{x}{(\text{diam } K)}, x \in K \right\}$  in  $\sigma(\hat{K})$  je operatorska norma operatorja  $I_h : W_2^2(\hat{K}) \rightarrow W_2^2(\hat{K})$ .

Paziti moramo, da bo interpolacijski operator nedvoumno definiran na prostoru  $W_2^2(\hat{K})$ . To pa bo. Opraviti imamo z drugimi odvodi (natančneje s povprečnimi vrednostmi drugih odvodov) in z vrednostmi v točkah. Za funkcijo  $v \in W_2^2(\hat{K})$  lahko upoštevamo Cauchy–Schwartzovo neenakost  $|\int_{\hat{K}} u_{xx} d\hat{x}| \leq C \int_{\hat{K}} u_{xx}^2 d\hat{x}$ . Zaradi vložitenih izrekov Soboljeva je funkcija  $v$  tudi zvezna in ni težav s funkcionali  $\lambda_i$ . Ocenimo še normo  $\sigma(\hat{K})$  operatorja  $I_h : W_2^2(\hat{K}) \rightarrow W_2^2(\hat{K})$ . V izogib strešicam v nadaljevanju referenčni štirikotnik označimo s  $K$ . Iz neenakosti

$$\|I_h u\|_{2,2,K} \leq \sum_{i=1}^6 |\lambda_i(u)| \|\varphi_i\|_{2,2,K} \leq \sum_{i=1}^6 \|\lambda_i\|_{W_2^2(K)'} \|\varphi_i\|_{2,2,K} \|u\|_{2,2,K}$$

izpeljemo oceno

$$\sigma(K) \leq \sum_{i=1}^6 \|\lambda_i\|_{W_2^2(K)'} \|\varphi_i\|_{2,2,K}. \quad (10)$$

Najprej pokažemo, da je  $\sigma(K)$  enakomerno omejena po vseh  $K$ . V ta namen za  $i = 1, \dots, 4$  ocenimo

$$\begin{aligned} |\lambda_i(v)| &= \left| v(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{|K|} \left( \int_{\partial K} (\tilde{v} - v) l ds x_i + \int_{\partial K} (\tilde{v} - v) m ds y_i \right) \right| \leq c \|v\|_{0,\infty,K} \\ &\leq c \|v\|_{2,2,K} \text{ (identiteta iz } W_2^2(K) \text{ v } C_0(K) \text{ je enakomerno zvezna [4, str. 114])}, \end{aligned} \quad (11)$$

za  $i = 5, 6$  pa že vemo

$$|\lambda_i(v)| \leq c \|v\|_{2,2,K}. \quad (12)$$

Norme  $\|\lambda_i\|_{W_2^2(K)'}$  so omejene s konstantami  $c = c_{\gamma(K)}$ . Tudi bazne funkcije  $\varphi_i$  so omejene. Velja

**Lema 4.**

$$\|\varphi_i\|_{2,2,K} \leq c_{\gamma(K)}. \quad (13)$$

## 5 Ocena napake v $L_2$ normi

Uporabimo izrek 2.2 v [7]. Pogoji izreka so v našem primeru izpolnjeni. Velja ocena

$$\|u^* - u_h^*\|_{0,\Omega} \leq c \sup_{\varphi \in H^2(\Omega)} \left( \inf_{\varphi_h \in V_h} \frac{E_h(u^*, u_h^*, \varphi, \varphi_h)}{\|\varphi\|_{2,\Omega}} \right),$$

kjer je  $E_h(u^*, u_h^*, \varphi, \varphi_h) = a_h(u^* - u_h^*, \varphi - \varphi_h) - E_h(u^*, \varphi_h) + E_h(\varphi, u_h^*)$  in je konstanta  $c$  neodvisna od  $h$ . Po enačbah (6) in (9) velja

$$\begin{aligned} E_h(u^*, \varphi_h) &\leq ch |u^*|_2 |\varphi_h|_{1,h} \leq ch |u^*|_2 (|\varphi - \varphi_h|_{1,h} + |\varphi|_1) \leq ch^2 |u^*|_2 |\varphi|_2, \\ E_h(\varphi, u_h^*) &\leq ch |\varphi|_2 |u_h^*|_{1,h} \leq ch |\varphi|_2 (|u^* - u_h^*|_{1,h} + |u^*|_1) \leq ch^2 |\varphi|_2 |u^*|_2, \\ a_h(u^* - u_h^*, \varphi - \varphi_h) &\leq ch^2 |u^*|_2 |\varphi|_2. \end{aligned}$$

Oceni  $|u^*|_1 \leq ch |u^*|_2$  in  $|\varphi|_1 \leq ch |\varphi|_2$  smo dobili z upoštevanjem robnih pogojev, enakosti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial x} d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u^* l ds = 0, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial y} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u^* m ds = 0, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} \varphi l ds = 0, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \varphi m ds = 0, \end{aligned}$$

in Poincarejevih neenakosti (3.1, 4.1) v [11]. Neenakosti povzamemo v iskano neenakost

$$\|u^* - u_h^*\|_{0,\Omega} \leq ch^2 |u^*|_{2,\Omega}. \quad (14)$$

## 6 Zaključek

Iz druge Strangove leme (6), ocene funkcionala napake (9), ocene kvalitete aproksimacije, tj. leme 3, ocen (10), (11), (12) in (13) neposredno sledi, da napaka obravnavanega problema v energijski normi pada s  $h$ -jem vsaj linearno, medtem ko napaka v  $L_2$  normi po (14) pada s kvadratom  $h$ -ja. Opravljeni numerični primeri potrjujejo gornje izsledke.

## Literatura

- [1] Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Brenner, S. C., Scott, L. R.: *The mathematical theory of finite element methods*, 2. ed., Springer, New York, 2002.
- [3] Cheung, Y. K., Zhang, Y. X., Chen W. J.: *A refined nonconforming plane quadrilateral element*, Computers and Structures, 78, 669–709, 2000.
- [4] Ciarlet, P. G., Lions, J. L.: *Handbook of numerical analysis, Volume II, Finite element methods (Part I)*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [5] Duran, R. G.: *On polynomial approximation in Sobolev spaces*, SIAM J. Numer. Anal., 20, no. 5, 985–988, 1983.
- [6] Grisvard, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, PITMAN INC., Boston, 1985.
- [7] Lesaint, P.: *On the convergence of Wilson's nonconforming element for solving elastic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 7, 1–16, 1976.
- [8] Maz'ja, V. G.: *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [9] Shi, Z. C.: *A Convergence Condition for the Quadrilateral Wilson Element*, Numer. Math., 44, 349–361, 1984.
- [10] Stummel, F.: *The generalised patch test*, SIAM J. Numer. Anal., 16, no. 3, 449–471, 1979.
- [11] Verfürth, R.: *A note on polynomial approximation in Sobolev spaces*, M2AN, 33, no. 4, 715–719, 1999.
- [12] Wang, M.: *On the necessity and sufficiency of the patch test for convergence of nonconforming finite elements*, SIAM J. Numer. Anal., 39, no. 2, 363–384, 2001.



## *Nelinearna dinamična analiza ravninskih elastičnih nosilcev*

M. Gams, M. Saje in I. Planinc<sup>1</sup>

### *Nonlinear dynamic analysis of planar elastic beams*

**Povzetek.** V članku je predstavljena družina novih deformacijskih končnih elementov za nelinearno dinamično analizo elastičnih nosilcev. Elementi so zasnovani kolokacijski metodi končnih elementov in modificirano sredinski časovni integracijski shemi. Izhodišče pri izpeljavi je bila geometrijsko točna Reissnerjeva teorija ravninskih nosilcev. Z računskim primerom prosto padajoče vrvi je prikazana velika natančnost deformacijskih končnih elementov za nelinearno dinamično analizo elastičnih nosilcev.

**Abstract.** A new family of strain-based finite elements for the dynamic analysis of highly flexible elastic planar beams is presented. The elements are based only on strains, and that leads to some advantageous properties of the elements. The elements are very accurate as well as free of any locking related problems. The performance and accuracy of the formulation is tested on a numerical example simulating a free falling string.

## 1 Uvod

Nosilci so zelo pomemben konstrukcijski element sestavljenih mehanskih sistemov. Ti morajo biti zelo lahki in poceni. To pa pomeni, da so konstrukcijski elementi zelo podajni. Zato mora vsaka računsko analiza odziva sestavljenih mehanskih sistemov na zunanje vplive nujno upoštevati tudi geometrijsko nelinearne pojave [10].

Geometrijsko nelinearno obnašanje nosilcev najpogosteje modeliramo z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca [9]. S tem modelom v analizi upoštevamo membransko, upogibno in strižno deformiranje nosilca, ki skupaj s pomiki in zasuki lahko zavzamejo številčno poljubno velike vrednosti. Poleg znane (i) Bernoullijeve predpostavke o ravnih prečnih prerezih, ki določa, da ravni prerezi, pravokotni na težiščno os nosilca v nedeformirani legi, ostanejo med gibanjem ravni toda ne več pravokotni na deformirano težiščno os nosilca, predpostavimo tudi, (ii) da oblika in velikost prečnih prerezov med gibanjem nosilca ostaneta nespremenjena.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo



V literaturi zasledimo številne računske postopke za dinamično analizo elastičnih ravninskih nosilcev zasnovanih na Reissnerjevem modelu nosilca. Večina jih je zasnovanih na Galerkinovi metodi končnih elementov ter s pomiki in zasuki kot osnovnimi interpolacijskimi količinami [3, 7, 11, 12]. Membransko in strižno blokiranje je največja pomankljivost teh elementov, preprostost pa največja prednost. Z vpeljavo deformacijskih končnih elementov se omenjeni pomankljivosti izognemo. Značilnost deformacijskih končnih elementov je v tem, da so le deformacije osnovne interpolacijske količine. Poleg neobčutljivosti elementov na vse vrste bližanja je velika prednost deformacijskih končnih elementov tudi velika natančnost. Do sedaj so bili deformacijski končni elementi uporabljeni predvsem za statično analizo armiranbetonskih okvirnih konstrukcij [1], nelinearno požarno analizo armiranobetonskih stebrov [2] ter nelinearno analizo dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema [4]. Prvi poskus uporabe deformacijskih končnih elementov tudi za dinamično analizo elastičnih nosilcev je predstavil Gams s sodelavci [6]. Predstavljeni računski postopek je zasnovan na kombinaciji galerkinove metode končnih elementov in modificirane sredinske časovne integracijske sheme. Da so sezognili zahtevnim numeričnim integracijam vzdolž končnega elementa, so se v analizi omejili samo na končne elemente s konstantnimi interpolacijskimi nastavki za deformacijske količine. V tem članku bomo predstavili družino novih deformacijskih končnih elementov za dinamično analizo elastičnih nosilcev. Elementi so zasnovani kolokacijski metodi končnih elementov in modificirani sredinski časovni integracijski shemi. Ker je stopnja interpolacijskih polinomov za deformacije poljubna, predstavljajo novi deformacijski končni elementi razširitev končnega elementa predstavljenega v [6].

## 2 Dinamične enačbe gibanja elastičnega nosilca

Opazujemo raven elastičen nosilec dolžine  $L$  in konstantnega prečnega prereza  $A$ . Gibanje nosilca analiziramo v ravnini  $(X, Z)$  prostorskega kartezijevega koordinatnega sistema  $(X, Y, Z)$  s pravokotnimi baznimi vektorji  $\mathbf{E}_X$ ,  $\mathbf{E}_Z$  in  $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_X \times \mathbf{E}_Z$ . Kot referenčno os nosilca izberemo krivuljo, ki povezuje težišča prečnih prerezov in je v nedeformirani legi identična s prostorsko koordinatno osjo  $X$ . Materialne delce na težiščni osi nosilca označimo z materialno koordinato  $x$ . Nosilec je obtežen s časovno odvisno linijsko obtežbo  $\mathbf{p}(x, t) = p_X(x, t)\mathbf{E}_X + p_Z(x, t)\mathbf{E}_Z$ , linijsko momentno obtežbo  $\mathbf{m}(x, t) = m_Y(x, t)\mathbf{E}_Y$  ter na robovih s posplošenimi točkovnimi silami  $S_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Vsa obtežba nosilca je konservativna.

Gibanje nosilca opišemo z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca. Kinematične enačbe so [9]:

$$1 + u' - (1 + \varepsilon)\cos\varphi - \gamma\sin\varphi = 0, \quad (1)$$

$$w' + (1 + \varepsilon)\sin\varphi - \gamma\cos\varphi = 0, \quad (2)$$

$$\varphi' - \kappa = 0, \quad (3)$$

kjer sta  $u$ ,  $w$  komponenti vektorja pomika težiščne osi nosilca v smereh baznih vektorjev  $\mathbf{E}_X$  in  $\mathbf{E}_Z$ ,  $\varphi$  pa je zasuk prečnega prereza okoli baznega vektorja  $\mathbf{E}_Y$ . Membransko, upogibno in strižno deformacijo smo v enačbah (1)–(3) označili z  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  in  $\gamma$ . Z oznako  $(\bullet)'$  smo v enačbah (1)–(3) označili odvod po koordinati  $x$ .

Dinamične enačbe gibanja nosilca izpeljemo s pomočjo Hamiltonovega principa [8]. Ta zahteva, da je na poljubnem časovnem intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$  variacija razlike med kinetično  $E_k$  in potencialne energije  $E_p$  enaka nič:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_p - E_k) dt = 0. \quad (4)$$

Kinetično energijo nosilca izračunamo z enačbo [13]:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^L A\rho \dot{u}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L A\rho \dot{w}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L I_y \rho \dot{\phi}^2 dx, \quad (5)$$

kjer smo z  $\rho$  označili gostoto materiala, z  $A$  ploščino prečnega prereza in z  $I_y$  smo označili vztrajnostni moment prečnega prereza. Z oznako  $(\bullet)$  smo v enačbi (5) označili odvod po času. Potencialno energijo nosilca pa izračunamo z enačbo [13]:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L EA \varepsilon^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GA_s \gamma^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_y \kappa^2 dx - \int_0^L p_X u dx - \int_0^L p_Z w dx - \int_0^L m_Y \phi dx - \sum_{i=1}^6 S_i U_i. \quad (6)$$

V enačbi (6) sta  $E$  in  $G$  elastični in strižni modul nosilca,  $A_s$  je ploščina strižnega prereza,  $U_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) pa so posplošeni pomiki na robovih nosilca.

Kinematične in deformacijske spremenljivke v funkcionalu (4) morajo zadostiti kinematičnim enačbam (1)–(3), zato le te predstavljajo vezne enačbe funkcionala (4). V nadaljevanju skladno z metodo Lagrangevih množiteljev pri vezanih nalogah variacijskega računa vezne enačbe (1)–(3) pomnožimo z vsaj enkrat odvedljivimi funkcijami  $\mathcal{R}_X(x)$ ,  $\mathcal{R}_Z(x)$ ,  $\mathcal{M}(x)$  in jih integriramo vzdolž nosilca. Tako dobljene izraze variiramo in prištejemo k (4). Dobimo t.i. modificirani Hamiltonov princip. Ko izraze  $\int_0^L \mathcal{R}_X \delta u' dx$ ,  $\int_0^L \mathcal{R}_Z \delta w' dx$  in  $\int_0^L \mathcal{M} \delta \phi' dx$  integriramo po delih in vpeljemo  $\mathcal{N} = \mathcal{R}_X \cos \phi - \mathcal{R}_Z \sin \phi$ ,  $Q = \mathcal{R}_X \sin \phi + \mathcal{R}_Z \cos \phi$ , dobi modificirani Hamiltonov princip obliko

$$\begin{aligned} \delta \hat{H} = & \int_0^L (EA\varepsilon - \mathcal{N}) \delta\varepsilon dx + \int_0^L (GA_s\gamma - Q) \delta\gamma dx + \int_0^L (EI_y\kappa - \mathcal{M}) \delta\kappa dx + \\ & \int_0^L (\mathcal{R}_X' + p_X - A\rho\ddot{u}) \delta u dx + \int_0^L (\mathcal{R}_Z' + p_Z - A\rho\ddot{w}) \delta w dx + \\ & \int_0^L (\mathcal{M}' - (1 + \varepsilon)Q + \gamma\mathcal{N} + m_Y - I_y\rho\ddot{\phi}) \delta\phi dx + \\ & + \int_0^L (1 + u' - (1 + \varepsilon)\cos\phi - \gamma\sin\phi) \delta\mathcal{R}_X dx + \\ & \int_0^L (w' + (1 + \varepsilon)\sin\phi - \gamma\cos\phi) \delta\mathcal{R}_Z dx + \int_0^L (\phi' - \kappa) \delta\mathcal{M} dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (S_1 + \mathcal{R}_X(0)) \delta U_1 - (S_2 + \mathcal{R}_Z(0)) \delta U_2 - (S_3 + \mathcal{M}(0)) \delta U_3 - \\ & (S_4 - \mathcal{R}_X(L)) \delta U_4 - (S_5 - \mathcal{R}_Z(L)) \delta U_5 - (S_6 - \mathcal{M}(L)) \delta U_6 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Po znanem postopku variacijskega računa dobimo s pomočjo funkcionala (7) Euler-Lagrangeve enačbe v polju ter statične robne pogoje. Enačbe v polju nosilca so:

konstitutivne enačbe  $x \in [0, L]$ :

$$EA\varepsilon - \mathcal{N} = 0, \quad (8)$$

$$GA_s\gamma - Q = 0, \quad (9)$$

$$EI_y\kappa - \mathcal{M} = 0; \quad (10)$$

kinematične enačbe  $x \in (0, L)$ :

$$1 + u' - (1 + \varepsilon) \cos \varphi - \gamma \sin \varphi = 0, \quad (11)$$

$$w' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi = 0, \quad (12)$$

$$\varphi' - \kappa = 0; \quad (13)$$

dinamične ravnotežne enačbe  $x \in (0, L)$ :

$$\mathcal{R}'_X + p_X - A\rho\ddot{u} = 0, \quad (14)$$

$$\mathcal{R}'_Z + p_Z - A\rho\ddot{w} = 0, \quad (15)$$

$$\mathcal{M}' - (1 + \varepsilon)Q + \gamma\mathcal{N} + m_Y - I_y\rho\ddot{\varphi} = 0. \quad (16)$$

V nadaljevanju z integriranjem rešimo kinematične enačbe (11)–(13) in dinamične ravnotežne enačbe (14)–(16). Modificirani Hamiltonov princip postane s tem odvisen samo od statičnih robnih vrednosti  $(\mathcal{R}_X(0), \mathcal{R}_Z(0), \mathcal{M}(0))$  in deformacijskih spremenljivk  $(\varepsilon(x), \kappa(x), \gamma(x))$ . V nadaljevanju mu dodamo kinematične robne vezi. S tem postane funkcional (7) odvisen tudi od kinematičnih robnih vrednosti in dobi obliko:

$$\begin{aligned} & \delta \hat{H}^*(\varepsilon(x, t), \gamma(x, t), \kappa(x, t), \mathcal{R}_X(0, t), \mathcal{R}_Z(0, t), \mathcal{M}(0, t), \\ & u(0, t), w(0, t), \varphi(0, t), u(L, t), w(L, t), \varphi(L, t)) = \\ & \int_0^L ((EA\varepsilon - \mathcal{N})\delta\varepsilon + (GA_s\gamma - Q)\delta\gamma + (EI_y\kappa - \mathcal{M})\delta\kappa) dx \\ & - \left( u(L, t) - u(0, t) - \int_0^L ((1 + \varepsilon) \cos \varphi + \gamma \sin \varphi) dx + L \right) \delta \mathcal{A}_1 \\ & - \left( w(L, t) - w(0, t) + \int_0^L ((1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi) dx \right) \delta \mathcal{A}_2 \\ & - \left( \varphi(L, t) - \varphi(0, t) + \int_0^L \kappa dx \right) \delta \mathcal{A}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(S_1(t) + \mathcal{R}_X(0,t))\delta U_1 - (S_2(t) + \mathcal{R}_Z(0,t))\delta U_2 - (S_3(t) + \mathcal{M}(0,t))\delta U_3 \\
 & -(S_4(t) - \mathcal{R}_X(L,t))\delta U_4 - (S_5(t) - \mathcal{R}_Z(L,t))\delta U_5 - (S_6(t) - \mathcal{M}(L,t))\delta U_6 = 0, \quad (17)
 \end{aligned}$$

kjer  $\delta\mathcal{A}_1$ ,  $\delta\mathcal{A}_2$  in  $\delta\mathcal{A}_3$  predstavljajo poljubne parametre. Ker v funkcionalu (17) nastopajo le tri neznane deformacijske funkcije  $\varepsilon(x,t)$ ,  $\gamma(x,t)$  in  $\kappa(x,t)$ , ter devet neznanih parametrov  $\mathcal{R}_X(0,t)$ ,  $\mathcal{R}_Z(0,t)$ ,  $\mathcal{M}(0,t)$ ,  $u(0,t)$ ,  $w(0,t)$ ,  $\varphi(0,t)$ ,  $u(L,t)$ ,  $w(L,t)$ ,  $\varphi(L,t)$ , je funkcional (17) primeren za implementacijo deformacijske metode končnih elementov.

### 3 Deformacijska metoda končnih elementov

Izhodišče izpeljave deformacijske metode končnih elementov za dinamično analizo ravninskih elastičnih nosilcev predstavlja funkcional (17). Kot krajevno diskretizacijo izberemo kolokacijo metodo končnih elementov. Za interpolacijo neznanih deformacijskih funkcij vzdolž končnega elementa izberemo Lagrangeve interpolacijske polinome  $P_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) stopnje  $N - 1$

$$\varepsilon(x,t) = \sum_{i=1}^N P_i(x) \varepsilon_i(t), \quad \delta\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N P_i(x) \delta\varepsilon_i(t), \quad (18)$$

$$\gamma(x,t) = \sum_{i=1}^N P_i(x) \gamma_i(t), \quad \delta\gamma(x) = \sum_{i=1}^N P_i(x) \delta\gamma_i(t), \quad (19)$$

$$\kappa(x,t) = \sum_{i=1}^N P_i(x) \kappa_i(t), \quad \delta\kappa(x) = \sum_{i=1}^N P_i(x) \delta\kappa_i(t). \quad (20)$$

Pri tem so interpolacijske točke razporajene enakomerno po osi končnega elementa. Ko enačbe (18)–(20) vstavimo v funkcional (17), dobimo po znanem postopku variacijskega računa splošene semi-diskretne dinamične enačbe ravninskega elastičnega nosilca:

$$g_i = EA\varepsilon_i - \mathcal{N}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (21)$$

$$g_{N+i} = GA_s\gamma_i - Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (22)$$

$$g_{2N+i} = EI_y\kappa_i - \mathcal{M}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (23)$$

$$g_{3N+1} = u(L,t) - U_4(t) = 0, \quad (24)$$

$$g_{3N+2} = w(L,t) - U_5(t) = 0, \quad (25)$$

$$g_{3N+3} = \varphi(L,t) - U_6(t) = 0, \quad (26)$$

$$g_{3N+4} = S_1(t) + \mathcal{R}_X(0,t) = 0, \quad (27)$$

$$g_{3N+5} = S_2(t) + \mathcal{R}_Z(0,t) = 0, \quad (28)$$

$$g_{3N+6} = S_3(t) + \mathcal{M}(0,t) = 0, \quad (29)$$

$$g_{3N+7} = S_4(t) - \mathcal{R}_X(L,t) = 0, \quad (30)$$

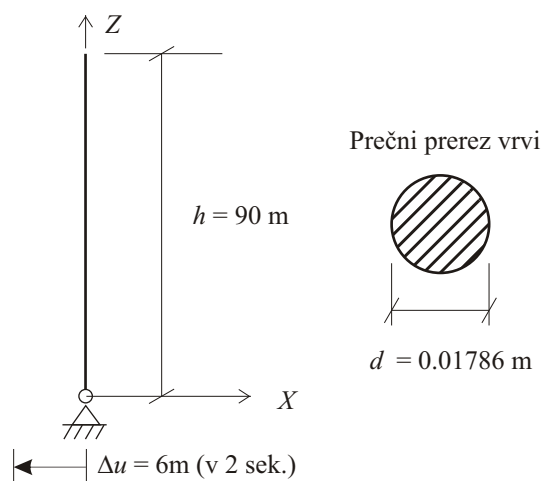
$$g_{3N+8} = S_5(t) - \mathcal{R}_Z(L,t) = 0, \quad (31)$$

$$g_{3N+9} = S_6(t) - \mathcal{M}(L, t) = 0. \quad (32)$$

Sistem (21)–(32) sestavlja  $3N + 9$  algebrasko-diferencialnih enačb za  $3N + 9$  časovno odvisnih neznanek:  $\varepsilon_i, \kappa_i, \gamma_i, u(0), w(0), \varphi(0), u(L), w(L), \varphi(L), \mathcal{R}_X(0), \mathcal{R}_Z(0)$  in  $\mathcal{M}(0)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Za časovno integracijo diskretnih posplošenih dinamičnih ravnotežnih enačb uporabimo znano sredinsko integracijsko shemo [12, 13]. Standardna sredinska integracijska shema predvideva zadoščanje dinamičnih ravnotežnih enačb pri času  $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$ . Ker v našem primeru sestavljajo sistem diskretnih posplošenih dinamičnih enačb nosilca (21)–(32) diferencialne in algebranske vezne enačbe, standardno sredinsko časovno integracijsko shemo modificiramo. Diferencialnim enačbam gibanja zadoščamo pri času  $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$ , algebraskim vezinim enačbam pa pri času  $t_{n+1}$ . S tem ohranimo zveznost pomikov in zasukov med elementi tudi pri časi  $t_{n+1}$ .

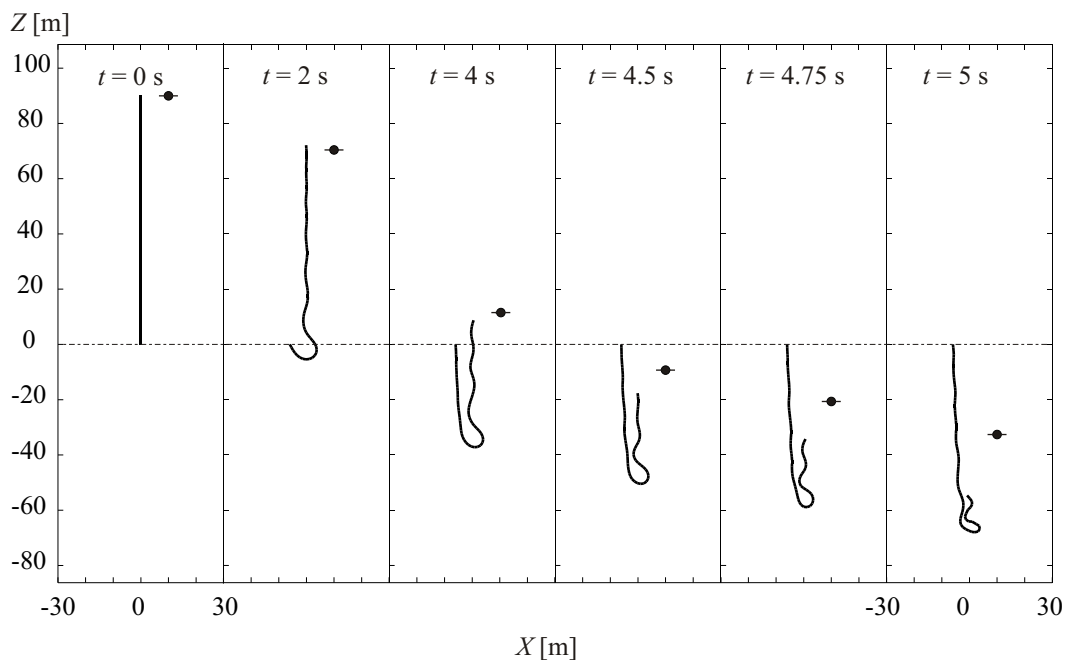
#### 4 Računski primer

Natančnost in primernost predstavljene družine deformacijskih končnih elementov za dinamično analizo ravninskih elastičnih nosilcev prikazemo s preprostim primerom prostega pada navpične 90 m dolge elastične vrvi (slika 1). Podprti spodnji konec vrvi enakomerno prečno premaknemo v dveh sekundah za  $\Delta u = 6$  m, medtem pa vrv zaradi lastne teže prosto pada. Padanje vrvi se nadaljuje tudi po končanem prečnem premiku. Geometrijski podatki vrvi so prikazani na sliki 1. Vrv je jeklena z elastičnim modulom  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  in z gostoto  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ . Okrogli prečni prerez ima vztrajnostni moment  $I_y = 5 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ . Obravnavani primer je fizikalno zelo zanimiv, saj težišče vrvi pada hitreje, kot prosto pada točkasto telo [5].



Slika 1 : Geometrijski podatki vrvi.

Z veliko strižno togostjo  $GA_s = ??$  smo v analizi zanemarili strižne deformacije, z majhno podajno togostjo  $EI_y = ??$  pa smo modelirali veliko upogibno podajnost vrvi. Gibanje vrvi smo analizirali s 15 končnimi elementi, pri katerih smo deformacijske količine vzdolž težiščne osi



**Slika 2 :** Primerjva prostega padanja vrvi in točkastega telesa pri različnih časih.

vrvi interpolirali z Lagrangevimi polinomi druge stopnje. Za začetno vrednost časovnega koraka smo izbrali  $\Delta t = 0.001$  s, vendar se je ta med računom spreminja glede na konvergenco Newton-Raphsonove metode. Račun smo prekinili, ko je postal časovni korak manjši kot  $10^{-5}$  s. To se je zgodilo pri času  $t = 5.0295$  s. Verjetni vzrok za divergenco Newton-Raphsonove metode je relativno veliko razmerje med membransko, upogibno in strižno togostjo vrvi. Kot smo že povedali, je fizikalna značilnost tega računskega primera v tem, da težišče vrvi pada hitreje kot točkasto telo. To dokazuje slika 2, kjer smo prikazali primerjavo prostega padanja vrvi in točkastega telesa pri različnih časih. Na sliki 2 opazimo tudi zelo deformirano obliko vrvi med padanjem. Hitrost padanja vrvi hitro narašča in je pri času  $t = 5.0295$  s že  $\sim 95$  m/s. Ne glede na divergenco Newton-Raphsonove metode, pa računska analiza nedvoumno dokazuje veliko natančnost predstavljenih končnih elementov za dinamično analizo nosilcev, saj smo že z relativno nizko stopnjo interpolacijskih polinomov za deformacije izračunali zelo natančno relativno zahtevno deformacijsko obliko vrvi med padanjem.

## 5 Zaključek

V članku smo predstavili družino novih deformacijskih končnih elementov za dinamično analizo ravninskih elastičnih nosilcev. Elementi so zasnovani na kolokacijski metodi končnih elementov in modificirani sredinski časovni integracijski shemi. Izhodišče pri izpeljavi je bila geometrijsko točna Reissnerejeva teorija ravninskih nosilcev. Prednosti deformacijskih končnih elementov so: (i) neobčutljivost elementov na strižno in membransko blokiranje, (ii) konsis-

tentno upoštevanje konstitucijskih enačb in (ii) velika natančnost. Slabost pa je v tem, da modificirana sredinska časovna integracijska shema v kombinaciji z deformacijskimi končnimi elementi ni brezpogojno stabilna za t.i. toge sisteme. V nadaljnjih raziskavah bi bilo zato smiselno to pomankljivost deformacijskih končnih elementov za dinamično analizo nosilcev odpraviti.

## Literatura

- [1] Bratina S, Saje M, Planinc I. *On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar beams*. Int J Solids Struct, **41**, 7181–207, 2004.
- [2] Bratina S, Čas B, Saje M, Planinc I. *Numerical modelling of behaviour of reinforced concrete columns in fire and comparison with Eurocode 2*. Int J Solids Struct, **42**, 5715–5733, 2005.
- [3] Crisfield MA, Shi J. *A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics*. Int J Numer Methods Eng **37**, 1897–931, 1994.
- [4] Čas B, Saje M, Planinc I. *Non-linear finite element analysis of composite planar frames with an interlayer slip*. Comp Struct, **82**, 1901–12, 2004.
- [5] D. Dinevski, *Prispevek k problemu prosto padajoče prepognjene vrvice*, Kuhljevi dnevi 98, 177-184, Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 1998.
- [6] Gams M, Saje M, Srpčič S, Planinc I. *Finite element dynamic analysis of geometrically exact beams*, Comp Struct, sprejeto v objavo.
- [7] Ibrahimbegović A, Mamouri AS. *Nonlinear dynamics of flexible beams in planar motion: Formulation and time stepping scheme for stiff problems*. Comp Struct, **70**, 1–22, 1999.
- [8] Jelenić G. *Dinamika ravninskih hiperelastič nih nosilcev pri neomejenih deformacijah*. Magisterska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1990.
- [9] Reissner E. *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*. J Appl Math Physics (ZAMP), **23**, 795–804, 1972.
- [10] Shabana AA, *Dynamics of multibody systems*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1998.
- [11] Simo JC, Vu-Quoc L. *On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: Part I and Part II*. ASME J Appl Mech, **53**, 849–63, 1986.
- [12] Stander N, Stein E. *An energy-conserving planar finite beam element for dynamics of flexible mechanisms*. Eng Comput, **13**, 60–85, 1996.
- [13] Vratinar B. *Geometrijsko točna dinamika ravninskih nosilcev*. Doktorsko delo, Magisterska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1998.



## *Optimizacija prerezov plastičnih okvirjev*

*B. Harl<sup>1</sup> in M. Kegl<sup>2</sup>*

### *Optimization of the cross-sections of plastic frames*

**Povzetek.** Članek predstavlja pristop k optimalnemu projektiranju statično obremenjenih elasto-plastičnih ravninskih okvirjev. Kot osnova je vzeta kinematično natančen ravninski elasto-plastični nosilec. Preseke nosilca podajamo po slojih, kjer se širina lahko spreminja samo linearno. Za ilustracijo predlaganega pristopa je predstavljen in rešen enostaven primer optimizacije elasto-plastičnega okvirja.

**Abstract.** This paper presents an approach to optimal design of statically loaded elastic-plastic planar frames. The basis forms a kinematically exact planar elastic-plastic beam finite element. The cross-section of the beam is specified by layers whose width can vary at most linearly. For the illustration of the proposed approach a simple optimization problem of an elastic-plastic frame is presented and solved.

#### **1 Uvod**

V prispevku želimo predstaviti pristop k optimalnemu projektiranju konstrukcij, ki so modelirane z elasto-plastičnimi nosilci. Za takšno nalogo smo se odločili, ker se v industriji pojavlja potreba po obravnavi plastičnih deformacij pri optimizaciji konstrukcij.

Kot osnovo smo vzeli elasto-plastični nosilec [1, 2]. Preseke smo modelirali po slojih, pri katerih se širina spreminja linearno [3]. Za fazo analize optimalnega projektiranja je potrebno narediti občutljivostno analizo. Zato moramo izračunati odvode po projektnih spremenljivkah za namensko in omejitvene funkcije. Projektne spremenljivke bodo vezane izključno na preseke nosilcev.

Poudariti je potrebno, da je raziskava še na začetku, zato je omenjena teorija predstavljena na dokaj preprostem zgledu.

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo



## 2 Formulacija naloge

Obravnavajmo plastično konstrukcijo, modelirano s plastičnimi KE, ki je ustrezno podprta in obremenjena z zunanjimi statičnimi silami. Naj bodo prerezi konstrukcije odvisni od projektnih spremenljivk  $b_i, i=1, \dots, N$ , zbranih v vektorju  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ . Sprememba vrednosti teh projektnih spremenljivk torej povzroči tudi spremembo odziva konstrukcije  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$ .

Optimizacijsko nalogo lahko z besedami formuliramo tako: najdi takšne vrednosti projektnih spremenljivk, da bo konstrukcija najboljša možna glede na izbrane kriterije. Matematično lahko to zapišemo v obliki standardnega problema matematičnega programiranja, in sicer kot

$$\min f_0 \quad (1)$$

ob upoštevanju pogojev

$$f_i \leq 0, \quad i=1, \dots, K. \quad (2)$$

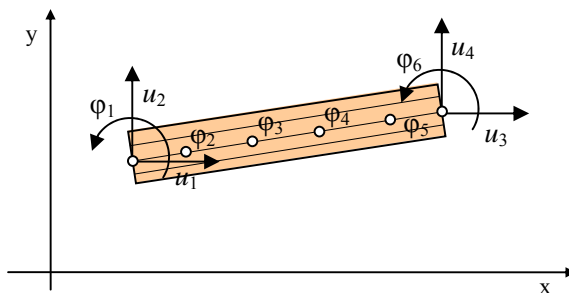
V tem zapisu  $f_0 = f_0(\mathbf{b}, \mathbf{u})$  predstavlja namensko funkcijo, ki je pogosto definirana kot volumen ali kot deformacijska energija konstrukcije. Omejitvene funkcije  $f_i = f_i(\mathbf{b}, \mathbf{u})$  pogosto predstavljajo pomike vozlišč, napetosti v elementih, uklon elementov, geometrijske omejitve, tehnološke omejitve in podobno. Simbol  $K$  označuje število vseh omejitvenih pogojev. V nalogi (1)-(2)  $\mathbf{b}$  predstavlja neodvisno spremenljivko, odziv  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{b})$  pa ima vlogo odvisne spremenljivke. Ta odvisnost je podana implicitno z enačbo odziva konstrukcije

$$\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

kjer sta  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$  in  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$  vektorja notranjih in zunanjih sil.

## 3 Elasto-plastični KE in njegov prerez

Model nosilca, ki je podrobno opisan v [1, 2], prikazuje slika 1.



Slika 1: Plastični KE s 6 vozlišči.

Nosilec, ki ga bomo uporabili v zgledu, je raven in ima 6 vozlišč. Osnovne mehanske lastnosti nosilca so:

- upošteva točne kinematične enačbe,
- strižne deformacije so zanemarljive.

Prostostne stopnje so: pomiki  $u_i$  krajnih vozlišč, rotacije  $\varphi_j$  ter Lagrangevi multiplikatorji  $\lambda_k$  elementa. Odzivne količine nosilca lahko zapišemo

$$\mathbf{u} = (u_i, \varphi_j, \lambda_k). \quad (2)$$

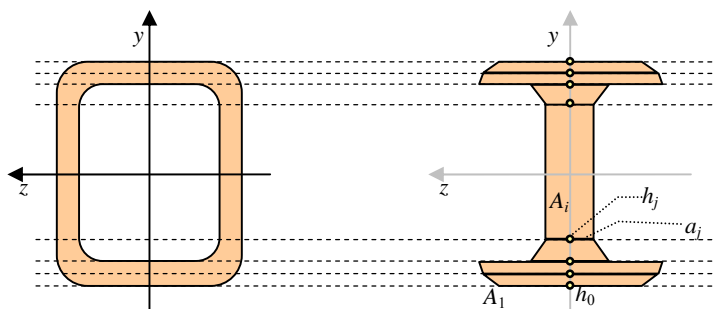
Ker so vse odzivne veličine odvisne od projektnih spremenljivk  $\mathbf{b}$ , lahko zapišemo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{b})$ .

Prerez nosilca podajamo po slojih [3]. Vpeljimo integral po prerezu

$$C = \int_A f dA, \quad (4)$$

kjer je  $f$  gladka funkcija. Funkcija  $f$  je konstantna v pravokotni smeri ravnine nosilca (z-smer, slika 2). Integracijo bomo izvedli numerično z Gaussovo metodo.

Model prereza je sestavljen iz  $N$  sekcij  $A_i, i=1, \dots, N$ , slika 2. Vsaka sekcija  $A_i$  se začne z  $y$  koordinato  $h_{i-1}$  in konča s  $h_i$ . Višina sekcije  $A_i$  je tako enaka  $h_i - h_{i-1}$ . Za cel prerez je tako potrebnih  $N+1$  točk  $h_j, j=0, 1, \dots, N$ .



Slika 2: Dejanski prerez levo in računski model prereza desno.

Širina  $a$  sekcije  $A_i$  se lahko spreminja samo linearno. Vsaka sekcija  $A_i$  se začne s širino  $a_{i-1}$  in konča s širino  $a_i$ .

Če privzamemo zgoraj navedeno in upoštevamo lastnosti funkcije  $f$ , lahko integral po sekciji  $A_i$  zapišemo

$$c_i = \int_{A_i} f dA_i = \int_{h_{i-1}-a/2}^{h_i+a/2} \int_{h_{i-1}-a/2}^{h_i+a/2} f dz dy = \int_{h_{i-1}}^{h_i} f \int_{-a/2}^{+a/2} dz dy = \int_{h_{i-1}}^{h_i} f a dy, \quad (5)$$

kjer je

$$a = a_{i-1} + \frac{y - h_{i-1}}{h_i - h_{i-1}} (a_i - a_{i-1}). \quad (6)$$

Za uporabo pri numerični integraciji bomo vpeljali spremenljivko  $\zeta \in [-1,1]$ , tako da

$$y = \frac{1-\zeta}{2} h_{i-1} + \frac{1+\zeta}{2} h_i. \quad (7)$$

Če sedaj zapišemo

$$dy = \frac{h_i - h_{i-1}}{2} d\zeta \quad (8)$$

dobi integral  $c_i$  obliko

$$c_i = \frac{h_i - h_{i-1}}{2} \int_{-1}^1 f a d\zeta, \quad (9)$$

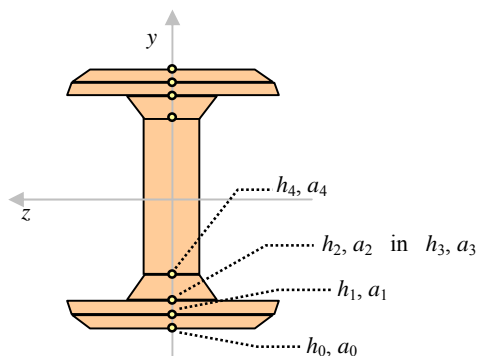
kjer je

$$a = \frac{1-\zeta}{2} a_{i-1} + \frac{1+\zeta}{2} a_i. \quad (10)$$

Tako lahko integral po celotnem preseku izračunamo kot

$$C = \sum_{i=1}^N c_i. \quad (11)$$

Po prerezu smo uporabili Gauss-ovo shemo z 2 integracijskima točkama za vsak sloj. V enačbah prereza sta veličini  $h_i$  in  $a_i$  odvisni od projektnih spremenljivk  $\mathbf{b}$ , tako da velja  $h_i = h_i(\mathbf{b})$  in  $a_i = a_i(\mathbf{b})$ .



**Slika 3:** Dvojne točke sekcije.

V primerih, ko imamo spremembo širine na isti višini, vpeljemo dvojne točke oziroma sekcijo višine nič (med  $h_2$  in  $h_3$  na sliki 3). Torej imamo  $h_3 \equiv h_2$  in  $a_3 \neq a_2$ .

## 5 Občutljivostna analiza

Naloga (1)-(2) je zapisana v obliki standardne naloge matematičnega programiranja in se lahko načelno reši s poljubno metodo nelinearnega optimiranja. Toda ker so projektne spremenljivke zvezne, predstavljajo gradientne metode najprimernejšo izbiro. V tem primeru je postopek reševanja iteracijski in ga lahko povzamemo kot sledi:

- Nastavi  $k = 0$ ; izberi začetne vrednosti  $\mathbf{b}^{(0)}$ .
- Izračunaj  $f_i, i = 0, \dots, K$  pri  $\mathbf{b}^{(k)}$  (analiza odziva).
- Izračunaj  $df_i/d\mathbf{b}, i = 0, \dots, K$  pri  $\mathbf{b}^{(k)}$  (analiza občutljivosti).
- Pošlji izračunane vrednosti optimizacijskemu algoritmu, tako da dobiš popravke  $\Delta\mathbf{b}^{(k)}$  in izračunane popravljene vrednosti spremenljivk  $\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + \Delta\mathbf{b}^{(k)}$ .
- Nastavi  $k = k + 1$  in preveri konvergenčni kriterij – če je izpolnjen, zaključi zanko, drugače se vrni na drugi korak.

Funkcije  $f_i, i = 0, \dots, K$  so izražene v odvisnosti od  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{u}$ . Tako moramo pri analizi odziva najprej izračunati  $\mathbf{u}^{(k)}$  pri podanih  $\mathbf{b}^{(k)}$ . To naredimo s pomočjo enačbe odziva (3). Odvodi  $df_i/d\mathbf{b}, i = 0, \dots, K$  so odvisni od  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}$  in  $d\mathbf{u}/d\mathbf{b}$ . Za analizo občutljivosti pri  $\mathbf{b}^{(k)}$  zato potrebujemo  $\mathbf{u}^{(k)}$  in  $(d\mathbf{u}/d\mathbf{b})^{(k)}$ . Odziv  $\mathbf{u}^{(k)}$  je že izračunan, medtem ko moramo  $(d\mathbf{u}/d\mathbf{b})^{(k)}$  izračunati iz občutljivostne enačbe. To enačbo lahko dobimo z odvajanjem odzivne enačbe po  $\mathbf{b}$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{b}}. \quad (12)$$

Za izračun  $\partial \mathbf{R}/\partial \mathbf{b}$  in  $\partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{b}$  potrebujemo parcialne odvode naslednjih količin prereza

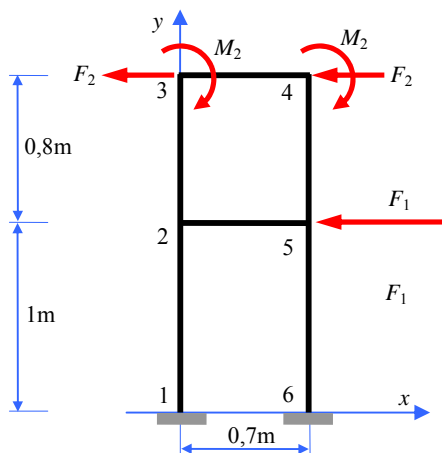
$$M_c = - \int_A \eta \sigma dA, \quad (13)$$

$$C_{11} = \int_A E_t dA, \quad C_{12} = - \int_A \eta E_t dA, \quad C_{22} = \int_A \eta^2 E_t dA. \quad (14)$$

po projektni spremenljivki, torej  $\partial M_c/\partial \mathbf{b}$ ,  $\partial C_{11}/\partial \mathbf{b}$ ,  $\partial C_{12}/\partial \mathbf{b}$  in  $\partial C_{22}/\partial \mathbf{b}$ . Te količine izračunamo na osnovi enačb za prerez, ki so opisane v prejšnjem poglavju.

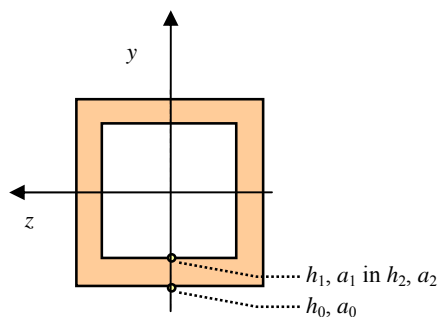
## 6 Numerični zgled

Za zgled obravnavajmo akademski primer enostavnega okvirja, ki ga prikazuje slika 4. Okvir je spodaj fiksno vpet, modeliran pa je le s šestimi končnimi elementi.



Slika 4: Okvir z obremenitvami

Prerezi elementov konstrukcije so pravokotni in votli (slika 5).



Slika 5: Uporabljen prerez

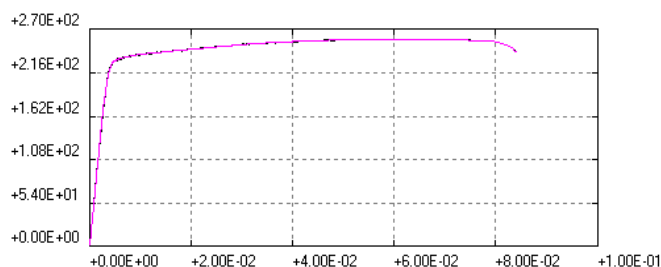
Prerez elementa smo modelirali s 3 segmenti (sloji). Vpeljali smo 4 projektne spremenljivke  $b_i$ , kot je prikazano v Tabeli 1. S pomočjo projektnih spremenljivk bomo spreminjali višino in debelino izbranega prereza.

Tabela 1: Dimenziji prereza palice podani v odvisnosti od projektnih spremenljivk.

Mere [mm]
$h_0 = -(20 + 10b_1)$ , $a_0 = 40 + 10b_2$
$h_1 = h_0 - 2 - b_3$ , $a_1 = a_0$
$h_2 = h_1$ , $a_2 = 4 + 2b_4$

Uporabljen je bil material Al zlitina EN AW 6060, katerega  $\sigma - \varepsilon$  diagram prikazuje

slika 6.



**Slika 6:** Krivulja  $\sigma - \varepsilon$  uporabljenega materiala

Konstrukcijo smo obremenili (slika 4):

- v vozlišču 5 s silo  $F_1 = 900 \text{ N}$  v nasprotni smeri osi  $x$ ,
- v vozliščih 3 ter 4 s silo  $F_2 = 70 \text{ N}$  v nasprotni smeri osi  $x$  in negativnim momentom okoli osi  $z$   $M_2 = -6000 \text{ Nm}$ ,

Cilj optimizacijske naloge je bil minimizirati volumen konstrukcije pri čemer horizontalni pomiki vozlišč niso smeli preseči vrednosti 40 mm. Optimizacijsko nalogo smo rešili z aproksimacijsko metodo opisano v [4]. Postopek optimizacije je bil kratek (približen optimum po 4 iteracijah, konec po 9 iteracijah), stabilen in praktično monoton. Rezultati so prikazani v Tabelah 2 in 3.

**Tabela 2:** Primerjava začetnih in optimalnih vrednosti namenske funkcije.

	Start	Optimum
Normiran volumen	1,00	0,584

**Tabela 3:** Spodnje in zgornje meje, začetne in končne vrednosti projektnih spremenljivk.

$i$	$b_{\min}$	$b_{\max}$	$b_{\text{start}}$	$b_{\text{optim.}}$
1	-1	1	0	1
2	-1	1	0	-0,928
3	-1	1	0	-1
4	-1	1	0	-1

Kot je bilo za pričakovati v tako enostavnem zgledu, je večina projektnih spremenljivk končala na svoji zgornji ali spodnji meji. Tako je višina profila postala maksimalna, debelina

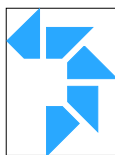
blizu nevtralne osi minimalna, debelina blizu krajnih vlaken pa se je prilagodila zahtevam omejitvenih pogojev. Aktivna je ostala torej le ena projektna spremenljivka.

## 6 Zaključek

Predstavili smo pristop za optimizacijo količin prerezov elasto-plastičnih okvirjev z uporabo gradientnih optimizacijskih metod. Raziskave so šele na začetku, zato je rešen zgled dokaj enostaven – omejitvene funkcije se vežejo le na pomike vozlišč. Za bolj zanimive količine kot so plastična deformacija, deformacijska energija in podobne še nimamo narejene občutljivostne analize. To bo vsebina nadaljnjega dela.

## Literatura

- [1] M. Saje, I. Planinc, G. Turk, B. Vratnar, *A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (1997) 144: 125--151.
- [2] M. Saje, G. Turk, A. Kalagasidu, B. Vratnar, *A kinematically exact finite element formulation of elastic-plastic curved beams*. Computers and Structures. (1998) 67: 197--214.
- [3] M. Kegl, *Layered cross-section*. Internal report. (2005) 1--4.
- [4] M. Kegl, M.M. Oblak, *Optimization of mechanical systems: on non-linear first-order approximation with an additive convex term*, Communications in Numerical Methods in Engineering. (1997) 13: 13-20.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO  
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2005

## Preskok sistema plitke osnosimetrične bimetalne lupine z nelinearno teorijo

Marko Jakomin<sup>1</sup> - Franc Kosel<sup>2</sup> - Milan Batista<sup>3</sup> - Tadej Kosel<sup>4</sup>

### Snap-through of the System of Shallow Axi-symmetric Bimetallic Shell by Non-linear Theory

**Povzetek.** V prispevku obravnavamo stabilnostne razmere pri tankih, osnosimetričnih plitkih bimetalnih lupinah. Po teoriji drugega reda, ki upošteva ravnotežje sil na deformiranem telesu, podajamo model z matematičnim opisom geometrije sistema, premikov, napetosti in termoelastičnih deformacij. Enačbe temeljijo na teoriji velikih premikov. Kot primer predstavljamo rezultate za sferične lupine, ki jih aproksimiramo s parabolično funkcijo. Obravnavamo prosto položene lupine, ki so poleg temperature dodatno obremenjene s silo v temenu. Temperaturo preskoka računamo numerično z nelinearno strelsko metodo.

**Abstract.** The paper deals with buckling conditions in the thin axi-symmetric shallow bimetallic shells. According to the theory of the third order, which takes into account the equilibrium state of forces and moments which are acting on the deformed system, the paper is presenting a model with mathematical description of geometry of the system, stresses thermo-elastic strains and displacements. The mathematical formulation is based on the theory of large displacements. As an example, the results for spherical shallow shells are shown, approximated by a parabolic function. Besides simply-roller supported shells loaded with temperature only, also the shells with concentrated acting load at the top of it are discussed. The snap-through temperature is calculated numerically by non-linear shooting method.

#### 1. Uvod

Zaradi zanesljivosti delovanja so se pri zaščiti pred toplotno preobremenitvijo naprav uveljavili linijski in ploskovni bimetalni konstrukcijski elementi, katerih delovanje bazira na

---

<sup>1</sup> Univerza na Primorskem, Primorski inštitut za naravoslovne in tehnične vede

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

<sup>3</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

<sup>4</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo



znanem fizikalnem dejstvu, da se telesa s povečevanjem temperature širijo. Idealno homogena telesa se širijo in krčijo izotropno. V primeru bimetalnih teles, ki so izdelana iz dveh materialov z različnima temperaturnima razteznostnima koeficientoma, pa deformacije zaradi temperaturnih sprememb ne bodo več izotropne. V prispevku želimo poiskati in matematično formulirati funkcijsko zvezo med temperaturo, napetostjo in premiki bimetala. Ta zveza je med drugim odvisna tudi od geometrijskih karakteristik bimetala, saj se npr. linijski bimetalni konstrukcijski elementi v primerjavi s ploskovnimi, na temperaturne spremembe različno odzivajo. Za prakso so predvsem pomembne razlike v stabilnostnih razmerah. Plitke bimetalne lupine imajo lastnost, da pri določeni temperaturi pridejo v indiferentno stanje, kar vodi v pojav, ki je v literaturi znan pod pojmom preskok sistema.

## 2. Enačbe problema

Na sliki 1 je s funkcijo  $y = y(x)$  v Lagrangeovem koordinatnem sistemu predstavljena osrednja ploskev tanke bimetalne rotacijsko simetrične lupine. Zaradi spremembe temperature se lupina deformira v novo obliko, ki jo določa funkcija  $Y = Y(X)$  v Eulerjevem koordinatnem sistemu. Zaradi osne simetrije obravnavanega problema mehanske veličine niso odvisne od kota  $\varphi$ , premik  $v$  v cirkularni smeri  $\varphi$  je tudi enak nič:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} ( ) &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Sistem enačb za opis termoelastičnih razmer tanke osnosimetrične bimetalne lupine sestavljajo enačbe [1, 2, 3, 4, 5,]:

- (2), (3) in (4), za specifične deformacije  $\varepsilon_\psi$ ,  $\varepsilon_\varphi$  in  $\gamma_{\psi r}$  v odvisnosti od premikov  $u$  in  $w$  na osrednji ploskvi lupine;
- (5) in (6), za specifični deformaciji  $\varepsilon_\psi^z$  in  $\varepsilon_\varphi^z$  na oddaljenosti  $z$  od osrednje ploskve lupine;
- (7) in (8) za napetosti  $\sigma_\psi$  in  $\sigma_\varphi$  v meridialni  $\psi$  in cirkularni  $\varphi$  smeri v odvisnosti od specifičnih deformacij;
- (9), (10), (11), (12) in (13) za enotske sile in momenta v meridialni in cirkularni smeri;
- (14), (15), (16) za opis ravnovesja sil in momentov;

ter

- (17), (18), (19), (20), (21) za opis geometrije sistema, kot sledi:

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{r_\psi} \left( w + \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{2r_\psi^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left( w + \frac{u}{\tan \psi} \right), \quad (3)$$

$$\gamma_{\psi r} = \frac{-u}{r_\psi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{1}{r_\psi}, \quad (4)$$

znanem fizikalnem dejstvu, da se telesa s povečevanjem temperature širijo. Idealno homogena telesa se širijo in krčijo izotropno. V primeru bimetalnih teles, ki so izdelana iz dveh materialov z različnima temperaturnima razteznostnima koeficientoma, pa deformacije zaradi temperaturnih sprememb ne bodo več izotropne. V prispevku želimo poiskati in matematično formulirati funkcijsko zvezo med temperaturo, napetostjo in premiki bimetala. Ta zveza je med drugim odvisna tudi od geometrijskih karakteristik bimetala, saj se npr. linijski bimetalni konstrukcijski elementi v primerjavi s ploskovnimi, na temperaturne spremembe različno odzivajo. Za prakso so predvsem pomembne razlike v stabilnostnih razmerah. Plitke bimetalne lupine imajo lastnost, da pri določeni temperaturi pridejo v indiferentno stanje, kar vodi v pojav, ki je v literaturi znan pod pojmom preskok sistema.

## 2. Enačbe problema

Na sliki 1 je s funkcijo  $y = y(x)$  v Lagrangeovem koordinatnem sistemu predstavljena osrednja ploskev tanke bimetalne rotacijsko simetrične lupine. Zaradi spremembe temperature se lupina deformira v novo obliko, ki jo določa funkcija  $Y = Y(X)$  v Eulerjevem koordinatnem sistemu. Zaradi osne simetrije obravnavanega problema mehanske veličine niso odvisne od kota  $\varphi$ , premik  $v$  v cirkularni smeri  $\varphi$  je tudi enak nič:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} ( ) = 0 \quad (1)$$

$$v = 0$$

Sistem enačb za opis termoelastičnih razmer tanke osnosimetrične bimetalne lupine sestavljajo enačbe [1, 2, 3, 4, 5,]:

- (2), (3) in (4), za specifične deformacije  $\varepsilon_\psi$ ,  $\varepsilon_\varphi$  in  $\gamma_{\psi r}$  v odvisnosti od premikov  $u$  in  $w$  na osrednji ploskvi lupine;
- (5) in (6), za specifični deformaciji  $\varepsilon_\psi^z$  in  $\varepsilon_\varphi^z$  na oddaljenosti  $z$  od osrednje ploskve lupine;
- (7) in (8) za napetosti  $\sigma_\psi$  in  $\sigma_\varphi$  v meridialni  $\psi$  in cirkularni  $\varphi$  smeri v odvisnosti od specifičnih deformacij;
- (9), (10), (11), (12) in (13) za enotske sile in momenta v meridialni in cirkularni smeri;
- (14), (15), (16) za opis ravnovesja sil in momentov;

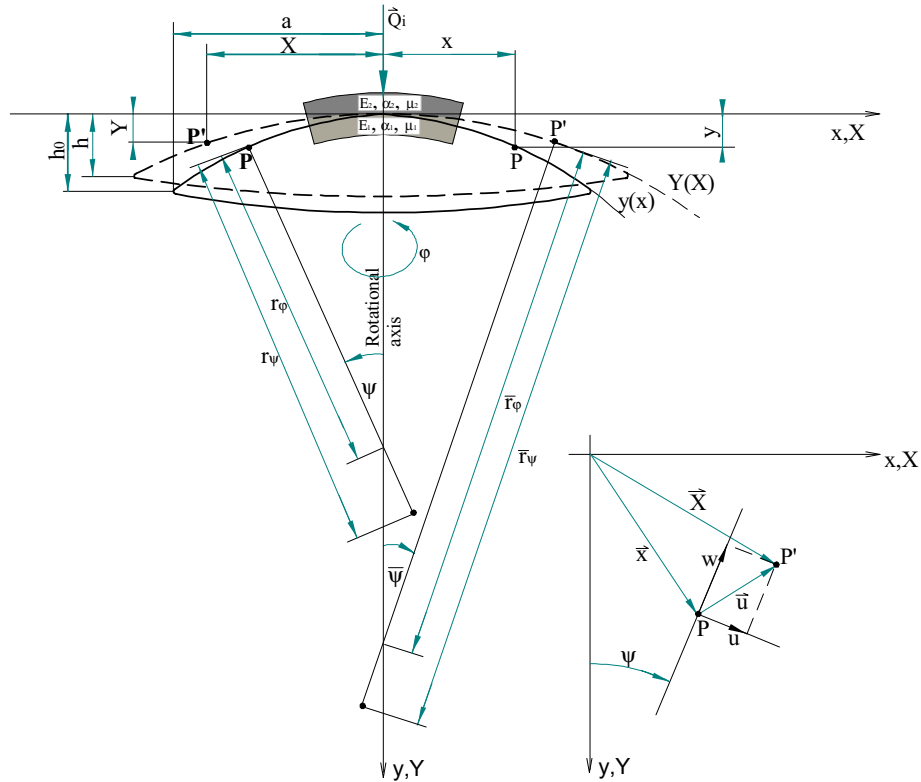
ter

- (17), (18), (19), (20), (21) za opis geometrije sistema, kot sledi:

$$\varepsilon_\psi = \frac{1}{r_\psi} \left( w + \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{2r_\psi^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left( w + \frac{u}{\tan \psi} \right), \quad (3)$$

$$\gamma_{\psi r} = \frac{-u}{r_\psi} + \frac{\partial w}{\partial \psi} \frac{1}{r_\psi}, \quad (4)$$



**Slika 1:** Osnosimetrična lupina v homogenem temperaturnem polju in zveza med Eulerjevim in Lagrangeovim koordinatnim sistemom

Z  $\alpha_i, i = \{1, 2\}$  je v enačbah (7) in (8) označen temperaturni razteznostni koeficient sloja 1 in sloja 2 bimetalne lupine. V primeru plitke bimetalne lupine z enako debelino slojev  $\delta_1 = \delta_2 = \delta/2$ , enakim elastičnim modulom  $E_1 = E_2 = E$  in Poissonovim količnikom  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  sledita iz gornjega sistema naslednji dve diferencialni enačbi:

$$\frac{1}{x} (x^3 n'_\psi)' = A(1 - \mu^2) \left( y'w' - \frac{1}{2}(w')^2 \right), \quad (22)$$

$$x n_\psi (y - w)' = -xC \left( w'' + \frac{1}{x} w' \right)' - c, \quad (23)$$

kjer so  $A, C$  in  $c$  konstante kot sledi:

$$A = \frac{E\delta}{1 - \mu^2}, \quad C = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad c = \frac{-Q_i}{2\pi}. \quad (24)$$

Z uvedbo brezdimenzijske horizontalne koordinate  $\chi$ :

$$\chi = \left( \frac{x}{a} \right)^2, \quad (25)$$

in Wittrickovih funkcij  $G$ ,  $F_0$  in  $F$  :

$$n_\psi = \frac{G(\chi)}{a^2} C, \quad (26)$$

$$\frac{1}{x} y' = \frac{F_0'(\chi)}{a^2} \sqrt{\frac{2C}{A(1-\mu^2)}}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{x} Y' = \frac{F(\chi)}{a^2} \sqrt{\frac{2C}{A(1-\mu^2)}} \quad (28)$$

prevedemo problem v brezdimenzijsko obliko [6]:

$$4(\chi G)'' = F_0^2 - F^2, \quad (29)$$

$$4(\chi(F - F_0))'' = FG - \frac{c \cdot a^2}{\chi} \frac{A}{C} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{2(AC)}}. \quad (30)$$

Plitko sferično lupino s polmerom  $R$  lahko aproksimiramo s parabolično funkcijo:

$$y = \frac{x^2}{2R} = h_0 \chi, \quad (31)$$

zaradi česar je funkcija  $F_0(\chi)$  v enačbi (27) konstanta:

$$F_0 = \frac{2\sqrt{6} \cdot h_0}{\delta} \sqrt{1-\mu^2}. \quad (32)$$

Diferencialni enačbi (29) in (30) sedaj zapišemo:

$$4G''\chi + 8G' = F_0^2 - F^2 \quad (33)$$

$$4F''\chi + 8F' = FG - \frac{c \cdot a^2}{\chi} \frac{A}{C} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{2(AC)}} \quad (34)$$

### 3. Rezultati

Diferencialni enačbi (33) in (34) najprej rešimo za primer, ko lupina ni obremenjena z zunanjo silo  $\vec{Q}_i$ , ker je takrat konstantna  $c$  enaka nič. Če je lupina prosto položena so napetosti in momenti na njenem robu enaki nič, v temenu lupine pa imajo napetosti in momenti le končne vrednosti. Za napetostno funkcijo  $G(\chi)$  veljata torej robna pogoja:

$$G(1) = 0, \quad G(0) \neq \infty. \quad (35)$$

Iz brezdimenzijske enačbe za enotski moment  $m_\psi$ :

$$m_\psi = \frac{C}{a^2} \sqrt{\frac{2C}{A(1-\mu^2)}} \cdot (F_0(1+\mu) - F(\chi)(1+\mu) - 2\chi F'(\chi)) - \frac{E(\alpha_1 - \alpha_2)\delta^2}{8(-\mu)} T \quad (36)$$

izrazimo povezavo med temperaturo lupine  $T$  in trenutno oblikovno funkcijo  $F$ :

$$T = T_m \left( 1 - \frac{1}{F_0} \left( F(1) + \frac{2}{1+\mu} F'(1) \right) \right) = T_m \cdot \tau, \quad (37)$$

kjer je  $\tau$  brezdimenzijska funkcija temperature,  $T_m$  pa konstanta:

$$T_m = \frac{2\delta}{3R(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{2\delta^2 F_0}{3\sqrt{6} a^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{1 - \mu^2}}. \quad (38)$$

Dodatna robna pogoja sta torej:

$$\tau = 1 - \frac{1}{F_0} \left( F(1) + \frac{2}{1 + \mu} F'(1) \right), \quad F(0) \neq \infty. \quad (39)$$

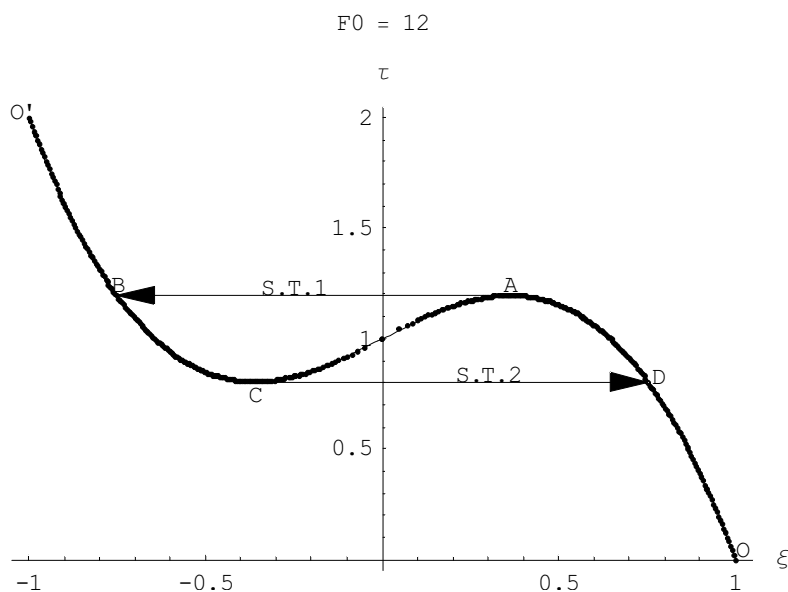
Z uvedbo novih spremenljivk  $g(\chi)$  in  $f(\chi)$ :

$$f = \chi \cdot F, \quad g = \chi \cdot G \quad (40)$$

zapišemo naslednji problem robnih vrednosti:

$$\begin{aligned} 4g'' &= F_0^2 - \frac{f^2}{\chi^2}, & 4f'' &= \frac{f \cdot g}{\chi^2}, \\ g(0) = g(1) = f(0) = 0, & \tau &= 1 - \frac{1}{F_0(1 + \mu)} (2f'(1) - f(1) \cdot (1 - \mu)), \end{aligned} \quad (41)$$

ki ga rešimo numerično z nelinearno strelsko metodo.



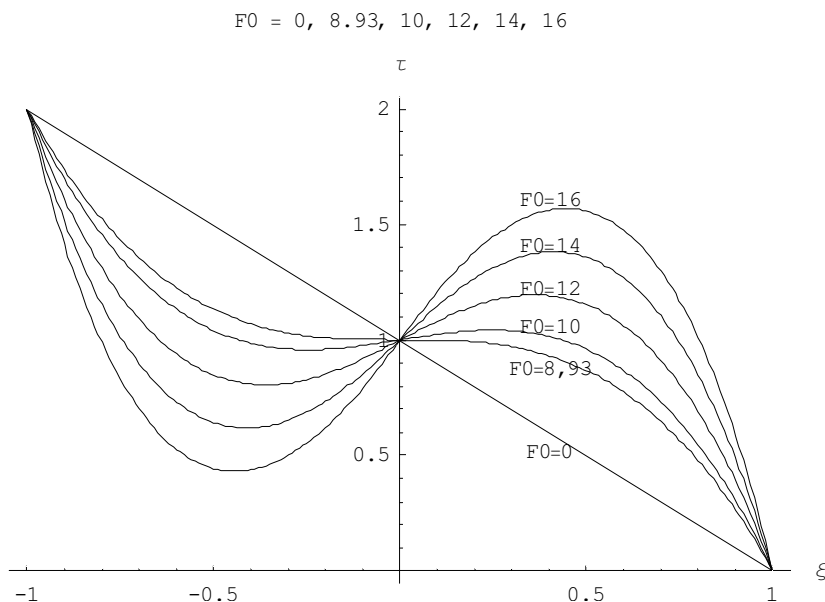
**Slika 2:** Funkcija  $\tau = \tau(\xi)$  za primer osnosimetrične lupine s  $F_0 = 12$  in  $\mu=1/3$ , ki izkazuje pojav preskoka sistema med točkama  $AB$  ob segrevanju in točkama  $CD$  ob ohlajanju

Slika 2 prikazuje razmere za lupino s Poissonovim koeficientom  $\mu = 1/3$  in začetno oblikovno funkcijo  $F_0 = 12$ . Graf funkcije brezdimenzijske temperature  $\tau$  v odvisnosti od razmerja višin  $\xi$

$$\xi = \frac{h}{h_0} = \frac{Y(1)}{y(1)} = \frac{1}{F_0} \int_0^1 \frac{1}{\chi} f(\chi) d\chi \quad (42)$$

predstavlja stabilnostne razmere ob temperaturnem obremenjevanju bimetalne lupine .

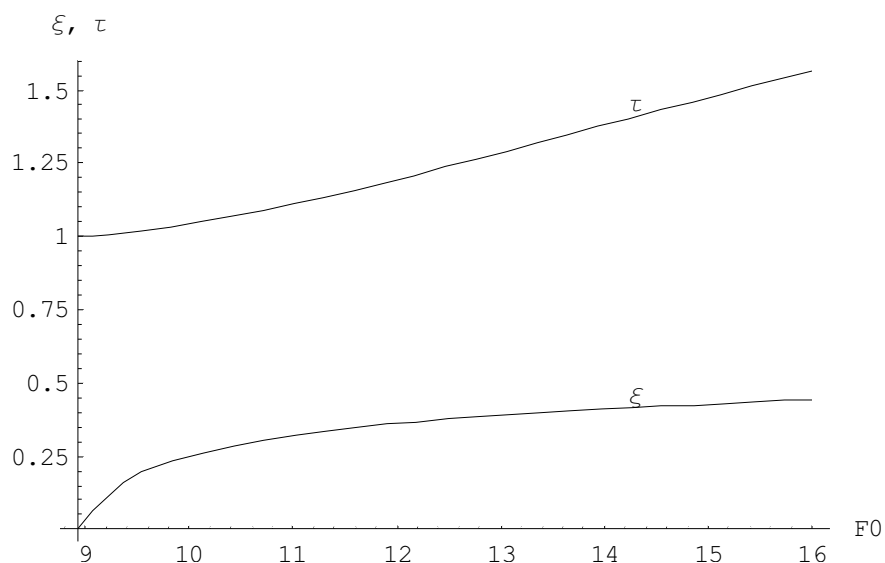
Stabilnostne razmere pri lupinah z drugačnimi vrednostmi začetne oblikovne funkcije  $F_0$  so prikazane na sliki 3. Kritična vrednost začetne oblikovne funkcije  $F_0$  izpod katere preskok lupine ni možen, znaša za lupine s Poissonovim količnikom  $\mu = 1/3$ ,  $F_0 = F_{kr} = 8.93$ . Krivulja s  $F_0 = 0$  ponazarja razmere pri okrogli bimetalni plošči. Potek krivulje za brezdimenzijsko temperaturo  $\tau$  v odvisnosti od razmerja višin  $\xi$  je asimetrična glede na premico  $F_0 = 0$ . Na sliki 4 sta prikazani krivulji za temperaturo prvega preskoka  $\tau_{p1}$  in razmerje višin  $\xi_{p1}$  v odvisnosti od začetne oblikovne funkcije  $F_0$ .



**Slika 3:** Razmere pri lupinah z različnimi vrednostmi funkcije  $F_0$  in  $\mu = 1/3$

Vrednost začetne oblikovne funkcije  $F_0$ , pri kateri se ob preskoku lupine pojavi plastično tečenje materiala v temenu lupine, je mogoče izračunati iz Misesovega pogoja, če je znana napetost tečenja  $\sigma_0$  za linearno napetostno stanje:

$$\sigma_\psi^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_\psi \sigma_\varphi = \sigma_0^2 \quad (43)$$



**Slika 4:** Temperatura in lega preskoka v odvisnosti od oblikovne funkcije  $F_0$  za lupine z  $\mu=1/3$

Oglejmo si tudi razmere pri analizi preskoka sistema pri prosto položeni lupini, ki je v temenu obremenjena z zunanjo silo  $\vec{Q}_i$ . Če ponovno upoštevamo, da sta funkciji  $G$  in  $F$  v točki  $\chi = 0$  omejeni, zapišemo problem robnih vrednosti:

$$\begin{aligned}
 4g'' &= F_0^2 - \frac{f^2}{\chi^2}, \\
 4f'' &= \frac{f \cdot g}{\chi^2} + \frac{\bar{Q}_i}{\chi}, \\
 g(0) &= g(1) = f(0) = 0, \\
 \tau &= 1 - \frac{1}{F_0(1+\mu)} (2f'(1) - f(1) \cdot (1-\mu)).
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

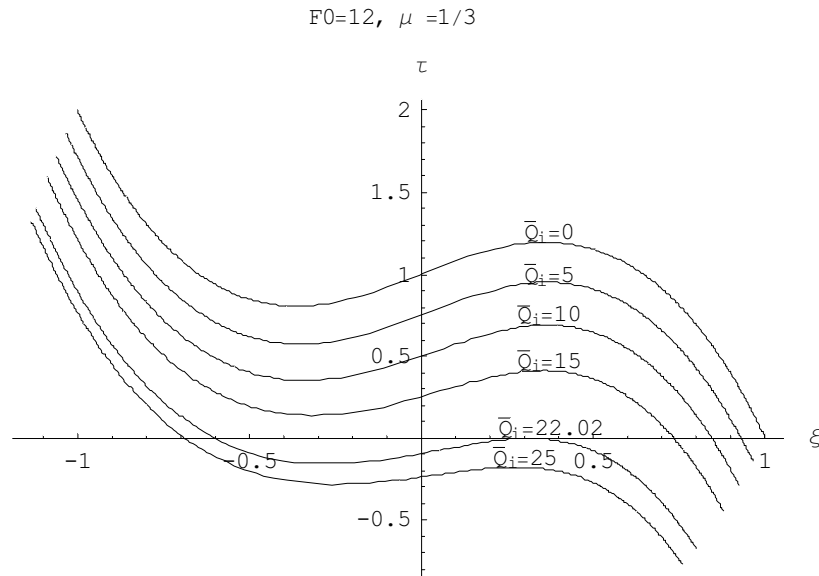
kjer je  $\bar{Q}_i$  vertikalna brezdimenzijska sila,  $F_M$  pa konstanta:

$$Q_i = |\vec{Q}_i| = \bar{Q}_i \cdot F_M, \tag{45}$$

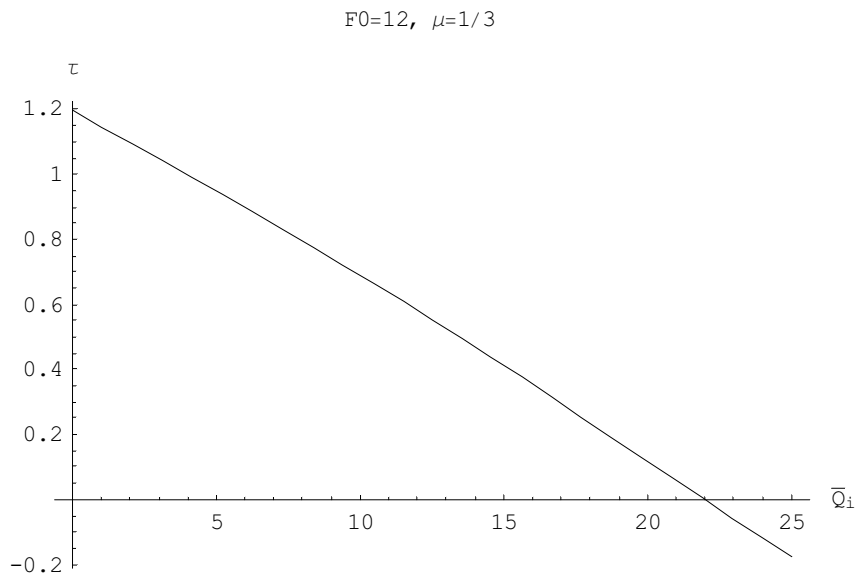
$$F_M = \frac{2\pi}{a^2} \sqrt{\frac{2C^3}{A(1-\mu^2)}} = \frac{E \pi \delta^4}{a^2 6\sqrt{6(1-\mu^2)^3}}. \tag{46}$$

Na sliki 5 so predstavljeni rezultati za lupino z začetno oblikovno funkcijo  $F_0 = 12$  in Poissonovim količnikom,  $\mu = 1/3$  odkoder je razvidno, da temperatura preskoka lupine  $\tau_p$  pada z naraščanjem sile  $\vec{Q}_i$ . Pri sili  $\bar{Q}_i = 0$  smo za temperaturo  $\tau_p$  in lego  $\xi_p$  preskoka lupine dobili enake rezultate, kot smo jih predhodno izračunali za samo temperaturno

obremenjeno lupino. Temperaturo preskoka  $\tau_{p1}$  za vmesne vrednosti sile  $\bar{Q}_i$  v intervalu  $[0, 25]$  smo določili z interpolacijskim polinomom 4. stopnje, slika 6:



**Slika 5:** Stabilnostne razmere pri različnih vrednostih sile  $\bar{Q}_i$



**Slika 6:** Temperatura preskoka  $\tau_{p1}$  v odvisnosti od zunanje sile  $\bar{Q}_i$



#### 4. Zaključek

Prosto položene tankostenske plitke bimetalne lupine imajo lastnost, da pri določeni temperaturi preskočijo v novo ravnovesno lego. Temperatura preskoka  $T_p$  je odvisna od snovno geometrijskih lastnosti lupin. Kot poseben primer smo analizirali razmere pri sferičnih lupinah, ki imajo oba sloja enako debela  $\delta_1 = \delta_2 = \delta/2$ , sloja pa imata tudi enak Poissonov koeficient  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Lega preskoka  $\xi_p$  je pri lupinah z enako debelino  $\delta$  in Poissonovim številom  $\mu$ , odvisna samo od začetne višine lupine  $h_0$ . Ukrivljenost lupine  $1/R$  in razlika temperaturnih koeficientov linearnega raztezka  $\alpha_1 - \alpha_2$  vplivata samo na temperaturo preskoka  $T_p$  ne pa tudi na lego preskoka  $\xi_p$ .

Če na lupino poleg spremembe temperature  $T$  deluje tudi sila  $\vec{Q}_i$  v temenu lupine, nastopi preskok lupine pri nižji temperaturi  $\tau_p$ . Pri dovolj veliki sili  $Q_{kr}$  lupina preskoči, ne da bi jo bilo potrebno dodatno temperaturno obremenjevati. Velikost kritične sile  $Q_{kr}$  je odvisna od snovno geometrijskih lastnosti lupine. Po prenehanju kritične sile se lupina vrne v začetno ravnovesno lego razen manj plitke lupine pri kateri je vrednost začetne oblikovne funkcije  $F_{0\min} \geq 21,66$  in Poissonov količnik  $\mu = 1/3$ .

#### 5. Literatura

- [1] Alfutov N. A., Stability of Elastic Structures. Springer-Verlag; 2000.
- [2] Drole R., Kosel F., Analysis of Stress-Strain State in Shallow Spherical Bimetallic Shells by Non-linear Theory, Z. angew. Math. Mech; 1994.
- [3] Drole R., Kosel F., Stability Analysis of Shallow Axi-Symmetric Bimetallic Shells in a Homogeneous Temperature Field. The 14<sup>th</sup> Canadian Congress of Applied Mechanics, Kingston, OntarioV; June 1993.
- [4] Reddy J. N., Theory and Analysis of Elastic Plates. Taylor & Francis; 1999.
- [5] Timoshenko S., Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill Book; 1959.
- [6] Wittrick. W. H., Stability of Bimetallic Disk, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Oxford;1953.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO  
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2005

## *Optimiranje oblike uklonsko občutljivih ploskovnih konstrukcij*

*M. Kegl<sup>1</sup>, B. Brank<sup>2</sup> in M. Oblak<sup>1</sup>*

### *Shape Optimization of Buckling-sensitive Shell-like Structures*

**Povzetek.** Predstavljen je pristop k optimiranju oblike nelinearnih, elastičnih, statično obremenjenih, ploskovnih konstrukcij, ki so občutljive na uklon. Omogočeno je optimiranje gladkih lupin, kot tudi ojačanih lupin (ojačitve imajo lahko obliko paličja). Za parametrizacijo oblike konstrukcije se uporabi prostorski projektni element; ta je povezan z mrežo končnih elementov preko vozliščnih geometrijskih podatkov. Med nelinearno analizo odziva se ocenjuje nivo kritične (uklonske) obtežbe, tako da se analiza vedno konča v podkritičnem območju. Odvodi, ki se uporabljajo pri občutljivostni analizi, so izpeljani v zaključeni obliki s pomočjo sistema za avtomatično in simbolično odvajanje AceGen. Za optimizacijo je uporabljena gradientna konveksna aproksimativna metoda matematičnega programiranja. Prikazan je numerični primer.

**Abstract.** Shape optimal design of non-linear elastic buckling-sensitive shell-like structures under static loading is presented. The structure that is optimized may be either a smooth shell or a stiffened shell (stiffener may be of a form of a truss). A body-like design element is used for shape parametrization of the structure; it is linked to the finite element mesh through the nodal geometric data. During the nonlinear response analysis the critical (buckling) load is estimated in order to complete an analysis in the pre-critical regime. Derivatives needed for the sensitivity analysis are obtained explicitly by using AceGen system for automatic and symbolic derivation. The optimization process relies on a gradient-based convex approximation method of mathematical programming. An illustrative numerical example is presented.

## 1 Uvod

Pri numeričnem iskanju optimalne oblike elastičnih ploskovnih konstrukcij se lahko uporabi ali linearna teorija lupin ali pa geometrijsko nelinearna teorija lupin. Analizo na

---

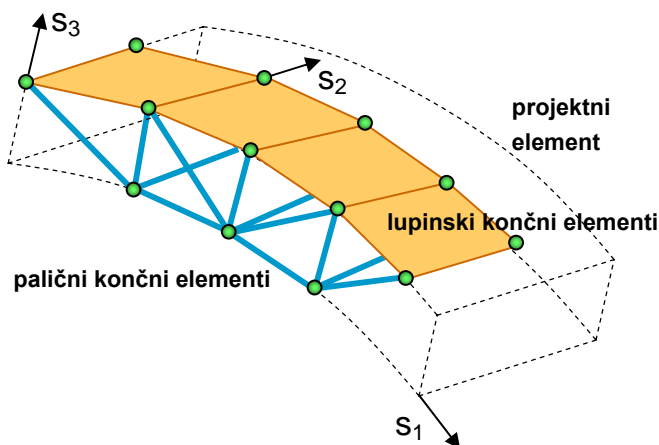
<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

podlagi linearne teorije, npr. Kegl, Brank in Jaklič [1], je mogoče uporabiti, če so pričakovani gradienti pomikov majhni in - kar je še pomembnejše - če obravnavane konstrukcije niso občutljive na uklon. To pomeni, da je predpisana statična obtežba manjša od kritične (uklonske) obtežbe. V vseh drugih primerih je potrebno uporabiti geometrijsko nelinearno analizo, kar pa v proces optimiranja prinese dodatni problem - zagotoviti je namreč treba stabilnost in konvergenco optimizacijskega procesa, saj nočemo, da so vmesni rezultati optimizacijskega postopka uklonsko nestabilne oblike. V tem članku je podana ena od možnih rešitev omenjenega problema.

## 2 Parametrizacija oblike konstrukcije s projektnim elementom

Osnovni gradnik v tem delu predstavljenega postopka optimiranja oblike je t.i. projektni element, s pomočjo katerega se lahko elegantno (z majhnim številom parametrov) opiše geometrija (oblika) konstrukcije. Uporabljeno je t.i. racionalno Bézierjevo telo, glej npr. Kegl [2], ki je prostorsko (3-dimenzijsko), vendar se lahko priročno uporabi tudi za parametrizacijo ploskovnih konstrukcij, glej npr. Kegl in Brank [3]. Izkaže se, da izbrani projektni element omogoča tudi konsistentno parametrizacijo kompleksnejših (sestavljenih) konstrukcij - npr. ploskovnih konstrukcij, ojačanih z enim ali več paličji; slika 1.



**Slika 1:** Mreža končnih elementov je “prilepljena” na prostorski projektni element

Če se oblika konstrukcije parametrizira s projektnim elementom, postane popolnoma določena z lego kontrolnih točk projektnega elementa in z vrednostjo uteži v teh točkah. Omenjene količine so zato spremenljivke optimizacijskega procesa - t.i. projektne spremenljivke (spremenjene vrednosti teh količin določajo novo obliko projektnega elementa in s tem tudi novo obliko konstrukcije, ki jo projektni element parametrizira). Z modifikacijo projektnega elementa, ki se nanaša na uvedbo gladkega skalarnega polja po projektnem elementu, glej Kegl in Brank [3], pa je mogoče optimiranje oblike izvesti skupaj z optimiranjem prereza palic in debeline lupine.

Pri analizi odziva konstrukcije uporabimo metodo končnih elementov, zato je potrebno mrežo končnih elementov povezati s projektnim elementom. Povezava poteka

preko vozlišč mreže - vsako vozlišče je "prilepljeno" na projektni element. V našem primeru smo za analizo ploskovnega dela konstrukcije uporabili geometrijsko točen, nelinearen, 4-vozliščni končni element za lupine, npr. Brank, Perić in Damjanić [4], za analizo paličnih ojačitev pa 2-vozliščni, nelinearen končni element za palico; slika 1.

### 3 Opis optimizacijskega postopka

Optimizacijski problem za statično obremenjeno konstrukcijo (ki je diskretizirana s končnimi elementi) lahko zapišemo kot: Poišči

$$\min f_0 \quad (1)$$

pri čemer naj bodo izpolnjeni naslednji pogoji

$$\begin{aligned} f_i &\leq 0, \quad i = 1, \dots, M \\ b_i^L &\leq b_i \leq b_i^U, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

V (1) in (2) je  $f_0 = f_0(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b}))$  namenska funkcija,  $f_i = f_i(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b}))$  so omejitvene funkcije; z  $\mathbf{u}$  smo označili vektor, v katerem so zbrani pomiki vozlišč mreže končnih elementov zaradi predpisane statične obtežbe; z  $\mathbf{b}$  smo označili vektor, v katerem so zbrane vse projektne spremenljivke  $b_i, i = 1, \dots, N$ , pri čemer  $b_i^L$  in  $b_i^U$  določata razpon območja, kjer se lahko nahaja vrednost projektne spremenljivke  $b_i$ .

Ker so projektne spremenljivke, zbrane v  $\mathbf{b}$ , zvezne (zavzamejo lahko poljubno realno vrednost iz predpisanega intervala), lahko uporabimo gradientni optimizacijski algoritem za rešitev problema, opisanega z (1) in (2). Optimizacijski postopek je takrat iterativen in se lahko predstavi kot:

1. Postavi  $k = 0$ ; izberi začetne vrednosti  $\mathbf{b}^{(0)}$  (začetna oblika);
2. Izračunaj  $f_i, i = 0, \dots, M$  pri  $\mathbf{b}^{(k)}$  (analiza odziva);
3. Izračunaj  $df_i/d\mathbf{b}, i = 0, \dots, M$  pri  $\mathbf{b}^{(k)}$  (občutljivostna analiza);
4. Vstavi izračunane vrednosti v gradientni optimizacijski algoritem, ki bo določil  $\Delta\mathbf{b}^{(k)}$  in novo vrednost projektnih spremenljivk  $\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + \Delta\mathbf{b}^{(k)}$  (nova oblika);
5. Postavi  $k = k + 1$  in preveri, če so zadoščeni kriteriji konvergence; če so, končaj optimizacijo (oblika je optimirana), drugače pojdi na 2.

Zaradi analize odziva in občutljivostne analize je potrebno pri vsakem  $\mathbf{b}^{(k)}$  (pri vsaki obliki konstrukcije) iz vrednotiti pomike  $\mathbf{u}^{(k)}$  (pri predpisani statični obtežbi) in odvode  $(d\mathbf{u}/d\mathbf{b})^{(k)}$  (prav tako pri predpisani statični obtežbi). Pomike konstrukcije  $\mathbf{u}^{(k)}$  se dobi z nelinearno analizo po metodi končnih elementov, odvode  $(d\mathbf{u}/d\mathbf{b})^{(k)}$  pa s pomočjo verižnega odvajanja

$$\left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{(k)} \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} \right)^{(k)} = \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{b}} \right)^{(k)} - \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}} \right)^{(k)} \quad (3)$$

V (3) je  $\mathbf{F}^{(k)}$  vektor notranjih sil in  $\mathbf{R}^{(k)}$  vektor zunanjih sil (t.i. obtežni vektor). Slednjega lahko napišemo tudi kot  $\mathbf{R}^{(k)} = \lambda^{(k)} \overline{\mathbf{R}}^{(k)}$ , kjer je  $\lambda^{(k)} > 0$  obtežni faktor. Izraza v oklepaju na levi strani enačbe (3) poznamo iz analize odziva;  $(\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u} - \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{u})^{(k)}$  je tangentna togostna matrika, kjer je  $(\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{u})^{(k)} = \mathbf{0}$  v primeru konzervativne obtežbe. Izraza na desni strani enačbe (3) smo v našem primeru izpeljali v zaključeni obliki s pomočjo sistema za simbolično in avtomatično odvajanje AceGen, ki ga je razvil J. Korelc; npr. [5].

#### 4 Optimizacija konstrukcij, ki so občutljive na uklon

V prejšnji točki opisani postopek lahko uporabimo pri nelinearnih (ploskovnih) konstrukcijah, ki niso občutljive na uklon. V nasprotnem primeru pa je potrebno postopek spremeniti, saj v procesu optimiranja ne želimo dobiti nestabilnih optimiranih oblik.

Pri optimiranju konstrukcij, ki so občutljive na uklon, potrebujemo pri analizi odziva oceno za lego kritične (mejne ali bifurkacijske) točke na poti ravnotežnih konfiguracij. To naredimo z rešitvijo problema lastnih vrednosti; glej npr. Belytschko, Liu in Moran [6], stran 363. Predpostavimo, da je togostna matrika konstrukcije iz ( $k$ )-te optimizacijske iteracije  $\mathbf{K}^{(k)} = (\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u} - \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{u})^{(k)}$  linearna funkcija togostne matrike trenutne ravnotežne konfiguracije  $n$  in togostne matrike prejšnje ravnotežne konfiguracije  $n-1$ ; predpostavimo, da se na enak način spreminja tudi obtežni faktor  $\lambda^{(k)}$

$$\mathbf{K}^{(k)} = (1 - \alpha) \mathbf{K}_{n-1}^{(k)} + \alpha \mathbf{K}_n^{(k)}, \quad \lambda^{(k)} = (1 - \alpha) \lambda_{n-1}^{(k)} + \alpha \lambda_n^{(k)} \quad (4)$$

V kritični točki je  $\det \mathbf{K}^{(k)}(\lambda^{(k)} = \lambda_{krit}^{(k)}) = 0$ . Ker ima sistem enačb ničelno determinanto, obstajata takšna  $\alpha$  in  $\mathbf{z}$ , da velja  $\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{z} = (1 - \alpha) \mathbf{K}_{n-1}^{(k)} \mathbf{z} + \alpha \mathbf{K}_n^{(k)} \mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Slednjo enačbo se lahko preuredi v posplošen problem lastnih vrednosti

$$\left[ \mathbf{K}_{n-1}^{(k)} + \alpha (\mathbf{K}_n^{(k)} - \mathbf{K}_{n-1}^{(k)}) \right] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (5)$$

Postopek za oceno lege kritične točke na poti ravnotežnih konfiguracij je potem naslednji:

1. Shrani  $\mathbf{K}_{n-1}^{(k)}$ .
2. Skupaj s  $\mathbf{K}_n^{(k)}$  izračunaj najnižjo lastno vrednost  $\alpha$  s pomočjo (5).
3. Če je  $\alpha > 1$ , je kritična točka v nadaljevanju poti ravnotežnih konfiguracij; če je  $0 \leq \alpha \leq 1$  je kritična točka med konfiguracijama  $n-1$  in  $n$ ; če je  $\alpha < 0$ , je kritična točka pred ravnotežno konfiguracijo  $n-1$ .
4. Izračunaj kritični obtežni faktor  $\lambda_{krit}^{(k)}$  s pomočjo (4).

V našem primeru rešujemo problem lastnih vrednosti v vsaki doseženi ravnotežni konfiguraciji, zato je zmeraj (razen morda v nekaterih posebnih primerih)  $\alpha > 1$ . Ko pridemo do takšne konfiguracije  $n$ , da je izračunani  $\alpha$  manjši od vnaprej predpisane vrednosti, končamo z nelinearno analizo odziva, čeprav v Newton-Raphsonovem postopku reševanja sistema nelinearnih enačb še nismo nanесли vse predpisane statične obtežbe

( $\lambda_n^{(k)} < \lambda_{krit}^{(k)} < \lambda_{predpisano}^{(k)}$ ). Takrat predpostavimo, da so pomiki pri predpisani obtežbi enaki  $\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}_n^{(k)} / \lambda_n^{(k)}$ , enačbam (2) dodamo novo omejitveno funkcijo, ki se nanaša na vrednost kritičnega obtežnega faktorja  $\lambda_{krit} = \lambda_{krit}(\mathbf{b}) > \lambda_{krit,min}$  (vrednost  $\lambda_{krit,min}$  predpišemo) in pokličemo gradientni optimizacijski algoritem. Zaradi dodane omejitve potrebujemo pri občutljivostni analizi odvod  $(d\lambda_{krit} / d\mathbf{b})^{(k)}$ . Izpeljemo ga na naslednji način: Predpostavimo spreminjanje  $(\partial\mathbf{F} / \partial\mathbf{b})^{(k)}$  v obliki

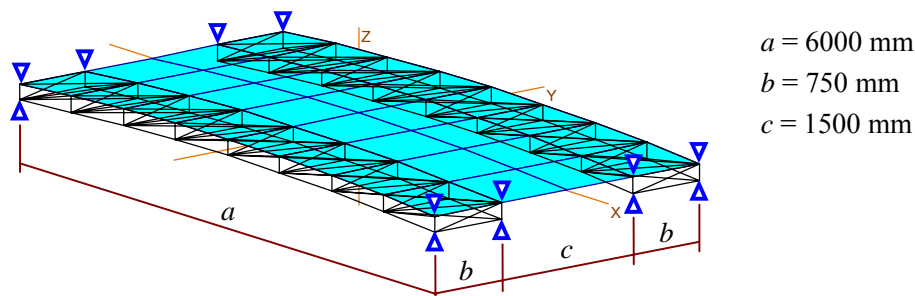
$$\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{b}}\right)^{(k)} = (1-\alpha)\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{b}}\right)_{n-1}^{(k)} + \alpha\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{b}}\right)_n^{(k)} \quad (6)$$

odvod obtežnega vektorja po  $\mathbf{b}^{(k)}$  pa napišemo kot

$$\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{b}}\right)^{(k)} = \left(\frac{\partial(\lambda\bar{\mathbf{R}})}{\partial\mathbf{b}}\right)^{(k)} = \left(\frac{d\lambda}{d\mathbf{b}}\right)^{(k)} \bar{\mathbf{R}}^{(k)} + \lambda^{(k)}\left(\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{d\mathbf{b}}\right)^{(k)} \quad (7)$$

Ker v ravnotežni legi pri kritični obtežbi velja  $\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$  in zato tudi  $\mathbf{z}^T(\partial\mathbf{F} / \partial\mathbf{b} - \partial\mathbf{R} / \partial\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ , kjer je  $\mathbf{z}$  lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti  $\alpha$ , lahko s pomočjo (6) in (7) pridemo do

$$\left(\frac{d\lambda_{krit}}{d\mathbf{b}}\right)^{(k)} = \frac{\mathbf{z}^T \left( (1-\alpha)\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{b}}\right)_{n-1}^{(k)} + \alpha\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{b}}\right)_n^{(k)} - \lambda_{krit}^{(k)}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{R}}}{\partial\mathbf{b}}\right)^{(k)} \right)}{\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}}^{(k)}} \quad (8)$$



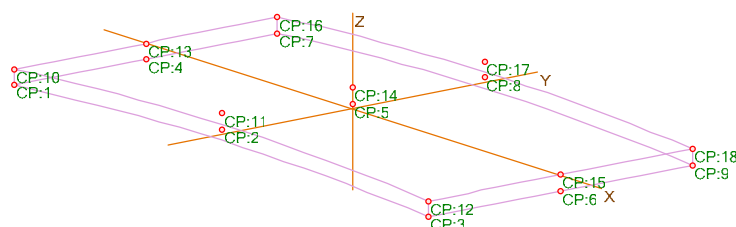
**Slika 2:** Mreža končnih elementov lupinske konstrukcije, ki je ojačana z dvema paličjema in obremenjena s površinsko obtežbo.

## 5 Numerični primer

Obravnavamo optimiranje konstrukcije, ki je sestavljena iz lupine s konstantno debelino  $t_0 = 10 \text{ mm}$  ter dveh paličij, ki sta pritrjeni na lupino na dveh njenih krajših robovih (slika 2).

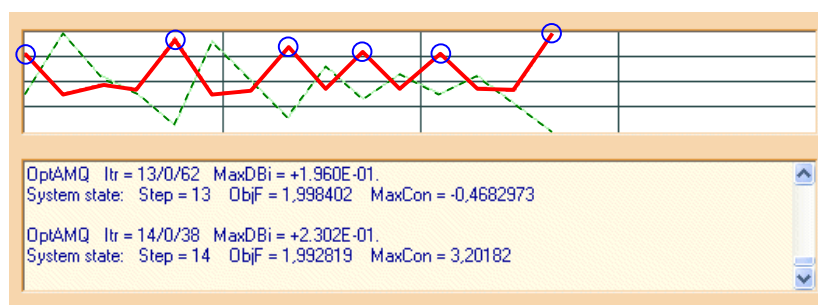
Paličji sta sestavljeni iz cevi z zunanjim polmerom 15 mm in debelino stene 1 mm. Konstrukcija je obtežena s površinsko obtežbo  $p = 10 \text{ kN/m}^2$  v  $-z$  smeri. Ostali geometrijski podatki in način podpiranja (na robovih paličnih nosilcev so preprečeni pomiki) so razvidni iz slike 2. Elastični konstanti materiala lupine in palic sta  $E = 210000 \text{ MPa}$  in  $\nu = 0.3$ .

Geometrija celotne konstrukcije je modelirana (in parametrizirana) z enim samim projektним elementom, ki ima  $3 \times 3 \times 2 = 18$  kontrolnih točk, ki so prikazane na sliki 3. Od projektних spremenljivk so odvisne le  $y$  koordinate kontrolnih točk (KT). Te so naslednje: za KT 11, 14 in 17 je  $y_A = 200 + 500b_1$ ; za KT 2 in 8 je  $y_B = y_A - 150 - 150b_2$ ; za KT 5 je  $y_C = y_A - 150 + 150b_3$ ; za KT 1, 3, 7 in 9 je  $y_D = -150 - 100b_4$ ; za KT 4 in 6 pa je  $y_E = -150 + 150b_3$ . Skupno imamo torej 4 projektne spremenljivke,  $b_1, \dots, b_4$ , ki se lahko spreminjajo v naslednjih mejah:  $0 \leq b_1 \leq 2$ ,  $-1 \leq b_2, b_3 \leq 1$  in  $-1 \leq b_4 \leq 2$ .



**Slika 3:** Kontrolne točke (CP=KP) uporabljenega projektne elementa.

Najprej poskušamo rešiti optimizacijski problem A, ki ga lahko opišemo kot: poišči takšne vrednosti projektних spremenljivk, da bo volumen cele konstrukcije (lupine in obeh paličij) minimalen, pri tem pa naj bo vertikalni pomik sredine lupine manjši od 50 mm; če pride do uklonske nestabilnosti oblik med optimizacijskim procesom, ne spremeni ničesar.

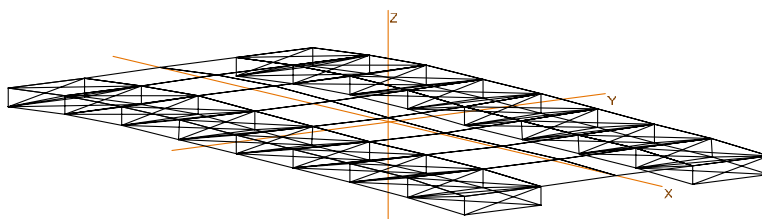


**Slika 4:** Nestabilnost običajnega optimizacijskega postopka.

Med reševanjem problema A se hitro pokaže, da postopek optimizacije oscilira, ker dobivamo med optimizacijskim procesom izmenično uklonsko stabilne in uklonsko nestabilne oblike. Na sliki 4 sta prikazani iteracijski zgodovini poteka namenske funkcije (tanka prekinjena črta) ter prekoračitve omejitvenega pogoja (debela polna črta). S krožci so

označene tiste iteracije, v katerih je bila konstrukcija pri polni obremenitvi v nestabilnem nadkritičnem območju.

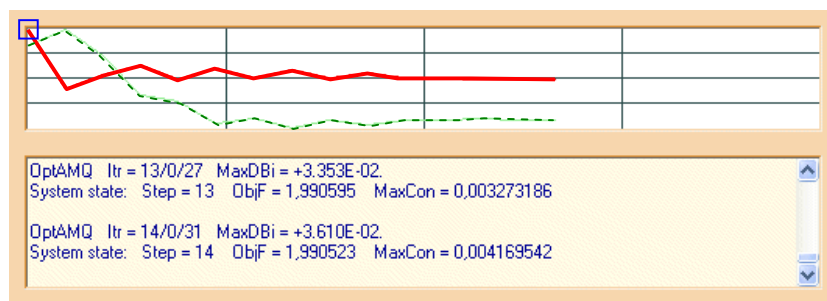
Konstrukcija se je uklonila že pri prvi analizi odziva (pri začetnih vrednostih projektnih spremenljivk); uklonjeno konstrukcijo prikazuje slika 5. Ker je bil v tej legi omejitveni pogoj za pomik precej prekoračen, je optimizacijski postopek obliko konstrukcije popravil tako, da so imele izračunane oblike v naslednjih treh iteracijah dovolj veliko nosilnost, v četrti iteraciji pa je zopet prišlo do uklona. Postopek je tako zašel v oscilacije (izmenično je »proizvajal« stabilne in nestabilne oblike konstrukcije), katerim ni bilo videti konca.



**Slika 5:** Oblika uklonjene konstrukcije po prvi analizi odziva.

Nadalje rešujemo še problem B, ki je načeloma enak kot primer A, le da sedaj med optimizacijskim procesom spremenimo postopek – na način, kot je opisano v poglavju 4 - če se pokaže, da je trenutna oblika konstrukcije uklonsko nestabilna. Po potrebi bo torej dodan pogoj za ocenjeni kritični obtežni faktor, in sicer  $\lambda_{krit} \geq 1,5$ .

Postopek reševanja dobro ilustrirata iteracijski zgodovini poteka namenske funkcije (tanka prekinjena črta) ter prekoračitve omejitvenega pogoja (debela polna črta); slika 6. Kvadratak označuje iteracijo, pri kateri je bila analiza odziva zaključena še preden je bil dosežen polni nivo obremenitve (predpisana obtežba). Iz slike je razvidno, da se je to zgodilo le pri prvi analizi odziva. Zaradi dodanega pogoja za ocenjeni kritični faktor je bila konstrukcija v vseh ostalih iteracijah dovolj stabilna, da je bila pri polni obremenitvi v podkritičnem območju.

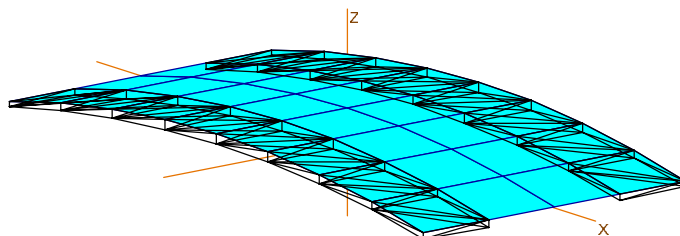


**Slika 6:** Stabilizacija optimizacijskega postopka, če se uporabi pristop iz poglavja 4.

Optimizacijski postopek je bil v primeru B torej stabilen in uspešen. Volumen konstrukcije se je sicer zmanjšal le zanemarljivo (za 1%), vendar pa sta bila na koncu



izpolnjena oba omejitvena pogoja (za pomik in za kritični obtežni faktor). Vrednosti projektnih spremenljivk so bile enake  $b_1 = 0,8512$ ,  $b_2 = -0,0479$ ,  $b_3 = 0,4473$  in  $b_4 = -1$ . Optimirana oblika konstrukcije je podana na sliki 7.



Slika 7: Optimirana oblika konstrukcije pri optimizacijskem problemu B.

## 5 Zaključek

Vredno je ponoviti, da se pri optimizaciji uporablja projektni element, ki omogoča hkratno optimiranje oblike in debeline ojačanih ploskovnih konstrukcij. Nadalje lahko rečemo, da postopek, prikazan v točki 4, omogoča učinkovito optimiranje konstrukcij, ki so občutljive na uklon. To je zagotovljeno z uporabo enostavnega postopka za oceno kritičnega obtežnega faktorja, ki zagotovi, da se analiza odziva nelinearne konstrukcije vedno konča v podkritičnem območju.

## Literatura

- [1] M. Kegl, B. Brank, M. Jaklič, *Optimiranje oblike lupinastih konstrukcij*, Kuhljevi dnevi 2004, 149-156.
- [2] M. Kegl, *Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49,1571-1588, 2000.
- [3] M. Kegl, B. Brank, *Shape optimization of truss-stiffened shell structures with variable thickness*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, sprejeto v objavo.
- [4] B. Brank, Đ. Perić, F.B. Damjanić, *On implementation of a nonlinear four node shell finite element for thin multilayered elastic shells*, Computational Mechanics, 16, 341-359, 1995.
- [5] J. Korelc, *Automatic generation of numerical codes with introduction to AceGen 4.0 symbolic code generator*, University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering, available from [www.fgg.uni-lj.si/Symech/](http://www.fgg.uni-lj.si/Symech/); 2005.
- [6] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, Wiley, 2000.



## *Zmanjšanje poligonskega efekta verižnih gonil z uporabo kardanskega zgloba*

*M. Knez<sup>1</sup>, S. Glodež<sup>1</sup>, Z. Ren<sup>1</sup>*

## *Reducing chain drive polygonal effect with use of single Cardan joint*

### **Povzetek**

V splošnem je znano, da predstavlja poligonski efekt eno od večjih slabosti verižnih gonil, saj povzroča neenakomerno hitrost verige. Vpliv poligonskega efekta na obratovanje verižnega gonila je še posebej izrazit pri majhnem številu zob verižnega zobnika oziroma pri večji delitvi členov verige.

V predloženem prispevku je predstavljena možnost zmanjšanja poligonskega efekta z uporabo enojnega kardanskega zgloba. Če vgradimo kardanski zglob skupaj z ustreznim vmesnim reduktorjem v pogonski sklop verižnega gonila, lahko v primeru majhnega števila zob verižnega zobnika ( $z \leq 7$ ) zmanjšamo poligonski efekt tudi do trikrat.

### **Abstract**

It is known that the polygonal effect is one of the more important weaknesses of chain drives, because it makes the chain speed non uniform. Its influence on the operation conditions of chain drive is significant in the case of small number of gear teeth or large pitch of chain members.

In this paper the possibility to reduce chain drive polygonal effect using single Cardan joint is presented. If single Cardan joint is located together with appropriate gear box in drive train of chain drive, the polygonal effect can be reduced approximately three times if the number of sprocket teeth is small ( $z \leq 7$ ).

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

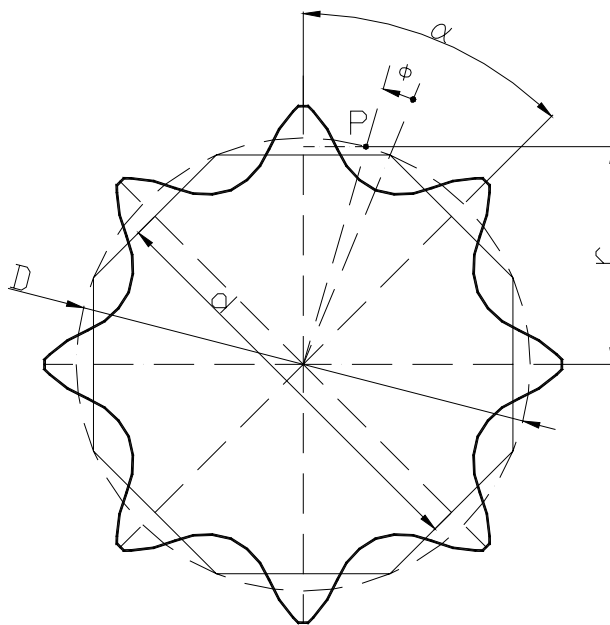
## 1 Uvod

Pri verižnih pogonih se del izgub pojavi zaradi poligonskega efekta pri natekanju verige po verižnem zobniku [1]. Vpliv poligonskega efekta narašča z manjšanjem števila zob verižnega zobnika, kar je še posebej izrazito pri večjih delitvah verige. Verige z večjimi delitvami členov največ uporabljamo pri verižnih transporterjih, kjer lahko izgube zaradi poligonskega efekta dosežejo tudi do 30% vseh izgub.

Ker se zaradi poligonskega efekta hitrost verige ciklično spreminja med največjo in najmanjšo vrednostjo, je treba za doseg enakomernejšega prenosa vrtilnega gibanja prevzeti ustrezne ukrepe, s katerimi do določene mere zmanjšamo negativen vpliv poligonskega efekta. V predloženem prispevku je prikazana možnost z vgradnjo enojnega kardanskega zgloba. Če je pri slednjem kot med osema različen od  $0^\circ$ , se pri konstantni vrtilni hitrosti gonilne gredi hitrost gnane gredi prav tako ciklično spreminja.

## 2 Poligonski efekt pri verižnem gonilu

Pri verižnih gonilih teče veriga na verižnem zobniku po mnogokotniku (slika 1), zaradi česar se položaj ubirne točke P pri vrtenju spreminja. Razdelni premer  $D$  je konstanten in je odvisen od števila zob  $z$  in vrste verige, medtem ko je premer  $d$  definiran kot [2, 3]:



**Slika 1:** Verižnik z osnovnimi izmerami.

$$d = D \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

kjer je  $\alpha$  razdelni kot, ki je definiran z izrazom  $\alpha = 360^\circ/z$ , pri čemer je  $z$  število zob verižnega zobnika. Hitrost verige je v določenem trenutku enaka

$$v = r \cdot \omega \quad (2)$$

kjer je  $\omega$  kotna hitrost verižnega zobnika.

Če privzamemo, da je kot zasuka verižnika  $\phi = 0$  pri položaju, kjer je hitrost verige najmanjša, lahko ob tej predpostavki zapišemo sledečo zvezo za hitrost verige  $v$  odvisnosti od kota zasuka  $\phi$  pri prehodu verige čez en zob:

$$v = \frac{D}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \phi\right) \cdot \omega \quad \text{za } 0 \leq \phi \leq \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

$$v = \frac{D}{2} \cdot \cos\left(\phi - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \omega \quad \text{za } \frac{\alpha}{2} \leq \phi \leq \alpha \quad (4)$$

Razmere se ciklično ponovijo za vsak zob pri ubiru verige z verižnim zobnikom. Iz gornjih enačb sledi, da je hitrost verige največja pri  $\phi = \alpha/2$  in najmanjša pri  $\phi = 0$ .

$$v_{\min} = \frac{D}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \omega \quad (5)$$

$$v_{\max} = \frac{D}{2} \cdot \omega \quad (6)$$

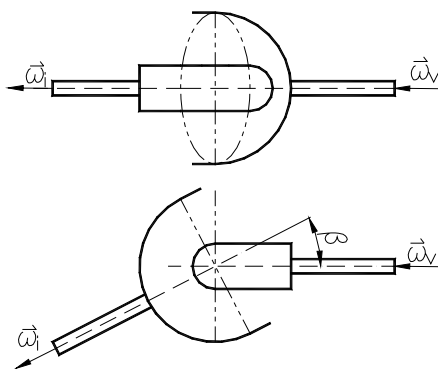
Na osnovi dobljenih ekstremnih vrednosti hitrosti po enačbah (5) in (6) definiramo razmerje hitrosti verige z izrazom:

$$R = \frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (7)$$

Razmerje hitrosti  $R$  dejansko predstavlja merilo za poligonski efekt.

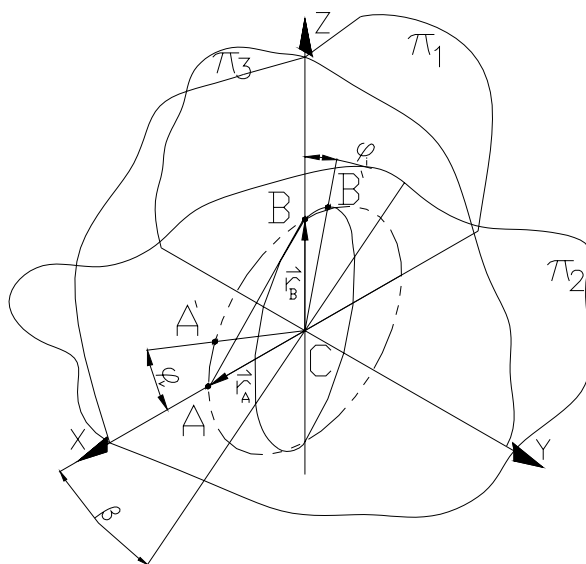
### 3 Kardanski zglob

Kardanski zglob spada v skupino mehanizmov za prenos vrtilnega gibanja med gredmi, katerih osi se sekajo. Kinematično ga lahko ponazorimo s pomočjo slike 2 [4].



**Slika 2:** Kinematična skica zgloba (desno – pogonski del, levo – odgonski del).

Razmere lahko ponazorimo v prostorskem koordinatnem sistemu (slika 3) in sicer tako, da leži os rotacije pogonskega dela na osi  $y$ , kar pomeni, da se točka  $A$ , ki leži na kraku pogonskih vilic, giblje po krožnici v ravnini  $xz$ . Os rotacije izstopnega dela leži v ravnini  $xy$  pod kotom  $\beta$  glede na vstopno os. Točka  $B$ , ki leži na kraku izstopnih vilic se giblje po krožnici, ki ima središče v izhodišču koordinatnega sistema in je glede na pot točke  $A$  zavrnjena okrog osi  $z$  za kot  $\beta$ .



**Slika 3:** Razmere na kardanskem zglobu v prostorskem kartezičnem sistemu.

Točki  $A$  in  $B$  lahko podamo kot  $A (R_v \cos \varphi_v, 0, R_v \sin \varphi_v)$  in

$B (-R_i \sin \varphi_i \cos \beta, -R_i \sin \varphi_i \sin \beta, R_i \cos \varphi_i)$ , kjer je  $R_v = |\vec{r}_A|$  in  $R_i = |\vec{r}_B|$ .

Na osnovi navedene zveze in dejstva, da sta vstopni in izstopni del toga povezana, lahko določimo zvezo med kotom zasuka vstopnega  $\varphi_v$  in izstopnega dela  $\varphi_i$ :

$$\tan \varphi_i = \frac{\tan \varphi_v}{\cos \beta} \Rightarrow \varphi_i = \arctan \left( \frac{\tan \varphi_v}{\cos \beta} \right) \quad (8)$$

Ker je pri kroženju kotna hitrost definirana kot:

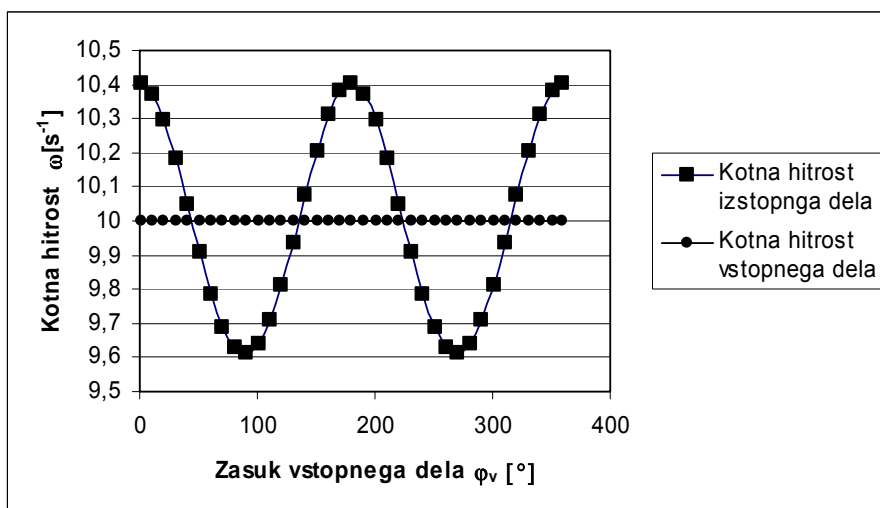
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (9)$$

lahko iz enačbe (8) izpeljemo povezavo kotnih hitrosti vstopnega in izstopnega dela kardanskega zgloba in sicer:

$$\omega_i = \frac{1}{1 + \left( \frac{\tan \varphi_v}{\cos \beta} \right)^2} \frac{1 + \tan^2 \varphi_v}{\cos \beta} \omega_v \quad (10)$$

Iz enačbe (10) je razvidno, da pri kotu med gredema  $\beta \neq 0$  kotna hitrost na izstopni gredi ni konstantna, čeprav vstopno gred poganjamo s konstantno vrtilno hitrostjo. Tako lahko z različnimi koti  $\beta$  dosežemo različne kotne hitrosti izstopne gredi (slika 4):

$$R_{ZG} = \frac{\omega_{i \max}}{\omega_{i \min}} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \quad (11)$$

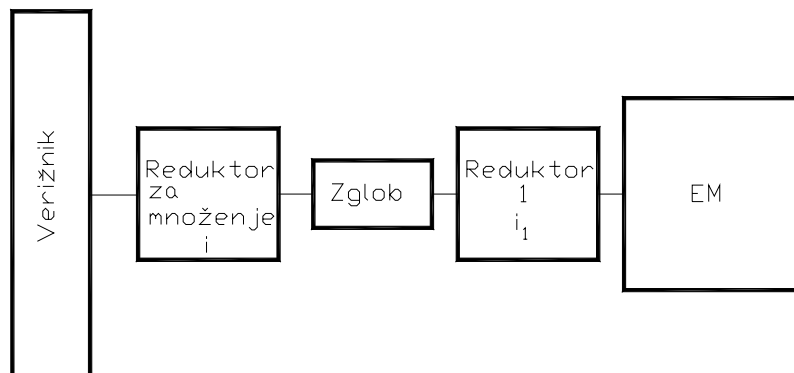


Slika 4: Potek kotnih hitrosti pri rotaciji zgloba s kotom  $\beta = 16^\circ$ .

## 4. Koncept gonila za pogon verižnega transporterja

### 4.1 Osnove

Kot je razvidno iz poglavij 2 in 3, doseže hitrost verige največjo in najmanjšo vrednost za vsak zob verižnika posebej, pri kardanskem zglobov pa se pojav pri enem zasuku vstopne gredi ponovi dvakrat. To pomeni, da mora biti med verižnikom in zglobov vgrajen ustrezen reduktor (slika 5) s prestavnim razmerjem  $i = z/2$ , kjer je  $z$  število zob verižnega zobnika.



Slika 5: Blok shema pogona.

### 4.2 Kot med gredema

Potreben kot  $\beta$  med gredema zgloba, pri katerem je poligonski efekt najmanjši, določimo iz enačb (7) in (11):

$$\beta = \arccos \sqrt{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (12)$$

Povezava zgloba preko reduktorja na verižnik mora biti izvedena tako, da je zglob v položaju z največjo hitrostjo izstopnega dela  $\varphi_v = 0$  v trenutku, ko je verižnik v položaju z najmanjšo hitrostjo verige oziroma pri  $\phi = 0$ . Zato lahko za hitrost verige pri prehodu čez en zob verižnika zapišemo enačbi:

$$v = \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{i} \arctan(\tan \varphi_v \sec \beta)\right) \frac{\sec^2(\varphi_v) \sec(\beta)}{1 + \sec^2(\beta) \tan^2 \varphi_v} \frac{\omega_v}{i}; \quad 0 \leq \frac{1}{i} \arctan\left(\frac{\tan \varphi_v}{\cos \beta}\right) \leq \frac{\alpha}{2} \quad (14)$$

$$v = \frac{D}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{i} \arctan(\tan \varphi_v \sec \beta) - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sec^2(\varphi_v) \sec(\beta)}{1 + \sec^2(\beta) \tan^2 \varphi_v} \frac{\omega_v}{i}; \quad \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{i} \arctan\left(\frac{\tan \varphi_v}{\cos \beta}\right) \leq \alpha \quad (15)$$

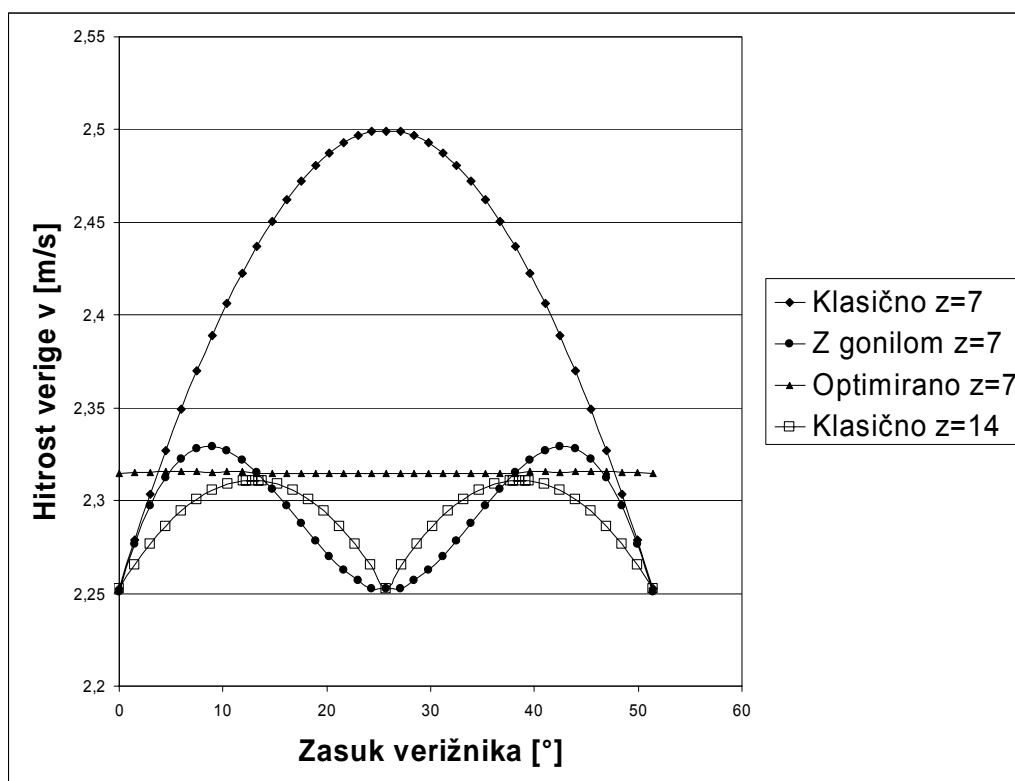
### 4.3 Praktični primer

Kot praktični primer analizirajmo hitrostne razmere na verižnem zobniku s premerom razdelnega kroga  $D = 500$  mm in številom zob  $z = 7$  (slika 6). Kotne hitrosti so izbrane tako, da je najmanjša hitrost verige v vseh primerih enaka in znaša 2,25 m/s.

Pri klasičnem pogonu brez kardanskega zgloba in vmesnega reduktorja se pri konstantni kotni hitrosti gredi verižnika  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$  hitrost verige spreminja med  $v_{\min} = 2,25$  m/s in  $v_{\max} = 2,5$  m/s, kar pomeni nihanje hitrosti verige za približno 10 %.

Z uporabo kardanskega zgloba in vmesnega reduktorja se pri konstantni kotni hitrosti vstopne gredi kardanskega zgloba  $\omega = 33,2 \text{ s}^{-1}$  hitrost verige spreminja med  $v_{\min} = 2,25$  m/s in  $v_{\max} = 2,33$  m/s, kar pomeni nihanje hitrosti verige za približno 3,4 %. Iz navedenega sledi, da je v primerjavi s klasičnim pogonom nihanje hitrosti verige približno trikrat manjše, s čimer teče veriga precej bolj mirno in enakomerno.

Na sliki 6 je prav tako prikazan potek hitrosti verige pri večjem številu zob verižnika ( $z = 14$ ), kjer znaša pri klasičnem pogonu in konstantni kotni hitrosti gredi verižnika  $\omega = 9,24 \text{ s}^{-1}$   $v_{\min} = 2,25$  m/s in  $v_{\max} = 2,32$  m/s, kar pomeni nihanje hitrosti verige za približno 3 %, prikazan pa je tudi potek hitrosti verige z uporabo sistema za prilagajanje kota zgloba.



Slika 6: Primerjava hitrostnih razmer na verižniku.



#### 4 Zaključek

V prispevku je predstavljena možnost zmanjšanja poligonskega efekta verižnih gonil z vgradnjo kardanskega zgloba in vmesnega reduktorja. Z ustrežno izbiro kota med gredema kardanskega zgloba oziroma prestavnega razmerja vmesnega reduktorja lahko pri majhnem številu zob verižnika zmanjšamo poligonski efekt tudi do trikrat. To dejansko pomeni, da teče verige precej bolj mirno in enakomerno, s čimer je zagotovljeno tudi enakomernejše delovanje naprav, ki jih verižnik poganja (na primer verižni transporter).

Iz analiziranega praktičnega primera je razvidno, da lahko poligonski efekt namesto uporabljenega kardanskega zgloba zmanjšamo tudi s povečanjem števila zob verižnega zobnika, vendar je v tem primeru potek hitrosti med posameznimi fazami nezvezen, kar je s stališča pospeškov neugodno. S slike 6 je namreč razvidno, da so pri gonilu s kardanskim zglobom pri vsakem drugem prehodu le ti zvezni in posledično potek pospeškov ugodnejši.

Neugodno spreminjanje hitrosti verige je mogoče še dodatno izboljšati z mehanskim sistemom za prilagajanje kota kardanskega zgloba, s čimer lahko dosežemo dejansko konstantno hitrost verige na izstopni gredi. Ker vse to dodatno podraži konstrukcijo, je naloga konstruktorja, da glede na zahtevano funkcionalnost celotnega konstrukcijskega sklopa zagotovi optimalno konstrukcijsko rešitev glede na zahtevano enakomernost pogona oziroma s tem pogojeno velikost in ceno konstrukcije.

#### Literatura:

- [1] Z. Ren, S. Glodež, *Strojni elementi : uvod v gonila, torna, jermenska in verižna gonila*, Maribor, Fakulteta za strojništvo, 2005.
- [2] W. Funk, *Zugmittelgetriebe*, Springer Verlag, 1995.
- [3] R. Berents, G. Maahs, H. Schiffner, H. Vogt, *Handbuch den Kettentechnik*, Arnold & Stolzenberg, 1989.
- [4] R. C. Juvinall, K. M. Marshek, *Fundamentals of Machine Component Design*, John Wiley & SONS INC., 1999.



*Postopno krivljenje ločnih nosilcev z elastično linearno utrjevalnim reološkim modelom*

**Franc Kosel<sup>1</sup>, Chen Jin<sup>2</sup>, Tadej Kosel<sup>3</sup>, Tomaž Videnič<sup>4</sup>**

**PROGRESSIVE BENDING OF ARC BEAMS WITH ELASTIC LINEAR HARDENING RHEOLOGICAL MODEL**

**Povzetek.** Prispevek obravnava ravninski upogib nosilca v elastoplastičnem območju. Določeno je elastoplastično premečno stanje nosilcev z ravno ali ločno osjo po razbremenitvi ali po postopnem obremenjevalnem in razbremenjevalnem procesu. Nosilci so obremenjeni z konstantnim upogibnim momentom  $M_0$ . Izbrani so nosilci s pravokotnim, enakokrakim trikotnim in trapeznim prerezom. Gradivo nosilcev je elastično linearno utrjevalno. Izdelan je bil tudi eksperiment. Uporabljen je bil aluminijasti nosilec pravokotnega prereza. Največja relativna napaka med eksperimentom in izračunom za primer postopnega krivljenega nosilca pravokotnega prereza je bila 1.25%.

**Abstract.** The contribution treats the plane bending process of beams in the elastoplastic domain. Elastoplastic deflection states of beams with a straight or arc longitudinal axis, after unloading or after a progressive loading and unloading bending process, are determined. The beams are loaded with a constant bending moment  $M_0$ . The selected cross sections had constant rectangular, isosceles triangular and trapezoid shapes. The beams were made of material with an elastic linear hardening rheological model. Experiments to test the bending were conducted for beams made of aluminium alloy with constant rectangular cross sections. The maximal relative difference between the results determined by experiments and the results determined analytically, for the case of curved beam with a rectangular cross section under progressive loading, was 1.25%.

## 1 Uvod

V praksi je vrsta primerov, ko se oblikuje proizvod z uporabo najrazličnejših postopkov krivljenja. V večini primerov preoblikovanja s krivljenjem se del prereza plastificira, preostali del pa se nahaja še vedno v elastičnem območju. V takšnih primerih gre za elastoplastični upogib, pri katerem nosilec po razbremenitvi ostane delno plastificiran. Nosilec se po razbremenitvi nekoliko zravna. Zavzame takšno končno premečno stanje, pri katerem je v posameznem prerezu vzdolž nosilca notranji upogibni moment zaradi elastoplastičnega napetostnega stanja v ravnotežju z upogibnim momentom zaradi elastičnih upogibnih napetosti, ki se pojavijo v prerezu nosilca kot reakcija v trenutku razbremenitve nosilca. Takšni tehnološki postopki elastoplastičnega krivljenja se uporabljajo med drugim tudi za izdelavo vijačnih vzmeti. V vseh teh primerih je zanimivo vprašanje kakšen mora biti navijalni drog ali trn, da vijačna vzmet z določenim prečnim prerezom po razbremenitvi preide v vnaprej določen premer. V tem prispevku smo se omejili na takšne tehnološke primere krivljenja, pri katerih je notranji upogibni moment vzdolž nosilca konstanten. Takšen primer predstavlja med drugim tudi izdelava vijačnih vzmeti s konstantnim vsaj enkrat simetričnim prerezom.

Zelo pogosto imajo gradiva nosilcev, ki so namenjena za takšno elastoplastično krivljenje, elastično linearno ali nelinearno utrjevalno karakteristiko v napetostno deformacijskem diagramu  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ ,

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Chongqing Architecture University, Faculty of Mechanical Engineering, China

<sup>3</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

<sup>4</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

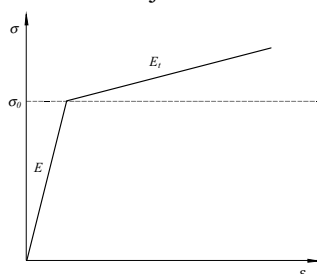
kar pomeni da se takšna gradiva med procesom plastifikacije tudi utrjujejo.

V prispevku bomo obravnavali nosilce z ravno osjo kakor tudi nosilce z ukrivljeno osjo, kjer os nosilca predstavlja del krožnice. V primeru začetno ukrivljenih nosilcev smo upoštevali, da se je začetna ukrivljenost dosegla s predhodnim elastoplastičnim krivljenjem, in da se je pri tem gradivo tudi utrdilo. Zaradi določenih predpostavk in poenostavitvev pri tvorbi fizikalnega modela elastoplastičnega krivljenja so bili izdelani tudi preizkusi. Zanimiv primer elastoplastičnega krivljenja je tudi ravnanje krivih nosilcev, kjer se pojavi vprašanje na kakšen radij je v nasprotni smeri potrebno kriviti nosilec, da se po razbremenitvi os nosilca zravna.

## 2 Formulacija problema

Fizikalni model elastoplastičnega krivljenja je izdelan na osnovi nekaterih predpostavk, ki omogočajo nekoliko preprostejšo matematično formulacijo obravnavanega problema krivljenja. Uporabljene predpostavke in poenostavitve so naslednje:

- prerez nosilca mora imeti vsaj eno simetrijsko os
- vektor notranjega upogibnega momenta deluje v y-osi, ki je pravokotna na z-os, ki je simetrala prereza
- razbremenitev sledi elastičnemu delu napetostno deformacijske funkcije
- os nosilca je pred krivljenjem ravna ali del krožnega loka
- začetno ukrivljenost nosilca se doseže z predhodnim krivljenjem nosilca z ravno osjo

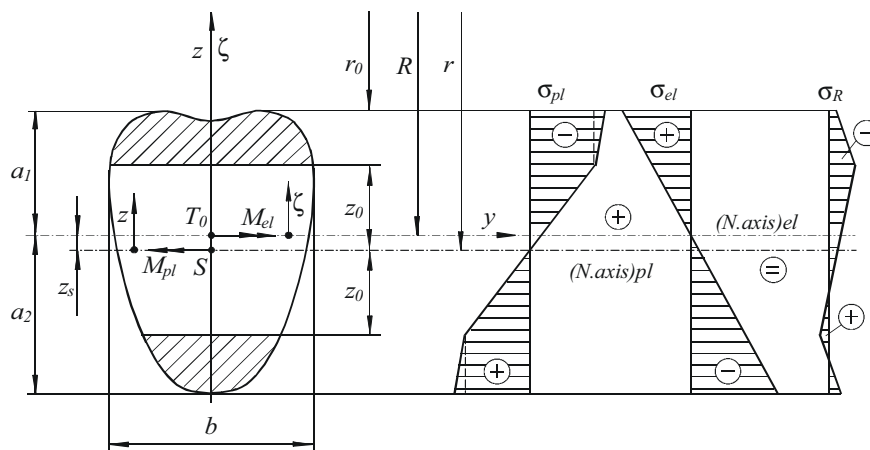


- gradivo je homogeno in izotropno
- reološki model gradiva ima elastično linearno utrjevalno karakteristiko, sl. 1
- notranji upogibni moment je vzdolž osi nosilca konstanten
- veljavnost Bernoulli – Navier-jeve hipoteze

**Slika 1.** Funkcija  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  za elastično linearno utrjevalno gradivo

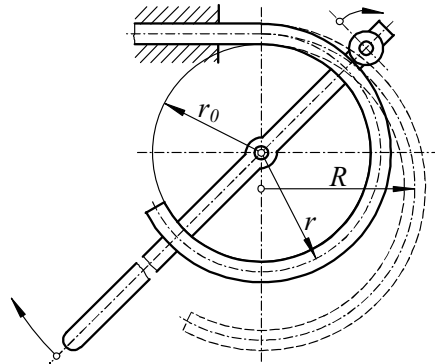
V primeru elastoplastičnega upogiba nevtralna os  $z_s$ , ne sovпада s težiščnico pri takšnih oblikah prerezov nosilca, kjer y os ni simetrala prereza, sl.2. Lega nevtralne osi je določena iz pogoja, da mora biti notranja osna sila zaradi upogibnih napetosti v poljubnem prerezu nosilca enaka nič, [1].

$$N = \int_A \sigma_{pl}(z) dA(z) = 0 \quad (1)$$



**Slika 2.** Upogibne napetosti v prerezu nosilca

V praksi in pri izvedbi preizkusa se doseže, da je upogibni moment vzdolž osi (x) nosilca konstanten tako, da se krivljenje izvaja na posebni krivilni pripravi, ki je sestavljena iz okrogle plošče z radijem  $r_0$  na katero se položi raven ali ločni nosilec, ki se ga s pomočjo vzvoda in pritisnega manjšega vrtljivega kolesčka ukrivi na krožni plošči. Shematični prikaz krivilne naprave je razviden iz sl.3, [2].



Slika 3. Shematični prikaz krivilne naprave

Ko je krivljenje nosilca končano, se odstrani vzvod s pritisnim kolesčkom, tako se nosilec razbremeni in sprosti. Po prehodnem pojavu po procesu razbremenjevanja se zaradi elastoplastičnega napetostnega stanja nosilec nekoliko zravna, tako da preide v takšno končno premično stanje, pri katerem je rezultirajoča napetost  $\sigma_R$  v prerezu nosilca takšna, da je rezultirajoči moment  $M_R$  enak nič, sl.2.

$$M_R = \int_A \sigma_R(z) z dA(z) = 0 \quad (2)$$

kjer je rezultirajoča zaostala napetost po procesu razbremenitve in delne izravnave enaka, [3].

$$\sigma_R(z) = \sigma_{pl}(z) - \sigma_{el}(z) = \sigma_{pl}(z) - M_{el}(z - z_0)/I \quad (3)$$

kjer je, [2] :  $\sigma_{el}(\zeta)_i = (\sigma_0/z_{0i} - E/\rho_d) \zeta$

### 3 Določitev končnega krivinskega radija po razbremenitvi

V primeru, ko je notranji upogibni moment vzdolž nosilca z ravno osjo  $R_z = \infty$  ali krožnega nosilca, katerega os je del krožnice z radijem  $R_z$ , konstanten,  $M_y = M_{pl} = -M_0 = \text{konst.}$ , je tudi krivinski radij  $r$  osi deformiranega nosilca pri delovanju takšnega momenta, konstanten, kot sledi, sl.2 in sl.3:

$$1/r = M_0/EI_y + 1/R_z \quad , \text{ kjer je } r = r_0 + a_1 + z_s. \quad (4)$$

Po razbremenitvi se nosilcu zaradi vpliva elastičnega dela napetosti v prerezu, ukrivljenost zmanjša za povračljiv del  $1/R_{el}$ . Končno premično stanje nosilca v takšnem primeru predstavlja nosilec, katerega os je del krožnice z radijem  $R$ . S tem je končna sprememba ukrivljenosti po razbremenitvi enaka

$$1/\rho = 1/R - 1/R_z = 1/r - 1/R_z + 1/R_{el}. \quad (5)$$

V primeru, ko ima os nosilca začetno ukrivljenost  $1/R_z$ , predpostavimo, da je imel nosilec predhodno ravno os in je bil že vsaj enkrat elastoplastično krivljen na takšen radij  $r = r^1 = r_0 + a_1 + z_{si}^1$ , pri katerem je po razbremenitvi ukrivljenost osi nosilca enaka  $1/R_z$ . V tem primeru je bil prerez nosilca predhodno plastificiran do globine  $z_0^1 = r^1 \sigma_0/E$ . Zaradi tega krivljenja nosilca z začetno ukrivljenostjo  $1/R_z$  lahko smatramo, kot nadaljevanje krivljenja na manjši radij. Tako lahko tudi posplošimo nadaljna krivljenja na manjše radije,  $i \geq 2$ . Krivljenje nosilca z ravno osjo predstavlja primer  $i = 1$  in  $R_z = R_{i-1} = R_0 = \infty$ . Pri  $i$ -tem krivljenju je predhodni krivinski radij  $R_z = R_{i-1}$ , končni radij po razbremenitvi  $R = R_i$  in sprememba ukrivljenosti po razbremenitvi:  $1/\rho_i = 1/R_i - 1/R_{i-1}$ .

Funkcija napetostnega stanja v elastoplastičnem območju pri  $i$ -tem krivljenju  $\sigma_{pl}(z)_i$  v stanju, ko je nosilec obremenjen z upogibnim momentom  $M_{pi}$ , je v posameznih delih prereza za izbrano gradivo z elastično linearno utrjevalnim reološkim modelom enaka

$$\begin{aligned} \sigma_{pl}(z)_i &= \sigma_0 - E_t k_i (z + z_{0i}); & -(a_2 - z_{si}) \leq z \leq -z_{0i} \\ \sigma_{pl}(z)_i &= -E k_i z; & |z| \leq z_{0i} \\ \sigma_{pl}(z)_i &= -[\sigma_0 + E_t k_i (z - z_{0i})]; & z_{0i} \leq z \leq (a_1 + z_{si}) \end{aligned} \quad (6)$$

kjer je sprememba ukrivljenosti glede na nevtralno os prereza z radijem  $r = r_i = r_{0i} + a_1 + z_{si}$  in radijem orodja  $r_{0i}$  enaka  $k_i = 1/r_i - 1/R_{i-1}$ .

Končni krivinski radij  $R_i$  sledi iz enačbe (2), ob upoštevanju izrazov (3) in (6)

$$R_i = \frac{1}{f(\sigma_0, z_{0i}, z_{si}, r_i, k_i, E, E_t, A) + \frac{1}{R_{i-1}}}, \quad (7)$$

kjer pomeni

$$\begin{aligned} f(\sigma_0, z_{0i}, z_{si}, r_i, k_i, E, E_t, A) &= \frac{1}{\int_{-a_2}^{+a_1} E \zeta^2 dA(\zeta)} \left\{ \int_{-a_2}^{+a_1} \frac{\sigma_0}{z_{0i}} \zeta^2 dA(\zeta) - \int_{-z_{0i}}^{+z_{0i}} E k_i z^2 dA(z) + \right. \\ &+ \left. \int_{-(a_2 - z_{si})}^{-z_{0i}} [\sigma_0 - E_t k_i (z + z_{0i})] z dA(z) - \int_{z_{0i}}^{a_1 + z_{si}} [\sigma_0 + E_t k_i (z - z_{0i})] z dA(z) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

V primeru, da je nosilec predhodno krivljen na radij  $R_z = R_{i-1}$ , pri čemer se je gradivo tudi utrdilo, se določi razdalja med nevtralno osjo in težiščem prereza po  $i$ -tem krivljenju  $z_{si}$  postopoma. V tem primeru se najprej izračuna lega nevtralne osi glede na težišče prereza  $z_{si}^1$ , ki se pojavi v primeru ko raven nosilec  $R_z^0 = R_{i-1}^0 = \infty$  krivimo na radij osi nosilca  $r_i^1 = r_{0i}^1 + a_1 + z_{si}^1$ , kjer je  $r_{0i}^1$  velikost radija krivilnega orodja, pri katerem preide os nosilca po razbremenitvi ravno v krožnico z radijem  $R_z = R_{i-1}$ . V enačbi za notranjo osno silo (1) in v izrazu za končni radij (7) se upošteva ukrivljenost  $k_i = 1/r_i^1 = k_i^1$ . Poleg tega se za končni radij v izrazu (7) izbere začetni radij, torej  $R_i = R_z$ , in za začetni radij  $R_{i-1}^0 = \infty$ ,

Iz tako tvorjenih enačb se določita  $r_i^1$  in  $z_{si}^1$ . Začetna razdalja  $z_{si}^1$  predstavlja prvi približek, ki se vstavi v enačbo (7) iz katere se izračuna prvi približek končnega radija osi nosilca  $R_i^1$ , ki je bil že predhodno ukrivljen na radij  $R_{i-1}$ , oziroma je imel začetno ukrivljenost  $1/R_z$ . Postopek se lahko ponovi, za drugi korak vstavimo v enačbi (1) in (7)  $r_i^2$ ,  $k_i = 1/r_i^2 = k_i^2$  in  $z_{si} = z_{si}^2$ , kjer je  $r = r_i^2 = r_{0i}^2 + a_1 + z_{si}^2$ . Za končni radij se izbere pravkar izračunani prvi približek  $R_i^1$ , medtem, ko se ponovno za začetni radij izbere  $R_{i-1}^1 = \infty$ , pri k-tem koraku se določita radij  $r_i^k$  in  $z_{si}^k$ , ki se vstavita v enačbo (7) iz katere se izračuna k-ti približek končnega radija osi nosilca  $R_i^k$ . Postopek se ponavlja pri vsakem nadaljnem i-tem krivljenju,  $i \geq 2$ , dokler se ne doseže predpisane napake  $\delta$ , in sicer:  $|R_i^k - R_i^{k-1}| \leq \delta$  in odtod  $R_i \approx R_i^k$ ,  $r_i = r_i^k$  in tudi  $z_{si} \approx z_{si}^k$ , napako  $\delta = 10^{-3}$  se doseže pri  $k = 3$ .

Zanimivo je tudi določiti ravnalni radij  $r_r$  na katerega se mora v nasprotni smeri kriviti nosilec z začetno ukrivljenostjo  $R_{i-1} = R_z$ , tako da se po elastoplastičnem krivljenju os nosilca zravna. V tem primeru je končni radij po razbremenitvi  $R_i = \infty$ , iz enačb (7) in (8) sledi:

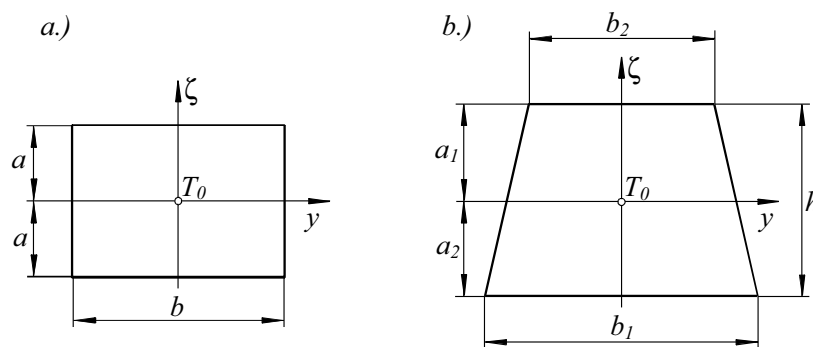
$$f(\sigma_0, z_0, z_s, r^r, k_r, E, E_t, A) + \frac{1}{R_z} = 0, \quad (9)$$

odkoder se določi ukrivljenost  $k_r = 1/r^r - 1/R_z$ , oziroma radij krivilnega orodja

$$r_0^r = 1/(k_r + 1/R_z) - a_1 - z_s. \quad (10)$$

#### 4 Primeri elastoplastičnega upogiba

Kot primeri uporabe zgornjih enačb so izbrani nosilci s pravokotnim, enakokrakim trapeznim in enakokrakim trikotnim prerezem, sl.4.



Slika 4. Geometrija prerezov nosilca

##### 4.1. Pravokotni prerez nosilca

Končni radij  $R_i$  po razbremenitvi je iz enačbe (7) enak, sl. 4a

$$R_i = \frac{1}{\left[ k_i - \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_0}{Ea} \right) + \frac{1}{2k_i^2} \left( \frac{\sigma_0}{Ea} \right)^3 \right] \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) + \frac{1}{R_{i-1}}} \quad (11)$$

in iz enačbe (9) tudi izravnalni radij  $r_0^r$

$$\left[ k_r - \frac{3}{2} \left( \frac{\sigma_0}{Ea} \right) + \frac{1}{2k_r^2} \left( \frac{\sigma_0}{Ea} \right)^3 \right] \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) + \frac{1}{R_z} = 0. \quad (12)$$

#### 4.2. Enakokraki trapezni in enakokraki trikotni prerez nosilca

Ker je v tem primeru prerez nosilca nesimetričen na y-os, nevtralna os ne sovpa s težiščnico prereza, torej velja  $z_s \neq 0$ ,  $\zeta \neq z$ , sl.2 in sl.4b. Iz enačbe (1) izhaja enačba za izračun lege nevtralne osi  $z_{si}$ , ki ima po ureditvi za i-to postopno krivljenje, obliko

$$\begin{aligned} & z_{si}^2 \frac{a}{h} \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) + z_{si} \left\{ \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) 2 \left( \frac{a}{h} a_1 + b_2 \right) + \frac{E_t k_i}{\sigma_0} \left[ (a_1 + a_2) \left( \frac{a}{h} a_1 + b_2 \right) + \frac{a}{h} \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} \right] \right\} - \\ & - \left\{ \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \left[ (a_2 - a_1) \left( \frac{a}{h} a_1 + b_2 \right) + \frac{a}{h} \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \right] + \frac{E_t k_i}{\sigma_0} \left[ \frac{a}{3h} \left( \frac{\sigma_0}{E k_i} \right)^3 + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} \left( \frac{a}{h} a_1 + b_2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{a}{h} \frac{a_1^3 + a_2^3}{3} \right] - \frac{a}{3h} \left( \frac{\sigma_0}{E k_i} \right)^2 \right\} = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

kjer je  $k_i = 1/r_1 - 1/R_{i-1}$  in  $a = b_1 - b_2$ .

Iz enačbe (7) izhaja izraz za končni radij

$$\begin{aligned} R_i = & \frac{1}{\frac{12k_i \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right)}{\frac{b_1 - b_2}{h} [a_1^4 + a_2^3(4a_1 + 3a_2)] + 4b_2(a_1^3 + a_2^3)} \left\{ \left[ b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} (a_1 + z_{si}) \right] \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_0}{E k_i} \right)^3 - \right. \right.} \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_0}{E k_i} \right) \left[ (a_1 + z_{si})^2 + (a_2 - z_{si})^2 \right] \right] + \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_0}{E k_i} \right) \frac{b_1 - b_2}{h} \left[ (a_1 + z_{si})^3 - (a_2 - z_{si})^3 \right] \right\} +} \\ & \frac{1}{+k_i \left\{ 1 - \frac{E_t}{E} \frac{\frac{b_1 - b_2}{h} \left[ (a_1 + z_{si})^4 + (a_2 - z_{si})^3(4a_1 + 3a_2 + z_{si}) \right] + 4b_2 \left[ (a_1 + z_{si})^3 + (a_2 - z_{si})^3 \right]}{\frac{b_1 - b_2}{h} [a_1^4 + a_2^3(4a_1 + 3a_2)] + 4b_2 [a_1^3 + a_2^3]} \right\} + \frac{1}{R_{i-1}}} \quad (14) \end{aligned}$$

Če v zgornji enačbi za enakokraki trapez izberemo  $b_2 = 0$ , dobimo tudi izraz za izračun končnega radija za enakokrak trikotnik, za  $b_1 = b_2 = b$  pa tudi izraz, ki je enak enačbi (11) za pravokotnik.

## 5 Številčni primeri

Za numerično vrednotenje je bila izbrana aluminijeva zlitina. Izbrani so bili primeri nosilcev pravokotnega prereza z izmerami:  $a = 1.5$  mm,  $b = 20$  mm, in primeri enakokrakega trapeznega prereza z izmerami:  $b_1 = 5$  mm,  $b_2 = 1.5$  mm,  $h = 3$  mm. Srednje vrednosti izmerjenih mehanskih lastnosti AL- zlitine so: Youngov modul  $E = 67910$  N/mm<sup>2</sup>, tangenti modul v plastičnem območju  $E_t = 550$  N/mm<sup>2</sup> in meja plastičnosti  $\sigma_y = 199.77$  N/mm<sup>2</sup>. Rezultati izračuna so razvidni iz Tabel 1 in 2.

**Tabela 1** Izračun krivljenja nosilca s pravokotnim prerezom

$R_z$ [mm]	$r_0$ [mm]	$z_0$ [mm]	$i$	$R$ [mm]
$\infty$	110	0,328	1	165,987
	60	0,181	1	75,616
	37,5	0,115	1	44,403
$\infty$	110	0,328	1	165,987
165,98	60	0,180	2	75,216
75,21	37,5	0,114	3	44,155
Radij krivilnega orodja za izravnavo nosilca		$R_z$ [mm]	$r_0^r$ [mm]	
$R = \infty$		165,987	386,781	
		75,616	355,779	
		44,403	362,398	

**Tabela 2** Izračun krivljenja nosilca z enakokrakim trapeznim prerezom

	$r_0$ [mm]	$z_s$ [mm]	$z_0$ [mm]	$i$	$R$ [mm]
$\infty$	110	0,089	0,509	1	229,490
	60	0,094	0,282	1	88,823
	37,5	0,091	0,179	1	49,416
$\infty$	110	0,089	0,509	1	229,490
229,491	60	0,093	0,279	2	87,551
87,552	37,5	0,094	0,177	3	48,606
Radij krivilnega orodja za izravnavo nosilca		$z_s$ [mm]	$R_z$ [mm]	$r_0^r$ [mm]	
$R = \infty$		0,089	229,491	542,793	
		0,094	88,823	243,736	
		0,091	49,417	240,907	

## 6 Izdelava preizkusov in primerjava rezultatov

S ciljem, da bi lahko preverili rezultate izračuna, so bili izdelani tudi preizkusi na napravi ki omogoča takšno krivljenje, da je notranji upogibni moment konstanten vzdolž osi nosilca. Naprava omogoča zamenjavo krivilnih plošč z radiji  $r_0 = 110$  mm, 60 mm in 37,5 mm, kar omogoča tudi postopno krivljenje na manjših radijih.

Slika 5 predstavlja krivljenje nosilcev pravokotnega prereza z ravno osjo na radij orodja  $r_0 = 110$  mm, medtem ko slika 6 predstavlja drugo nadaljevalno krivljenje nosilca pravokotnega prereza na radij orodja  $r_0 = 60$  mm, torej nosilec je bil predhodno krivljen na radij po razbremenitvi  $R = 166$  mm.



**Slika 5.** Krivljenje nosilcev pravokotnega prereza z ravno osjo na radij orodja  $r_0 = 110$  mm  
Začetni radij:  $R_z = \infty$  mm



**Slika 6.** Drugo nadaljevalno krivljenje nosilca na radij orodja  $r_0 = 60$  mm.  
Začetni radij:  $R_z = 166$  mm



V Tabeli 3 so predstavljeni rezultati meritev končnih krivinskih radijev nosilcev s pravokotnim prereзом  $2axb = 3x20$  mm pri postopnem krivljenju.

**Tabela 3.** Končni krivinski radiji pri postopnem krivljenju

$R_z$ [mm]	$r_0$ [mm]	$(R_{ex})_1$ [mm]	$(R_{ex})_2$ [mm]	$(R_{ex})_3$ [mm]
$\infty$	110	165,7	170,0	168,5
168,07	60	75,3	74,8	74,5
74,87	37,5	44,0	44,0	44,2

V Tabeli 4 so zbrani rezultati postopnega krivljenja nosilcev pravokotnega prereza. Iz primerjave rezultatov izračuna in srednjo vrednostjo meritev  $R_{ex}$  je razvidno relativno odstopanje  $\delta_1$  v %,  $\delta_1 = 100 |R_t - R_{ex}| / R_t$ .

**Tabela 4.** Primerjava rezultatov izračuna in meritev

$R_t$ [mm]	$R_{ex}$ [mm]	$\delta_1$ [ % ]
165,99	168,07	1,25
75,22	74,87	0,50
44,15	44,07	0,30

## 7 Zaključek

V članku so določeni analitični izrazi v zaključeni obliki z opisom postopka za izračun končnega krivinskega radija nosilca s konstantnim prereзом vzdolž osi. Zahteva, da mora biti prerez nosilca simetričen vsaj na os (z) zagotavlja, da je nosilec po razbremenitvi deformiran v ravnini (x,z). Izrazi za izračun končnih krivinskih radijev po razbremenitvi so urejeni tako, da je preprosto razviden vpliv linearnega utrjevanja prereza nosilca v plastičnem območju. Primerjava med izračunanimi in izmerjenimi rezultati je predstavljena z relativno napako  $\delta_1$ . V primeru postopnega krivljenja nosilca pravokotnega prereza z začetno ravno osjo je največja relativna napaka med izračunanimi in izmerjenimi končnimi radiji po razbremenitvi enaka 1,25 %. Iz Tabel 1 in 2 je tudi razvidno, da je razlika relativno majhna med končnimi radiji R po razbremenitvi med krivljenjem nosilcev z ravno osjo in nosilci, ki so bili postopno krivljeni. Zanimivi so tudi primeri izravnalnega krivljenja, ko se postopno krivljen nosilec zakrivi v nasprotno smer in se po razbremenitvi zravna.

## 8 Navedenke

- [1] Reckling K. A., Plstizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme, Springer-Verlag, Berlin, 1967
- [2] Kosel, F., Borštnik, I., Upogib nosilcev s konstantnim prereзом v elasto-plastičnem območju. *Stroj. vestn.*, 1979, letn. 25, št. 9/10, str. 205-208. [COBISS.SI-ID 4289051] JCR IF (1998): 0.024; SE, x: 0.421 (89/95), engineering, mechanical
- [3] Kosel F., Jevšnikar S., Petrišič J., Upogib nosilca iz gradiva z elastično-linearno utrjevalno karakteristiko, Zbornik del Kuhljevi dnevi '98. str. 9 – 16.



## *Eksperimentalno spremljanje poteka temperature v dinamično obremenjenem konzolnem nosilcu*

*F. Kosel<sup>1</sup> in J. Stropnik<sup>2</sup>*

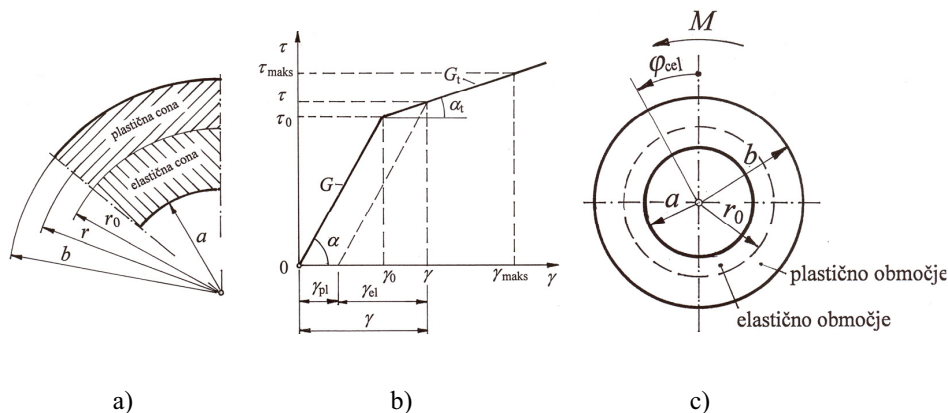
### *Experimental monitoring of the temperature flow in dynamically loaded cantilever beam*

**Povzetek.** Na preizkušancu - konzolnem nosilcu tankostenskega kolobarnega prereza iz aluminija, ki je obremenjen dinamično s torzijskim momentom, je bil spremljan in merjen časovni potek temperature, ki je posledica generacije toplote v konzolnem nosilcu. Z napravo, ki je bila v ta namen konstruirana in izdelana, je bilo mogoče spreminjati amplitudo in frekvenco torzijskega momenta in na ta način vplivati na generacijo toplote v nosilcu. S sodobno registrirno napravo za merjenje in vrednotenje temperature je bil spremljan potek temperature v nosilcu vse do njegove porušitve.

**Abstract.** On the sample thin walled aluminium cantilever beam with a circular fringe cross section loaded with a dynamical torque, the temperature change as the effect of the heat generation in the cantilever beam was being monitored and measured. With a device constructed and produced for this particular purpose it was possible to modify the amplitude and frequency of the torque and consequently influence the heat generation in the cantilever beam. With a modern temperature registration instrument temperature changes were measured and evaluated up to the final destruction of the cantilever beam.

## 1 Elasto-plastična torzija in generacija toplote

Obravnavamo torzijsko obremenjen nosilec kolobarnega prereza, katerega material ima elastičen in linearno utrjevalni reološki model, kakor je podano z napetostno deformacijskim diagramom  $\tau(\gamma)$  na sliki 1. Prerez je v elastičnem območju, dokler napetosti



Slika 1: Diagram  $\tau - \gamma$  in prerez nosilca.

<sup>1,2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

na zunanjem robu ( $r = b$ ) ne prekoračijo meje tečenja  $\tau_0$ . S povečano obremenitvijo se plastično območje širi z zunanjega roba proti notranjosti do polmera  $r_0$  [5]. Z večanjem obremenitve se veča plastično območje, dokler ne zavzame celotnega prereza, ki ga imenujemo plastični členek.

Celotna strižna deformacija v elasto plastičnem območju je sestavljena iz elastičnih in plastičnih deformacij, torej

$$\gamma(r) = \frac{\tau_0}{G} + \frac{\tau(r) - \tau_0}{G_t} \quad (1)$$

kjer je  $\tau(r)$  napetost na oddaljenosti  $r$  (slika 1a),  $G$  strižni modul in  $G_t$  tangenti strižni modul materiala (slika 1 b).

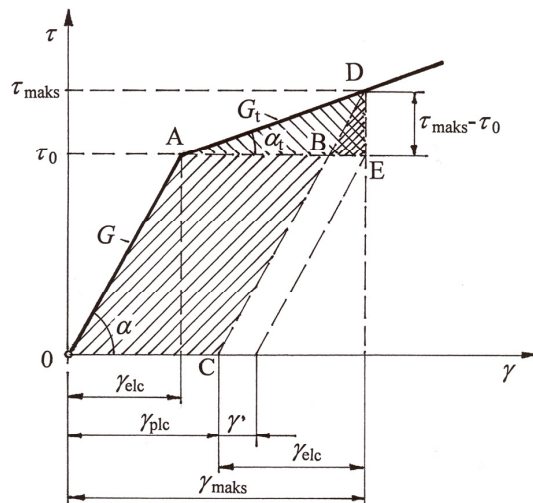
Nosilec obremenimo s torzijskim momentom  $M$ , zaradi katerega se v zunanjem vlaknu generira napetost  $\tau_{maks}$ . V tem primeru se v nosilec vloži prostorninsko preobrazno delo  $W_{pV}$  [4], ki je proporcionalno ploščini OADC na sliki 2.

$$W_{pV} = \tau_0 \cdot \gamma_{plc} + \frac{1}{2} (\tau_{maks} - \tau_0) \cdot (\gamma_{maks} - \gamma_{el}) - \gamma' \cdot \frac{1}{2} (\tau_{maks} - \tau_0) \quad (2)$$

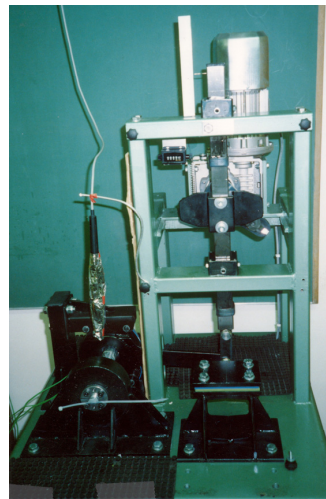
Po ureditvi dobi enačba preobraznega dela (2) zapis, ki je podan z enačbo (3).

$$W_{pV} = \left[ \gamma_{maks} - \frac{G_t}{G} \left( \gamma_{maks} - \frac{\tau_0}{G} \right) - \frac{\tau_0}{G} \right] \cdot \left[ \tau_0 + \frac{1}{2} G_t \left( \gamma_{maks} - \frac{\tau_0}{G} \right) \right] \quad (3)$$

Predpostavljamo, da se to delo v celoti pretvori v toploto. Pri enkratni obremenitvi nosilca je količina proizvedene toplote sorazmerno majhna, ko pa obremenitev večkrat ponovimo se generira tolikšna količina toplote, da jo je z uporabo sodobne elektronske merilne opreme mogoče zaznati kot povišano temperaturo nosilca.



Slika 2: Preobrazno delo.

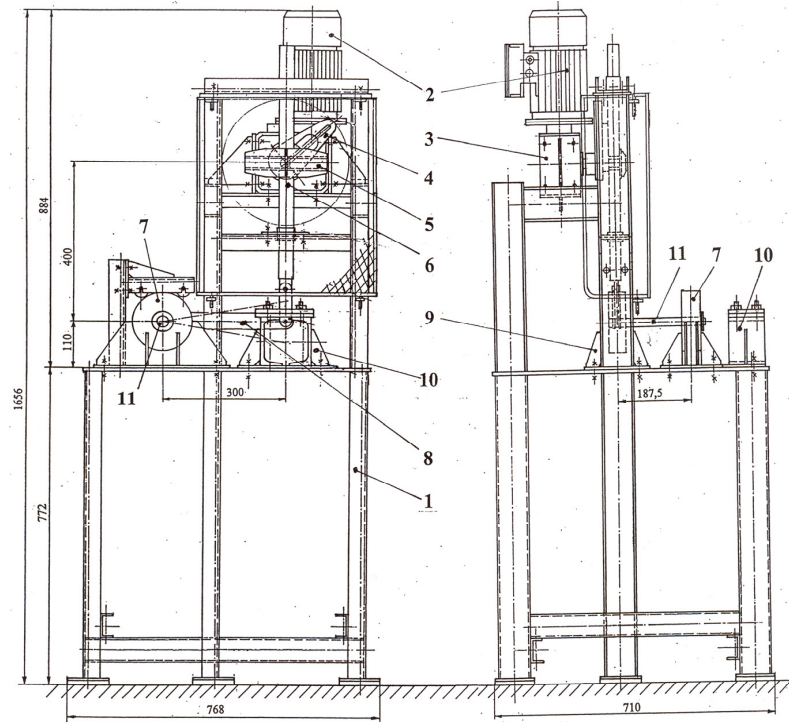


Slika 3: Preizkuševalna naprava.

## 2 Opis preizkuševalne naprave

Na osnovi predvidenega preobraznega dela, ob upoštevanju mehanskih lastnosti materiala, razpoložljivih dimenzijah kovinskih polproizvodov in opravljenih preliminarnih izračunih [1],[2],[3] je bila izbrana velikost preizkušanca, izračunan največji torzijski moment in zasuk preizkušanca ter konstruirana preizkuševalna naprava (slika 3). Naprava je namenjena dinamičnemu obremenjevanju konzolnega nosilca in je prirejena tako za upogibna kakor tudi torzijska obremenjevanja preizkušanca. Naprava je bila konstruirana v

Laboratoriju za nelinearno mehaniko na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani in izdelana v Orodjarstvu P. Puc, Logatec. Na sliki 4 so prikazani sestavni deli naprave: nosilno ogrodje (1), elektromotor Bonfiglioli BN 71 B4 B5 z zavoro, moči 0,37 kW (2), reduktor Bonfiglioli W63 07/S (3), izsrednik (4), ovozni mehanizem (5), pehalo (6), nepomična podpora torzijskega preizkušanca (7), ročica (8), vrtljiva podpora (9) in vpenjalna naprava upogibnih preizkušancev (10). V napravi je pritrjen torzijski preizkušanec (11). Na napravi je vgrajen frekvenčni pretvornik GSX 600 – 0,4 S P – 0,4 kW za spreminjanje vrtilnih frekvenc elektromotorja in mehanska registrirna naprava hodov pehala. Za merjenje amplitud pehala rabi merilna urica, za merjenje časa in temperatur pa merilno-registrirna naprava temperature in prenosni računalnik s programsko opremo (slika 5).



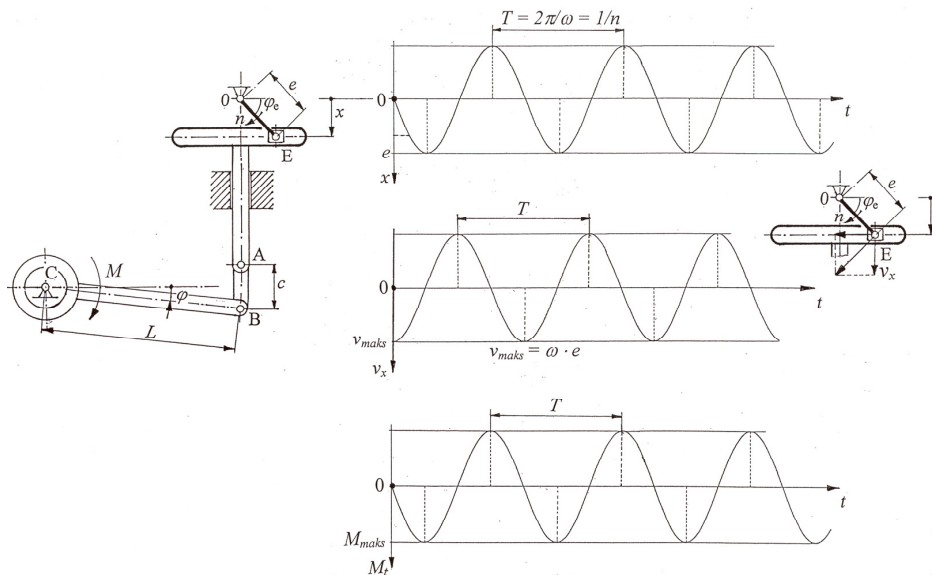
Slika 4: Sestavni deli preizkuševalne naprave.



Slika 5: Merilno-registrirna naprava z računalnikom.

Za torzijska obremenjevanja je vpenjalna naprava preizkušanca prilagojena tankostenskem kolobarnemu prerezu, za upogibna obremenjevanja pa pravokotnemu prerezu.

Dinamično obremenitev preizkušanca je bilo mogoče spreminjati po velikosti amplitude in frekvenci. Amplitudna vrednost obremenitve preizkušanca je bila odvisna od nastavitve dolžine  $e$  ročice OE na ovoznom mehanizmu (slika 6). Gibanje ovoze je bilo harmonično, njen pomik je  $x(t) = e \sin \omega t$ , prav tako hitrost  $v_x(t)$  in obremenitev  $M(t)$  preizkušanca.



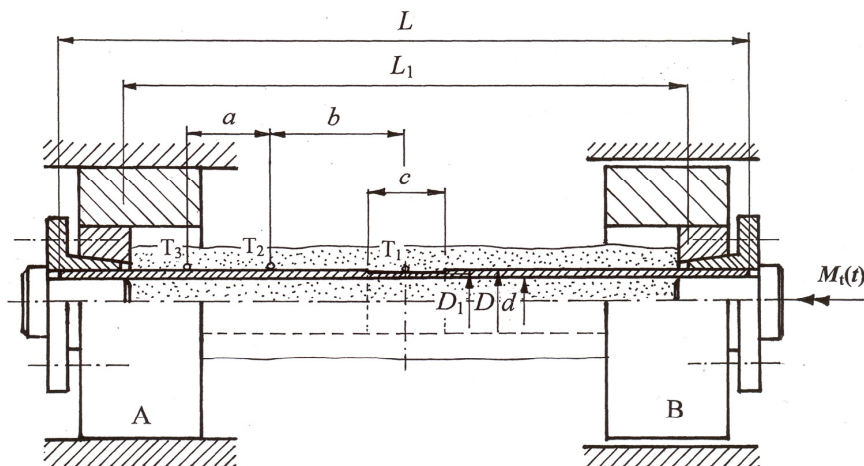
Slika 6: Ovozni mehanizem.

Pri upogibnem preizkušancu se je nihanje ovoze  $x(t)$  prenašalo neposredno na preizkušane, pri torzijskem pa preko ročice BC na gibljivi podpori, s čimer se je spreminjal zasučni kot  $\varphi$  cevi. Frekvenca obremenjevanja je bila odvisna od napetosti napajanja elektromotorja, kar je bilo mogoče spreminjati s transformatorjem napetosti električnega toka.

Z merilno-registrirno napravo Spyder 8 (slika 5) so bile merjene in vrednotene temperature okolice in površinske temperature v treh točkah na preizkušancu. Na preizkušancu so bile pritrjene merilne sonde, ki so jih tvorili termočleni vrste thermo-K, za merjenje temperature okoljskega zraka pa termočlen Pt - 100. Žice termočlenov so bile speljane do postaje Spyder 8 in pritrjene na zelene kanale. Poudariti je treba, da je bila od vsakega termočlena ena žica speljana preko posode napolnjene z vodo in ledom, da je bila zagotovljena ničelna točka (temperatura  $0^\circ\text{C}$ ). V primeru, ko bi uporabili morebiti termočlene drugačnih vrst, ki jih program ne pozna, je potrebno vnesti ustrezne pretvornike za preračunavanje. Spyder 8 je povezan z računalnikom, da prikazuje prave vrednosti izmerjenih temperatur. Računalniški program Catman 3.1 beleži izmerjene podatke, jih sprotno obdela, izriše graf in ga spravi v datoteko. Vsak kanal Spyderja 8 je omejen s številom podatkov. Za obravnavane eksperimente je bila uporabljena nastavitvev 2048 podatkov za vsak kanal. Spyder 8 ima sicer na voljo 16 kanalov, kar pomeni da lahko obravnava sočasno 16 signalov oziroma lahko nanj priklopimo toliko merilnih sond. V obravnavanem primeru smo izrabili skupno pet kanalov, štiri za merjenje temperature, enega pa za merjenje časa.

### 3 Preizkušane

Za torzijske preizkuse je bil uporabljen preizkušane kolobarnega prereza dimenzij  $D = 21,9$  mm in  $d = 18,8$  mm (cev tanjše stene) in  $d = 18$  mm (cev debelejše stene) celotne dolžine  $L = 255$  mm in proste dolžine  $L_1 = 200$  mm (slika 7). Preizkušane je bil na sredini, na dolžini  $c = 30$  mm, oslabljen na premer  $D_1 = 21,6$  mm. Ta oslabitev je bila narejena z namenom, da je bilo znano mesto največje plastifikacije preizkušanca in s tem nastale najvišje temperature. V točkah  $T_1, T_2$  in  $T_3$  ( $a = 30$  mm,  $b = 50$  mm) so bili pritrjeni termočleni za merjenje površinskih temperatur. Na mestih vpetja sta bila v preizkušane vgrajena čepa, da ni prihajalo do stisnitve in s tem do nepotrebne plastifikacije preizkušanca na tem mestu. Z zunanje strani je bil preizkušane vpet v podpori A in B s posebnima krčnima spojnim elementoma, ki sta s privijanjem vijakov ustvarila zadostno trenje med preizkušancem in podporo. Preizkušane je bil na notranji in zunanji površini toplotno izoliran.



Slika 7: Preizkušane.

### 4 Mehanske lastnosti preizkušanca

Preizkušanci so bili standardni izdelek podjetja IMPOL - Slovenska Bistrica. Material cevi je AlMgSi0,5F22, ki ima po DIN 40501 -T1 naslednje mehanske lastnosti:

- natezna zrušilna trdnost  $R_m = \text{min. } 215 \text{ MPa}$  do maks. 250 MPa
- dogovorna meja tečenja  $R_{p0,2} = \text{min. } 160 \text{ MPa}$  do maks. 240 MPa
- razteznost  $A_5 = 12 \%$  (kratki preizkušanci);  $A_{10} = 10 \%$  (dolgi preizkušanci)
- modul elastičnosti  $E = 70 \text{ GPa}$

Ker je bilo eksperimentalno ugotavljanje generacije toplote vezano na torzijsko obremenjeno konzolo, so bili opravljeni tudi vzvojni preizkusi za določitev nekaterih mehanskih lastnosti materiala preizkušancev. Ti preizkusi so bili opravljeni na Zavodu za gradbeništvo v Ljubljani na preizkuševalnem stroju AMSLER.

Na osnovi preizkusov je bil določen modul elastičnosti  $E = 68,57 \text{ GPa}$ , strižni modul  $G = 26,3 \text{ GPa}$ , tangenti strižni modul  $G_t = 104 \text{ MPa}$ , meja tečenja zaradi tangencialnih napetosti  $\tau_0 = 110 \text{ MPa}$  in Poissonovo število  $\nu = 0,304$ . Z upoštevanjem mehanskih lastnosti materiala in geometrijskih značilnosti prereza je bil nato računsko določen največji torzijski moment oziroma kot zasuka  $\varphi$ , da je v preizkušancu prišlo do plastifikacije prereza in generacije toplote.

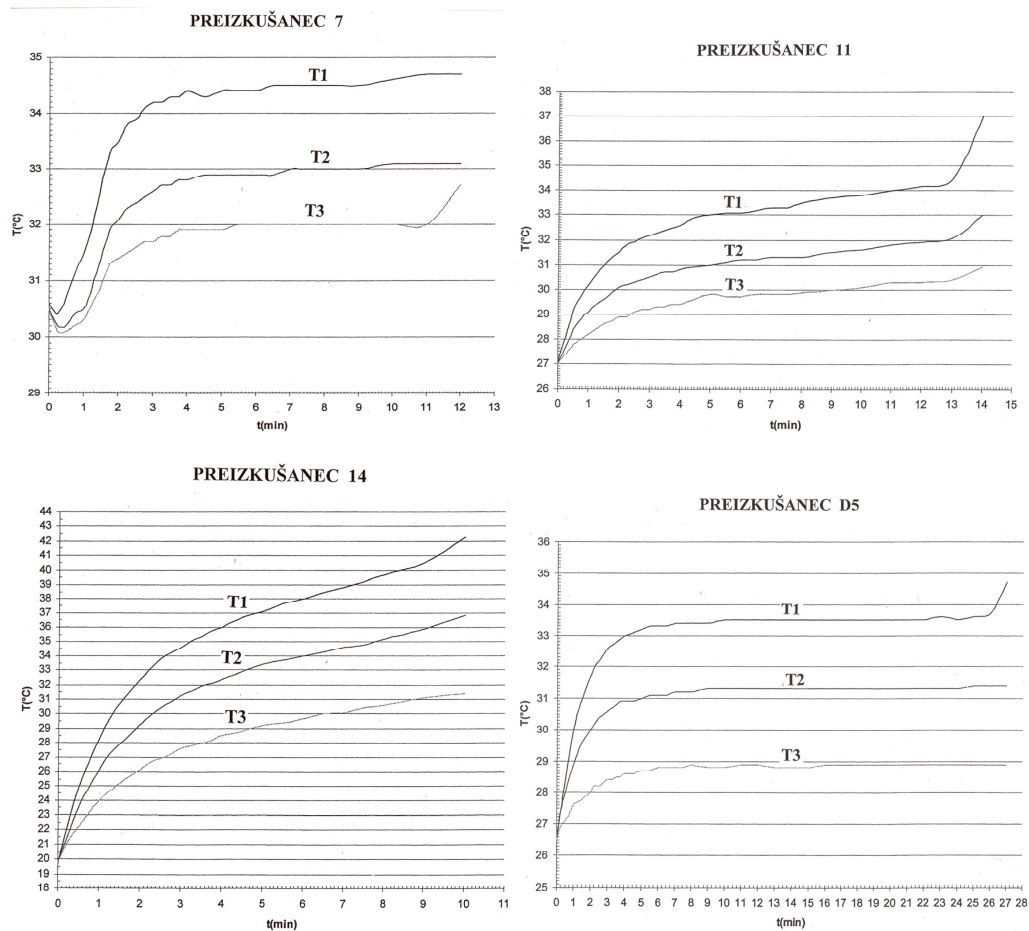


## 5 Rezultati meritev temperature

V tabeli 1 so navedeni podatki o amplitudah zasučnega kota in frekvenci obremenjevanja za štiri preizkušance. Rezultati meritev temperature preizkušancev na omenjenih mestih  $T_1, T_2$  in  $T_3$  so za te štiri preizkušance podani v obliki grafov na sliki 8.

**Tabela 1:** Podatki o preizkušancih

Preizkušanec števil.	Amplituda zasučnega kota $\pm\varphi^\circ$	Frekvenca obremenjevanja Hz
7	5,44	2
11	5,44	2
14	5,92	2
D5	4,96	2

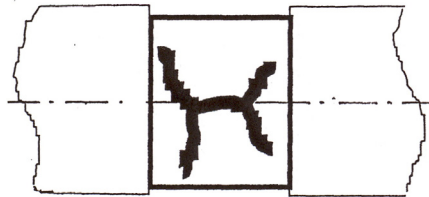


**Slika 8:** Potek temperature pri preizkušancih.

Iz grafov poteka temperatur je vidno, da je pri vseh preizkušancih najvišja temperatura v točki  $T_1$  in najnižja v točki  $T_3$ . Pri preizkušancu 7 je v začetni fazi obremenjevanja opazen padec temperature. Vzrok za takšno obnašanje je prehiter začetek opravljanja preizkusa, saj je bil preizkušanec še segret zaradi prijemanja z rokami v fazi njegove vgradnje v podpori. To kaže tudi na občutljivost merjenja temperature. Pri kasnejših preizkusih ni prihajalo do tega pojava, saj smo počakali dovolj dolgo, da se je vzpostavilo stacionarno stanje preizkušanca z okolico. V naslednjem časovnem intervalu temperature relativno strmo naraščajo v vseh treh točkah. Nato sledi nekoliko daljši časovni interval, ko se temperature bistveno ne spreminjajo. Preden pride do porušitve preizkušanca pa v sorazmerno kratkem časovnem intervalu temperatura naraste, posebno v okolici preloma preizkušanca. Preizkušanec 7 se je prelomil v bližini točke  $T_3$ , zato hiter porast te temperature. Zakaj se preizkušanec ni pretrgal na oslabiljenem mestu, ni popolnoma znano, domneva se, da je bila lahko v materialu na tem mestu napaka, ali pa je bil prisoten vpliv tlačnih napetosti zaradi pritrditve preizkušanca v podporo.

Graf preizkušanca 11 lepo predstavlja vse tri značilne dele: v začetnem obdobju hiter porast temperature, sledi umiritev s počasnim naraščanjem temperature, v zadnjem obdobju, tik pred zlomom, pride do skokovitega porasta temperature. Največji porast temperature je v točki  $T_1$ , torej na oslabiljenem mestu, kjer se je preizkušanec prelomil, kakor je prikazano na sliki 9.

Iz podatkov v tabeli 1 je vidno, da sta bila preizkušanca 7 in 11 izpostavljena enakim obremenitvenim pogojem. Tudi do porušitve je pri obeh prišlo v sorazmerno enakem času, razlika je le v lokaciji porušitve. Iz obeh grafov je vidno, da temperature v merjenih točkah naraščajo dokaj enakomerno za približno enako razliko  $\Delta T$ . Celotni prirastek temperature je v vseh treh točkah  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$  nekoliko večji pri preizkušancu 11.



**Slika 9:** Zlom preizkušanca 11.

Preizkušanec 14 je bil izpostavljen večji amplitudni obremenitvi kakor preizkušanca 7 in 11, zato je v krajšem času izmerjeni večji prirastek temperature v vseh treh opazovanih točkah. Iz grafa je vidno, da se je spremenila oblika krivulj. Prelom preizkušanca je bil v osrednjem delu, kar se vidi tudi iz poteka temperature v točki  $T_1$  in sicer ravno na prehodu na oslabiljeni del preizkušanca.

Preizkušanec D5 se je razlikoval od ostalih treh po debelejši steni. Zaradi zmanjšanja amplitude obremenjevanja in debelejšee stene se je pri tem preizkušancu močno povečal čas do porušitve. Tudi tukaj je v začetku prišlo do intenzivnejšega porasta temperature, posebno v točki  $T_1$ , nato je nastopilo stacionarno stanje, dokler ni prišlo do porušitve na osrednjem (oslabiljenem) delu preizkušanca, kar je vidno iz poteka temperature  $T_1$ . Takšno stanje je zato, ker se je material pri dinamičnem obremenjevanju nekoliko utrdil, torej se je nekoliko povišala meja tečenja  $\tau_0$  in po enačbi (3) se je zmanjšalo preobrazno delo in posledično količina generirane toplote. Zaradi utrujenosti materiala je končno prišlo do porušitve preizkušanca.



## 5 Zaključek

S konstruirano in izdelano napravo je bilo mogoče spreminjati amplitudo obremenitve in frekvenco torzijskega momenta in tako vplivati na generacijo toplote v nosilcu. Na značilnih mestih nosilca je bil spremljan potek temperature vse do njegove porušitve. Z upoštevanjem geometrijskih, obremenitvenih in mehanskih lastnosti materiala preizkušanca, kakršne so bile pri eksperimentalnem delu, so bili izvedeni nekateri teoretični izračuni generacije toplote in sprememba temperature preizkušanca.

### Literatura

- [1] I. Alfiredić, *Inženjerski priručnik, Temelji inženjerskih znanja*. Školska knjiga, Zagreb, 1996
- [2] B.A.Boley, J.H.Weiner, *Theory of Thermal Stresses*. Mineola Dover Publications, Inc., 1997
- [3] M. M. Filolenko-Boroditsch [et al.] *Festigkeitslehre:B.I,II*. Verlag Technik, Berlin, 1954
- [4] R. Kienzler, G. Herrmann, *Mechanics in Material Space*. Springer Verlag, Berlin, 2000
- [5] A. Mendelson, *Plasticity Theory and Application*. Mac Millan Co., N. York, 1968



## *Nevrtinčni tok tekočine okrog kvadra*

J. Kramer<sup>1</sup>, R. Jecl<sup>1</sup>, L. Škerget<sup>2</sup>

### *Irrotational flow past a square cylinder*

**Povzetek.** V prispevku je predstavljen numerični izračun obtekanja kvadra, nameščenega v nestisljivem in neviskoznem tokovnem polju. Izračun je potekal s programom Bemflow, ki temelji na numeričnem izračunu z metodo robnih elementov. Pri tej metodi se diskretizira rob območja, zato se vodilne enačbe zapišejo v ustrezne robne integralske enačbe za posamezne elemente območja.

**Abstract.** Numerical calculation of a flow past a square cylinder, which is placed in incompressible and nonviscous flow field is presented. The calculation was made with computer programme Bemflow which bases on the boundary element method. In this case corresponding governing equations are written in boundary integral representation, and discretized over the boundary.

## 1 Uvod

Gibanje idealne tekočine je opisano kot tok nestisljive ( $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ) in neviskozne tekočine ( $\nu = 0$ ). Za primer nevrtničnega toka idealne tekočine, za katerega velja, da lahko hitrost zapišemo kot gradient skalarne hitrostnega potenciala, imenujemo tok tekočine tudi potencialni tok. V primeru teh predpostavk je edina sila, ki deluje na volumske elemente fluida površinska normalna sila [1].

Kinematiko nestisljivega in nevrtničnega gibanja fluida popisuje Laplaceova enačba za vektor hitrosti, ki je homogena linearna eliptična parcialna diferencialna enačba. Pri reševanju tokovnih problemov z metodo robnih elementov se Laplaceova enačba zapiše v obliki robnih integralov. Ker v splošnem dobljene robno območno integralske enačbe niso analitično rešljive, se dobljeni integrali ustrezno diskretizirajo po robu območja  $\Gamma$ , ki se razdeli na  $N_e$  elementov  $\Gamma_j$ , tako, da velja

$$\sum_{j=1}^{N_e} \Gamma_j \approx \Gamma. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo

<sup>2</sup>Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

Funkcija hitrosti po vsakem robnem elementu je določena z vrednostmi v vozliščih, po vsakem elementu pa je določena z ustreznimi interpolacijskimi polinomi [2].

## 2 Vodilne enačbe

Tok idealne tekočine je analitično določen z enačbo ohranitve mase ali kontinuitetno enačbo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

in enačbami ohranitve gibalne količine, znanimi kot Euler-jeve enačbe [3].

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \vec{g}. \quad (3)$$

Tlak  $p(\vec{r}, t)$  je skalarna funkcija odvisna od kraja in časa,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  je hitrostna vektorska funkcija,  $\vec{g}$  pa predstavlja gravitacijsko volumsko silo na enoto mase. Konzervativno gravitacijsko silo lahko zapišemo kot gradient skalarnega potenciala  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Psi$ , ki je v splošnem definiran kot  $\Psi = -\vec{g} \cdot \vec{r}$ , kjer je  $\vec{r}$  vektor kraja,  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Osnovna enačba ohranitve gibalne količine se sedaj zapiše kot:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho_0} + \Psi \right). \quad (4)$$

Z upoštevanjem poenostavitvev in ob predpostavki, da gre za stacionarno gibanje iz zgornje enačbe sledi izraz

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla} H, \quad (5)$$

kjer je  $H$  totalni tlak. Če zgornji izraz skalarno pomnožimo z vektorjem hitrosti sledi

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} H = 0, \quad (6)$$

kar pomeni, da je v primeru stacionarnega toka idealne tekočine totalni tlak konstanten vzdolž tokovnice.

V primeru nevrtičnega toka, ko je vrtinčnost, ki je definirana kot rotor hitrostnega polja  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$  enaka nič, se enačba (5) zreducira v:

$$\vec{\nabla} H = 0, \quad (7)$$

od koder sledi, da je totalni tlak  $H$  neodvisen od kraja  $\vec{r} = (x, y, z)$  in tudi časa, torej je konstanten vzdolž celotnega območja toka.

V splošnem je nevrtični in nestisljiv tok fluida določen z dvema pogojema in sicer nevrtinčnosti

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0, \quad (8)$$

ki pomeni, da je rotor hitrostnega polja enak nič in solenoidnosti, kar pomeni, da je divergenca hitrostnega polja enaka 0,

$$\mathcal{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (9)$$

Če izračunamo rotor izraza (8)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}, \quad (10)$$

z upoštevanjem kontinuitetne enačbe (9) sledi linearna eliptična Laplaceova enačba za vektor hitrosti

$$\Delta \vec{v} = 0, \quad (11)$$

oziroma v zapisu kartezičnih koordinat

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0, \quad (12)$$

Enačba (12) predstavlja kinematiko nestisljivega in nevtinčnega gibanja fluida, z že upoštevanimi omejitvenimi pogoji solenoidnosti in nevtinčnosti hitrostnega polja.

Zaradi pogoja solenoidnosti vektorja hitrosti, ga lahko zapišemo kot rotor vektorskega potenciala  $\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$ , kjer je  $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$  poljubna in solenoidna vektorski potencial. Če zopet izračunamo rotor hitrostnega polja

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\psi}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi}) - \Delta \vec{\psi}, \quad (13)$$

sledi linearna Laplaceova enačba za vektorski potencial

$$\Delta \vec{\psi} = 0. \quad (14)$$

V primeru dvodimenzionalnega ravninskega toka ima vektorski potencial samo eno komponento, imenovano tudi tokovna funkcija,  $\vec{\psi} = (0, 0, \psi(x, y, t))$  pravokotno na ravnino gibanja. Laplaceova enačba se zapiše v obliki

$$\Delta \psi = 0. \quad (15)$$

Zgornja enačba predstavlja eliptični robni problem za tokovno funkcijo, z ustreznimi Dirichletovimi in Neumann-ovimi robnimi pogoji:

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{na} \quad \Gamma_1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\bar{v}_t \quad \text{na} \quad \Gamma_2. \quad (17)$$

Vektor hitrosti je v kartezičnih koordinatah definiran kot

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = \vec{\nabla} \times \psi \vec{k} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (18)$$

Na robu  $\Gamma$  območja  $\Omega$  sta normalni in tangencialni vektor podana z relacijama

$$\vec{n} = (n_x, n_y) \quad \text{in} \quad \vec{t} = (t_x, t_y) = (-n_y, n_x), \quad (19)$$

pri čemer sta normalna in tangencialna komponenta vektorja hitrosti podani kot

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} \quad \text{in} \quad v_t = \vec{v} \cdot \vec{t}, \quad (20)$$

povezava s kartezijskimi koordinatami pa je sledeča

$$v_x = v_n n_x - v_t n_y \quad \text{in} \quad v_y = v_n n_y + v_t n_x. \quad (21)$$

Zaradi lastnosti, da je vektor hitrosti nevrtinčen, ga lahko zapišemo kot gradient skalarnega hitrostnega potenciala  $\phi(\vec{r}, t)$  v obliki  $\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \phi$ . Če izračunamo divergenco tega izraza, sledi linearna Laplaceova enačba za skalarni hitrostni potencial

$$\Delta \phi = 0, \quad (22)$$

z ustreznimi robnimi pogoji [5]

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{na} \quad \Gamma_1, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{v}_n \quad \text{na} \quad \Gamma_2. \quad (24)$$

### 3 Metoda robnih elementov

Enačba za hitrostni vektorski potencial (14) je Laplaceova enačba:

$$\mathcal{L}[\vec{\psi}] = \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \quad (25)$$

kjer je  $\mathcal{L}$  linearni eliptični Laplaceov operator

$$\mathcal{L}[\cdot] = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (26)$$

Robni integralski zapis za vektor hitrosti  $\vec{v}$  se oblikuje z uporabo Greenovega teorema za vektorske funkcije. Sledi naslednji vektorski integralski zapis za splošen primer tri dimenzionalnega toka

$$c(\xi) \vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n}) \vec{v} d\Gamma = \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} u^* \times \vec{n}) \times \vec{v} d\Gamma, \quad (27)$$

kjer je  $u^*$  osnovna rešitev. Osnovna rešitev prostorskih problemov je

$$u^*(\xi, S) = \frac{1}{4\pi r(\xi, S)}, \quad (28)$$

v primeru ravninskih problemov pa se zapiše kot

$$u^*(\xi, S) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\xi, s)}, \quad (29)$$

kjer je  $r(\xi, s)$  razdalja med izvorno točko  $\xi$  in referenčno točko  $S$  ali  $s$  [5].

Integralski zapis (27) predstavlja tri skalarne enačbe posebej za  $x$ ,  $y$  in  $z$  koordinatne smeri, a le dve od teh sta neodvisni.

$$c(\xi)v_x(\xi) + \int_{\Gamma} v_x q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} [v_z(q_z^* n_x - q_x^* n_z) - v_y(q_x^* n_y - q_y^* n_x)] d\Gamma, \quad (30)$$

$$c(\xi)v_y(\xi) + \int_{\Gamma} v_y q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} [v_x(q_x^* n_y - q_y^* n_x) - v_z(q_y^* n_z - q_z^* n_y)] d\Gamma, \quad (31)$$

$$c(\xi)v_z(\xi) + \int_{\Gamma} v_z q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} [v_y(q_y^* n_z - q_z^* n_y) - v_x(q_z^* n_x - q_x^* n_z)] d\Gamma, \quad (32)$$

kjer je  $q_i^* = \partial u^* / \partial x_i$  in  $q^* = \partial u^* / \partial n = q_i^* \cdot n_i$ . V bolj kompaktni obliki se zgornje enačbe lahko zapišejo kot:

$$c(\xi)v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_i q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} [v_k(q_k^* n_i - q_i^* n_k) - v_j(q_i n_j - q_j^* n_i)] d\Gamma, \quad (33)$$

za ciklično ponavljanje indeksov  $ijkj = 12312$ . Za ravninski dvodimenzionalni tok se lahko enačba (33) zapiše kot

$$c(\xi)v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_i q^* d\Gamma = e_{ij} \int_{\Gamma} v_j q_t^* d\Gamma, \quad (34)$$

oziroma v komponentni obliki s komponentami hitrosti  $\vec{v} = (v_x, v_y)$

$$c(\xi)v_x(\xi) + \int_{\Gamma} v_x q^* d\Gamma = + \int_{\Gamma} v_y q_t^* d\Gamma, \quad (35)$$

$$c(\xi)v_y(\xi) + \int_{\Gamma} v_y q^* d\Gamma = - \int_{\Gamma} v_x q_t^* d\Gamma, \quad (36)$$

kjer je  $q_t^* = q_i \cdot t_i^*$  tangenti odvod osnovne rešitve.

### 3.1 Diskretizirane enačbe

Ker enačba (27) običajno ni analitično rešljiva se moramo poslužiti ustrezne numerične metode, v našem primeru je to metoda robnih elementov. Za numerično aproksimacijo je potrebno obstoječe integrale po robu zapisati v diskretizirani obliki; rob območja se torej razdeli na  $N_e$  robnih elementov. Singularna robna integralska enačba se zapiše kot vsota posamezni robnih integralov po posameznem delu roba. Nadalje je potrebno aproksimirati hitrost v vsakem robnem elementu, kar se naredi z uporabo interpolacijskih polinomov  $\{\Phi\}$  [4]:

$$v_i = \{\Phi\}^T \{v_i\}^n. \quad (37)$$

V primeru dvodimenzionalnega toka velja  $i = 1, 2$ , kjer je indeks  $n$  število vozlišč na posameznem robnem elementu in je enak stopnji interpolacijskega polinoma.

Integralska enačba za ravninski tok (34) se v diskretizirani obliki zapiše kot

$$c(\xi)v_i(\xi) + \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v_i q^* d\Gamma = e_{ij} \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma_e} v_j q_t^* d\Gamma. \quad (38)$$

Funkcija hitrosti je v vsakem robnem elementu definirana z vrednostmi v vozliščih in z interpolacijskim polinomom po elementu. Diskretizirana robno območna enačba se torej zapiše v obliki

$$c(\xi)v_i(\xi) + \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T q^* d\Gamma \right) \{v_i\}^n = e_{ij} \sum_{e=1}^E \left( \int_{\Gamma_e} \{\Phi\}^T q_t^* d\Gamma \right) \{v_j\}^n. \quad (39)$$

Posamezne integrale, ki so zapisani po elementih in so odvisni samo od geometrije lahko zapišemo kot

$$h_e^n = \int_{\Gamma_e} \Phi^n q^* d\Gamma \quad , \quad h_{et}^n = \int_{\Gamma_e} \Phi^n q_t^* d\Gamma. \quad (40)$$

Sledi torej

$$c(\xi)v_i(\xi) + \sum_{e=1}^E \{h\}^T \{v_i\}^n = e_{ij} \sum_{e=1}^E \{h_t\}^T \{v_j\}^n. \quad (41)$$

Zgornja enačba predstavlja diskretizirano robno integralsko enačbo za ravninski primer in se uporablja za vsa robna vozlišča ( $\xi = 1, N_e$ ) od koder sledi sistem  $2N_e$  algebrskih enačb, ki se za kartezične komponente hitrosti  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  zapišejo v obliki

$$[c(\xi)] \{v_i(\xi)\} + [\hat{H}] \{v_i\} = e_{ij} [H_t] \{v_j\}, \quad (42)$$

kjer je  $[c(\xi)]$  diagonalna matrika geometrijskih koeficientov odvisnih od izvorne točke. Diagonalna matrika se doda matriki  $[\hat{H}]$ , tako, da velja  $h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \delta_{ij}$ , in končni matrični sistem, ki sledi je:

$$[H] \{v_i\} = e_{ij} [H_t] \{v_j\}. \quad (43)$$

V širši obliki se zgornji sistem zapiše kot:

$$[H] \{v_x\} = + [H_t] \{v_y\} \quad (44)$$

$$[H] \{v_y\} = - [H_t] \{v_x\}. \quad (45)$$

Z znanimi vrednostmi normalnih hitrosti  $\{v_n\}$  na robu  $\Gamma_1$  in vozliščnih tangentskih hitrosti  $\{v_t\}$  na robu  $\Gamma_2$  lahko zapišemo sistem [5]

$$[A] \{x\} = \{F\}, \quad (46)$$

kjer je sistemska matrika  $[A]$  sestavljena iz  $[A_n]$  in  $[A_t]$

$$[A] = \begin{bmatrix} +[A_n]^{\Gamma_1} & +[A_t]^{\Gamma_2} \\ -[A_t]^{\Gamma_1} & +[A_n]^{\Gamma_2} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

kjer sta  $A_n$  in  $A_t$  influenčni matriki podani z izrazoma

$$\begin{aligned} [A_n] &= [n_x][H_x] + [n_y][H_y], \\ [A_t] &= [t_x][H_x] + [t_y][H_y], \end{aligned} \quad (48)$$

vektor neznank pa je definiran kot

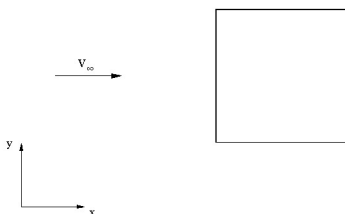
$$\{x\} = \left\{ \begin{array}{l} \{v_t\}^{\Gamma_1} \\ \{v_n\}^{\Gamma_2} \end{array} \right\}. \quad (49)$$

Vektor na desni strani  $\{F\}$  je vsota členov

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{l} +[A_n]\{v_t\}^{\Gamma_2} - [A_t]\{v_n\}^{\Gamma_1} \\ -[A_t]\{v_t\}^{\Gamma_2} - [A_n]\{v_n\}^{\Gamma_1} \end{array} \right\}. \quad (50)$$

### 3.2 Numerični primer

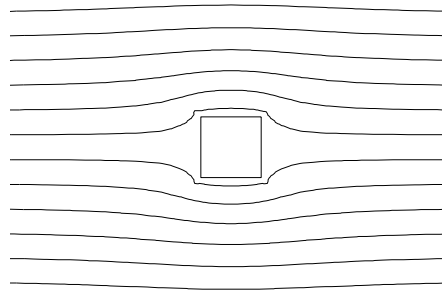
Kot numerični primer je prikazan potencialni tok mimo kvadra, zunanji tok je v neskončnosti uniformen hitrosti  $\vec{v}_\infty$ , slika (1). Na slikah (2) in (3) so prikazane tokovnice in vektorsko



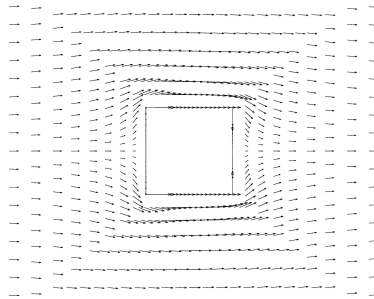
**Slika 1** : Potencialni tok mimo kvadra

polje hitrosti okrog kvadra. Kvader se diskretizira samo po robu in sicer je rob razdeljen na 40 elementov, vsak ima tri vozlišča, torej je vseh vozlišč po robu 80. V obravnavanem primeru brez cirkulacije ( $\Gamma = 0$ ) je tok simetričen pred in za kvadrom. Na površini kvadra je viden zdrs, kar je v skladu s teorijo nevrtinčnega toka idealne tekočine. Komponenta hitrosti  $v_x$  na levem in desnem robu kvadra je enaka nič, na zgornjem in spodnjem robu pa imajo vrednost nič komponente  $v_y$ . Zdrsna hitrost na robu narašča od nič v zastojni točki pri  $\theta = 0$  do maksimalne vrednosti  $2v_\infty$ , ki jo doseže tik pred vogali kvadra in zopet pade na nič v zastojni točki na drugi strani kvadra (pri  $\theta = \pi$ ).





Slika 2 : Potencialni tok okrog kvadra; tokovnice



Slika 3 : Potencialni tok okrog kvadra; vektorsko polje hitrosti

#### 4 Zaključki

V prispevku je predstavljen primer potencialnega toka okrog kvadra z uporabo programa BE-MFLOW, ki temelji na osnovi metode robnih elementov. Iz rezultatov je razvidno, da je tok pred in za kvadrom simetričen in da pride do zastojnih točk na sprednji in zadnji strani. Problem vokalnih vrednosti, kjer so izračunane vrednosti vektorjev hitrosti napačne, se lahko reši z uporabo nezveznih elementov, za kar se bo program v prihodnje tudi nadgradil.

#### Literatura

- [1] B. R. Munson, D. F. Young *Fundamentals of fluid mechanics, 4th edition*, Department of Mechanical Engineering, Iowa State University, Iowa, USA, 2002.
- [2] J. Trevelyan, *Boundary Elements for Engineers, Theory and Applications* Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston, 1994.
- [3] L. Škerget *Mehanika tekočin*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 1994.
- [4] C. A. Brebbia, J. Dominguez, *Boundary Elements An Introductory Course*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1992.
- [5] L. Škerget, *Computational fluid dynamics; The Boundary Element Method*, (v pripravi).



## *Simbolno-numerični pristop k občutljivostni analizi in optimizaciji konstrukcij*

*N. Kristanič<sup>1</sup> in J. Korelc<sup>1</sup>*

### *Evaluation of design velocity field and optimization by direct differentiation of symbolically parameterized mesh*

**Povzetek.** V prispevku je predstavljen simbolno-numerični pristop izračuna projektne občutljivosti in optimizacije konstrukcij. Pri tem polje začetnih občutljivosti izračunamo z neposrednim odvajanjem simbolno parametrizirane mreže končnih elementov. Postopek je nazorno prikazan s pomočjo enostavnega primera optimizacije oblike konzole. Nadalje je prikazana občutljivostna analiza kompleksne 3D konstrukcije, ki potrjuje uporabnost in natančnost predlagane metode.

**Abstract.** The paper presents design sensitivity analysis and optimization based on symbolic-numeric approach to evaluation of design velocity field by direct differentiation of symbolically parameterized mesh. A simple case of a beam shape optimization is represented to illustrate the proposed method. Additionally, a 3D complex structure design sensitivity analysis is shown to demonstrate the applicability of the proposed method.

## **1 Uvod**

Eden od ključnih problemov gradientnih metod optimizacije oblike je izračun polja začetnih občutljivosti. Polje začetnih občutljivosti ( $\partial\mathbf{X}/\partial p$ ) opiše spremembo koordinat vozlišč končnih elementov ( $\mathbf{X}$ ) glede na poljubno izbran projektni parameter ( $p$ ). Medtem ko lahko odvode karakterističnih količin končnega elementa (reziduum, tangentne matrike, itd.) po projektnih parametrih izrazimo s pomočjo avtomatiziranih postopkov (Korelc [8]), to ne velja za polje začetnih občutljivosti. Glavna ovira se pojavi pri povezavi projektnih parametrov s pozicijo vozlišč. Te povezave ni možno povsem splošno izraziti s standardnimi pristopi generacije mreže končnih elementov, niti specializiranimi pred-procesorji ali CAD orodji, saj je izbira projektnih parametrov stvar svobodne izbire projektanta.

---

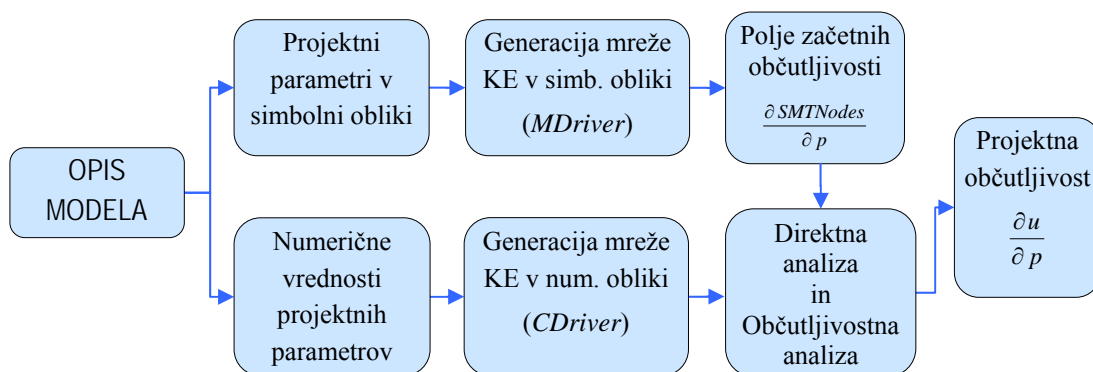
<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo

## 2 Izračun polja začetnih občutljivosti

Za rešitev problemov izračuna polja začetnih občutljivosti je bilo predlaganih več različnih pristopov ([1]-[5]). Najenostavneje je odvode izračunati numerično z metodo končnih diferenc. Ta pristop ima to slabo lastnost, da pri problemih analize občutljivosti na spremembo oblike lahko pride do velike napake. Alternativen pristop je metoda, kjer se območje problema razdeli na manjša podobmočja, imenovana projektni elementi (Kegl [5]). Za tako definirane projektne elemente je možno analitično izračunati polje začetnih občutljivosti, ki se nato izvede v vozliščih končnih elementov. Pristop pa ima to pomanjkljivost, da je za projektne parametre, ki se nanašajo na globalne mere konstrukcije ali pa so povsem abstraktni, težko izpeljati eksplicitno odvisnost do parametrov projektne elementa.

Prispevek predstavlja simbolno-numerični pristop izračuna polja začetnih občutljivosti ter optimizacije konstrukcij s pomočjo simbolno-algebralnega sistema *Mathematica*. Prednost simbolnih sistemov je ta, da operirajo s poljubnimi izrazi. Zato lahko projektni parametri, v fazi opisa modela in generacije mreže končnih elementov, ostanejo v simbolni obliki. Koordinate vozlišč končnih elementov tako predstavljajo formule, ki so eksplicitno izražene s projektnimi parametri. Polje začetnih občutljivosti lahko nato izračunamo naenkrat z enostavnim ukazom za odvajanje (npr.  $D[SMSNodes, p]$ ), kjer *SMSNodes* vsebuje koordinate vozlišč v simbolni obliki, *p* pa je projektni parameter.

Problem, ki se pri tem pojavi, je ta, da so simbolni sistemi numerično neučinkoviti v primerjavi z okolji za končne elemente, programiranimi v C-ju ali Fortran-u. Rešitev je v uporabi okolja za končne elemente, ki lahko deluje na simbolni ravni in je hkrati numerično učinkovito. Tako okolje (CDriver) je predstavil Korelc ([8],[9]). Sestoji iz dveh funkcionalno identičnih modulov. Prvi je napisan v simbolnem jeziku programa *Mathematica* (*MDriver*) in omogoča izračun polja začetnih občutljivosti s simbolno podano mrežo KE. Drugi modul je napisan v jeziku C (*CDriver*) in je s programom *Mathematica* povezano s protokolom *MathLink*. Oba modula delujeta iz *Mathematice* in posedujeta enako strukturo podatkov, funkcije, ukazni jezik in vhodne podatke (podrobnosti so opisane v Korelc [8],[9]). Postopek določitve polja začetnih občutljivosti z uporabo Driver-ja je shematsko prikazan na sliki 1.



Slika 1: Prikaz poteka simbolno-numeričnega izračuna občutljivosti oblike

### 3 Izpeljava končnih elementov za direktno in občutljivostno analizo

V primerih v nadaljevanju bomo uporabili 6 različnih tipov končnih elementov (2D elasto-plastične elemente, 3D lupinaste in palične elemente, 2D in 3D obtežne elemente in elemente za vezi po metodi predpisanih pomikov). Simbolen opis mehanskega problema v kombinaciji z avtomatskim odvajanjem algoritmov nam omogoči, da izpeljavo in kodiranje karakterističnih količin teh elementov (tangente matrike, reziduuma, občutljivostnega vektorja, itd.) razdelimo na dve skupini: končne elemente, ki opisujejo stacionarni problem (npr. obtežni KE) in končne elemente, ki opisujejo tranzientni problem (npr. elasto-plastični solid element). Za oba primera je v nadaljevanju predstavljena splošna simbolna formulacija KE za direktno in občutljivostno analizo, ki sledi splošni formulaciji direktne in občutljivostne analize tranzientnih nelinearnih skloppljenih sistemov ([10]). V prvem primeru se neznane količine (npr. pomiki, Lagrangevi množitelji, itd.) pojavijo samo na nivoju elementa, medtem ko opis elasto-plastičnih materialov zahteva izračun dodatnih lokalnih neznank v vsaki integracijski točki. V tem primeru nelinearne enačbe rešimo z iteracijskim/poditeracijskim postopkom z iterativno zanko za vsako integracijsko točko. Togostna matrika, rezidual in občutljivostni vektorji morajo biti izračunani konsistentno z numeričnimi postopki.

V tabelah 1 in 2 izraz  $\mathbf{a}$  predstavlja vektor globalnih parametrov elementa,  $\Psi$  je vektor globalnih enačb,  $\mathbf{b}$  je vektor neznanih lokalnih parametrov,  $\Phi$  je vektor lokalnih enačb,  $\phi$

pa je poljuben občutljivostni parameter. Potem je  $\frac{D\mathbf{a}}{D\phi}$  občutljivost globalnih spremenljivk

glede na parameter  $\phi$  in  $\frac{D\mathbf{b}}{D\phi}$  občutljivost lokalnih spremenljivk glede na parameter  $\phi$ .

$\frac{\tilde{D}\Psi}{\tilde{D}\phi}$  predstavlja neodvisen občutljivostni psevdo-obtežni vektor, medtem ko je  $\frac{\tilde{D}\Phi}{\tilde{D}\phi}$

odvisen občutljivostni psevdo-obtežni vektor. Oznaka  $t$  predstavlja trenutni časovni korak,  $p$  stanje sistema na koncu predhodnega časovnega koraka in  $i$  iteracijski števec Newton-Raphsonove metode reševanja sistema nelinearnih enačb.

Tabela 1: Stacionarni problemi

Direktna analiza	Občutljivostna analiza
$\Psi^t(\mathbf{a}^t) = 0$	$\Psi^t(\mathbf{a}^t(\phi), \phi) = 0$
$\Psi \mathbf{K}_i^t = \frac{\partial \Psi_i^t}{\partial \mathbf{a}_i^t} \quad (1)$	$\Psi \mathbf{K}^t \frac{D\mathbf{a}^t}{D\phi} = -\frac{D\Psi^t}{D\phi} \quad (2)$
$\Psi \mathbf{K}_i^t \Delta \mathbf{a}_i^t + \Psi_i^t = 0$	
$\mathbf{a}_{i+1}^t := \mathbf{a}_i^t + \Delta \mathbf{a}_i^t$	

Tabela 2: Tranzientni sklopljeni problemi

Direktna analiza	Občutljivostna analiza
Globalni nivo	Globalni nivo
$\Psi^t(\mathbf{a}^t, \mathbf{b}^t(\mathbf{a}^t)) = 0$ $\Phi \mathbf{K}_i^t \cdot \frac{\partial \mathbf{b}^t}{\partial \mathbf{a}_i^t} = -\frac{\partial \Phi_i^t}{\partial \mathbf{a}_i^t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{b}_i^t}{\partial \mathbf{a}_i^t}$ $\Psi \mathbf{K}_i^t = \frac{\partial \Psi_i^t}{\partial \mathbf{a}_i^t} \quad (3)$ $\Psi \mathbf{K}_i^t \Delta \mathbf{a}_i^t + \Psi_i^t = 0$ $\mathbf{a}_{i+1}^t := \mathbf{a}_i^t + \Delta \mathbf{a}_i^t$	$\Psi^t(\mathbf{a}^t, \mathbf{a}^p, \mathbf{b}^t, \mathbf{b}^p, \phi) = 0$ $\Psi \mathbf{K}^t \cdot \frac{D\mathbf{a}^t}{D\phi} = \frac{\tilde{D}\Psi^t}{\tilde{D}\phi}$ $\frac{\tilde{D}\Psi^t}{\tilde{D}\phi} = - \left( \begin{array}{l} \frac{D^t \Psi^t}{D\mathbf{a}^p} \cdot \frac{D\mathbf{a}^p}{D\phi} + \frac{D^t \Psi}{D\mathbf{b}^p} \cdot \frac{D\mathbf{b}^p}{D\phi} + \\ + \frac{D\Psi^t}{D\phi} - \frac{\partial \Psi^t}{\partial \mathbf{b}^t} (\Phi \mathbf{K}^t)^{-1} \times \\ \times \left( \frac{D\Phi^t}{D\phi} + \frac{D\Phi^t}{D\mathbf{a}^p} \cdot \frac{D\mathbf{a}^p}{D\phi} + \frac{D\Psi^t}{D\mathbf{a}^p} \cdot \frac{D\mathbf{a}^p}{D\phi} \right) \end{array} \right) \quad (4)$
Lokalni nivo	Lokalni nivo
$\Phi^t(\mathbf{b}^t) = 0$ $\Phi \mathbf{K}_i^t = \frac{\partial \Phi_i^t}{\partial \mathbf{b}_i^t}$ $\Phi \mathbf{K}_i^t \Delta \mathbf{b}_i^t + \Phi_i^t = 0 \quad (5)$ $\mathbf{b}_{i+1}^t := \mathbf{b}_i^t + \Delta \mathbf{b}_i^t$	$\Phi^t(\mathbf{a}^t, \mathbf{a}^p, \mathbf{b}^t, \mathbf{b}^p, \phi) = 0$ $\Phi \mathbf{K}^t \cdot \frac{D\mathbf{b}^t}{D\phi} = \frac{\tilde{D}\Phi^t}{\tilde{D}\phi}$ $\frac{\tilde{D}\Phi^t}{\tilde{D}\phi} = - \left( \begin{array}{l} \frac{D\Phi^t}{D\mathbf{a}^t} \cdot \frac{D\mathbf{a}^t}{D\phi} + \frac{D\Phi^t}{D\phi} + \\ + \frac{D\Phi^t}{D\mathbf{a}^p} \cdot \frac{D\mathbf{a}^p}{D\phi} + \\ + \frac{D\Phi^t}{D\mathbf{b}^p} \cdot \frac{D\mathbf{b}^p}{D\phi} \end{array} \right) \quad (6)$

#### 4 Numerični primer: Optimizacija

Za prikaz simbolno-numeričnega postopka optimizacije je izbran enostaven primer optimizacije oblike konzolne konstrukcije. Pri načrtovanju optimizacijske naloge je bilo upoštevano, da je optimalna oblika konzole tista, katera ima v mejnem stanju nosilnosti minimalni volumen. Mejno stanje nosilnosti konstrukcij je v splošnem definirano z limitno točko ravnotežne poti. Ker se izkaže takšna definicija za realne, nepopolne konstrukcije nezanesljiva, oziroma nastopi šele pri nerealno velikih pomikih konstrukcije, smo mejno stanje definirali z metodo predpisanih pomikov (glej npr. Crisfield [11]).

V tem primeru v numerični analizi izračunamo obtežbo, ki je potrebna, da pomik v izbranem vozlišču doseže predpisan pomik. V standardni enačbi konstrukcije potrebujemo še dodatno spremenljivko  $\lambda$ , ki predstavlja obtežni faktor in vezno enačbo, ki se nanaša na izbrano prostostno stopnjo in predpisan pomik  $u_p$ . Dobimo razširjen sistem enačb, ki ga rešujemo z Newtonovim iteracijskim postopkom:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\lambda} \\ \mathbf{K}_{\lambda u} & \mathbf{K}_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{R}_u(\lambda) \\ -\mathbf{R}_\lambda \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

kjer je

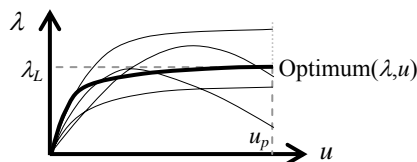
$$\mathbf{R}_u = \mathbf{R}_u^{\text{el-plast.}} + \mathbf{R}_u^{\text{obt.el.}}(\lambda), \quad \mathbf{R}_\lambda = u_d - \lambda_u u_p. \quad (8)$$

Z  $\mathbf{R}_u^{\text{el-plast.}}$  so označene ravnotežne enačbe elasto-plastičnega končnega elementa (Korelc [8]), z  $\mathbf{R}_u^{\text{obt.el.}}(\lambda)$  pa ravnotežne enačbe posebnih končnih elementov za obtežbo. Potreben je še poseben končni element, ki v sistem enačb vpelje dodatno enačbo  $\mathbf{R}_\lambda$  (8), kjer je  $u_d$  dejanski pomik izbranega vozlišča,  $u_p$  predpisan pomik in  $\lambda_u$  faktor predpisanega pomika. Dobljen sistem enačb z ničlo na glavni diagonali bi lahko rešili na primer z »bordering« algoritmom (glej Crisfield [11]), vendar se je izkazalo, da najnovejši sistem za reševanje linearnih enačb podjetja Intel, PARDISO (rešuje nesimetrične razpršene matrike z uporabo polnega pivotiranja), problem v celoti reši brez občutne dodatne porabe računskega časa.

Cilj optimizacijske naloge je določiti takšno obliko konstrukcije, da bo pri dani mejni obtežbi konstrukcije volumen minimalen. V procesu optimizacije iščemo minimum namenske funkcije:

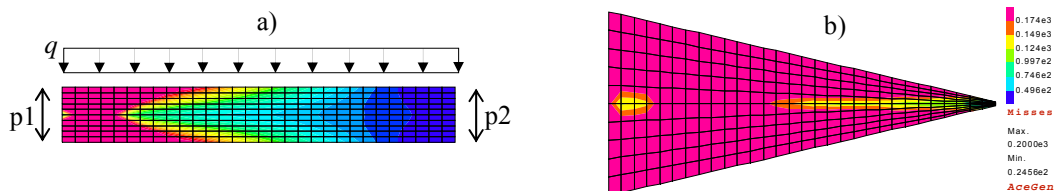
$$\min \Phi_0; \quad \Phi_0 = w_1(\lambda - \lambda_L)^2 + w_2 \mathbf{V} + w_3 \sum_k \Phi_k, \quad (9)$$

kjer so  $w_i$  uteži,  $\mathbf{V}$  je volumen konstrukcije,  $\Phi_k$  je kazenska funkcija, s katero prevedemo optimizacijski problem z vezmi na problem brez vezi in  $\lambda_L$  predpisani mejni obtežni faktor konstrukcije. Možni odzivi konstrukcije so prikazani na sliki 2.

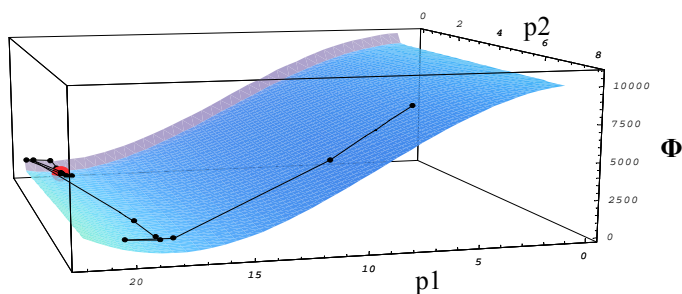


Slika 2: Odzivi konstrukcij za različno obliko

Na sliki 3 sta prikazani obliki konstrukcije na začetku (slika 3a) in na koncu (slika 3b) procesa optimizacije za primer, ko je konzola obtežena z zvezno obtežbo. Izrisane so Missesove napetosti. Te imajo po končani optimizaciji po večini prereza vrednost napetosti meje plastičnosti. Takšen rezultat je bil pričakovan, saj je material po celotnem prerezu izkoriščen v največji meri. Z večanjem števila parametrov upočasnimo konvergenco procesa optimizacije, vendar število parametrov ne vpliva bistveno na končno obliko konstrukcije. Na sliki 4 je prikazan potek konvergence procesa optimizacije za primer z dvema parametroma oblike.



Slika 3: Začetna oblika (a) in optimalna oblika (b)



**Slika 4:** Potek konvergence optimizacijskega procesa za 2 parametra oblike

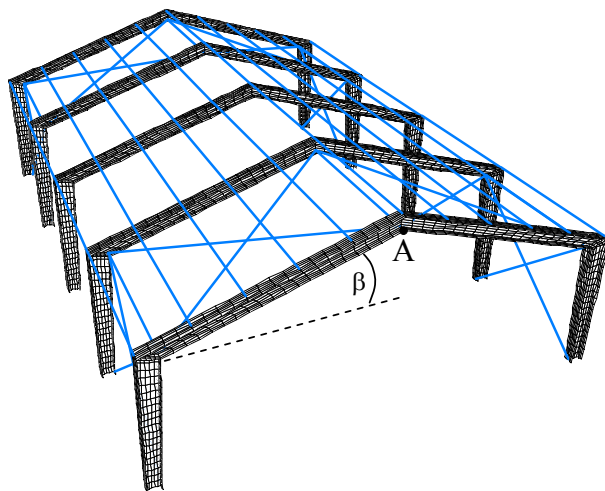
Rezultat optimizacijskega problema smo preverili z analitično rešitvijo, ki jo je možno dobiti po teoriji nosilcev in s predpostavko, da je optimalna oblika tista, pri kateri se v vsaki točki nosilca pojavi plastičen členek:

$$\sigma_{PL}(x) = \frac{M(x)}{W_{pl}(x)} = \sigma_y \rightarrow h_{pl}(x) = \sqrt{\frac{2q}{b\sigma_y}} x, \quad (10)$$

kjer so  $M(x)$ ,  $W_{el}(x)$  in  $W_{pl}(x)$  moment, elastični vztrajnostni moment in plastični vztrajnostni moment prereza pri razdalji  $x$  od prostega roba konzole.  $q$  je zvezna obtežba po vsej konzoli,  $b$  širina prereza in  $h$  višina prereza. Do majhnih odstopanj ( $p_{1num.}=20.41$ ,  $p_{2num.}=0.29$ ) od analitične rešitve ( $p_{1anal.}=21.21$ ,  $p_{2anal.}=0$ ) pride zaradi višine prereza v prostem koncu konzole, ki ni nična kot pri analitični rešitvi, ker je s kazensko funkcijo omejena na majhno vrednost zaradi mreže štirivozliščnih končnih elementov.

## 5 Občutljivostna analiza enoetažne hale

Za prikaz možnosti obravnave kompleksnejših sistemov je za primer izbrana konstrukcija enoetažne jeklene hale. Takšen tip konstrukcij se v praksi pogosto uporablja za trgovske centre, športne in industrijske objekte. Model na osnovi metode KE je predstavljen na sliki 5.



**Slika 5:** Mreža končnih elementov

Sestava modela:

- Glavna konstrukcija je sestavljena iz petih portalnih okvirjev, sestavljenih iz varjenih I profilov. I profili ter vozliščne pločevine so modelirani s štirivozliščnimi ploskovnimi elementi, osnovanimi na 6-parametrični teoriji velikih rotacij in zmernih deformacij. Za preprečitev blokiranja so strižne deformacije interpolirane po metodi ANS (Assumed Natural Strain), membranske pa obogatene z dvema nekompatibilnima dodatnima prostostnima stopnjama po metodi EAS (Enhanced Assumed Strain) (Wisniewski, Turska [7]).
- Lege in zavetrovanja so modelirana s paličnimi elementi za velike deformacije in rotacije.
- Obtežba snega in vetra je nanesena s posebnimi končnimi elementi za obtežbo.

Z uporabo metode neposrednega odvajanja ([10]) in simbolno generacijo kode končnega elementa ([9]) smo izpeljali točno analitično rešitev za občutljivostni psevdo obtežni vektor za vse uporabljene končne elemente v skladu s shemo, prikazano v poglavju 2. V prikazanem primeru naklon strehe  $\beta$  predstavlja projektni parameter oblike. Odvod ( $\partial \mathbf{X} / \partial p$ ) simbolno parametrizirane mreže končnih elementov po projektnem parametru je začetna občutljivost, ki se nato uporabi v občutljivostni analizi. Koordinate vozlišč so izrazi, ki so odvisni od projektnih parametrov, kot je prikazano za eno od vozlišč na sliki 6. Občutljivost vertikalnega pomika v slemenu hale (točka A na sliki 5) na spremembo naklona strehe  $\beta$  je prikazana na sliki 7a. Prikazana je tudi primerjava med občutljivostjo, izračunano analitično ter z metodo končnih diferenc (slika 7b).

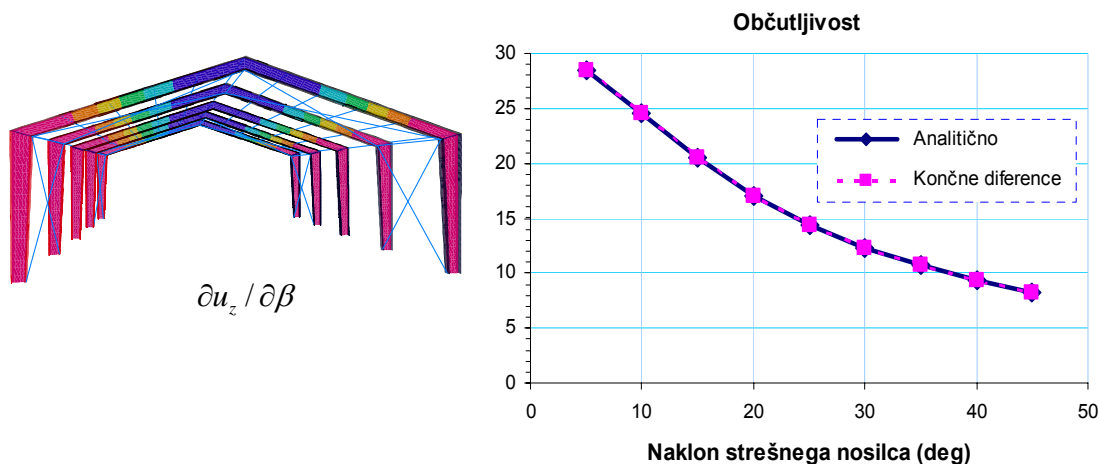
$$\begin{aligned}
 & 4950. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta] + \\
 & 0.3 \left( 50. - 4600. \cdot \text{Tan}[\beta] - \frac{2.76 \times 10^6}{9950. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta]} + 0.666667 \left( -50. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta] + \frac{2.76 \times 10^6}{9950. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta]} \right) \right) + \\
 & 0.8 \left( -400. + 0.3 (-50. - 4600. \cdot \text{Tan}[\beta] + 0.666667 (50. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta])) - \right. \\
 & \left. 0.3 \left( 50. - 4600. \cdot \text{Tan}[\beta] - \frac{2.76 \times 10^6}{9950. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta]} + 0.666667 \left( -50. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta] + \frac{2.76 \times 10^6}{9950. + 4600. \cdot \text{Tan}[\beta]} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

**Slika 6:** Primer vozlišča s koordinatami v simbolni obliki odvisnimi od projektnih parametrov oblike

## 6 Zaključek

V prispevku je predstavljen simbolno-numerični pristop k izračunu občutljivosti in optimizacije oblike konstrukcij. Polje začetnih občutljivosti, to je odvodov koordinat mreže končnih elementov po parametrih oblike, je bilo določeno z neposrednim odvajanjem vozliščnih koordinat, izraženih v simbolni obliki kot funkcija parametrov oblike. Prikazano je bilo, da pristop omogoča občutljivostno analizo kompleksnih konstrukcij, pri čemer nismo v ničemer omejeni v izbiri parametrov oblike, kot je bil to primer v dosedanjih pristopih.





**Slika 7:** Občutljivost vertikalnega pomika glede na parameter  $\beta$  (levo) in primerjava med analitično metodo in metodo končnih diferenc (desno)

## Literatura

- [1] Gang-Won Jang, Yoon Young Kim, *Sensitivity analysis for fixed-grid shape optimization by using oblique boundary curve approximation*, Int. J. of Solids and Structures, 42, 3591-3609, 2005.
- [2] Kuang-Hua Chang, Kyung K. Choi, Chung-Shin Tsai, Chin-Jung Chen, Brian S. Choi, Xiaoming Yu, *Design sensitivity analysis and optimization tool (DSO) for shape design applications*, Computing Systems in Engineering, Vol. 6, No. 2, 151-175, 1995.
- [3] J. S. Hansen, Z. S. Liu, N. Olhoff, *Shape sensitivity analysis using a fixed basis function finite element approach*, Struct. Multidisc. Optim., 21, 177-195, 2001.
- [4] Edwin Hardee, Kuang-Hua Chang, Jian Tu, Kyung K. Choi, Iulian Grindeanu, Xiaoming Yu, *A CAD-based design parametrization for shape optimization of elastic solids*, Advances in Engineering Software, 30, 185-199, 1999.
- [5] M. Kegl, *Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 49, 1571-1588, 2000.
- [6] K. Wisniewski, E. Turska, *Kinematics of finite rotation shell with in-plane twist parameter*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 190, 1117-1135, 2000.
- [7] K. Wisniewski, E. Turska, *Warping and in-plane twist parameters in kinematics of finite rotation shells*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 190, 5739-5758, 2001.
- [8] J. Korelc, *Automatic generation of numerical codes with introduction to AceGen 4.0 symbolc code generator*, User manual, [www.fgg.uni-lj.si/Symech/](http://www.fgg.uni-lj.si/Symech/), 2004.
- [9] J. Korelc, *Multi-language and Multi-environment Generation of Nonlinear Finite Element Codes*, Engineering with Computers, Vol. 18, p.p. 312-327, 2002.
- [10] P. Michaleris, D.A. Tortorelli and C.A. Vidal, *Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity*, Int. J. Num. Meth. Engng, 37, 2471-2499, 1994.
- [11] M.A. Crisfield, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1*, John Wiley & Sons Inc., England, 2003



## *Elasto-plastični nosilec: nadomeščanje meritev z numeriko*

*A. Lesnika<sup>1</sup>, B. Harl<sup>2</sup> in M. Kegl<sup>2</sup>*

### *Elastic-plastic beam: replacing measurements by numerics*

**Povzetek.** V prispevku je opisan numerični model za računanje povesov elasto-plastičnih nosilcev, ki bi naj vsaj deloma nadomestil zamudne meritve in preizkušanja, ki so potrebna pri razvoju lestev. Osnovo tega modela predstavlja kinematično natančen ravninski elasto-plastični nosilec. Materialni model nosilca je narejen na osnovi aproksimacijske napetostno-deformacijske krivulje z uporabo kvadratne interpolacije s prelivanjem.

**Abstract.** This paper describes a numerical model for the calculation of displacements of an elastic-plastic beam. The model should at least partially replace the measurements and testing needed for the development of ladders. The basis of the model represents a kinematically exact planar elastic-plastic beam element. The material model of the beam is based on an approximate stress-strain curve obtained by using quadratic interpolation with blending.

## **1 Uvod**

Podjetje ALPOS ALU d.o.o. je proizvajalec aluminijastih izdelkov že skoraj 40 let. Osnovna dejavnost podjetja je proizvodnja aluminijastih gospodinjskih in tehničnih lestev za domače in tuje tržišče (slika 1).

Ker gre za sorazmerno preprost proizvod, je konkurenca na globalnem svetovnem trgu izredno huda. Ta sili podjetje v stalno zniževanje stroškov proizvodnje.

V zadnjih letih so zato v podjetju precej sredstev vložili v optimizacijo in avtomatizacijo proizvodnega procesa, s čimer so močno povečali proizvodnjo lestev in tako znižali proizvodne stroške na enoto proizvoda.

Dodatni naporji so bili vloženi v zmanjševanje stroškov vhodnih materialov, predvsem aluminija. Z izbiro kvalitetnejših materialov, cenejših dobaviteljev in zmanjševanjem porabe materiala so dosegli pomembne uspehe. Kljub temu pa v podjetju ocenjujejo, da bi bilo mogoče, z natančnejšo analizo napetostnih in deformacijskih razmer v

---

<sup>1</sup> Šolski center Celje, Višja strokovna šola, Pot na Lavo 22, 3000 Celje

<sup>2</sup> Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, 2000 Maribor

materialu lestve, prihraniti dodatna sredstva. K tovrstnemu razmišljanju jih je napeljalo tudi dejstvo, da običajni parametri materiala, kot so modul elastičnosti  $E$ , dogovorna meja tečenja  $R_{p0,2}$  in natezna trdnost  $R_m$ , s katerimi proizvajalci aluminija običajno definirajo lastnosti materiala, ne zadoščajo več za zagotavljanje konstantne kvalitete proizvodov. Pogosto se namreč zaradi tehnologije izdelave aluminijastih profilov v materialu pojavijo zaostale napetosti, trajne deformacije se lahko pojavijo pri napetostih, ki so daleč pod dogovorno mejo tečenja in podobno.



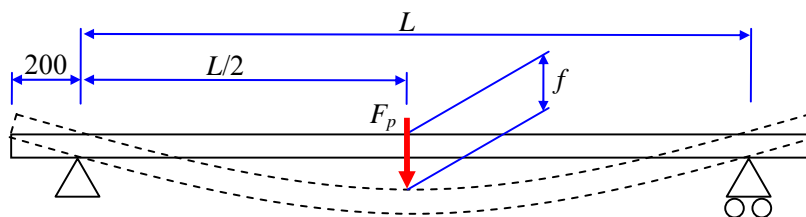
**Slika 1:** Tehnične lestve (levo) in prerez njihovega nosilnega profila (desno)

S podjetjem ALPOS ALU d.o.o. smo zato v letu 2005 pričeli s sodelovanjem, v sklopu katerega želimo natančneje raziskati napetostne in deformacijske razmere v profilu obremenjene lestve. Namen skupnega dela je določiti optimalne parametre materiala ter dimenzije aluminijastih profilov tako, da bodo največje deformacije lestve v skladu z mednarodnim standardom EN 131.

Za začetek smo se odločili, da za analizo odziva ne uporabimo katerega izmed komercialnih MKE paketov, temveč da bomo razvili lastno programsko rešitev s preprostim uporabniškim vmesnikom. Ta bo omogočala uporabo programa tudi inženirjem, ki nimajo bogatih izkušenj s tovrstnimi analizami, v nadaljevanju pa bi lahko vključili tudi optimizacijo. Za odločitev o ustrezni programski opremi si moramo najprej ogledati razmere, ki jih je potrebno analizirati. V našem primeru bo to s standardom predpisano preizkušanje lestve.

## 2 Preizkušanje lestev

Pri preizkušanju je lestev v vodoravnem položaju in podprta kot kaže slika 2. V primeru večdelne lestve, mora biti le ta popolnoma iztegnjena. Previsni polji na vsaki strani lestve sta enaki 200 mm. Obremenitev mora delovati enakomerno na oba nosilna profila lestve, in sicer, na sredini med podporama. Obremenitev mora naraščati postopoma brez nenadnih sunkov.



Slika 2: Preizkušanje lestve

### 2.1 Merjenje trajnih deformacij

Lestev najprej predobremenimo s silo  $F_p = 500 \text{ N}$ . Sila mora delovati 1 minuto. Lestev nato razbremenimo, položaj razbremenjene lestve na sredini med podporama pa služi kot izhodišče za merjenje trajnih deformacij. Lestev nato obremenimo s silo  $F = 1000 \text{ N}$ . Sila mora delovati 1 minuto. Trajne deformacije izmerimo po razbremenitvi lestve. Standard EN 131 predpisuje, da največje trajne deformacije ne smejo preseči

$$f_{\max} = \frac{L}{1000} \quad (1)$$

kjer je  $f_{\max}$  največji povos v [mm] in  $L$  razdalja med podporama izražena v [mm].

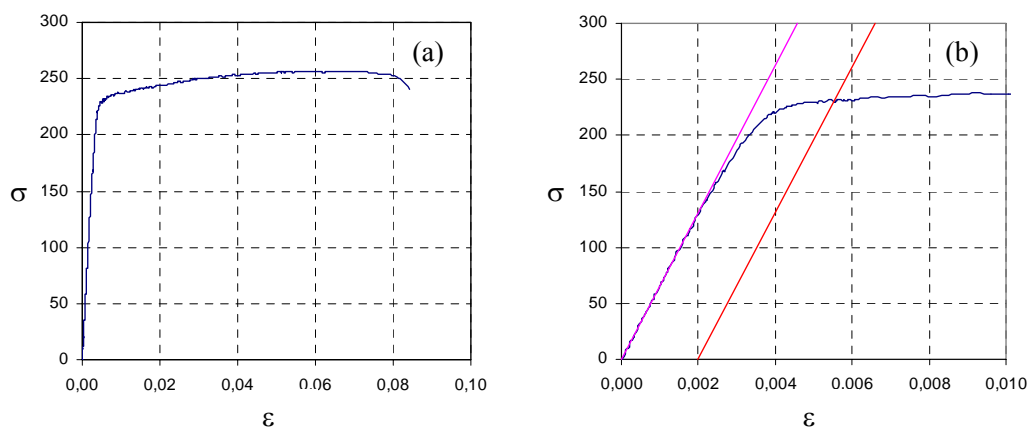
### 2.2 Merjenje skupnih deformacij

Lestev najprej predobremenimo s silo  $F_p = 100 \text{ N}$ . Sila mora delovati 1 minuto. Lestev nato razbremenimo, položaj razbremenjene lestve na sredini med podporama pa služi kot izhodišče za merjenje deformacij. Lestev nato obremenimo s silo  $F = 750 \text{ N}$ . Sila naj deluje 1 minuto. Standard EN 131 predpisuje, da največje deformacije ne smejo preseči

$$\begin{aligned} f_{\max} &= 5 \cdot 10^{-6} L^2, & L \leq 5 \text{ m} \\ f_{\max} &= 0,043L - 90, & 5 \text{ m} < L \leq 12 \text{ m} \\ f_{\max} &= 0,06L - 294, & L > 12 \text{ m} \end{aligned} \quad (2)$$

## 3 Uporabljen material in njegovo modeliranje

Podjetje uporablja za izdelavo lestev profile iz Al zlitine EN AW 6060 (AlMgSi0,5), ki zagotavlja dobre mehanske lastnosti, hkrati pa omogoča plastično preoblikovanje. V dogovoru s proizvajalci profilov, podjetje definira mejne vrednosti osnovnih parametrov materiala, kot so natezna trdnost  $R_m$ , dogovorna meja tečenja  $R_{p0,2}$ , raztezek  $A_5$  in podobno. Ustreznost materiala se občasno preverja s preizkusi na trgalnem stroju (slika 3a). Glede na to, da so dovoljene trajne deformacije sorazmerno majhne, je za dimenzioniranje zanimivo predvsem področje napetosti nekoliko nad mejo tečenja (slika 3b).



**Slika 3:** Izmerjena  $\sigma - \varepsilon$  krivulja materiala

Podatki o materialu so torej izvorno podani v obliki diskretnih točk, ki jih dobimo s pomočjo nateznega preizkusa. Za numerični model je potrebno te podatke predelati v nek analitični izraz – aproksimacijsko krivuljo  $\sigma - \varepsilon$ . Za potrebe računanja moramo namreč zagotoviti izraze za izračun

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(\varepsilon) \\ \sigma' &= \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}\end{aligned}\quad (3)$$

Za izpeljavo potrebnih izrazov predpostavimo, da imamo na razpolago naslednje podatke

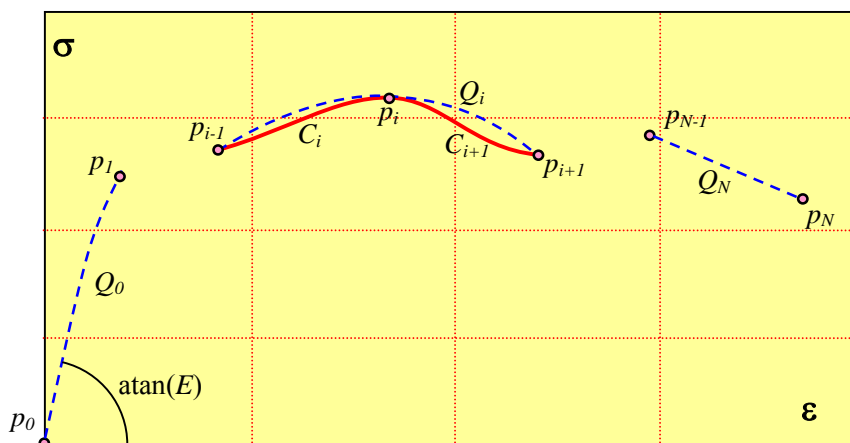
$$\begin{aligned}E &= \sigma'(0) \\ p_j &= (\varepsilon_j, \sigma_j), \quad \varepsilon_j < \varepsilon_{j+1}, \quad j = 0, \dots, N\end{aligned}\quad (4)$$

kjer je  $(N+1)$  število podanih  $\sigma - \varepsilon$  točk  $p_j$ , ki predstavljajo le majhen izbor (najbolj karakterističnih) točk, dobljenih z meritvijo. Krivulja  $\sigma - \varepsilon$  mora izpolnjevati naslednje zahteve:

- gre skozi vse točke  $p_j$ ,
- gladko in brez oscilacij sledi poligonu točk  $p_j$ ,
- imeti mora gladke prve odvode (zvezne druge odvode).

Prva dva pogoja zagotavljata enostavno modeliranje krivulje (izbor točk  $p_j$ ), zadnji pogoj pa bo olajšal numerično integracijo po prerezu nosilca (v tem primeru so vsi integrandi gladke funkcije).

Odločili smo se, da bomo izraz za  $\sigma - \varepsilon$  krivuljo določili s pomočjo interpolacije. Pri tem seveda običajne interpolacije (na primer Lagrangeva) ne pridejo v poštev zaradi nesprejemljivih oscilacij rezultirajoče krivulje. Če bi se hoteli znebiti le oscilacij, bi lahko uporabili, na primer, Bezierjevo krivuljo, vendar ta krivulja ne gre skozi točke, ki jo definirajo. To pa je precej neugodno s stališča praktične priprave podatkov. Izhod smo videli v interpolaciji, ki se včasih uporablja na področju geometrijskega oblikovanja. Gre za kvadratično interpolacijo s prelivanjem [2], ki smo jo nekoliko preuredili za naše potrebe.



**Slika 4:** Zasnova aproksimacijske  $\sigma - \varepsilon$  krivulje

Celotna  $\sigma - \varepsilon$  krivulja  $C = \{\sigma(\varepsilon), \varepsilon_0 \leq \varepsilon < \varepsilon_N\}$  je razdeljena v  $N$  segmentov (polna črta), slika 4,

$$C_i = \sigma(\varepsilon), \quad \varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon < \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

kjer je vsak segment  $C_i = C_i(\varepsilon)$  podan z

$$C_i = c_{i-1}Q_{i-1} + c_iQ_i. \quad (6)$$

Pri tem simbol  $Q_i = Q_i(\varepsilon)$  označuje Lagrangev polinom (prekinjena črta) skozi točke  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  z naslednjima izjemama:

- $Q_0$  je kvadratični Lagrangev polinom definiran z  $E$  ter  $p_0, p_1$ ,
- $Q_N$  je daljica definirana z  $p_{N-1}, p_N$ .

Koeficiente  $c_{i-1}$  in  $c_i$  izračunamo kot

$$c_{i-1} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon}{\Delta_i}, \quad c_i = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{i-1}}{\Delta_i}, \quad \Delta_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} \quad (7)$$

Prvi odvod i-tega segmenta pa izračunamo kot

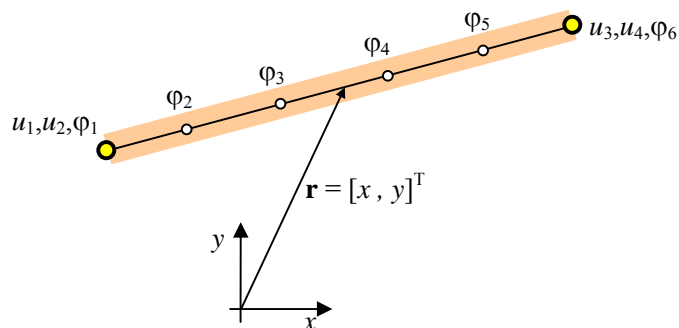
$$C'_i = c_{i-1}Q'_{i-1} + c_iQ'_i + \frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta_i} \quad (8)$$

Dokaj enostavno lahko pokažemo, da ima rezultirajoča krivulja gladke prve odvode. To nam bo koristilo pri numerični integraciji po prerezu nosilca.

#### 4 Model nosilca

Za model nosilca smo uporabili končni element, ki je podrobno predstavljen v [3,4]. Tukaj bomo zato navedli le nekaj njegovih najpomembnejših značilnosti.

Nosilec je lahko ukrivljen in ima poljubno število vozlišč. Glede na naše zahteve in lastnosti nosilca smo se odločili, da bomo uporabili ravno varianto z  $M = 6$  vozlišči (slika 5) in brez porazdeljenih obremenitev.



Slika 5: Ravna varianta nosilca s 6 vozlišči (2 zunanja in 4 notranja)

Variacijo notranjega potenciala nosilca lahko zapišemo kot

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [-\lambda_1 \delta u_1 - \lambda_2 \delta u_2 + \lambda_1 \delta u_3 + \lambda_2 \delta u_4 + \alpha_i \delta \varphi_i + \beta \delta \lambda_1 + \gamma \delta \lambda_2] d\xi \quad (9)$$

kjer je  $\xi$  lokalna koordinata elementa, ki preteče vrednosti od -1 do +1. Simbola  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  predstavljata Lagrangeva multiplikatorja, ki spadata k odzivnim spremenljivkam elementa. Simboli  $\alpha_i$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  so definirani z

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 2(M_c P_i' - (1 + \varepsilon) Q P_i J), \quad i = 1, \dots, M \\ \beta &= -2(1 + \varepsilon) \cos \varphi J + x_6 - x_1 + u_3 - u_1 \\ \gamma &= -2(1 + \varepsilon) \sin \varphi J + y_6 - y_1 + u_4 - u_2 \end{aligned} \quad (10)$$

kjer je  $J = L/2$ ,  $L$  pa je dolžina elementa. Simbol  $\varphi$  predstavlja zasuk prereza in je definiran kot

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^M P_i \varphi_i \quad (11)$$

kjer je  $P_i$  Lagrangev interpolacijski polinom,  $P_i' = dP_i/d\xi$ ,  $\varphi_0$  pa je zasuk prereza pred deformacijo nosilca. Simbol  $Q$  označuje strižno silo, ki je enaka  $Q = -\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi$ ,  $M_c$  pa je moment

$$M_c = - \int_A \eta \sigma dA \quad (12)$$

kjer je  $\eta$  lokalna koordinata vlakna od nevtralne osi,  $\sigma$  je normalna napetost v vlaknu,  $A$  pa označuje prečni prerez nosilca. Simbol  $\varepsilon$  v enačbah (10) označuje specifični raztezek vlakna na nevtralni osi. Njegova vrednost se izračuna iz enačbe

$$\int_A \sigma dA = \lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi \quad (13)$$

Normalna napetost  $\sigma$  v vlaknu je odvisna od specifičnega raztezka vlakna

$$D = \varepsilon - \frac{\eta}{J} \frac{d\varphi}{d\xi} \quad (14)$$

njeno vrednost pa dobimo na osnovi aproksimacijske  $\sigma - \varepsilon$  krivulje, kjer za specifični raztezek vstavimo  $D$ .

Prerez nosilca modeliramo s sloji, katerih širina se lahko spreminja kvečjemu linearno. Podrobneje je način obravnavanja prereza nosilca opisan v članku o občutljivostni analizi.

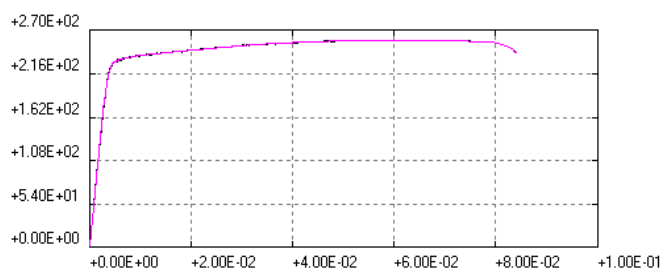
Še komentar o integraciji po elementu. Integracijo je potrebno opraviti numerično. Vz dolž nosilca je uporabljena Lobatto-va shema s 6 integracijskimi točkami, po prerezu pa smo uporabili Gauss-ovo shemo z 2 integracijskima točkama za vsak sloj.

## 5 Primerjava numerike z meritvami

Predstavljen numerični model smo preverili na primeru standardnega testa – merjenje skupnega povesa lestve. Gre za preizkus, ki ga prikazuje slika 2. Razpon (upogibna dolžina) lestve je znašal  $L = 6740$  mm, njen nosilni profil pa je bil enak kot na sliki 1b. Uporabljen material je bil Al zlitina EN AW 6060.

Lestev je bila na sredini točkovno obremenjena, breme pa se je povečevalo postopoma od 75 kg do 160 kg. Slika 6 prikazuje izmerjeno in aproksimacijsko materialno krivuljo – razlik praktično ni videti.





Slika 6: Izmerjena in aproksimacijska  $\sigma - \varepsilon$  krivulja materiala

Za izračun smo uporabili 2 končna elementa. Prerez je bil modeliran s 16 segmenti (sloji). Zaradi nedoločenosti nekaterih podatkov (tolerance prereza, ...), smo te 'kalibrirali' tako, da se je račun ujema z meritvijo pri bremenu 75 kg. Rezultate računa prikazuje Tabela 1.

**Tabela 1:** Primerjava izmerjenih in izračunanih povosov.

Breme (kg)	Poves – meritev [mm]	Poves – račun [mm]	Razlika [%]
75	110.6	110.6	0.00
100	148.1	147.6	-0.33
120	177.7	177.3	-0.22
130	192.4	192.3	-0.05
140	207.4	207.4	0.00
150	222.8	222.8	0.00
160	237.8	238.4	+0.25

Rezultati kažejo zelo dobro ujemanje, čeprav na žalost pri tem preizkusu krajna vlakna še niso globoko v plastičnem območju. Kljub temu predvidevamo, da bomo tudi v takšnem primeru dobili dobre rezultate.

## Literatura

- [1] EN 131:1993 E: Ladders – Requirements, testing, marking, European Committee for Standardization.
- [2] Rogers DF, Adams JA. Mathematical elements for computer graphics (2<sup>nd</sup> edn). McGraw-Hill: New York, 1990.
- [3] Saje M, Planinc I, Turk G, Vratnar B. A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames. *Comput. methods appl. mech. eng.* 1997; 144: 125-151.
- [4] Saje M, Turk G, Kalagasidu A, Vratnar B. A kinematically exact finite element formulation of elastic-plastic curved beams. *Computers and Structures* 1998; 67: 197-214.



## *Kompatibilnostni pogoji napetostnega tenzorja linearne elastičnega materiala*

G. Mejak<sup>1</sup>

### *Compatibility conditions of the stress tensor of the linear elastic material*

**Povzetek.** Predstavljeni so kompatibilnostni pogoji napetostnega tenzorja pri enostavnih deformacijah. Podani sta dve metodi določitve kompatibilnostnih pogojev, algebraična in analitična. Za primer prečne simetrije je dokazan obstoj ter eksplicitno zapisan kompatibilnostni pogoj enoosnega testa in neobstoj kompatibilnostnega pogoja strižnega testa. Na kratko so predstavljeni tudi rezultati za ostale simetrije elastičnega tenzorja.

**Abstract.** Compatibility conditions of the stress tensor of the linear elastic material under uniaxial and shear tests are presented. Two methods are introduced, algebraic and analytical. Existence of the compatibility conditions is shown and explicitly given in the case of transversally isotropic material. A short discussion of the compatibility conditions for other types of the symmetries is also given.

## 1 Uvod

### 1.1 Motivacija

Dan je elastični material, naša naloga pa je določiti njegove linearne elastične materialne lastnosti oziroma pripadajoči elastični tenzor. Na voljo so nam enoosni in strižni deformacijski testi. Vprašanje je, kako z najmanjšim številom testov določiti simetrijo elastičnega tenzorja in njegove strukturne parametre.

### 1.2 Osnovne definicije in pisava

Elastični tenzor, ki je tenzor četrtega reda, bomo označevali s  $\underline{\underline{c}}$ , pripadajoče komponente v izbranem koordinatnem sistemu pa s  $c_{ijkl}$ . Obravnavo bomo omejili na Greenov elastični tenzor, ki ima simetrije  $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk}$  in  $c_{ijkl} = c_{klij}$ . Elastični tenzor s posplošenim Hookovim

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

zakonom  $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{c}} : \underline{\underline{e}}$  povezuje tenzor napetosti  $\underline{\underline{t}}$  z infinitezimalnim deformacijskim tenzorjem  $\underline{\underline{e}}$ . V izbrani ortonormirani kartezični bazi  $\vec{e}_i$  poljubnemu simetričnemu tenzorju drugega reda  $\underline{\underline{a}} = a_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ , tu smo privzeli sumacijsko konvencijo na ponavljajoče se indekse, priredimo 6-terico  $\mathbf{a} = S(\underline{\underline{a}}) := (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \sqrt{2}a_{23}, \sqrt{2}a_{31}, \sqrt{2}a_{12})$ . Pišimo  $\mathbf{t} = S(\underline{\underline{t}})$  in  $\mathbf{e} = S(\underline{\underline{e}})$ . Preslikava  $\underline{\underline{a}} \mapsto \mathbf{a} = S(\underline{\underline{a}})$  inducira preslikavo  $\underline{\underline{c}} \mapsto \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  tako, da se Hookov zakon glasi  $\mathbf{t} = \mathbf{C}\mathbf{e}$ . Matriki  $\mathbf{C}$  pravimo elastična matrika. Velja opozoriti, da se zaradi faktorja  $\sqrt{2}$  v definiciji preslikave  $S$  naša pisava razlikuje od običajne pisave v inženirski literaturi, kjer je  $\hat{\mathbf{t}} = (t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12})$ ,  $\hat{\mathbf{e}} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{23}, 2e_{31}, 2e_{12})$  in  $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{e}}$ , kjer matriko  $\mathbf{C}$  dobimo iz matrike  $\hat{\mathbf{C}}$  tako, da zadnje tri vrstice in stolpce matrike  $\hat{\mathbf{C}}$  pomnožimo s  $\sqrt{2}$ . Prednost naše pisave je, da preslikava tenzorja v 6-terico na enak način deluje na tenzorju napetosti in deformacije.

Sprememba baze  $\vec{e}'_i = Q\vec{e}_i$ ,  $Q \in O(3)$ , inducira preslikavo  $\underline{\underline{t}} \mapsto \underline{\underline{t}}' = Q\underline{\underline{t}}Q^T$  na prostoru tenzorjev drugega reda in preslikavo  $\underline{\underline{c}} \mapsto \underline{\underline{c}}' = Q \star \underline{\underline{c}}$  na prostoru tenzorjev četrtega reda, kjer je  $Q \star \underline{\underline{c}}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \underline{\underline{c}}(Q\vec{a}, Q\vec{b}, Q\vec{c}, Q\vec{d})$ . V zadnjem zapisu smo tenzor četrtega reda identificirali s štiri-linearano formo. Pravimo, da je  $Q$  simetrija elastičnega tenzorja, če je  $\underline{\underline{c}} = Q \star \underline{\underline{c}}$ . Očitno simetrije elastičnega tenzorja sestavljajo podgrupo v  $O(3)$ . Znano je, glej na primer [1], [2], da ima elastični tenzor osem razredov simetrij, triklinično, monoklinično, ortotropično, trigonalno, tetragonalno, tranzverzalno izotropično, kubično in izotropijo, tabela 1. Tu smo upoštevali dejstvo, da rotacijska simetrija  $\mathbf{R}(\vec{e}, \varphi)$  elastičnega tenzorja za kot  $\varphi \notin 2\pi, \pi$  inducira zrcalno simetrijo glede na normalo, ki vsebuje os rotacijske simetrije, [2]. V jeziku kristalografije to pomeni, da se trigonalna oziroma tetragonalna kristalografska simetrija v okviru linearne elastičnosti sovпада s ditrigonalno oziroma ditetragonalno simetrijo. Koordinatnemu sistemu, katere osi se sovpadajo z osmi simetrije, pravimo *materialni koordinatni sistem*. Očitno je vsak koordinatni sistem triklinične simetrije in izotropije materialni koordinatni sistem, monoklinična in tranzverzalna simetrija pa enolično določata samo eno koordinatno os materialnega koordinatnega sistema.

**Tabela 1** : Grupe simetrij Greenovega elastičnega tenzorja.  $\mathbf{Z}(\vec{e})$  je zrcaljenje glede na ravnino z normalo  $\vec{e}$ ,  $\mathbf{R}(\vec{e}, \varphi)$  je rotacija okrog osi  $\vec{e}$  za kot  $\varphi$ . Vektorja  $\vec{e}_1$  in  $\vec{e}_2$  sta pravokotna.

Simetrija	Minimalna množica generatorjev simetrije	Generatorji grupe simetrij
Triklinična	$\emptyset$	$\{-\mathbf{I}\}$
Monoklinična	$\{\mathbf{Z}(\vec{e}_1)\}$	$\{-\mathbf{I}, \mathbf{Z}(\vec{e}_1)\}$
Ortotropična	$\{\mathbf{Z}(\vec{e}_1), \mathbf{Z}(\vec{e}_2)\}$	$\{-\mathbf{I}, \mathbf{Z}(\vec{e}_1), \mathbf{Z}(\vec{e}_2)\}$
Trigonalna	$\{\mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{2\pi}{3})\}$	$\{-\mathbf{I}, \mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{2\pi}{3}), \mathbf{Z}(\vec{e}_2)\}$
Tetragonalna	$\{\mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2})\}$	$\{-\mathbf{I}, \mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2}), \mathbf{Z}(\vec{e}_2)\}$
Tranzverzalna <sup>2</sup>	$\{\mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{\pi}{3})\}$	$\{-\mathbf{I}, \mathbf{R}(\vec{e}_1, \varphi), \mathbf{Z}(\vec{e}_2)\}$
Kubična	$\{\mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2}), \mathbf{R}(\vec{e}_2, \frac{\pi}{2})\}$	$\{-\mathbf{I}, \mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{\pi}{2}), \mathbf{R}(\vec{e}_2, \frac{\pi}{2})\}$
Izotropija <sup>3</sup>	$\{\mathbf{R}(\vec{e}_1, \frac{\pi}{3}), \mathbf{R}(\vec{e}_2, \frac{\pi}{4})\}$	$O(3)$

<sup>2</sup> Generator simetrije je poljubna rotacija  $\mathbf{R}(\vec{e}_1, \varphi)$  za kot  $\varphi \notin \{2\pi, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{2}\}$ . Os  $\vec{e}_2$  generatorja zrcalne simetrije je poljubni vektor, ki je pravokoten na os rotacijske simetrije.

<sup>3</sup> Generatorja simetrije sta poljubni rotaciji  $\mathbf{R}(\vec{e}_1, \varphi_1)$  in  $\mathbf{R}(\vec{e}_2, \varphi_2)$  okrog dveh nevzporednih osi za kota  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$ .

Sprememba baze inducira tudi preslikavo  $\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}'$ . Ker pa  $\mathbf{C}$  ni tenzor, ta preslikava ni tenzorska. Označimo z  $[\underline{a}]$  matriko, ki pripada tenzorju  $\underline{a}$  v izbrani bazi. Potem pri spremembi baze velja kontravariantno pravilo  $[\underline{a}'] = \mathbf{Q}^T [\underline{a}] \mathbf{Q}$ , kjer je  $\mathbf{Q}$  matrika komponent ortogonalne transformacije  $Q$  v prvotni bazi. Če upoštevamo to v zvezi med  $\mathbf{C}$  in  $\underline{\mathbf{c}}$ , dobimo enačbo

$$S(\mathbf{Q}^T S^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{e})\mathbf{Q}) = \mathbf{C}' S^{-1}(\mathbf{Q}^T S(\mathbf{e})\mathbf{Q}), \quad (1)$$

ki povezuje  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}'$ . Če je  $Q$  iz grupe simetrije, je  $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ . Komponente elastične matrike s to simetrijo so potemtakem natanko koeficienti ničelnega prostora homogene enačbe (1).

Na kratko predstavimo še osnovno pisavo tenzorjev četrtega reda. Poljubni tenzor četrtega reda bomo zapisali s krepkim tiskom in ga dvakrat podčrtali. Tenzor četrtega reda  $\underline{\underline{\mathbf{c}}}$  priredi poljubnemu tenzorju drugega reda  $\underline{a}$  tenzor drugega reda  $\underline{b}$  s predpisom  $\underline{a} \mapsto \underline{\underline{\mathbf{c}}} : \underline{a} := \underline{b}$ . V komponentnem zapisu  $b_{ij} = c_{ijkl} a_{kl}$ . Prostor tenzorjev četrtega reda je torej ekvivalenten prostoru lineranih preslikav nad prostorom tenzorjev drugega reda. Enotski tenzor četrtega reda bomo označevali z  $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ . Potem  $\underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{a} = \underline{a}$  za vsak  $\underline{a}$ . Potrebovali bomo še eno definicijo; poljubnemu vektorju  $\underline{\vec{a}}$  priredimo tenzor četrtega reda  $\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\underline{\vec{a}})$ , ki preslika poljubni tenzor drugega reda  $\underline{b}$  po pravilu:

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\underline{\vec{a}}) : \underline{b} = \underline{\vec{a}} \otimes \underline{\underline{b}} \underline{\vec{a}} \quad \text{in} \quad \underline{\underline{\mathbf{J}}}(\underline{\vec{a}})^T : \underline{b} = \underline{\underline{b}}^T \underline{\vec{a}} \otimes \underline{\vec{a}}. \quad (2)$$

## 2 Algebraična metoda

Za primer vzemimo tranzverzalno izotropičen material. Elastični tenzor je v tem primeru določen s sedmimi strukturnimi parametri; s petimi materialnimi konstantami, Youngovima moduloma  $E_A$  in  $E_T$ , Poissonovima količnikoma  $\nu_A$  in  $\nu_T$  v osni oziroma tranzverzalni smeri in strižnim modulom  $G_A$  v osni smeri ter dvema nematerialnima parametroma, Eulerjevima kotoma, ki določata smer osi tranzverzalne simetrije. Vprašajmo se, koliko enostavnih testov, k enostavnim testom štejemo enoosne in enostavne strižne teste, potrebujemo za določitev strukturnih parametrov. Privzemimo, <sup>4</sup> da smer  $\underline{\vec{e}}$  ni v smeri osi simetrije  $\underline{\vec{n}}$ . Opravimo dva testa, enoosno deformacijo v smeri  $\underline{\vec{e}}$  in enostavno strižno deformacijo v ravnini, ki vsebuje smer  $\underline{\vec{e}}$ . Ta dva testa določata skupaj dvanajst komponent napetostnega tenzorja. Videli bomo, da teh dvanajst komponent enolično določa strukturne parametre elastičnega tenzorja s tranzverzalno simetrijo. Ker je teh parametrov sedem, to pomeni, da obstaja pet vezi med dobljenimi komponentami napetosti. Poiščimo jih.

Koordinatno neodvisen zapis elastičnega tenzorja s tranzverzalno izotropijo v smeri osi  $\underline{\vec{n}}$  je, glej [3],

$$\underline{\underline{\mathbf{c}}} = s_0 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \alpha \underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \beta_1 (\underline{\underline{\mathbf{I}}} \otimes \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}} + \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}}) + \beta_2 \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}} + s_3 (\underline{\underline{\mathbf{J}}}(\underline{\vec{n}}) + \underline{\underline{\mathbf{J}}}(\underline{\vec{n}})^T) \quad (3)$$

Potem

$$\underline{\underline{\mathbf{t}}} = \underline{\underline{\mathbf{c}}} \underline{\underline{\mathbf{e}}} = s_0 \underline{\underline{\mathbf{e}}} + s_1 \underline{\underline{\mathbf{I}}} + s_2 \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}} + s_3 (\underline{\vec{n}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}} \underline{\vec{n}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \underline{\vec{n}} \otimes \underline{\vec{n}}), \quad (4)$$

kjer je  $s_1 = \alpha S \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \beta_1 \underline{\underline{\mathbf{e}}} \underline{\vec{n}} \cdot \underline{\vec{n}}$  in  $s_2 = \beta_1 S \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \beta_2 \underline{\underline{\mathbf{e}}} \underline{\vec{n}} \cdot \underline{\vec{n}}$ .

od katerih je vsaj eden različen od  $\frac{\pi}{2}$ .

<sup>4</sup>Za enolični odgovor ali je dana smer smer osi simetrije potrebujemo tri teste, enosni test v dani smeri in dva strižna testa v ravninah, ki vsebujeta dano smer.

## 2.1 Enosni test

Postavimo prostorski koordinatni sistem z bazo  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  in izberimo  $\vec{e} = \vec{k}$  in  $\underline{\underline{e}} = \vec{k} \otimes \vec{k}$ . Pri dani deformaciji in izmerjeni napetosti  $t_{ij}^z$  enačba (4) predstavlja zvezo med komponentami izmerjene napetosti  $t_{ij}^z$  in neznanimi koeficienti  $\alpha, \beta_1, \beta_2, s_0, s_3$  in komponentami normale  $\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j} + n_3\vec{k}$ . Direktni račun, tu privzemamo, da je  $n_1 n_2 n_3 \neq 0$ , pokaže, da je

$$\beta_1 = \frac{n_2(t_{11}^z - \alpha) - n_1 t_{12}^z}{n_2 n_3^2}, \quad \beta_2 = \frac{n_1 n_2 (\alpha - t_{11}^z) + (n_1^2 + n_3^2) t_{12}^z}{n_1 n_2 n_3^4} \quad (5)$$

$$s_0 = -t_{11}^z + t_{33}^z + \frac{-2n_1 n_3 t_{23}^z + (n_1^2 + n_3^2) t_{12}^z}{n_1 n_2}, \quad s_3 = \frac{n_1 t_{23}^z - n_3 t_{12}^z}{n_1 n_2 n_3} \quad (6)$$

in

$$t_{13}^z n_2 = t_{23}^z n_1 \quad (7)$$

ter

$$t_{13}^z t_{23}^z (t_{11}^z - t_{22}^z) + t_{12}^z \left( (t_{23}^z)^2 - (t_{13}^z)^2 \right) = 0. \quad (8)$$

Enačbe (5), (6) in (7) določajo neznane parametre, enačba (8) pa je kompatibilnostna enačba za komponente izmerjene napetosti pri enosnem testu v smeri osi  $z$ . Izkaže se, da enačba (8) velja tudi v primeru  $n_1 n_2 n_3 = 0$ . Vidimo, da je enačba (8) neodvisna od smeri osi tranzverzalne simetrije. Povedano drugače, če je material tranzverzavno izotropičen, potem za komponente napetosti pri enosni deformaciji v smeri osi  $z$  velja (8). Direktni izračun leve strani enačbe (8) pri enosni deformaciji za vse vrste materialnih simetrij pa pokaže, da velja celo obratno. Tako smo dokazali : *material je tranzverzavno izotropičen natanko tedaj, ko za komponente napetosti pri enosni deformaciji v smeri osi  $z$  velja (8)*. Za enosni test v smeri osi  $x$  se kompatibilnostni pogoj glasi  $t_{13}^x t_{12}^x (t_{33}^x - t_{22}^x) + t_{23}^x \left( (t_{12}^x)^2 - (t_{13}^x)^2 \right) = 0$ , za test v smeri osi  $y$  pa  $t_{23}^y t_{12}^y (t_{33}^y - t_{11}^y) + t_{13}^y \left( (t_{12}^y)^2 - (t_{23}^y)^2 \right) = 0$ .

## 2.2 Strižni test

Sedaj izberimo  $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\vec{i} \otimes \vec{k} + \vec{k} \otimes \vec{i})$ . Pripadajoče izmerjene komponente napetostnega tenzorja označimo s  $t_{ij}^{xz}$ . Direktni račun sedaj pokaže, da, v nasprotju z enosnim testom, strižni test ne določa kompatibilnostnih pogojev. Točneje, enačba (4) določa tako kot prej  $\beta_1, \beta_2, s_0, s_3$  in dve zvezi med komponentami napetosti in osi simetrije. Ker sta ti dve enačbi odvisni od komponent osi simetrije, strižni test ne določa kompatibilnostnih pogojev napetostnega tenzorja. Poglejmo zato, ali morda obstajajo kompatibilnosti pogoji med napetostmi enosnega in strižnega testa. Kot smo omenili, pričakujemo pet kompatibilnostnih pogojev. Direktni račun pokaže, tu privzemamo  $n_1 n_2 n_3 \neq 0$  in  $t_{23}^z t_{13}^z \neq 0$ , da je

$$\alpha = \frac{-n_1 n_3 t_{23}^z t_{13}^z + n_3^2 t_{13}^z (t_{23}^{xz} - t_{12}^z) + 2n_1^2 (t_{11}^z t_{23}^z - t_{13}^z t_{12}^z)}{2n_1^2 t_{23}^z}, \quad (9)$$

$$n_3 = -n_1 \frac{t_{13}^{xz} t_{23}^z + t_{11}^z t_{23}^z - t_{33}^z t_{23}^z - t_{23}^{xz} t_{13}^z - t_{13}^z t_{12}^z}{t_{23}^z t_{13}^z}. \quad (10)$$

Enačbe (5), (6), (7), (9) in (10) v popolnosti določajo vse strukturne parametre tranzverzalne simetrije. Preostale štiri enačbe strižnega testa v kombinaciji z enoosnim testom določajo mešane kompatibilnostne pogoje med komponentami  $t_{ij}^z$  in  $t_{ij}^{xz}$ . Trije kompatibilnostni pogoji so sorazmerno komplicirani izrazi in jih zaradi pomanjkanja prostora tu ne bomo zapisali, četrti pa je

$$t_{13}^z = t_{33}^{xz}. \quad (11)$$

Ta pogoj je posledica simetrije elastične matrike  $\mathbf{C}$  in tako velja za vsako materialno simetrijo.

### 3 Analitična metoda

V predhodnem razdelku smo z algebraično metodo izpeljali kompatibilnostne pogoje. Algebraična metoda ima dve slabosti. Prvič, znano je, da imajo koordinatno neodvisen zapis elastičnega tenzorja samo ortotropična simetrija, tranzverzalna izotropija (enačba (3)) in izotropija. Za ostale simetrije moramo uporabiti transformacijska pravila, ki povezujejo komponente elastičnega tenzorja v materialnem koordinatnem sistemu s komponentami v prostorskem koordinatnem sistemu. Ker so ta pravila precej komplicirana, glej [4], je uporaba algebraične metode za druge simetrije računsko bistveno bolj težavna. Kot drugič, pa algebraična metoda zahteva izračun veliko podprimerov. Konkretno, pri izpeljavi (8) smo privzeli, da je  $n_1 n_2 n_3 \neq 0$  in  $t_{23}^z t_{13}^z \neq 0$ . Veljavnost (8) pri  $n_1 n_2 n_3 = 0$  ali  $t_{23}^z t_{13}^z = 0$  je potrebno pri algebraični metodi potrditi s posebnim izračunom, kar precej zmanjša preglednost metode.

Ideja analitične metode je naslednja. Iščemo funkcijo  $f = f(\underline{t})$ , ki je pri izbrani deformaciji in elastičnemu tenzorju eksplicitno neodvisna od strukturnih parametrov elastičnega tenzorja. Z enačbo, iščemo rešitev sistema

$$0 = \frac{\partial f}{\partial d_k} = \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} \frac{\partial t_{ij}}{\partial d_k}, \quad (12)$$

kjer so  $d_k, k = 1, \dots, K$  strukturni parametri izbrane simetrije elastičnega tenzorja. Iz (12) sledi, da je iskana funkcija rešitev sistema parcialnih diferencialnih enačb

$$\frac{\partial f}{\partial t_{ij}} = \gamma_l Z_{ij}^l, \quad (13)$$

kjer so  $Z_{ij}^l, l = 1, \dots, L$  bazni vektorji ničelnega prostora matrike  $\mathbf{Y}$  s komponentami  $\frac{\partial t_{ij}}{\partial d_k} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times K}$ ,  $L$  je dimenzija ničelnega prostora,  $\gamma_l$  pa so funkcije komponent napetosti  $t_{ij}$ . Funkcije  $\gamma_l$  niso poljubne, izbrati jih moramo tako, da je sistem (13) rešljiv. Če je  $L = 0$ , potem za pripadajoče napetosti izbrane deformacije ne obstaja kompatibilnostni pogoj. Analitično metodo moremo brez težav razširiti na iskanje kompatibilnostnih pogojev med komponentami napetosti dveh testov. V tem primeru iščemo funkcijo  $f = f(\underline{t}_1, \underline{t}_2)$ , kjer  $\underline{t}_i$  pripada deformaciji  $\underline{e}_i, i = 1, 2$ . Ključni korak metode je izračun baze  $Z_{ij}^l$ . Po izračunu baze moramo komponente baze še izraziti s komponentami napetosti tako, da v enačbi (13) nastopajo zgolj komponente napetosti.

Oglejmo si uporabo metode na primeru tranzverzalne izotropije. Sistem enačb (13) bomo zapisali v materialnem koordinatnem sistemu z osjo  $z$  v smeri osi simetrije. Zaradi osne simetrije je orientacija prostorskega koordinatnega sistema glede na materialni koordinatni sistem določena z dvema Eulerjevima kotoma  $\theta$  in  $\psi$ , kjer je  $\theta$  rotacija okrog materialne osi  $\vec{i}$ ,  $\psi$  pa okrog

$\vec{k}$ . Za strukturne parametre vzemimo  $d_1 = \hat{C}_{12}$ ,  $d_2 = \hat{C}_{23}$ ,  $d_3 = \hat{C}_{33}$ ,  $d_4 = \hat{C}_{55}$ ,  $d_5 = \hat{C}_{66}$ ,  $d_6 = \psi$ ,  $d_7 = \theta$ . Direktni račun <sup>5</sup> pokaže, da je ničelni prostor enorazsežen napet na

$$\mathbf{Z} = \left( \frac{\tan(2\psi)}{2}, \frac{-\tan(2\psi)}{2}, 0, \frac{\sec(2\psi) \tan(\psi) t_{12}^z}{t_{13}^z}, -\frac{\sec(2\psi) t_{12}^z}{t_{13}^z}, 1 \right). \quad (14)$$

Tu smo simetričnemu tenzorju  $\underline{Z}$ , kot je običajno, brez faktorja 2 ali  $\sqrt{2}$  za izven diagonalne elemente, priredili šesterico  $\mathbf{Z}$ . V (14) nastopa še  $\psi$ . Iz izmerjenih napetosti sledi

$$\frac{1}{2} \tan 2\psi = \frac{t_{23}^z t_{13}^z}{(t_{23}^z)^2 - (t_{13}^z)^2}. \quad (15)$$

Po eliminaciji kota  $\psi$  iz (14), pri tem moramo paziti na singularno vrednost  $\psi = \frac{\pi}{4}$ , potem sledi

$$\mathbf{Z} = (\tau^2, -\tau^2, 0, t_{12}^z t_{13}^z ((t_{13}^z)^2 + (t_{23}^z)^2), -t_{12}^z t_{23}^z ((t_{13}^z)^2 + (t_{23}^z)^2), \tau(-(t_{13}^z)^2 + (t_{23}^z)^2)), \quad (16)$$

kjer je  $\tau = t_{13}^z t_{23}^z$ . S tem je sistem enačb (13) določen. V primeru  $\psi = \frac{\pi}{4}$  je

$$\mathbf{Z} = \left( -\frac{t_{13}^z}{2}, \frac{t_{13}^z}{2}, 0, -t_{12}^z, t_{12}^z, 0 \right). \quad (17)$$

Sistem (17) dobimo formalno iz (16), če v (16) upoštevamo, da v primeru  $\psi = \frac{\pi}{4}$  velja  $t_{13}^z = t_{23}^z$ . V nadaljevanju se bomo tako omejili na  $\psi \neq \frac{\pi}{4}$ . Rezultat za singularni primer  $\psi = \frac{\pi}{4}$  dobimo s substitucijo  $t_{13}^z = t_{23}^z$ . Sistem (13) je rešljiv po Frobeniusevem izreku, glej na primer [5], natanko tedaj, ko so izpolnjeni kompatibilnostni pogoji

$$\frac{\partial \gamma Z_k}{\partial t_l} = \frac{\partial \gamma Z_l}{\partial t_k}. \quad (18)$$

Skupno število neodvisnih pogojev je 15. Očitno je funkcija  $\gamma$  neodvisna od  $t_{33}^z$  in odvisna od  $t_{11}^z$  in  $t_{22}^z$  samo preko razlike  $t_{11}^z - t_{22}^z$ . Torej  $\gamma = \gamma(r, s, u, v)$ , kjer je  $r = t_{11}^z - t_{22}^z$ ,  $s = t_{23}^z$ ,  $u = t_{13}^z$  in  $v = t_{12}^z$ . Tako se (18) reducira v šest neodvisnih pogojev, ki jih dobimo tako, da v (18) vstavimo  $l = 6$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial r} &= \frac{us \frac{\partial \gamma}{\partial v}}{s^2 - u^2}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial s} &= \frac{(u^2 - s^2) \gamma + v (u^2 + s^2) \frac{\partial \gamma}{\partial v}}{s (s^2 - u^2)}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= \frac{(s^2 - u^2) \gamma + v (u^2 + s^2) \frac{\partial \gamma}{\partial v}}{u (u^2 - s^2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Sistem je rešljiv, njegova rešitev je

$$\gamma(r, s, u, v) = \frac{1}{su} g \left( -r + \frac{uv}{s} - \frac{vs}{u} \right), \quad (20)$$

---

<sup>5</sup> Račun je opravljen z uporabo računalniške algebre na računalniku.

kjer je  $g = g(w)$ ,  $w = -r + \frac{uv}{s} - \frac{vs}{u}$ , poljubna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija.

Sedaj, ko smo določili funkcijo  $\gamma$ , se lahko lotimo reševanja enačbe (13). Iz (16) sledi, da je iskana funkcija  $f$  funkcija  $f = f(r, s, u, v)$ . Potem iz (13), (16) in (20) sledi, je  $f$  rešitev sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= -g(w), \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= -\left(\frac{(s^2 + u^2) v g(w)}{s^2 u}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{(s^2 + u^2) v g(w)}{s u^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{(-s^2 + u^2) g(w)}{s u}.\end{aligned}\tag{21}$$

Izkaže se, da je rešitev sistema

$$f(r, s, u, v) = F\left(r - \frac{uv}{s} + \frac{vs}{u}\right) = F\left(t_{11}^z - t_{22}^z - \frac{t_{13}^z t_{12}^z}{t_{23}^z} + \frac{t_{23}^z t_{12}^z}{t_{13}^z}\right),\tag{22}$$

kjer je  $F = F(-w)$  poljubna dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Funkcija  $f = f(\underline{t}) = F(-w)$  je neodvisna od strukturnih parametrov za vsako funkcijo  $F$ , če je vrednost spremenljivke  $w$  konstantna. V primeru  $\psi = \frac{\pi}{4}$  je  $w = 0$ . Potemtakem  $w \equiv 0$  in kompatibilnostni pogoj enosnega testa je tako

$$t_{11}^z - t_{22}^z - \frac{t_{13}^z t_{12}^z}{t_{23}^z} + \frac{t_{23}^z t_{12}^z}{t_{13}^z} = 0\tag{23}$$

oziroma po regularizaciji natanko pogoj iz (8).

V primerjavi z algebraično metodo je prednost analitične metode, da moremo relativno enostavno ugotoviti, da za dano simetrijo in test ne obstaja kompatibilnostni pogoj. Poleg tega moremo pojem kompatibilnostnega pogoja razširiti do pojma delnega kompatibilnostnega pogoja, kjer zahtevamo, da je  $f$  konstantna na podmnogoterosti strukturnih parametrov. Če za izbrano podmnogoterost ne obstaja delni kompatibilnostni pogoj, potem ne obstaja tudi kompatibilnostni pogoj. To dejstvo nam bistveno olajša dokazovanje neobstoja kompatibilnostnega pogoja. Težava analitične metode je, da je naravni zapis jedra matrike  $\mathbf{Y}$  zapis s strukturnimi parametri, za reševanje sistema (13) pa potrebujemo zapis z napetostmi. Določitev tega zapisa je lahko precej zahtevno delo.

#### 4 Pregled ostalih simetrij in zaključne opombe

Na kratko si še pogledjmo, kako je s kompatibilnostnimi pogoji za ostale simetrije. Z analitično metodo brez težav ugotovimo, da za komponente napetostnega tenzorja enosnega testa obstajajo kompatibilnostni pogoji samo za izotropijo, štirje pogoji, in za tranzverzalno simetrijo, pogoj (8). Nadalje, za strižni test obstajajo kompatibilnostni pogoji samo za izotropijo, pet pogojev, in za kubično simetrijo. Ta se glasi

$$t_{11}^{xz} + t_{22}^{xz} + t_{33}^{xz} = 0.\tag{24}$$



Mešani test ima, kot smo že omenili, vedno trivialni kompatibilnostni pogoj (11). Za triklinični, monoklinični in ortotropični material je to tudi edini kompatibilnostni pogoj, Trigonalna in tetragonalna simetrija imata dodatna dva mešana testa. Ker imata te dve simetriji po devet strukturnih parametrov [6], to pomeni, da v splošnem primeru, ko os enoosnega testa ni v smeri osi zrcalne simetrije, enoosni in strižni test v popolnosti določata njune strukturne parametre. Tranzverzalna simetrija ima tri dodatne kompatibilnostne pogoje, kubična dodatne štiri, izotropija pa nima dodatnega kompatibilnostnega pogoja. Omenimo še, da obstajajo tudi kompatibilnostni pogoji za dvoosne, triosne in mešane teste.

Kompatibilnostni pogoji nam pomagajo pri določitvi simetrije elastičnega tenzorja. V prispevku smo obravnavali eksaktne kompatibilnostne pogoje. Njihov izračun je večinoma zelo zahteven, zato je na mestu vprašanje ali jih moramo izračunati približno. Pomen tega vprašanja je, da imajo v praksi izmerjene napetosti določen pogrešek in tako eksaktni kompatibilnostni pogoj ni natanko izpolnjen. Približni kompatibilnostni pogoj s poznanim intervalom zaupanja v ta namen povsem zadošča. Zanimiva uporaba kompatibilnostnih pogojev je tudi v mehaniki materialov, kjer lahko kompatibilnostni pogoj predstavlja notranjo vez, ki zagotavlja materialu določeno simetrijo.

## 5 Literatura in citati

### Literatura

- [1] P. Chadwick, M. Vianello, S. C. Cowin, *A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49, 2471–2492, 2001.
- [2] H. Xiao, *On symmetries and anisotropies of classical and micropolar linear elasticities: a new method based upon a complex vector basis and some systematic results*, Journal of Elasticity, 49, 129–162, 1998.
- [3] I. Shih Liu, *Continuum Mechanics*, Springer, 2002.
- [4] A.E. Bogdanovich in C.M. Pastore, *Mechanics of textile and laminated composites : with applications to structural analysis*, Chapman & Hall, 1996.
- [5] D. Lovelock in H. Rund, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, Dover, 1989.
- [6] K. Kowalczyk-Gajewska in J. Ostrowska-Meciejewska, *The influence of internal restrictions on the elastic properties of an anisotropic materials*, Arch. Mech., 56, 205–232, 2004.



## *Simulacija odziva Coriolisovega merilnika masnega toka upoštevajoč sklopljenost tekočine in trdnine*

N. Mole<sup>1</sup>, G. Bobovnik<sup>2</sup>, J. Kutin<sup>2</sup>, B. Štok<sup>1</sup>, I. Bajsić<sup>2</sup>

### *Coupled Fluid-Structure Simulation of Coriolis Flowmeter*

**Povzetek.** S prvo lastno frekvenco nihajoča merilna cev, skozi katero teče tekočina, predstavlja osnovni zaznavalni element Coriolisovega merilnika masnega toka. Raziskovanje soodvisnosti tekočine in trdnine v tem merilnem sklopu lahko učinkovito izvedemo z ustreznim numeričnim modeliranjem ter z na njem zasnovano računalniško simulacijo. Za analiziranje dinamike tekočine je bila uporabljena metoda končnih volumnov, medtem ko je bila dinamika trdnine analizirana z metodo končnih elementov. Izvedene numerične raziskave so pokazale, da je možno razmeroma hitro konvergenco numeričnega odziva sklopljenega sistema doseči ob posebnem režimu apliciranja robnih pogojev.

**Abstract.** A fluid-conveying measuring tube that is maintained vibrating at its first natural frequency is a primary sensing element in a Coriolis flowmeter. Investigation of this coupled fluid-structure interaction can be done efficiently by means of a corresponding numerical modelling and subsequent computer simulation. For a solution of the fluid dynamics problem FVM is used, while the structural dynamics problem is considered within the FEM framework. Performed numerical investigations have proven that a rather fast convergence of the numerical response can be obtained under special boundary conditions application regime.

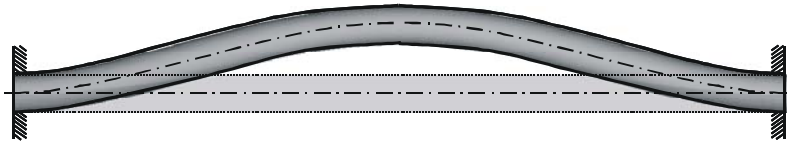
## **1 Uvod**

S prvo lastno frekvenco nihajoča vitka cev, skozi katero teče tekočina, predstavlja osnovni zaznavalni element Coriolisovega merilnika masnega toka (Sl. 1). Učinkovanje toka tekočine na ravno, obojestransko togo vpeto cev, povzroči antisimetrični odklon od prve lastne oblike nihanja cevi, ki je sicer vzdolžno simetrična. Na tem pojavu, ki je posledica učinkovanja Coriolisovih sil na cev, je zasnovan obravnavani merilnik. V fazi konstruiranja obravnavanega merilnika je poznavanje dinamičnega obnašanja sklopljenega sistema tekočine in trdnine zelo pomembno. Merilno občutljivost merilnika glede na konstrukcijske parametre lahko v razvojni fazi analiziramo na osnovi numeričnega modela fizikalnega dogajanja in na njem zasnovani računalniški simulaciji. Za zaupanja vredno računalniško

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za numerično modeliranje in simulacijo

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za meritve v procesnem strojništvu



Slika 1: Prva lastna nihajna oblika merilne cevi

simulacijo mora numerični model izkazovati zadovoljivo fizikalno objektivnost. V ta namen smo v začetni fazi analiziranja Coriolisovega merilnika, pri katerem gre sicer za vsiljeno nihanje merilne cevi, obravnavali prosto nihajočo merilno cev in tako analizirali fizikalno objektivnost numeričnega modela ter na njem zasnovane računalniške simulacije.

## 2 Matematični model

### 2.1 Dinamika tekočine

#### 2.1.1 Vodilne enačbe problema

Opazovano časovno spremenljivo območje cevi, zapolnjeno s pretekajočo se tekočino, označimo z  $\Omega_F(t)$ , ograjo le-tega pa z  $\Gamma_F(t)$ . Tok tekočine skozi cev obravnavamo kot izotermni proces, pri čemer je tekočina obravnavana kot viskozna, nekoliko stisljiva newtonska tekočina. Porazdelitev toka tekočine v tri-razsežnem prostoru ( $\mathbf{x} \in \Omega_F$ ) in njegovo časovno spreminjanje ( $t > 0$ ) je določeno z zakonoma o ohranitvi mase in gibalne količine, ki ju bomo v nadaljevanju zapisali v integralni obliki. Za tekočino gostote  $\rho_F(\mathbf{x}, t)$  in s hitrostjo  $\mathbf{v}_F(\mathbf{x}, t)$  v območju  $\Omega_F$  ( $\mathbf{x} \in \Omega_F$ ), pri čemer je njeno gibanje omejeno z gibanjem tekočino obdajajoče površine s hitrostjo  $\mathbf{v}_S(\mathbf{x}, t)$  na ograji  $\Gamma_F$  ( $\mathbf{x} \in \Gamma_F$ ), zapišemo enačbi o ohranitve mase in gibalne količine na sledeči način

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_F} \rho_F d\Omega + \int_{\Gamma_F} \rho_F (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_F} \rho_F \mathbf{v}_F d\Omega + \int_{\Gamma_F} \rho_F \mathbf{v}_F (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_F} \boldsymbol{\sigma}_F \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega_F} \mathbf{f}_F d\Omega. \quad (2)$$

Vektor  $\mathbf{f}_F(\mathbf{x}, t)$  v gibalni enačbi (2) predstavlja volumsko porazdeljene sile delujoče znotraj območja  $\Omega_F$ . Tenzor  $\boldsymbol{\sigma}_F(\mathbf{x}, t)$  je rezultirajoči napetostni tenzor, ki predstavlja vsoto tenzorja tekočinskih napetosti  $\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{x}, t)$  in Reynoldsovega napetostnega tenzorja  $\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}, t)$ .

Tenzor tekočinskih napetosti  $\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{x}, t)$  je definiran kot

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mu \left( \text{grad } \mathbf{v}_F + (\text{grad } \mathbf{v}_F)^T \right) - \frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{v}_F \mathbf{I} - p \mathbf{I}, \quad (3)$$

kjer je  $p$  tlak v tekočini,  $\mathbf{I}$  predstavlja enotski tenzor in je  $\mu$  dinamična viskoznost. Reynoldsov napetostni tenzor  $\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}, t)$ , ki popisuje posledice turbulence tekočinskega toka, je podan v skladu s privzetim k- $\epsilon$  turbulentnim modelom z zapisom

$$\boldsymbol{\sigma}_t = \mu_t \left( \text{grad } \mathbf{v}_F + (\text{grad } \mathbf{v}_F)^T \right) - \frac{2}{3} (\mu_t \text{div } \mathbf{v}_F + \rho_F k) \mathbf{I} \quad (4)$$

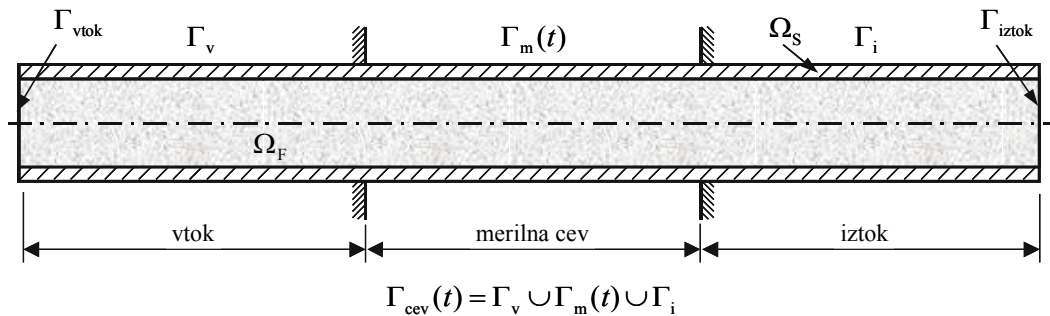
v katerem je turbulentna viskoznost  $\mu_t$  odvisna od turbulentne kinetične energije  $k$  in disipacije kinetične energije  $\varepsilon$ .

### 2.1.2 Začetni in robni pogoji

Predpostavimo, da sta tako območje  $\Omega_F(t)$ , kot njegova ograja  $\Gamma_F(t)$  poznana v vsakem časovnem trenutku. Razvoj pripadajočega hitrostnega in napetostnega polja, ki karakterizirata tok tekočine v obravnavanem območju, določimo upoštevajoč območni enačbi (1-2), ter dane začetne pogoje pri času  $t=0$  in predpisane robne pogoje pri času  $t>0$ . Ker je naš namen določiti odziv tekočine na vibriranje cevi, upoštevajoč predpisane vtočne in iztočne pogoje tekočinskega toka, sta predpisani začetno hitrostno polje  $\mathbf{v}_F(\mathbf{x},0)$  in začetno napetostno polje  $\boldsymbol{\sigma}_F(\mathbf{x},0)$  stacionarni polji, ki ustrezata polno razvitemu hitrostnemu profilu toka tekočine skozi mirujočo cev.

Upoštevajoč geometrijo Coriolisovega merilnika in fizikalno naravo robnih pogojev (Sl. 2) lahko ograjo  $\Gamma_F(t)$  razdelimo na tri dele:  $\Gamma_{\text{vtok}}$ ,  $\Gamma_{\text{cev}}(t)$  in  $\Gamma_{\text{iztok}}$ . Pripadajoče robne pogoje viskoznega toka tekočine lahko zapišemo v sledeči obliki

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F(\mathbf{x},t) &= \mathbf{v}_F^*(\mathbf{x},t); \quad \mathbf{v}_F^*(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_F(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_{\text{vtok}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{vtok}} \\ p(\mathbf{x},t) &= p^*(\mathbf{x},t); \quad p^*(\mathbf{x},t) = p(\mathbf{x},0) = p_{\text{iztok}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{iztok}} \\ \mathbf{v}_F(\mathbf{x},t) &= \mathbf{v}_F^*(\mathbf{x},t); \quad \mathbf{v}_F^*(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_S(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\text{cev}}(t) \end{aligned} \quad (5)$$



Slika 2: Opis problema

## 2.2 Dinamika trdnine

### 2.2.1 Vodilne enačbe problema

Dinamična analiza obravnavanega Coriolisovega merilnika je obsegala le merilno cev, ki je obojestransko togo vpeta. Zaradi razmeroma tanke stene je cev obravnavana kot deformabilna lupinska konstrukcija, ki obsega z ograjo  $\Gamma_S(t)$  omejeno območje  $\Omega_S(t)$ . Tri-razsežen ( $\mathbf{x} \in \Omega_S$ ) in časovno odvisen ( $t > 0$ ) mehanski odziv je opredeljen z zakonom o

ohranitvi gibalne količine, ki ga v nadaljevanju zapišemo v integralni obliki. Pripadajočo enačbo gibanja lahko izpeljemo s pomočjo Hamiltonovega variacijskega principa

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(W_p - W_k) dt = 0 . \quad (6)$$

V enačbi (6) sta  $W_p$  in  $W_k$  celotna potencialna in celotna kinetična energija obravnavane gibajoče se cevi.

Potencialna energija  $W_p$  predstavlja seštevek deformacijske energije kot posledice deformiranja cevi ter obremenitvenega potenciala na cev delujočih zunanjih konservativnih sil. Slednje so v obravnavanem primeru samo površinsko porazdeljene sile  $p_s(x,t)$ , ki delujejo na gibajočo se cev, upoštevajoč polje pomikov  $u_s(x,t)$ . Tako lahko zapišemo celotno potencialno energijo z izrazom

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \sigma_s : \epsilon_s d\Omega - \int_{\Gamma_s} p_s \cdot u_s d\Gamma . \quad (7)$$

V zgornji enačbi je  $\epsilon_s(x,t)$  deformacijski tenzor in  $\sigma_s(x,t)$  napetostni tenzor v lupinski konstrukciji.

Kinetično energijo  $W_k$  zapišemo na sledeči način

$$W_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \rho_s (v_s \cdot v_s) d\Omega , \quad (8)$$

pri čemer je  $\rho_s(x,t)$  gostota materiala, iz katerega je izdelana cev, in  $v_s(x,t)$  hitrostno polje v območju cevi.

### 2.2.2 Začetni in robni pogoji

Predpostavimo, da so površinsko porazdeljene sile  $p_s(x,t)$  ter predpisani pomiki  $u_s(x,t)$  na ograji  $\Gamma_s(t)$  opazovanega območja znani v vsakem časovnem trenutku. Mehanski odziv konstrukcije, pri čemer je upoštevano tudi spreminjanje območja  $\Omega_s(t)$ , določimo upoštevajoč enačbe (6-8) ter pripadajoče začetne pogoje pri času  $t=0$  in robne pogoje za vsak časovni trenutek  $t>0$ . Kinematiko gibanja konstrukcije pri času  $t=0$  definirata začetna hitrost  $v_s(x,0)$  in začetni pospešek  $a_s(x,0)$ . Začetno mehansko stanje konstrukcije predpostavimo kot breznapetostno in nedeformirano ( $\sigma_s(x,0) = \epsilon_s(x,0) = \mathbf{0}$ ). Upoštevajoč zunanje vplive na konstrukcijo zapišemo robne pogoje na sledeči način

$$u_s(x,t) = u_s^*(x,t) , \quad x \in \Gamma_{cev}^u(t); \quad \sigma_s(x,t) \cdot n(x,t) = p_s^*(x,t) , \quad x \in \Gamma_{cev}^\sigma(t) . \quad (9)$$

### 2.3 Sklopljeni tekočinsko-trdninski problem

V primeru obravnavanja gibanja Coriolisovega merilnika je potrebno obravnavati sklopljeni tekočinsko-trdninski problem, pri čemer dinamiko tekočine popisujejo enačbe (1-5), dinamiko trdnine pa enačbe (6-9). Na delu ograje  $\Gamma_{FS}(t)$ , kjer sta tekočinsko območje  $\Omega_F(t)$  in trdninsko območje  $\Omega_S(t)$  v kontaktu, ne upoštevamo robnih pogojev (5) in (9), temveč pogoje konsistentnega prehoda, pri čemer le-ti po velikosti niso eksplicitno poznani. Ker mora biti na kontaktnem delu ograje  $\Gamma_{FS}(t)$  zagotovljena napetostno-pomična kompatibilnost med

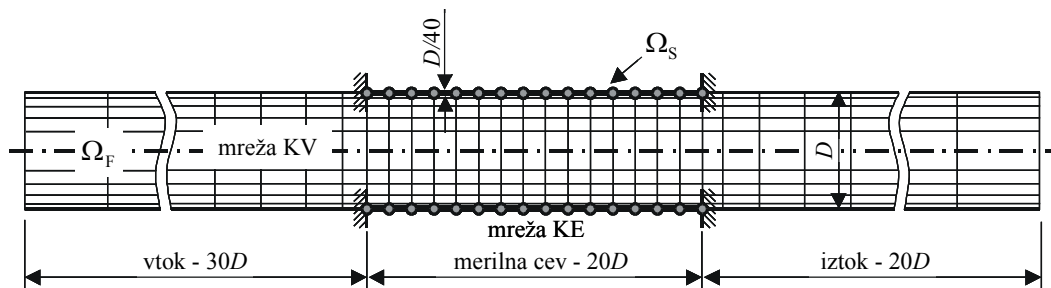
veličinami obeh obravnavanih problemov, kompatibilnostne pogoje izpolnjujemo implicitno s predpisanimi kinematičnimi veličinami in kontaktnimi napetostmi. Če z  $\mathbf{n}(\mathbf{x},t)$  označimo vektor normale na ograjo  $\Gamma_{FS}(t)$ , potem lahko kompatibilnostne pogoje zapišemo v obliki

$$\boldsymbol{\sigma}_F(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\sigma}_S(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x},t) ; \mathbf{u}_F(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_S(\mathbf{x},t) , \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{FS}(t) \quad (10)$$

### 3 Numerični model

Za aproksimativno numerično reševanje obravnavanega sklopljenega problema sta bila uporabljena dva različna numerična pristopa. Za reševanje dinamike tekočine smo uporabili komercialni računalniški program Comet 2.1, ki je razvit na osnovi metode končnih volumnov. Problem dinamike trdnin smo obravnavali v skladu z metodologijo končnih elementov in sicer s komercialnim računalniškim programom Abaqus 6.3.

Numerični model toka tekočine skozi nihajoči Coriolisov merilnik obsega diskretizacijo območja tekočine s končnimi volumni ter diskretizacijo območja merilne cevi z lupinskimi končnimi elementi (Sl. 3). Diskretizacija obeh območij je izvedena tako, da vozlišča volumskih elementov in lupinskih končnih elementov v kontaktnem območju sovpadajo. Ob tem sledi mreža volumskih elementov v vsakem časovnem koraku merilnega dela cevi, tako da se njena topologija ne menja.



Slika 3: Numerični model

### 4 Strategija numeričnega reševanja sklopljenega problema

Upoštevajoč razdelitev območja obravnavanega sklopljenega problema na dve med seboj soodvisni območji poteka numerično reševanje iterativno, pri čemer upoštevamo interakcijo tekočine in trdnine.

Klasično iteracijsko reševanje obravnavanega primera razmeroma počasi konvergira k ponavljajoči se obliki nihanja merilne cevi. Hitrejšo konvergenco rešitve smo dosegli s posebnim režimom apliciranja robnih pogojev v začetni fazi preračuna. Tako smo delež obremenitve tekočine na merilno cev regulirali z obremenitvenim faktorjem  $\alpha$  (Sl. 5).

Našo proceduro numeričnega reševanja lahko razdelimo na naslednjih pet korakov, ki se izvajajo v posameznem časovnem koraku:

- 1) Izračun mehanskih veličin trdninskega sistema upoštevajoč obremenitev tekočine na trdnino.
- 2) Prenos mehanskih kinematičnih veličin, vezanih na kontaktno površino merilne cevi s tekočino, v izračun dinamike tekočine:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{u}_S \wedge \mathbf{v}_F = \mathbf{v}_S, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{FS} .$$

- 3) Izračun dinamike tekočine ter novega tenzorja tekočinskih napetosti  $\sigma_F$ . Primerjava izračunanih tekočinskih napetosti z v predhodni iteraciji izračunanimi vrednostmi:

$$\|\sigma_F^{i+1}(t_n) - \sigma_F^i(t_n)\| > \varepsilon_p .$$

Če je norma razlike manjša od predpisane tolerance  $\varepsilon_p$ , potem pojdi na 5), v nasprotnem primeru pojdi na 4).

- 4) Izračunani tenzor tekočinskih napetosti  $\sigma_F$  v kontaktnem območju tekočine in trdnine prevedemo v obremenitev merilne cevi:

$$\sigma_S \cdot \mathbf{n} = \sigma_F \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{FS} ,$$

nato se vrnemo na 1).

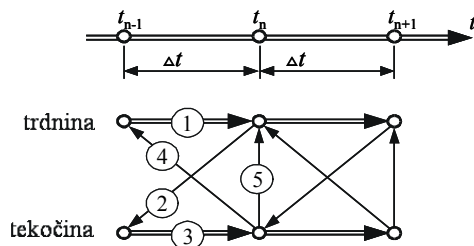
- 5) Aproksimacija tenzorja tekočinskih napetosti za naslednji časovni korak  $\sigma_F(t_{n+1})$  na osnovi predhodno izračunanih vrednosti:

$$\sigma_F(t_{n+1}) = f(\sigma_F(t_{n-2}), \sigma_F(t_{n-1}), \sigma_F(t_n))$$

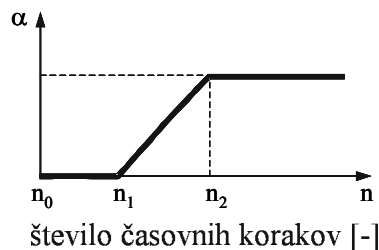
ter določitev računskega deleža

$$\sigma_F^\alpha = \sigma_F \alpha(n) .$$

Le-tega nato prevedemo v obremenitev merilne cevi  $\sigma_S$ .



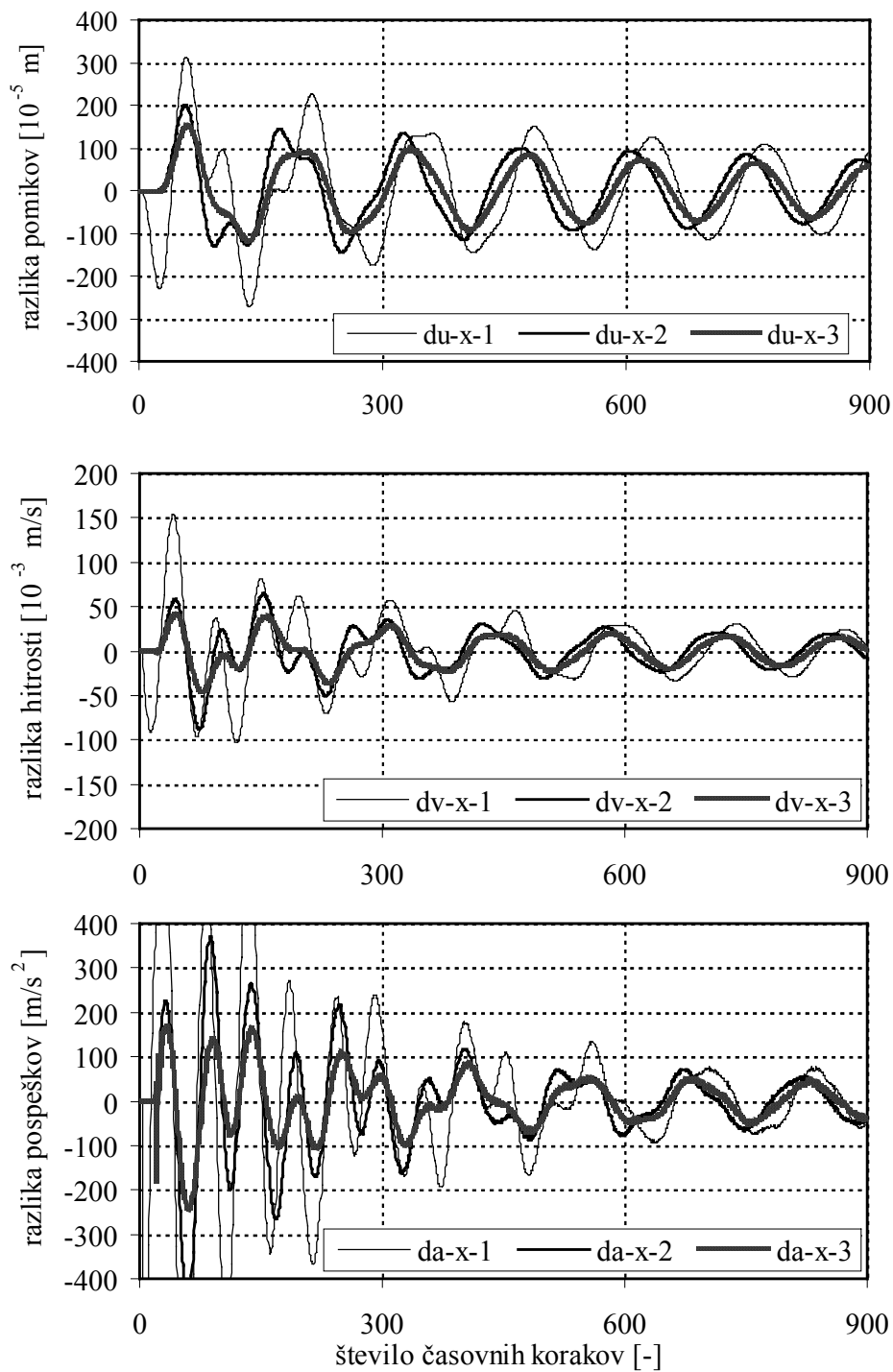
Slika 4: Procedura numeričnega reševanja



Slika 5: Obremenitveni faktor  $\alpha(n)$

## 5 Analiza rezultatov simulacije odziva merilne cevi

Da bi določili začetne pogoje sklopljene analize prosto nihajočega Coriolisovega merilnika, je bila najprej izvedena analiza toka tekočine skozi mirujočo merilno cev. Rezultati le-te so bili hitrostno polje tekočine in tekočinske napetosti, prav tako pa tudi polno razvit hitrostni profil tekočine na vstopu v cev. V simulaciji obravnavana viskozna tekočina je šibko stisljiva ( $\rho_F=998.3 \text{ kg/m}^3$  in  $\mu=1.002 \text{ Pa s}$ ), s povprečno osno hitrostjo toka tekočine 5m/s. Območje tekočine je diskretizirano z 96480 volumskimi elementi.



Slika 6: Vpliv treh različnih režimov apliciranja obremenitve



Zunanji premer krožne cevi je  $D=20\text{mm}$  in debelina stene cevi  $\delta=D/40$ . Dolžina merilnega dela cevi je  $L=20D$  (Sl. 3). Za cev smo predpostavili, da je narejena iz titana, katerega gostota je  $4510\text{kg/m}^3$ , elastični modul  $102700\text{MPa}$  in Poissonov količnik  $0.34$ . Cev je diskretizirana z 3200 lupinskimi štirivozličnimi končnimi elementi. Merilni del cevi je bil vzbujen v nihanje s predpisanim začetnim hitrostnim poljem, ki je ustrezalo prvi lastni nihajni obliki merilne cevi s sledečimi začetnimi vrednostmi kinematičnih veličin

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=\mathbf{A}(\mathbf{x}) \omega_0, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x},0)=\mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s. \quad (10)$$

Pri tem je bil vektor amplitud  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  izračunan posebej v skladu s prvo lastno nihajno obliko merilne cevi. Skalarna konstanta  $\omega_0$  je bila izbrana tako, da je bil maksimalni odmik cevi od začetnega ravnega položaja, upoštevajoč vpliv tekočine na merilno cev, okoli  $D/10$ .

V vseh simulacijah sklopljenega problema, ki so bile izvedene pri različnih režimih apliciranja obremenitve tekočine na cev, je bila posamezna nihajna perioda merilne cevi razdeljena na 140 enakih časovnih korakov. V numeričnem izračunu dinamike trdnine je bila uporabljena Newmarkova formula za integracijo pomikov in hitrosti. Parameter numeričnega dušenja v tej formuli smo privzeli enak  $-0.333$  ter tako umetno zadušili visoko frekvenčno nihanje cevi v začetnih časovnih korakih simulacije.

Analizirani so bili vplivi treh različnih režimov apliciranja obremenitve na konvergenco rešitve, pri čemer smo zasledovali razliko v velikosti odziva na dveh simetrično postavljenih merilnih mestih na cevi (Sl. 6). Spreminjanje obremenitvenega faktorja  $\alpha$  (Sl. 5) je bilo predpisano v skladu s sledečo izbiro:  $n_1=0, n_2=1$  (režim št. 1),  $n_1=20, n_2=21$  (režim št. 2),  $n_1=20, n_2=45$  (režim št. 3). Iz diagramov na sliki 6 lahko razberemo, da prvi režim, pri katerem obremenitev tekočine upoštvamo v celoti že od samega začetka, povzroči občutno motnjo, ki se izniha šele po dvajsetih nihajnih periodah. Bistveno hitrejšo konvergenco izkazuje režim številka dve, kjer smo konvergenčno rešitev dobili že po sedmih nihajnih periodah. Slabost drugega režima je bilo razmeroma veliko število iteracij znotraj časovnega koraka (povprečno devet). Zmanjšanje števila potrebnih iteracij v posameznem časovnem koraku smo dosegli z aproksimacijo tenzorja tekočinskih napetosti v danem časovnem koraku na osnovi v predhodnih treh časovnih korakih izračunanih vrednosti. Vpliv vpeljane aproksimacije se je pokazal šele po prvih dveh nihajnih periodah, ko se je povprečno število iteracij na časovni korak zmanjšalo na okoli tri.

Kot najbolj ustrezen se je izkazal tretji režim obremenjevanja, pri katerem je delež obremenitve tekočine na cev od dvajsetega časovnega koraka naprej postopoma naraščal v dinamični analizi merilne cevi, upoštevana pa je bila tudi aproksimacija tenzorja tekočinskih napetosti. Konvergenčno rešitev smo tako dobili v šestih nihajnih periodah, povprečno število iteracij pa je bilo nekoliko več kot dve na časovni korak.

## Literatura

- [1] G. Bobovnik, J. Kutin, I. Bajsić, "The effect of flow conditions on the sensitivity of the Coriolis flowmeter", Flow Measurement and Instrumentation, 15, 69-76, 2004.
- [2] C. A. Felippa, K. C. Park, C. Farhat, "Partitioned analysis of coupled mechanical systems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 3247-3270, 2001.



## *Prenos vibracij preko ukrivljene jeklene vrvi z upoštevanjem strukturnega dušenja*

M. Otrin<sup>1</sup> in M. Boltežar<sup>2</sup>

### *Vibration transmission through curved steel cable with structural damping model*

**Povzetek.** Prispevek obravnava študijo prenosa vibracij preko tanke ukrivljene jeklene vrvi v prostoru. Jeklena vrv v osni smeri ni prednapeta. Fizikalni model jeklene vrvi je osnovan na Euler-Bernoullijevem modelu upogiba nosilca, z upoštevanjem geometrijske linearnosti. Disipacija energije je predpostavljena v obliki strukturnega dušenja preko frekvenčno odvisnega kompleksnega modula elastičnosti. Vnos energije v sistem je v fizikalnem modelu dosežen preko kinematičnega pomika na robu jeklene vrvi, pri meritvah pa z elektrodinamičnim stresalnikom. Faktor izgub je identificiran iz meritev prenosnosti, prikazanih v Nyquistovem diagramu. Frekvenčna odvisnost dinamičnega modula elastičnosti pa je izračunana s postopkom optimizacije izračunanih vrednosti lastnih frekvenc. Numerično reševanje prenosa vibracij je zasnovano na metodi končnih elementov, dobljeni rezultati pa so verificirani z meritvami.

**Abstract.** In this paper the results of the vibration transmission through the steel curved thin cable are presented. The mathematical model is based on the Euler-Bernoulli theory for geometrically linear bending of beams and the finite element is used. The energy dissipation is introduced in the form of structural damping with the use of complex moduli of elasticity. The excitation of the cable is implemented through electrodynamic shaker which generates the kinematic movement of the support. The identification of the loss factor is based on the measurement of the transmissibility, presented in the Nyquist plot. Frequency dependence of the complex moduli of elasticity is identified with the resonant technique with the use of optimization process.

## 1 Uvod

Jeklena vrv je strukturni element, ki se zaradi dobre osne togosti uporablja predvsem v gradbeništvu in transportnih napravah. V literaturi je zaslediti obravnavo dinamike jeklene vrvi predvsem na osnovi modela strune oziroma nosilca z osno obremenitvijo. Običajno jekleno vrv avtorji obravnavajo v primerih, kjer je osna obremenitev napram upogibni prevladujoča.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; miha.otrin@fs.uni-lj.si

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; miha.boltezar@fs.uni-lj.si

V našem primeru je obravnava prenosa vibracij preko jeklene vrvi zanimiva takrat, ko je osno razbremenjena ter poljubno ukrivljena v prostoru. Kot takšna se uporablja v sistemu pretičnega mehanizma in predstavlja enega od bistvenjših elementov pri napovedi in kontroli prenosa vibracij preko pretičnega mehanizma.

Pri formulaciji matematičnega modela smo izhajali iz spoznanj, pridobljenih pri predhodnih analizah [1] in sicer: (i) Euler-Bernoullijev model upogibnega nosilca je primeren za napoved lastnih frekvenc ravne jeklene vrvi, (ii) disipacija energije, v obliki proporcionalnega viskozne modela (Rayleighjev model), ni primerna, (iii) obravnava jeklene vrvi na nivoju posameznih, vijačno ovitih žičk jeklene vrvi v našem primeru ni potrebna, (iv) pri določitvi vztrajnostnega momenta prereza je potrebno upoštevati kot vijačnice  $\alpha$ , saj znižuje vrednost vztrajnostnega momenta za faktor  $\sin(\alpha)$ .

## 2 Matematična formulacija

Matematični model je zasnovan na osnovi Euler-Bernoullijevega modela upogibnega nosilca, pri čemer je upoštevana geometrijska linearnost. Takšna predpostavka izhaja predvsem iz narave obravnavanega problema, saj so amplitude pomikov  $X$  proti celotni dolžini jeklene vrvi  $l$  znatno manjše  $X < 0.01 \times l$ . V modelu smo disipacijo energije predpostavili v obliki strukturnega dušenja. Slednje ponazarja disipacijo energije v materialu in ne, kot npr. viskozno dušenje, disipacijo kot posledico zunanjih vplivov, ponazorjenih z viskozno dušilko. Boltzmann [2] je v letu 1876 prvi podal vzrok disipacije v materialu in sicer v splošnem kot posledico zakasnitve deformacije za silo (če vzbujamo s silo).

Strukturno dušenje lahko implementiramo, če upoštevamo viskoelastične lastnosti materiala, kar pa lahko dosežemo z uvedbo frekvenčno odvisnega kompleksnega modula elastičnosti  $\bar{E}(\omega) = E_d(\omega) + iE_l(\omega)$ , kjer je  $E_d$  dinamični modul elastičnosti in  $E_l$  modul izgub. Z uvedbo faktorja izgub  $\eta = \frac{E_l}{E_d}$ , se enačba preoblikuje v bolj poznano obliko  $\bar{E}(\omega) = E_d(\omega)(1 + i\eta)$ . Kompleksni modul elastičnosti poseduje torej tako informacijo o materialni togosti kot o disipaciji energije v materialu.

Za enodimenzionalni Euler-Bernoullijev nosilec konstantnega prereza lahko zapišemo splošno gibalno enačbo v obliki

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(\omega) I \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t), \quad (1)$$

kjer je  $E(\omega)$  modul elastičnosti,  $I$  vztrajnostni moment prereza,  $c$  faktor viskozne dušenja,  $\rho$  gostota materiala,  $A$  ploščina prereza in  $u(x, t)$  pomik na mestu  $x$  pri času  $t$ . Enačba (1) v splošnem obravnava dva modela disipacije energije. V prvem primeru, ko je  $c \neq 0$  in je  $E(\omega) \in \mathbb{R}$ , obravnavamo model viskozne dušenja, medtem ko v primeru  $c = 0$  in  $E = \bar{E}(\omega) \in \mathbb{C}$  obravnavamo model strukturnega dušenja, ki je torišče tokratnega prispevka. Prenos vibracij smo reševali numerično, pri čemer smo masno in togostno matriko gibalne enačbe (1) določili z metodo končnih elementov. Pomembna predpostavka pri formulaciji gibalnih enačb je *nepovezanost med posameznimi osmi koordinatnega sistema*. Uporabljen končni element ima dve vozlišči s skupno dvanajstimi prostostnimi stopnjami. Element je prikazan na sliki 1, upoštevane prostostne stopnje pa so zapisane z vektorjem  $\mathbf{q}$ .

$$\mathbf{q} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \gamma_1 \ \zeta_1 \ \xi_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \gamma_2 \ \zeta_2 \ \xi_2\}^T. \quad (2)$$



Slika 1 : Uporabljeni končni element.

Togostno in masno matriko končnega elementa zapišemo kot

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \quad (3)$$

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv, \quad (4)$$

pri čemer je  $\mathbf{D}$  matrika materialnih lastnosti,  $\mathbf{B}$  napetostno deformacijska matrika in  $\mathbf{N}$  matrika interpolacijskih funkcij. V primeru upogibnih nihanj smo uporabili interpolacijske polinome tretje stopnje, v primeru torzijskih in osnih nihanj pa interpolacijske polinome prve stopnje. Gibalna enačba tako dobi obliko

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\mathbf{q} + i\mathbf{h}\mathbf{q} = \mathbf{f}e^{i\omega t}, \quad (5)$$

kjer je  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  masna matrika,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  togostna matrika,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  strukturna dušilna matrika,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  vektor vzbujevalnih sil in  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  vektor generaliziranih koordinat. Indeks  $n$  predstavlja število neznanih spremenljivk v vozliščih končnega elementa  $V$  v primeru predpostavke homogenega materiala vzdolž jeklene vrvi lahko matriko  $\mathbf{h}$  nadomestimo z  $\eta\mathbf{k}$ , kjer  $\eta$  predstavlja že omenjeni faktor izgub. Enačba (5) se tako preoblikuje v obliko

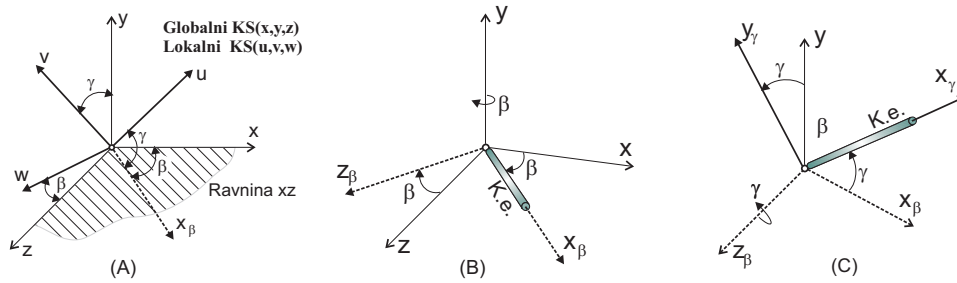
$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}} + (1 + i\eta)\mathbf{k}\mathbf{q} = \mathbf{f}e^{i\omega t}. \quad (6)$$

V primeru obravnave ukrivljene jeklene vrvi, diskretizirane s končnimi elementi, je potrebno lokalno togostno in masno matriko transformirati iz lokalnega v globalni koordinatni sistem, slika 2(A). Transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$  lahko določimo s pomočjo matrike smernih kosinusov preko t.i. dvojne transformacije, sliki 2(A) in 2(B). Transformacijsko matriko in globalno togostno ter masno matriko lahko zapišemo kot

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{in nadalje} \quad \begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{T}^T \mathbf{m} \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (7)$$

pri čemer je matrika smernih kosinusov  $\lambda$  definirana kot

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{X}) & \cos(\mathbf{v}, \mathbf{X}) & \cos(\mathbf{w}, \mathbf{X}) \\ \cos(\mathbf{u}, \mathbf{Y}) & \cos(\mathbf{v}, \mathbf{Y}) & \cos(\mathbf{w}, \mathbf{Y}) \\ \cos(\mathbf{u}, \mathbf{Z}) & \cos(\mathbf{v}, \mathbf{Z}) & \cos(\mathbf{w}, \mathbf{Z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & \cos(\beta) \sin(\gamma) & \cos(\beta) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ -\cos(\gamma) \sin(\beta) & -\sin(\gamma) \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (8)$$



Slika 2 : Dvojna transformacija končnega elementa.

## 2.1 Določitev prenosnosti

Pri analizi lastnega nihanja lahko izpostavimo izraz za izračun modalne frekvence, ki je za razliko od modalne frekvence pri viskozem dušenju nekoliko drugačna. Zapišemo lahko izraz

$$\lambda_i^2 = \omega_i^2(1 + i\eta_i), \quad (9)$$

kjer je  $\lambda_i$   $i$ -ta modalna frekvenca,  $\omega_i$   $i$ -ta lastna frekvenca in  $\eta_i$   $i$ -ti faktor izgub. Potrebno je poudariti, da v primeru strukturnega dušenja lastna frekvenca  $\omega_i$  ni (nujno) enaka lastni frekvenci nedušenega nihanja, kot je bilo to v primeru proporcionalnega viskoznega dušenja, a vendar sta v praksi vrednosti teh frekvenc zelo blizu [3]. Pri analizi vzbujanega nihanja, kjer vzbujevalni pomik na robu jeklene vrvi ponazarja vnos energije v sistem, lahko za gibalno enačbo (6) zapišemo odziv

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{(i\omega t + \varphi)}, \quad (10)$$

kjer je  $\mathbf{X}$  amplituda pomika v ustaljenem stanju,  $\omega$  predstavlja krožno vzbujevalno frekvenco in  $\varphi$  fazni zamik med pomiki posameznih vozlišč. Gibalna enačba se tako preoblikuje v obliko

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{hh} & \mathbf{M}_{hp} \\ \mathbf{M}_{ph} & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} + (1 + i\eta) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{hh} & \mathbf{K}_{hp} \\ \mathbf{K}_{ph} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_h \\ \mathbf{X}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h \\ \mathbf{F}_p \end{pmatrix}, \quad (11)$$

kjer sta togostna in masna matrika zapisani s pomočjo ločevanja primarnih in sekundarnih spremenljivk (*indeks h se navezuje na neznanne spremenljivke v vozliščih, p pa na znane spremenljivke v podporah*). Ob poznani kinematiki  $\mathbf{X}_p$  in  $\mathbf{F}_h = \mathbf{0}$  lahko iz sistema enačb (11) določimo amplitude pomikov v vozliščih kot

$$\mathbf{X}_h = ((1 + i\eta)\mathbf{K}_{hh} - \omega^2\mathbf{M}_{hh})^{-1} \cdot (\omega^2\mathbf{M}_{hp}\mathbf{X}_p - (1 + i\eta)\mathbf{K}_{hp}\mathbf{X}_p). \quad (12)$$

Ob poznanim vektorju  $\mathbf{X}_p$  lahko amplitudo sile v podpori zapišemo kot

$$\mathbf{F}_p = -\omega^2(\mathbf{M}_{ph}\mathbf{X}_h + \mathbf{M}_{pp}\mathbf{X}_p) + (1 + i\eta)(\mathbf{K}_{ph}\mathbf{X}_h + \mathbf{K}_{pp}\mathbf{X}_p) \quad (13)$$

oziroma prenosnost prečne sile preko jeklene vrvi  $T(\omega_i)$  v obliki

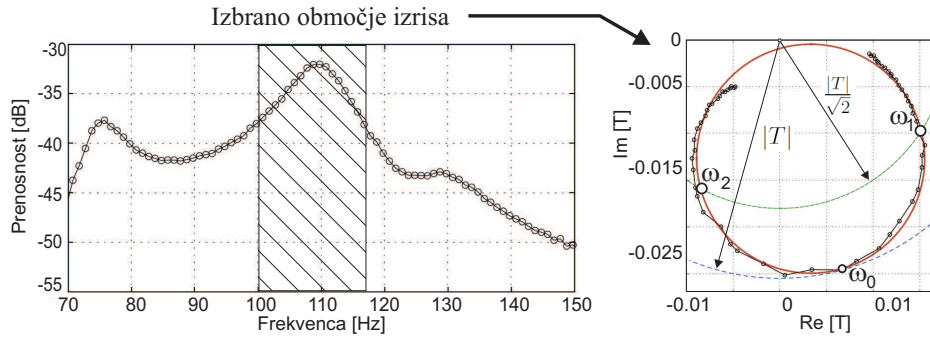
$$T(\omega_i) = \frac{F_p(i)}{X_p(i)}. \quad (14)$$

## 2.2 Identifikacija parametrov

Za korektno in uspešno napoved ter kontrolo prenosa vibracij na osnovi numeričnega modela se izkaže, da je potrebno parametra, kot sta faktor izgub in dinamični modul elastičnosti, identificirati iz opravljenih

meritev. Popis disipacije energije v splošnem še vedno predstavlja eno glavnih ovir in izzivov, saj se v nemalo primerih izkaže, da disipacija ni le funkcija materiala temveč tudi oblike strukture. To dodatno nakazuje, da eksperimentalni pristop ni le zaželen, temveč nujen pristop k celoviti obravnavi strukturne dinamike. V našem primeru se kot neznanka pojavi tudi dinamični modul elastičnosti, saj je material jeklene vrvi nepoznan.

Faktor izgub smo identificirali s pomočjo meritve prenosnosti, prikazane v Nyquistovem diagramu. Izkaže se [3], da vrh teoretično izračunane prenosnosti v Nyquistovem diagramu izkazuje krožnico, medtem ko se eksperimentalno dobljen vrh prenosnosti krožnici približa, slika 3. Po metodi najmanjših kvadratičnih odstopanj pa smo nadalje izmerjenim vrednostim prilagajali funkcijo krožnice. V Nyquist-



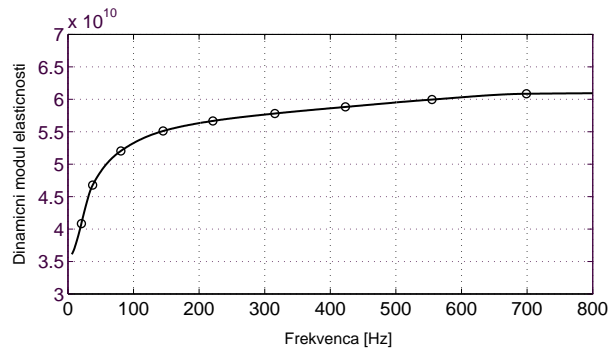
Slika 3 : Prikaz prenosne funkcije v Nyquistovem diagramu.

tovem diagramu so pomembne tri točke in sicer so označene z  $\omega_0$ , ki predstavlja lastno krožno frekvenco ter  $\omega_1$  in  $\omega_2$  ki predstavljata mejni krožni frekvenci. Ob poznavanju omenjenih frekvenc lahko faktor izgub  $\eta$  obravnavanega vrha določimo po enačbi

$$\eta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_0^2}. \quad (15)$$

Pri identifikaciji dinamičnega modula smo uporabili t.i. resonančno metodo. Avtor Wei [4] navaja možnost identifikacije dinamičnega modula elastičnosti  $E_d$  iz poznane izmerjene lastne frekvence in geometrijskih lastnosti strukture.

V našem primeru je takšna metoda neuporabna, saj obravnavamo ukrivljeno jekleno vrv. Predhodna analiza modula elastičnosti ravne jeklene vrvi nam je služila zgolj kot začetni približek. Frekvenčno odvisnost dinamičnega modula ukrivljene jeklene vrvi smo nadalje določili s postopkom optimizacije, pri čemer smo z optimiranjem modula elastičnosti prilagajali izračunane vrednosti lastnih frekvenc izmerjenim vrednostim. Identificirana frekvenčna odvisnost dinamičnega modula elastičnosti za vse kasneje prikazane primere je prikazana na sliki 4.

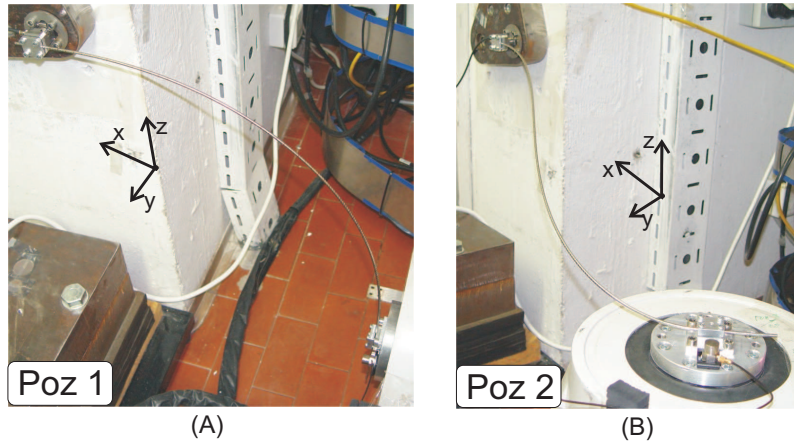


Slika 4: Frekvenčna odvisnost dinamičnega modula elastičnosti.

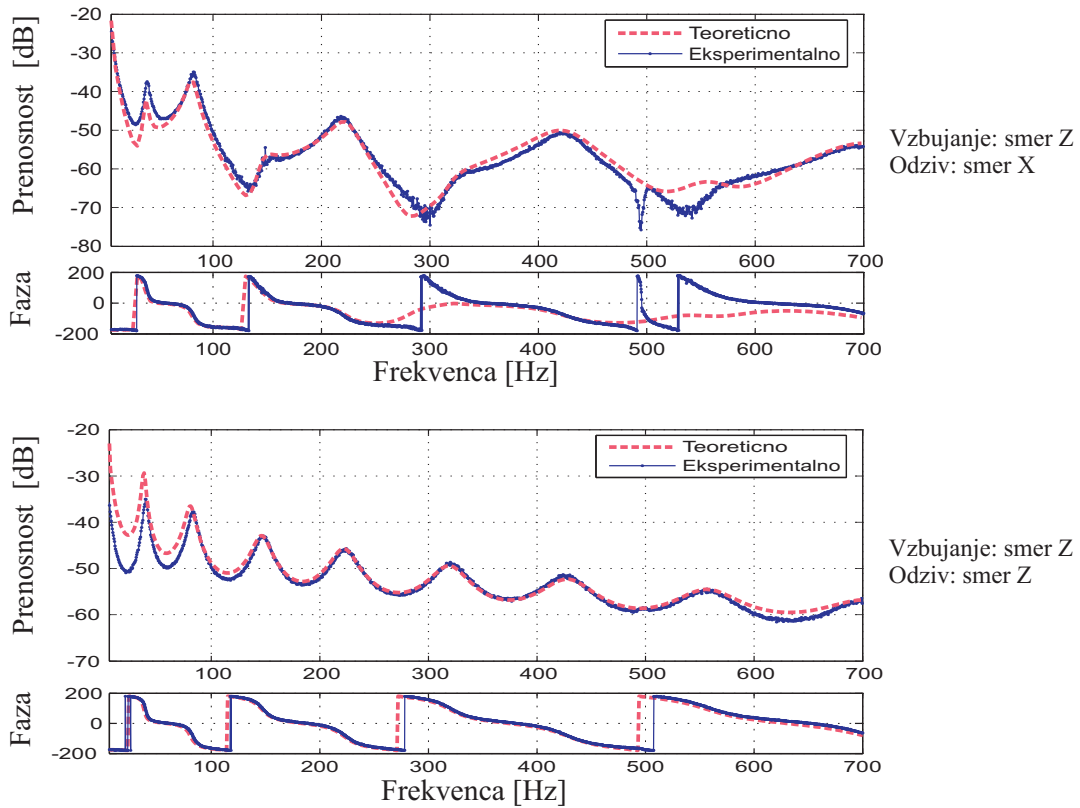
### 3 Verifikacija modela

Numerični model smo verificirali s pomočjo meritev prenosnosti za dva primera ukrivljenosti vrvi in sicer za primer ukrivljenosti in kinematičnega vzbujanja v eni ravnini (POZ 1), ter na poljubno ukrivljeni

jekleni vrvi (POZ 2). Problem pri postavitvi eksperimenta predstavlja predvsem ustrezna eksperimentalna aproksimacija numeričnih robnih pogojev ter popis geometrije jeklene vrvi. Slednje smo določili s pomočjo merilne roke, pri čemer smo točke pozicije zajemali na vsakih 10 mm dolžine. Tako aproksimirana krivulja je predstavljala osnovno geometrijo zveznega matematičnega modela. Prikaz pozicij analiziranih jeklenih vrvi je prikazan na slikah 5(A) in 5(B).



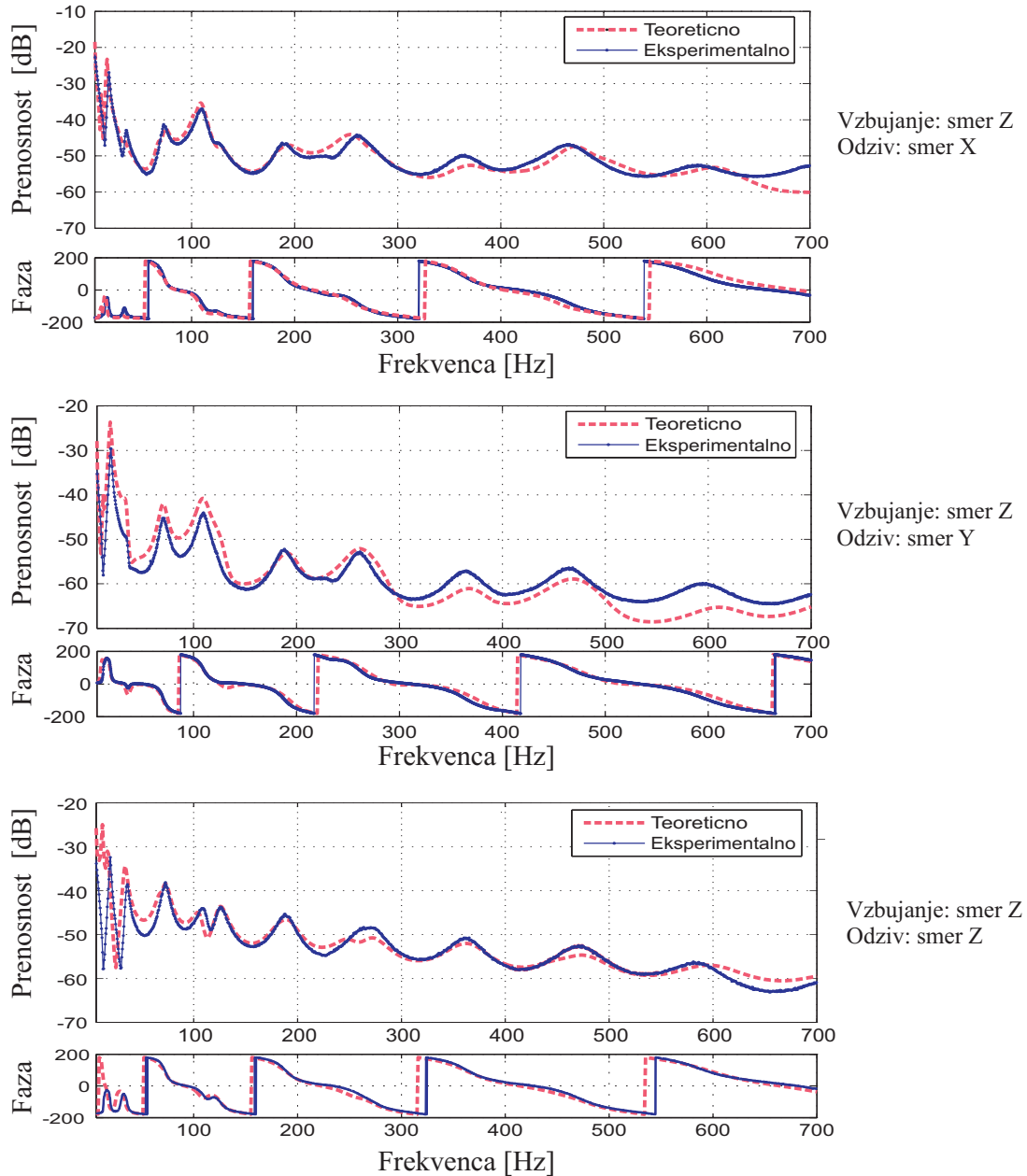
Slika 5 : Prikaz ukrivljenosti jeklene vrvi.



Slika 6 : Verifikacija modela za primer prve postavitve jeklene vrvi.

Na prikazanih diagramih, sliki 6 in 7, je podana meritev cenilke prenosnosti  $H_2$ , saj je le-ta pri naključnem vzburjanju primernejša od cenilke  $H_1$ . Razlog je v neobčutljivosti cenilke  $H_2$  na prisotnost šuma v vhodnem signalu. Frekvenčna ločljivost na diagramih prenosnosti je 0.5 Hz.

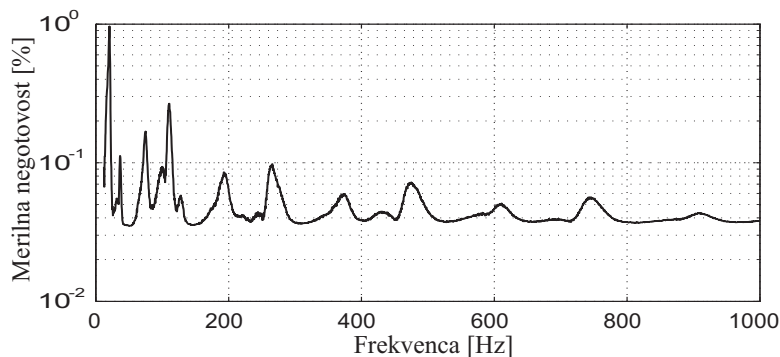
S stališča ponovljivosti in korektnosti rezultatov je bila opravljena analiza merilne negotovosti, pri čemer smo upoštevali tako sistematični kot naključni pogrešek. Izkazalo se je, da največji delež k merilni negotovosti prispeva aproksimacija konzolnih robnih pogojev pri eksperimentu v numeričnem modelu ter popis geometrije jeklene vrvi.



Slika 7 : Verifikacija modela za primer druge postavitve jeklene vrvi.



Diagram merilne negotovosti za analiziranih dvajset meritev prenosnosti je prikazan na sliki 8. Pri analizi naključnega pogoška smo upoštevali Studentovo porazdelitev verjetnosti s stopnjo zaupanja 95 odstotkov.



Slika 8 : Merilna negotovost za drugo postavitev jeklene vrvi.

#### 4 Zaključki

V prispevku predstavljamo pristop k modeliranju prenosnosti vibracij preko poljubno prostorsko ukrivljene jeklene vrvi. Posebnost pri tovrstni obravnavi jeklene vrvi je, da je v osni smeri neobremenjena. Matematični model je zasnovan na teoriji Euler-Bernoullijevega upogiba nosilca, z upoštevanjem geometrijske linearnosti. V modelu je disipacija energije predpostavljena v obliki strukturnega dušenja in sicer preko vpeljanega kompleksnega modula elastičnosti.

Identifikacija faktorja izgub na osnovi Nyquistovega diagrama je primerna, izkaže pa se, da je faktor izgub odvisen tako od materiala jeklene vrvi kakor tudi od ukrivljenosti. Pri identifikaciji dinamičnega modula elastičnosti je razvidna frekvenčna odvisnost, ki se nad 800 Hz ustali pri vrednosti okoli 6.1 GPa. Pri verifikaciji numeričnega modela z meritvami prenosnosti je razvidno, da model dobro napove resonančna stanja jeklene vrvi, amplituda prenosnosti pa je zadovoljivo popisana. Analiza ocene merilne negotovosti nakazuje, da je le-ta povišana pri nižjih frekvencah ter v območju lastnih frekvenc jeklene vrvi. Slednje povišanje je pričakovano, saj je sistem v območju lastnih frekvenc občutljiv na majhne variacije pogojev eksperimenta.

#### Literatura

- [1] M. Otrin in M. Boltežar, *Prenos upogibnih nihanj preko jeklene pletenice*, SDM, 2004.
- [2] L. Boltzmann, *Zur theorie der elastische nachwirkung*, Annalen der Physik und Chemie Suppl, 7, 624-654, 1876.
- [3] D.J. Ewins, *Modal Testing: Theory and practice*, John Wiley and Sons inc., 1984.
- [4] C. Wei, *Evaluation of damping and elastic properties of composite and composite structures by resonant technique*, JMS, 35, 45-63, 2001.
- [5] T. Pritz, *Frequency dependence of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid material*, JSV, 2001.
- [6] C. Bert, *An introduction review of mathematical models, measures and experimental techniques*, JSV, 29, 129-153, 1973.
- [7] N. Maia in J. Silva, *Theoretical and experimental modal analysis*, John Wiley and Sons inc., 1997.



## *Vpliv začetnih geometrijskih nepopolnosti na strižno nosilnost vzdolžno ojačanih panelov*

*L. Pavlovčič<sup>1</sup> in D. Beg<sup>1</sup>*

### *Influence of Initial Geometric Imperfections on Shear Resistance of Longitudinally Stiffened Panels*

**Povzetek.** Pri nelinearnem izračunu realnih konstrukcijskih elementov je pomembno upoštevati njihove začetne nepopolnosti. V primeru vzdolžno ojačanih panelov je najbolj neugodna oblika geometrijskih nepopolnosti težko predvidljiva, zato jo je potrebno poiskati s predhodno analizo. Prispevek obravnava študijo različnih oblik in velikosti začetnih geometrijskih nepopolnosti in njihov vpliv na strižno nosilnost ojačanih panelov. Pri različnih tipih ojačevanja se je po MKE analizirala najbolj neugodna kombinacija nepopolnosti z velikostjo v okviru izdelovalnih toleranc. Numerični modeli so bili predhodno verificirani z rezultati štirih testov na ojačanih nosilcih realne geometrije.

**Abstract.** In non-linear analysis of real structural elements the consideration of initial geometric imperfections is very important. In the case of longitudinally stiffened panels the most influential shape of geometric imperfections is hard to foresee, therefore a preliminary imperfection analysis should be carried out. The paper presents the study of different shapes and amplitudes of initial geometric imperfections and their influence on shear resistance of stiffened panels. For different stiffening cases the most unfavourable combination of imperfections with amplitudes within allowable fabrication tolerances was analyzed with the use of FEM. Prior to this study the numerical models were verified with the results of four full-scale tests on stiffened girders.

## **1 Uvod**

Vzdolžne ojačitve so v vitke stojine tankostenskih nosilcev nameščene primarno zaradi omejitev izbočenja stojine pod vplivom normalnih napetosti in s tem povečanja odpornosti nosilca na upogib. Izkaže se, da se pri tem poveča tudi strižna odpornost nosilca, oziroma panelov stojine, ki so določeni z razporedom prečnih ojačitev. Pri tem igra veliko vlogo upogibna togost ojačitve, ki neposredno vpliva na način izbočenja stojine.

V šestdesetih letih prejšnjega stoletja se je veliko raziskav posvečalo strižni nosilnosti neojačanih panelov. Mnogi raziskovalci (npr. [1], [3], [6]) so predlagali svoj mehanski

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo

model določitve postkritične strižne nosilnosti s formulacijo ustreznega diagonalnega nateznega pasu in dodatnega prispevka plastičnega mehanizma v okvirju panela (sodelovanje pasnic in prečnih ojačitev). V naslednjih dveh desetletjih so strižne teste izvedli tudi na vzdolžno ojačanih panelih (npr. [4], [5], [11]), pri čemer so mehanske modele razširili v dveh smereh: predpostavili so bodisi enojni natezni pas preko celotnega ojačanega panela, pri čemer se ojačitve upoštevajo le pri določitvi kritične sile izbočenja, bodisi več nateznih pasov, vsak preko enega podpanela, pri čemer se predpostavlja zadostna togost ojačitev. Dejansko je tip izbočenja odvisen od upogibne togosti vzdolžne ojačitve: pretežno globalno izbočenje v primeru šibkih ojačitev in lokalno izbočenje v podpanelih v primeru močnih. Vpliv togosti ojačitev je v svoji metodi rotirajočega napetostnega polja zajel Höglund [8].

Po drugi strani nam razvoj orodja za izračun po metodi končnih elementov omogoča natančnejšo določitev strižne nosilnosti in dejanskega obnašanja panelov, s čimer lahko izvedemo večje število virtualnih testov. Zaradi izrazite postkritične nosilnosti lahko problem rešimo le po nelinearni teoriji, pri čemer igrajo pomembno vlogo začetne nepopolnosti modela. Ker na splošno dejanskih nepopolnosti v obliki nepravilne začetne geometrije ter vpliva zaostalih napetosti zaradi varjenja nosilcev ne poznamo, je potrebno te nepopolnosti modelirati kot najbolj neugodne v okviru izdelovalnih toleranc. V primeru neojačanih pločevin pod vplivom normalnih napetosti je mogoče relevantno obliko geometrijskih nepopolnosti predvideti, v primeru ojačanih panelov v strigu pa je najbolj neugodno kombinacijo nepopolnosti težko napovedati, zato jo je potrebno s predhodno študijo poiskati.

Pričujoči prispevek predstavlja študijo različnih oblik in velikosti geometrijskih nepopolnosti ter njihov vpliv na strižno nosilnost vzdolžno ojačanih panelov. Obravnavani bodo različni primeri razporeditve in oblike vzdolžnih ojačitev, pri čemer nas zanima najbolj neugodna oblika nepopolnosti. Predhodno bodo na kratko predstavljeni štirje testi na ojačanih nosilcih z realno geometrijo, ki služijo za verifikacijo numeričnih modelov.

## 2 Verifikacija numeričnih modelov

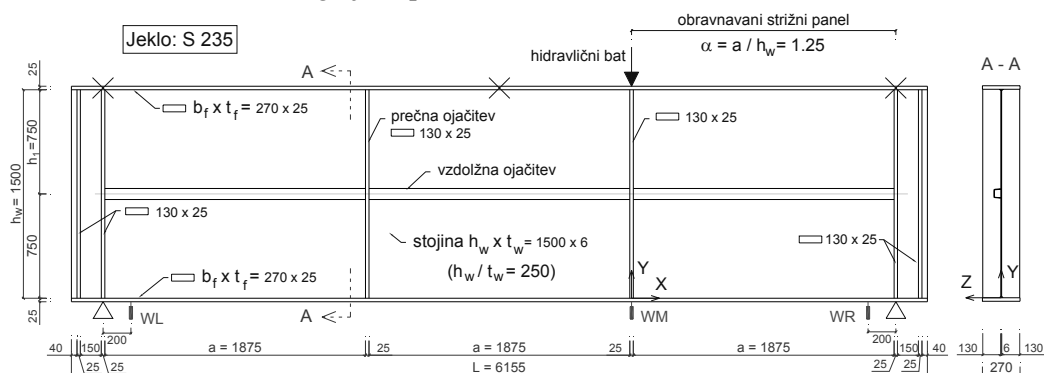
### 2.1 Testni nosilci in izvedba testov

Vsi štirje testni nosilci imajo enako geometrijo realnih dimenzij – slika 1. Razlikujejo se v poziciji ( $h_1 / h_w$ ) in upogibni togosti ( $\gamma$ ) vzdolžne ojačitve trapezne oblike, pri čemer z  $\gamma^*$  označimo teoretično minimalno togost ekvivalentne ravne ojačitve, ki pri kritični strižni sili omeji deformiranje panela v lokalno izbočitevno obliko:

- **Nosilec 1 (G1):**  $h_1 / h_w = 1/2$ , šibkejša ojačitev  $\gamma = 0.5 \cdot \gamma^*$
- **Nosilec 2 (G2):**  $h_1 / h_w = 1/2$ , močnejša ojačitev  $\gamma = 1 \cdot \gamma^*$
- **Nosilec 3 (G3):**  $h_1 / h_w = 1/3$ , šibkejša ojačitev  $\gamma = 1 \cdot \gamma^*$
- **Nosilec 4 (G4):**  $h_1 / h_w = 1/3$ , močnejša ojačitev  $\gamma = 3 \cdot \gamma^*$

Nosilci so bili podprti kot prostoležeči, z bočnim podpiranjem zgornje pasnice na mestu križcev na sliki 1. Pomike smo merili tako v vertikalni kot tudi v prečni smeri s posebej zasnovano “merilno vilico”, pomično v vseh treh smereh. Postopek merjenja pomikov in deformacij z merilnimi lističi je predstavljen v laboratorijskem poročilu [10]. Pred vsakim

testom smo izmerili začetno geometrijo celotne stojine. Dodatno smo izvedli natezne preizkuse za vse v nosilce vgrajene pločevine.



Slika 1: Geometrija testnega nosilca 1

## 2.2 Numerična simulacija

Simulacijo testov smo izvedli z nelinearno analizo po metodi končnih elementov s programskim orodjem ABAQUS [7]. Upoštevana je bila teorija velikih pomikov. Nosilce smo modelirali s štirivozliščnimi lupinastimi element z reducirano integracijo – S4R. Povprečna dolžina stranice končnih elementov je bila 25 mm, kar se je v predhodni študiji izkazalo za dovolj natančno [9]. Robni pogoji so bili določeni z ustreznim podpiranjem modelov na mestu in v smeri dejanskih podpor – slika 1. S posebnim postopkom transformacije podatkov smo v model vnesli izmerjene začetne nepopolnosti stojine. Elasto-plastični materialni model smo določili s čim natančnejšo aproksimacijo izmerjenih  $\sigma$ - $\epsilon$  krivulj, dobljenih iz nateznih preizkusov.

## 2.3 Primerjava rezultatov

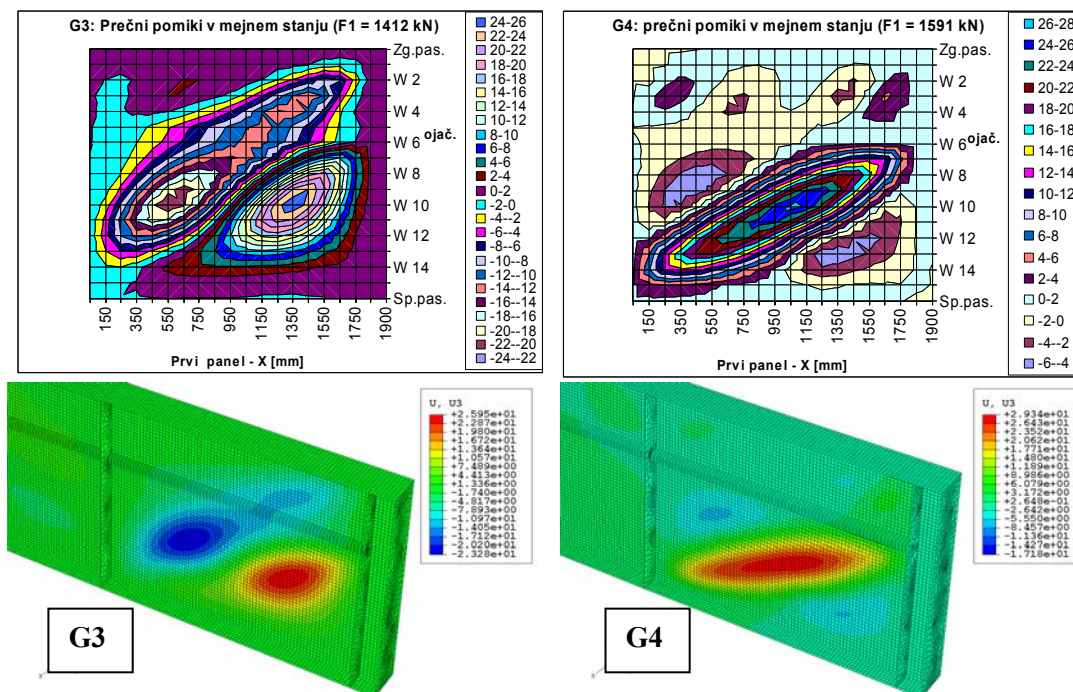
Tabela 1 prikazuje primerjavo rezultatov nosilnosti vseh štirih nosilcev. Razlike med izmerjenimi in izračunanimi nosilnostmi so v okviru 1 %, razen v primeru nosilca G4 je razlika nekoliko večja – 5.7 %. Presenetljivi so pravzaprav rezultati testov, saj nosilec G4, kljub večjemu podpanelu dosega višjo nosilnost od nosilca G2, kar kaže na težko razložljivo rezervo dejanske nosilnosti G4.

Tabela 1: Primerjava nosilnosti med rezultati testov in numerične simulacije

Nosilci	G1	G2	G3	G4
Testi: mejna nosilnost [kN]	1453	1569	1412	1591
MKE - mejna nosilnost [kN]	1466	1552	1412	1500
Razlika v [%]	+0.9 %	-1.1 %	0 %	-5.7 %

Slika 2 prikazuje izmerjeno in izračunano deformirano obliko panela nosilcev G3 in G4 v mejnem stanju, ostale primerjave so prikazane v [9] in [10]. Rezultati se lepo ujemajo, pri čemer se v obeh primerih panel s šibkejšo ojačitvijo (G3) deformira pretežno globalno, panel

z močnejšo ojačitvijo (G4) pa lokalno v spodnjem podpanelu. Podobno ujemanje rezultatov izbočenja je doseženo tudi pri nosilcih G1 in G2 [9]. V omenjenem delu je tudi prikazana uspešnost poenostavitve numeričnih modelov na modele z enim panelom, pri čemer se ustrezno modelira robne pogoje.

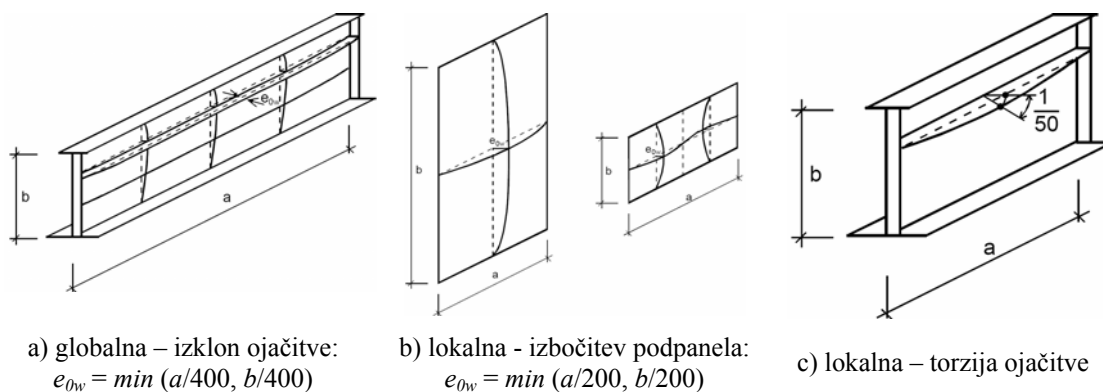


**Slika 2:** Primerjava med izmerjenimi (zgoraj) in izračunanimi (spodaj) deformacijskimi oblikami panela v mejnem stanju – nosilca G3 in G4 (prečni pomiki v [mm])

### 3 Študija začetnih nepopolnosti

#### 3.1 Modeliranje nepopolnosti

Splošni napotki za modeliranje začetnih nepopolnosti so podani v predlogu novega evropskega standarda za pločevinaste konstrukcijske elemente prEN 1993-1-5 [2]. Tako geometrijske nepopolnosti kot tudi konstrukcijske nepopolnosti zaradi vpliva zaostalih napetosti se modelira kot ekvivalentne nepopolnosti z amplitudo na meji izdelovalnih toleranc. Obravnavati je potrebno različne oblike nepopolnosti prikazane na sliki 3 in določiti njihovo najbolj neugodno kombinacijo v smislu izbire vodilne nepopolnosti s polno amplitudo v kombinaciji s spremljevalnimi nepopolnostmi z amplitudo 70 % od navedenih vrednosti na sliki 3.



**Slika 3:** Oblika različnih tipov ekvivalentnih geometrijskih nepopolnosti z amplitudami po prEN 1993-1-5 [2]

Nepopolnosti smo modelirali na poenostavljenih enopanelnih modelih z naslednjim razporedom ojačitev: trapezna ojačitev v sredini (G1 in G2), trapezna ojačitev v zgornji tretjini stojine (G3 in G4), dve enakomerno razporejeni trapezni ojačitvi ter odprta T ojačitev v sredini stojine. Pri vseh štirih modelih smo obravnavali primera s šibko in močno ojačitvijo. Globalno nepopolnost smo določili z izklonom ojačitve s polsinusnim valom in "ravnimi" podpaneli. V primeru dveh ojačitev smo upoštevali tako simetrični (istosmerni) kot antisimetrični izklon ojačitev enake amplitude. Lokalne nepopolnosti v podpanelih smo definirali z merodajno lokalno izbočitveno obliko, ki smo jo določili s predhodno linearno izbočitveno analizo na geometrijsko popolnem panelu s preprečenim prečnim pomikom ojačitev. Torzijo ojačitve smo upoštevali le v primeru odprte T ojačitve in sicer s polsinusnim vertikalnim pomikom zunanjih robov ojačitve. Amplitude vseh nepopolnosti smo variirali v nekoliko širšem območju kot ga zajemajo meje izdelovalnih toleranc.

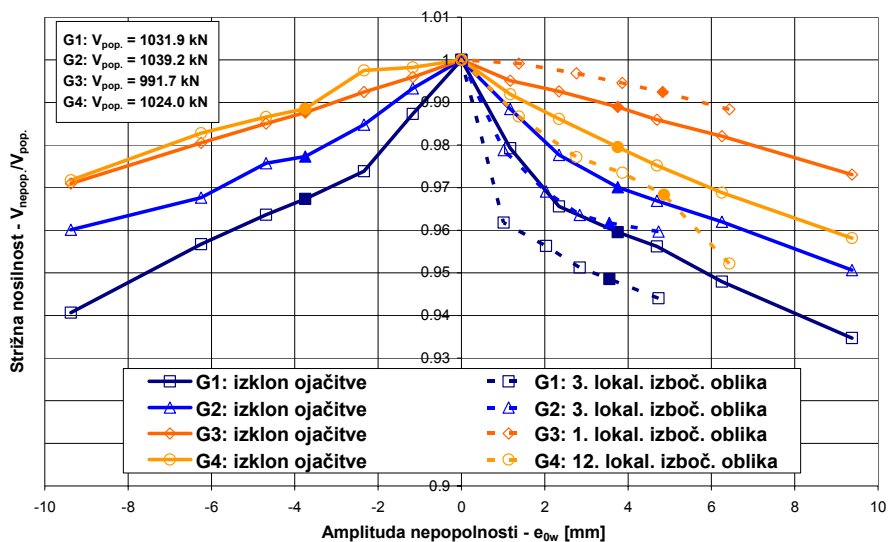
### 3.2 Rezultati študije nepopolnosti

Rezultati analize so prikazani na slikah 4, 5 in 6. Strižna nosilnost panelov je izrisana v relativnem smislu glede na nosilnost geometrijsko popolnega panela. Nosilnosti pri dovoljenih tolerancah (slika 3) so označene s polnimi simboli.

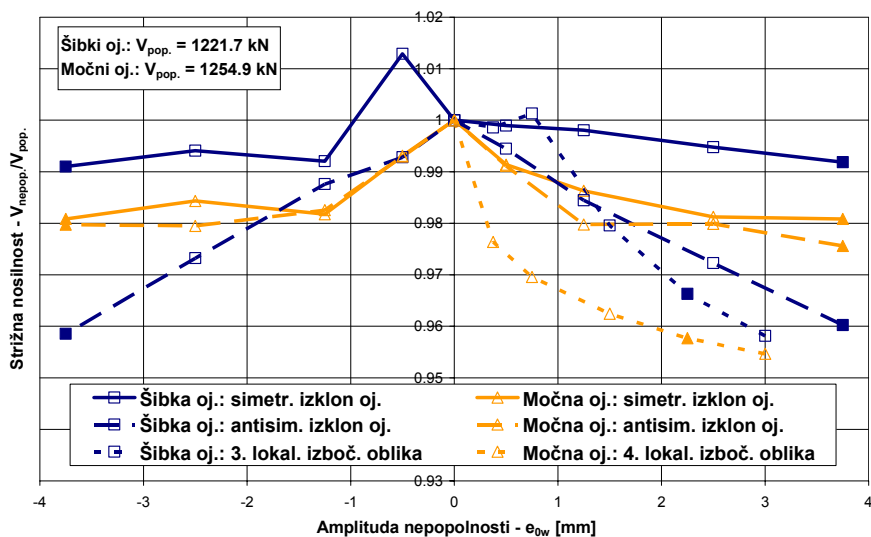
Iz rezultatov vidimo, da je vpliv različnih oblik nepopolnosti na redukcijo strižne odpornosti panelov sorazmerno majhen – pri dopustnih nepopolnostih do največ 6 % redukcije. Razen v primeru G3 ter panela z dvema šibkejšima trapeznima ojačitvama imajo lokalne nepopolnosti v podpanelih nekoliko večji vpliv od globalnih, vendar so razlike male - v okviru 1 do 2 %. V primeru enojne trapezne ojačitve (slika 4) je panel s sredinsko ojačitvijo na nepopolnosti bolj občutljiv kakor panel z ojačitvijo v zgornji tretjini, pri čemer so redukcije nosilnosti v prvem primeru večje pri šibki ojačitvi in v drugem primeru pri močni ojačitvi. Pri T ojačitvi je občutljivejši panel z močnejšo ojačitvijo.

Nadalje, krivulje vpliva globalnih nepopolnost so sorazmerno simetrične (glede na  $e_{0w} = 0$ ), kar kaže na to, da smer izklona ojačitve ne igra posebne vloge. V primeru dveh šibkejših ojačitev (slika 5) je izrazito bolj neugoden antisimetričen izklon ojačitev, pri dveh močnejših

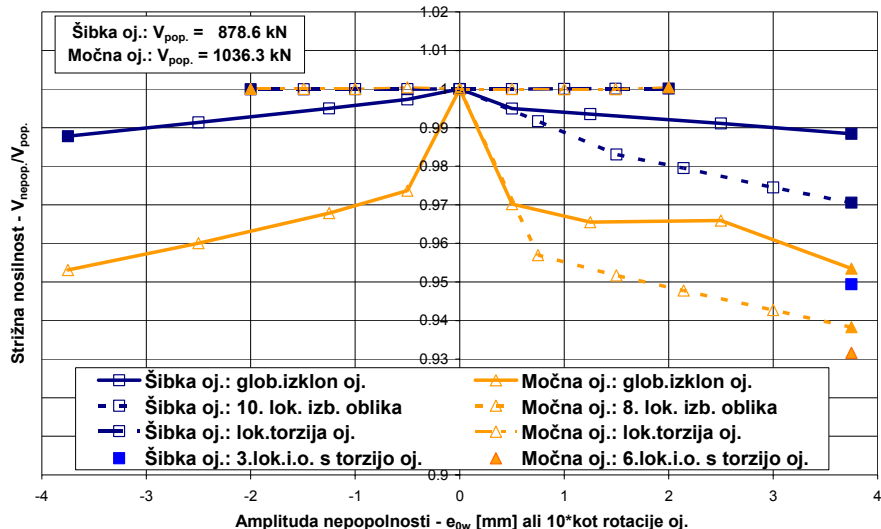
pa tip izklona nima značilnega vpliva, saj porušenje panela nastopi v lokalni izbočitveni obliki.



Slika 4: Študija nepopolnosti na modelih s šibko (G1) ali močno (G2) trapezno ojačitvijo v sredini stojine ter šibko (G3) ali močno (G4) trapezno ojačitvijo v zgornji tretjini



Slika 5: Študija nepopolnosti na modelih z dvema šibkima ( $\gamma = 0.1 \cdot \gamma^*$ ) ali močnima ( $\gamma = 2 \cdot \gamma^*$ ) enakomerno razporejenima trapeznima ojačitvama



**Slika 6:** Študija nepopolnosti na modelih s šibko ( $\gamma = 0.2 \cdot \gamma^*$ ) ali močno ( $\gamma = 1 \cdot \gamma^*$ ) odprto T ojačitvijo v sredini stojine

Začetna torzija T ojačitve kot samostojna nepopolnost (slika 6) na redukcijo nosilnosti nima nikakršnega vpliva. Če pri izračunu lokalne izbočitvene oblike v podpanelih dopustimo spremljajočo rotacijo ojačitve, se vpliv lokalnih nepopolnosti poveča do 2 % (slika 6 - izračunani točki na meji toleranc in s torzijo nekoliko manjšo od 1/50). Začetna torzija ojačitve doseže torej svoj učinek šele kot naravna dopolnitev lokalne izbočitvene oblike, zato smo pri nadaljnem kombiniranju nepopolnosti neločeno upoštevali t.i. “združene lokalne nepopolnosti”.

**Tabela 2:** Redukcija nosilnosti pri najbolj neugodni kombinaciji začetnih nepopolnosti

Togost in razpored ojačitev	Šibke oj.	Močne oj.	Oblika kombiniranih nepopolnosti	
			Šibke ojačitve	Močne ojačitve
Trap. oj. v sredini	-6.3%	-5.1%	100% globalna (+), 70% lokalna (+)	100% globalna (+), 70% lokalna (+)
Trap. oj. v zg. tretjini	-3.5%	-3.9%	100% globalna (+), 70% lokalna (-)	100% globalna (+), 70% lokalna (+)
Dve trap. ojačitvi	-5.5%	-4.4%	100% antisim. glob (+), 70% lokalna (+)	70% antisim. glob. (+), 100% lokalna (-)
T oj. v sredini	-5.5%	<b>-6.9%</b>	70% globalna (-), 100% združene lok. (+)	70% globalna (+), 100% združene lok. (+)

Tabela 2 prikazuje redukcijo nosilnosti pri najbolj neugodni kombinaciji začetnih nepopolnosti v skladu s prEN 1993-1-5. Različne oblike nepopolnosti smo kombinirali v smislu različnih smeri in izbire vodilne nepopolnosti – po 8 kombinacij v primeru 1 ojačitve oziroma 16 kombinacij v primeru dveh. V tabeli je navedena tudi najbolj neugodna oblika



nepopolnosti pri različnih tipih ojačevanja. Rezultati kažejo, da se pri vnosu kombiniranih nepopolnosti nosilnost panela zmanjša do največ 7 %. Razlike med primeri s šibkimi in močnimi ojačitvami niso značilne. Izbira vodilne nepopolnosti ni predvidljiva in prav tako ne usmeritev nepopolnosti (+/-), ki je predvsem posledica tipa merodajne izbočitvene oblike. Antisimetrični izklon dveh ojačitev se potrди kot bolj neugoden od simetričnega.

#### 4 Zaključki

Pričujoča študija pokaže, da imajo začetne geometrijske nepopolnosti omejen vpliv (do največ 7 %) na znižanje strižne nosilnosti panelov pri različnih primerih vzdolžnega ojačevanja. Zaradi majhnih razlik v vplivu različnih kombinacij nepopolnosti izbira vodilne nepopolnosti, njihove medsebojne usmerjenosti in merodajne izbočitvene oblike v podpanelih na splošno ni predvidljiva in je zato potrebno najbolj neugodno kombinacijo s predhodno analizo poiskati. Kljub vsemu lahko iz predstavljene študije sklenemo, da smer izklona enojne ojačitve nima bistvenega vpliva, da je antisimetrični izklon dveh ojačitev bolj neugoden od istosmernega (simetričnega) ter da ima začetna torzija ojačitve vpliv le kot naravna dopolnitev lokalne izbočitvene oblike v podpanelih.

#### Literatura

- [1] Basler K., *Strength of Plate Girders in Shear*, ASCE Journal of the Structural Division, Proc. No. 2967, part I, 1961
- [2] CEN, European Committee for Standardization, *prEN 1993-1-5, Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1.5: Plated structural elements*, 2004
- [3] Chern C., Ostapenko A., *Ultimate Strength of Plate Girders under Shear*, Fritz Engineering Laboratory Report No. 328.7, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1969
- [4] Cooke N., Moss P.J., Walpole W.R., Langdon D.W., Harvey M.H., *Strength and Serviceability of Steel Girder Webs*, Journal of Structural Engineering, 109, No.3, 1983
- [5] Evans H.R., Tang K.H., *The Influence of Longitudinal Web Stiffeners upon the Collapse Behaviour of Plate Girders*, J.Construct. Steel Res., Vol. 4, No. 3, 1984
- [6] Fuji T., Fukomoto Y., Nishino F., Okumura T., *Research Works on Ultimate Strength of Plate Girders and Japanese Provisions on Plate Girder Design*, IABSE Colloq. Des. Plate Box Girders Ultimate Strength, London, 1971
- [7] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., *ABAQUS*, Verzija 6.4, 2003
- [8] Höglund T., *Shear Buckling Resistance Of Steel And Aluminium Plate Girders*, Thin-Walled Structures, Vol. 29, 1997
- [9] Pavlovčič L., *Strižna nosilnost vzdolžno ojačanih stojin polnostenskih nosilce*, doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, 2005
- [10] Pavlovčič L., Seitz M., Detzel A., Kuhlmann U., Beg D., *Report on Tests and FE Study on Longitudinally Stiffened Web of Plate Girders in Shear*, Test Report, University of Stuttgart, 2003
- [11] Porter D.M., Rockey K.C., Evans H.R., *The Collapse Behaviour of Plate Girders Loaded in Shear*, The Structural Engineer, Vol. 53, No. 8, 1975



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO  
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2005

## *Eksperimentalna analiza mešanja v Taylor-Couettovem reaktorju na makro in mezo nivojih s pomočjo metode LIF*

*M. Požarnik<sup>1</sup>, A. Racina<sup>1</sup> in M. Kind<sup>1</sup>*

### *Experimental Analysis of Mixing in Taylor-Couette Reactor at Macro and Meso Scales using LIF Method*

**Povzetek.** Taylor-Couettov tok predstavlja gibanje tekočine v špranji med dvema koncentričnima valjema. V prispevku je predstavljeno mešanje v špranji med valjema, katerih razmerje radijev je enako 0,63. To pomeni, da se pri gibanju tekočine ne pojavijo vmesne tokovne oblike, ki so sicer značilne za prehod med laminarnim in turbulentnim režimom gibanja v Taylor-Couettovem reaktorju. Analizo smo izvedli s pomočjo eksperimentalne tehnike LIF.

**Abstract.** Taylor-Couette flow is a flow inside a gap between two concentric cylinders. In this study, cylinders with a radius-ratio equal to 0.63 are taken into account, which results in a direct transition from laminar fluid flow regime to a turbulent one. Analysis is performed using LIF method.

#### **1 Uvod**

V zadnjih dveh desetletjih sta nedvomno najhitreje razvijajoči se tehniki za karakterizacijo tokovnih razmer optični tehniki, ki ju imenujemo Particle Image Velocimetry (PIV) in Laser Induced Fluorescence (LIF) [6]. Tehnika PIV pomeni merjenje hitrosti toka tekočine s pomočjo slik sledilnih delcev, tehnika LIF pa merjenje temperaturnega oziroma koncentracijskega polja s pomočjo lasersko vzbujene fluorescence toku dodane snovi, ki jo imenujemo indikator (angl. *tracer* = indikator). Obe eksperimentalni tehniki ne motita toka in omogočata tako kvalitativno kakor tudi kvantitativno analizo ploskovnih ter prostorskih tokovnih, temperaturnih in koncentracijskih polj.

Taylor-Couettov reaktor (TC reaktor) je sestavljen iz dveh koncentričnih valjev, pri čemer v veliki večini primerov zunanji miruje, notranji pa se vrti s konstantno vrtilno hitrostjo. Industrijske izvedbe TC reaktorjev obratujejo z vsiljenim zunanjim aksialnim tokom ali brez

---

<sup>1</sup> Dipl.-Ing. Anna Racina, Prof. Dr.-Ing. Matthias Kind, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Thermische Verfahrenstechnik; Dr. Matej Požarnik, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, gostujoči raziskovalec na Universität Karlsruhe (TH), Institut für Thermische Verfahrenstechnik

njega. V odvisnosti od vrtilne hitrosti se v špranji med valjema vzpostavijo različne tokovne strukture; od laminarnega Couettovega toka, preko toroidalnih, osnosimetričnih, nasproti se vrtečih struktur (Taylorjev-Couettov tok), pa vse do popolnoma turbulentnega toka. V procesni tehniki uporabljamo TC reaktorje predvsem takrat, kadar želimo doseči visoko stopnjo radialnega mešanja ob hkratnih nizkih strižnih napetostih. V kemijski procesni tehniki, predvsem ko gre za procese polimerizacije, predstavlja TC reaktor odlično alternativo ponavadi uporabljeni verigi mešalnih posod. Ugodno je visoko razmerje med površino in prostornino TC reaktorja, posledica česar je relativno enostavno termično kontroliranje reaktorja.

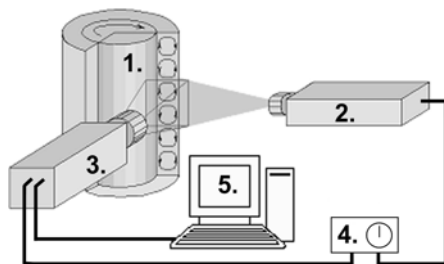
V okviru prispevka bomo predstavili mešanje v TC reaktorju na makro in mezo nivojih. Kot makromešanje definiramo prenos snovi preko meje med dvema sosednjima vrtničnima celicama, medtem ko je mešanje na mezo nivoju definirano kot homogenizacija znotraj posameznega vrtinca oziroma celice. Najprej predstavljamo merilni sistem in kalibracijo, sledijo jima analiza mešanja na makro nivoju, analiza mešanja na mezo nivoju in zaključki.

## 2 Merilni sistem in kalibracija

Pri analizi uporabljeni TC reaktor je 388 mm dolg. Razmerje radijev obeh valjev znaša 0,63 ( $R_i=31,5$  mm,  $R_o=50$  mm), pri čemer  $R_i$  označuje polmer notranjega valja ter  $R_o$  polmer zunanega valja. Posledica tovrstne geometrije je direkten prehod med laminarnim in turbulentnim režimom gibanja. Taylorjevo število, s katerim opišemo gibanje v špranji med valjema, je definirano kot

$$Ta = \frac{\omega R_i d}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{d}{R_i}} \quad (1)$$

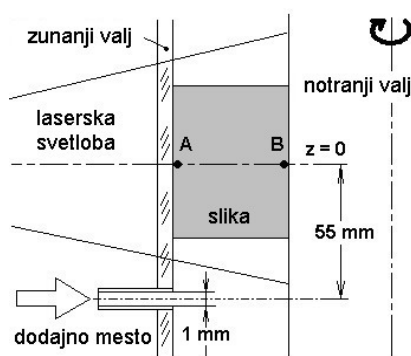
kjer so  $d$  širina špranje med valjema,  $\omega$  kotna hitrost notranjega valja in  $\nu$  kinematična viskoznost delovnega medija. Vrednost kritičnega Taylorjevega števila  $Ta_{crit}$ , ki predstavlja tisto vrednost Taylorjevega števila, pri katerem se prvič pojavi Taylor-Couettov tok, ocenimo s pomočjo korelacij objavljenih v [4]. Za uporabljeni TC reaktor in z vodo pri sobni temperaturi ( $20^\circ\text{C}$ ) kot delovnim medijem znaša  $Ta_{crit}=58$ . Pri  $Ta=1150$  ( $Ta/Ta_{crit}\cong 20$ ) se prične prehod v turbulentni način gibanja, pri  $Ta=11520$  ( $Ta/Ta_{crit}\cong 200$ ) je tok popolnoma turbulenten. Prvi in drugi vrednosti  $Ta$  števila ustrežata števili vrtljajev notranjega valja  $n=25$   $\text{min}^{-1}$  in  $n=250$   $\text{min}^{-1}$ .



Slika 1: Merilnega sistem: 1.TC reaktor, 2.laser, 3.CCD kamera, 4.časovna enota, 5.PC.

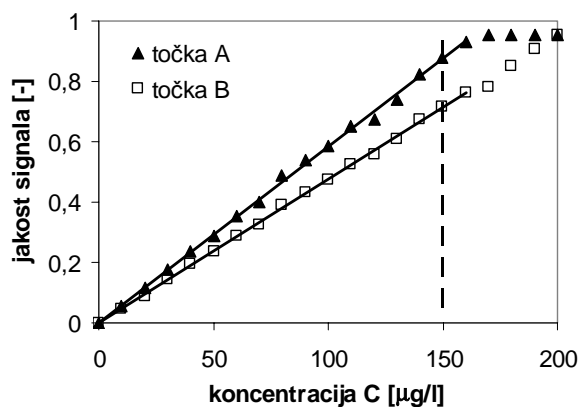
Glavni komponenti merilnega sistema (Dantec Dynamics) predstavljata pulzirajoči Nd:YAG laser valovne dolžine 532 nm in hitra CCD kamera (slika 1). Tok tekočine med valjema TC

reaktorja osvetlimo s tankim slojem laserske svetlobe. Ta je pozicioniran vzporedno osi obeh valjev in mora ležati natanko pravokotno na površino notranjega valja. Tako nastane osvetljeni del toka tekočine, ki zaradi osnosimetričnosti toka predstavlja reprezentativno sliko celotnega dogajanja v toku med valjema. Kot indikator dodajamo toku barvilo rhodamin B s koncentracijo  $500 \mu\text{g/l}$ . Indikator po osvetlitvi z lasersko svetlobo oddaja fluorescenčno svetlobo valovne dolžine  $580 \text{ nm}$ . Jakost fluorescenčnega sevanja zajemamo z CCD kamero ločljivosti  $1344 \times 1024 \text{ pixel}^2$ . Reaktor med eksperimentom obratuje brez dodatnega vsiljenega aksialnega toka, volumski pretok dodajane indikatorja rhodamina B znaša  $1 \text{ l/h}$ . Kamera zajema sliko natanko na polovici višine reaktorja, dodatno mesto indikatorja se nahaja približno  $55 \text{ mm}$  pod sredino reaktorske posode. Koordinatni sistem in lego dodatnega mesta prikazuje slika 2.



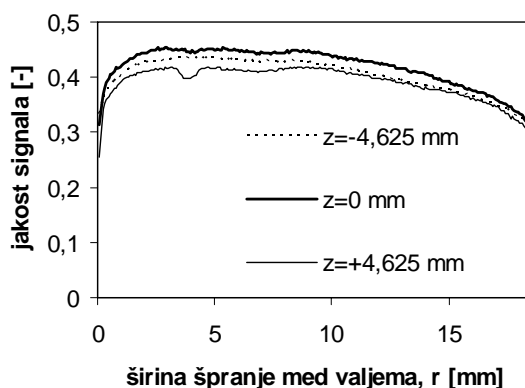
Slika 2: Skica merilnega območja.

Izmerjena jakost fluorescentnega sevanja je do določene mejne koncentracije indikatorja direktno proporcionalna lokalni koncentraciji le tega. Postopek kalibriranja je v literaturi izdatno opisan [5]. Primer linearnega območja za točki A in B, znotraj katerega opravljamo meritve, prikazuje slika 3. Jakost fluorescenčnega signala 1 ustreza popolnoma beli sliki oziroma vrednosti 255 na skali od 0 do 255 (format uint-8).



Slika 3: Območje linearne odvisnosti med jakostjo signala in koncentracijo indikatorja.

Posebej pomembna je t.i. kalibracija od točke do točke. To pomeni, da morajo kalibracijske meritve med drugim tudi zaradi neenakomerne porazdelitve jakosti laserske svetlobe zagotoviti pretvorne faktorje za vsak pixel znotraj zajete slike. Slika 4 prikazuje neenakomerno jakost fluorescirajočega sevanja vzdolž treh vodoravnih linij; prva leži pod sredino zajete slike, druga natanko v ravnini  $z=0$ , tretja pa nad sredino slike. Koncentracija indikatorja je pri kalibraciji enaka povsod po špranji med valjema, neenakosti so posledica geometrijskih faktorjev, nečistoč na plašču reaktorja in kot že povedano, neenakomerne porazdelitve jakosti laserske svetlobe.

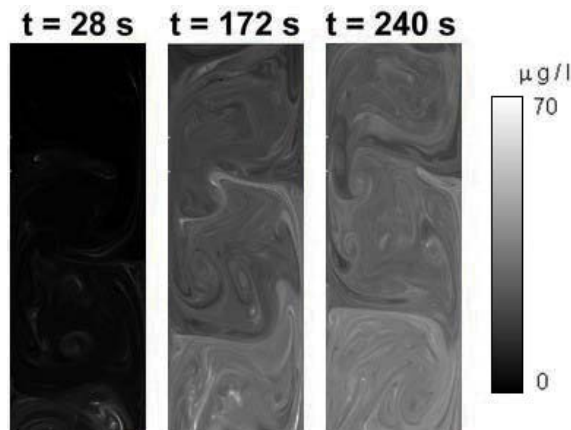


Slika 4: Razlogi za kalibracijo od točke do točke.

### 3 Analiza mešanja v aksialni smeri (mešanje na makro nivoju)

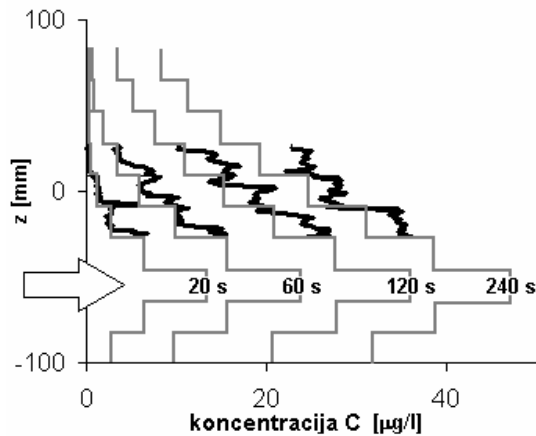
Izvedli smo tri serije preizkusov pri različnih vrtilnih hitrostih notranjega valja ( $n=40 \text{ min}^{-1}$ ,  $n=100 \text{ min}^{-1}$  in  $n=250 \text{ min}^{-1}$ ). Ustrezne vrednosti Taylorjevega števila so  $Ta=1870$  (takoj po pojavu turbulentnega toka),  $Ta=4680$  (razvijajoč se turbulentni tok) in  $Ta=11690$  (popolnoma turbulentni tok). V vsaki seriji smo naredili 61 posnetkov; prvega ob času  $t=0$  s (pričetek dodajanja indikatorja) in vse naslednje s časovnim razmikom 4 s.

S pomočjo razvitega algoritma na osnovi programskega paketa Matlab 7.0 zajete slike pretvorimo v koncentracijska polja. Nekaj primerov koncentracijskih polj prikazuje slika 5. Iz slike je razvidno, da obstajajo ostro izražene meje med posameznimi vrtinci. Koncentracija indikatorja znotraj posameznega vrtinca je relativno enakomerna, medtem ko se koncentracije med sosednjimi vrtinci zelo razlikujejo. Od tod ideja o primerjavi TC reaktorja s kaskado zapredno povezanih mešalnih posod, pri čemer koncentracija indikatorja v posameznem vrtincu ustreza koncentraciji indikatorja znotraj posamezne mešalne posode. Na osnovi te ideje je mogoče mešanje v TC reaktorju v aksialni smeri (mešanje na makro nivoju) opisati z enodimenzionalnim difuzijskim koeficientom.



**Slika 5:** Koncentracijsko polje med valjema TC reaktorja,  $Ta=1870$  ( $40 \text{ min}^{-1}$ ).

V ta namen razdelimo celoten reaktor na posamezne celice s prostornino  $V_{cell} = \pi \cdot (R_o^2 - R_i^2) \cdot (R_o - R_i)$ . Pri tem upoštevamo, da je vsaka celica enako visoka kot široka (glej sliko 5). Tako vsebuje celotni TC reaktor 21 od spodaj številčenih vrtničnih celic. Vsaka izmed zajetih slik prikazuje celice 10, 11 in 12. Koncentracijo indikatorja znotraj celice in njeno spreminjanje s časom opišemo z enostavnim difuzijskim modelom. Na tak način določimo difuzijske koeficiente za vsakega izmed preizkusov (slika 6). Koncentracijski profili so stopničaste oblike z maksimumom v celici, kjer dodajamo indikator. Kot eksperimentalne vrednosti služijo radialno po špranji med valjema povprečne vrednosti koncentracij.



**Slika 6:** Koncentracijski profili pri mešanju v aksialni smeri,  $Ta=1870$  ( $40 \text{ min}^{-1}$ ).

**Tabela 1:** Aksialni difuzijski koeficient  $D_{az}$  [ $m^2/s$ ].

vir	$D_{az}$ [ $m^2/s$ ]			$\beta_v$ $D_{az} \sim Ta^\beta$
	$Ta=1870$	$Ta=4680$	$Ta=11690$	
to delo	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,84
[7]	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	0,77
[2]	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$6,2 \cdot 10^{-4}$	0,72
[3]	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$7,7 \cdot 10^{-5}$	0,81

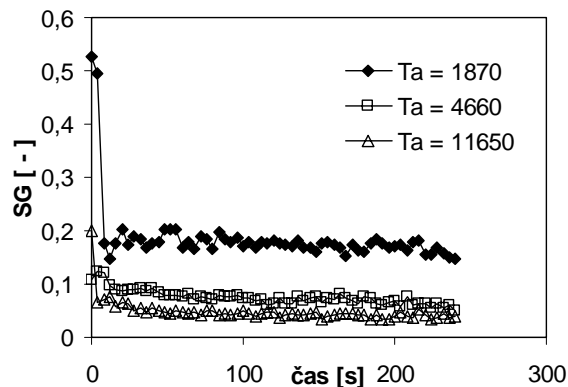
Na tak način določene difuzijske koeficiente lahko zapišemo tudi kot eksponentno funkcijo Taylorjevega števila ( $D_{az} \sim Ta^\beta$ ). Primerjavo med različnimi vrednostmi podaja tabela 1.

#### 4 Analiza mešanja v vrtilni celici (mešanje na mezo nivoju)

Za analizo kvalitete mešanja znotraj posamezne vrtilne celice je potrebno določiti stopnjo segregacije [1], definirano z naslednjo enačbo

$$SG = \sqrt{\frac{(C - \bar{C})^2}{\bar{C}(1 - \bar{C})}} \quad (2)$$

kjer  $\bar{C}$  predstavlja trenutno povprečno koncentracijo na posnetku. Stopnja segregacije zavzema vrednosti med 0 in 1. Podaja razmerje med prostornino tekočine, ki je popolnoma razslojena in prostornino tekočine, ki je popolnoma premešana. Slika 7 podaja izmerjene vrednosti spreminjanja stopnje segregacije v času znotraj 11. vrtilne celice in za vse tri vrtilne hitrosti notranjega valja. Jasno je videti, da z naraščanjem vrtilne hitrosti stopnja segregacije pada.



**Slika 7:** Časovna odvisnost stopnje segregacije.

Kljub vsemu stopnja segregacije podaja le integralne informacije o mešanju. Če želimo vpogled v prostorsko porazdelitev nehomogenosti, je potrebno vpeljati avtokorelacijski koeficient  $R_{CC}$

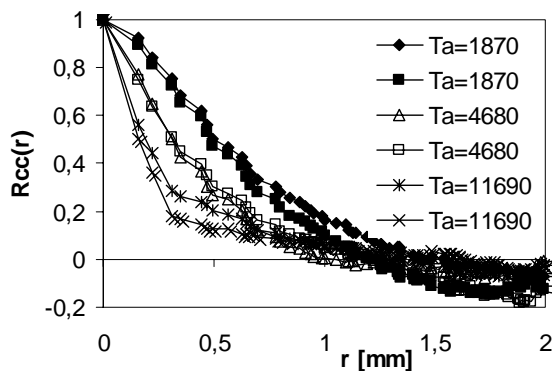
$$R_{CC}(r) = \frac{C'(\bar{x})C'(\bar{x} + \bar{r})}{\sqrt{C'(\bar{x})^2 C'(\bar{x} + \bar{r})^2}} \quad (3)$$

$C'$  predstavljajo lokalne fluktuacije koncentracij na dveh za razdaljo  $\bar{r}$  med seboj oddaljenih mestih. Iz poteka funkcije  $R_{CC}(r)$  lahko sklepamo o tokovnem režimu v špranji med valjema. Slika 8 podaja vrednosti avtokorelacijskega koeficienta  $R_{CC}(r)$  znotraj 11. vrtinčne celice za različne vrednosti  $Ta$  števila. Vrednosti  $R_{CC}(r)$  so izračunane za naključno porazdeljene izseke površine vrtinčne celice v velikosti približno četrtine celotne površine celice. Slika 8 podaja potek funkcije  $R_{CC}(r)$  za dve neprekrivajoči se površini.

Površina, ki jo omejuje krivulja  $R_{CC}(r)$ , je definirana kot mera za karakteristično velikost nehomogenosti v toku med valjema TC reaktorja (slika 8). Izračunamo jo z naslednjim integralom

$$\Lambda_C = \int_0^{\infty} R_{CC}(r) dr \quad (4)$$

Z večanjem vrednosti Taylorjevega števila se vrednosti  $\Lambda_C$  zmanjšujejo. Tendanca je torej podobna kot pri stopnji segregacije. Z višanjem vrtilne hitrosti notranjega valja namreč v tok vnašamo vedno več energije. Rezultat je vedno bolj turbulenten tok, vedno manjše tokovne strukture in seveda tudi vedno bolj intenzivno mešanje.



Slika 8: Avtokorelacijski koeficient  $R_{CC}(r)$ .

Tabela 2: Karakteristična velikost nehomogenosti  $\Lambda_C$  [mm].

$Ta$	1870	4680	11690
$\Lambda_C$ [mm]	0,57	0,48	0,29



## 5 Zaključek

V prispevku so predstavljene osnove metode LIF za študij mešalnih lastnosti TC reaktorjev. V prvem delu smo posebno pozornost namenili izvedbi kalibracijskega postopka, katerega natančnost in zanesljivost sta bistvenega pomena za kasnejše kvantitativno vrednotenje s pomočjo hitre CCD kamere zajetega slikovnega materiala (koncentracijskih polj). V nadaljevanju smo mešanje na makro nivoju modelirali s pomočjo enodimenzionalnega difuzijskega koeficienta, medtem ko smo mešanje na mezo nivoju analizirali z definiranjem in določitvijo stopnje segregacije ter avtokorelacijskega koeficienta. Eksperimentalne vrednosti nedvoumno potrjujejo predpostavke o povezavi med intenzivnostjo mešanja v špranji TC reaktorja in režimom gibanja delovnega medija ter s tem posredno tudi v tok vneseno količino energije.

## Zahvala

Projekt financira nemška raziskovalna skupnost (DFG) v okviru programa 1141 »Analysis, Modelling and Calculation of Mixers With or Without Chemical Reaction«. Avtorji se zahvaljujejo tudi Zvezni državi Baden-Württemberg za finančno podporo v okviru 40. mednarodnega seminarja za raziskave in poučevanje v inženirski kemiji in procesni tehniki, ki je Dr. Mateju POŽARNIKU omogočila delo na Univerzi v Karlsruheju (TH).

## Literatura

- [1] J. Baldyga, J.R. Bourne, *Turbulent Mixing and Chemical Reactions*, John Wiley & Sons, Chichester 1999.
- [2] G. Desmet, H. Verelst, G.V. Baron, *Local and global dispersion effects in Couette-Taylor flow—II. Quantitative measurements and discussion of the reactor performance*, Chem. Eng. Sci. 51(8), 1299—1309, 1996.
- [3] Y. Enokida, K. Nakata, A. Suzuki, *Axial turbulent diffusion in fluid between rotating coaxial cylinders*, AIChE Journn. 35(7), 1211—1214, 1989.
- [4] A. Esser, S. Grossman, *Analytic expression for Taylor-Couette stability boundary*, Phys. Fluids 8(7), 1814—1819, 1995.
- [5] A. Fall, O. Lecoq, R. David, *Characterization of mixing in a stirred tank by planar laser induced fluorescence (P.L.I.F.)*, Trans. IChemE 79A(11), 876—882, 2001.
- [6] G. Papadopoulos, F. Guillard, *Image-based diagnostics for flow field characterization*, Proc. 11<sup>th</sup> International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements, C.A. Brebbia et al., eds, Witpress, Boston, 575—585, 2003.
- [7] W.Y. Tam, H.L. Swinney, *Mass transport in turbulent Couette-Taylor flow*, Phys. Rev. A 36, 1374—1381, 1987.



## *Dinamika harmoničnega nihala s suhim trenjem*

*R. Pušenjak<sup>1</sup>*

### *Dynamics of Harmonic Oscillator with Dry Friction*

**Povzetek.** Članek obravnava dinamiko harmoničnega nihala s suhim trenjem s členitvijo celotnega gibanja na posamezne faze gibanja tako, da uvede konstante gibanja, ki se skokovito spreminjajo iz faze v fazo. Na osnovi konstant gibanja v posameznih fazah je dobljen algoritem, ki rekonstruira celotno gibanje do umiritve, pri čemer algoritem določa tudi čas, v katerem se gibanje umiri.

**Abstract.** The paper treats the dynamics of the harmonic oscillator with dry friction by partition of the motion into separate phases and determination of the constant of motion for every phase. The constants of motion change abruptly from the phase to phase. On the basis of constants of motion the algorithm is obtained, which reconstructs the entire motion until the rest is reached. The algorithm computes also the time in which the motion is quiet down.

#### **1 Uvod**

Odzivna nihanja nihal s suhim trenjem obsegajo izredno širok spekter različnih pojavov vključno s kaosom in so zaradi tega predmet intenzivnih proučevanj [1]. V tem članku je proučena dinamika harmoničnega nihala s suhim trenjem, ki ga po začetni motnji prepustimo avtonomnemu nihanju. Zaradi suhega trenja je sistem dušen, zato nihaji postopoma izvenijo in v nekem položaju sistem obstane v mirovanju. Zaradi disipacije energije med trenjem sistem ni konservativen, vendar pa lahko gibanje razčlenimo na posamezne faze, v katerih se ohranja konstanta gibanja. Konstanta gibanja se od faze do faze gibanja skokovito spreminja, kar je osnova algoritmu, s pomočjo katerega je mogoče rekonstruirati celotno gibanje nihala in določiti tudi čas, ki preteče od začetka gibanja do trenutka mirovanja.

#### **2 Harmonično nihalo s suhim trenjem**

Vzemimo togo telo z maso  $M$  v obliki kvadra, ki ga postavimo na horizontalno ploskev. Pri drsenju togega telesa po ploskvi se pojavlja suho trenje, ki ga opišemo z modelom, v katerem upoštevamo koeficient statičnega trenja  $\mu_s$  in koeficient kinetičnega trenja  $\mu_k$ .

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

Togo telo je povezano z linearno vzmetjo z vzmetno konstanto  $k$ . V trenutku  $t=0$  togo telo prepustimo prostemu nihanju, pri čemer je pred začetkom gibanja vzmet raztegnjena glede na ravnotežno lego za dolžino  $l$  in telo miruje v legi  $x=l$ . Če je  $kl > \mu_s Mg$ , kjer je  $g$  gravitacijski pospešek, se togo telo prične pospešeno gibati. V obravnavi predpostavljamo majhno trenje  $\mu_s \ll kl/Mg$ ,  $\mu_k \ll kl/Mg$  in se omejimo na počasna gibanja, zaradi česar lahko smatramo, da sila trenja ni odvisna od hitrosti. Na ta način iz obravnave izključimo druge učinke kot npr. zračni upor in upoštevamo le sile, ki izvirajo iz dotika togega telesa s podlago. V obravnavi pravtako ne upoštevamo nobenih variacij koeficienta kinetičnega trenja  $\mu_k$  v odvisnosti od hitrosti.

## 2.1 Gibalne enačbe harmoničnega nihala s suhim trenjem

Ko nihalo prepustimo prostemu nihanju, velja gibalna enačba [2]:

$$M\ddot{x}^{(0)} + kx^{(0)} = \mu_k Mg, \quad (1)$$

z začetnimi pogoji  $x^{(0)}(0)=l$ ,  $\dot{x}^{(0)}(0)=0$ . Enačba (1) velja v prvi fazi gibanja, kjer z zgornjim indeksom  $^{(0)}$  označimo prvo fazo gibanja. V splošnem bomo faze gibanja označili z zgornjim indeksom  $^{(n)}$  z vrednostmi  $n=0,1,2,\dots$  za prvo, drugo, itd. fazo gibanja. Z uvedbo lastne frekvence nedušenega prostega nihanja  $\omega^2 = k/M$  preide gibalna enačba (1) v enačbo:

$$\ddot{x}^{(0)} + \omega^2 x^{(0)} = \mu_k g \quad (2)$$

Ker harmonično nihalo s suhim trenjem ni konservativen sistem, se pri gibalni enačbi (2) energija ne ohranja. Če pa s transformacijo koordinat vpeljemo nov pomik:

$$y^{(0)} = x^{(0)} - \mu_k g / \omega^2, \quad (3)$$

preide gibalna enačba (2) v enačbo:

$$\ddot{y}^{(0)} + \omega^2 y^{(0)} = 0. \quad (4)$$

Če z  $y^{(0)}(0) = l - \mu_k g / \omega^2 > 0$  označimo začetni transformirani pomik v prvi fazi gibanja in upoštevamo, da je začetna transformirana hitrost enaka nič,  $\dot{y}^{(0)}(0) = 0$ , lahko izrazimo rešitev enačbe (4) v obliki:

$$y^{(0)}(t) = y^{(0)}(0) \cos \omega t, \quad \dot{y}^{(0)}(t) = -\omega y^{(0)}(0) \sin \omega t, \quad \ddot{y}^{(0)}(t) = -\omega^2 y^{(0)}(0) \cos \omega t, \quad (5)$$

rešitev enačbe (2) za prvotne pomike v obliki:

$$x^{(0)}(t) = y^{(0)}(t) + \mu_k g / \omega^2 = y^{(0)}(0) \cos \omega t + \mu_k g / \omega^2 = \left( l - \mu_k g / \omega^2 \right) \cos \omega t + \mu_k g / \omega^2 \quad (6)$$

in za hitrosti v obliki:

$$\dot{x}^{(0)}(t) = \dot{y}^{(0)}(t) = -\omega y^{(0)}(0) \sin \omega t = (\mu_k g / \omega - \omega l) \sin \omega t \quad (7)$$

Če enačbo (4) pomnožimo z  $My^{(0)}$  in upoštevamo zamenjavi:

$$My^{(0)}\dot{y}^{(0)} = \frac{1}{2}M \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dy^{(0)}}{dt} \right)^2 \right], \quad My^{(0)}y^{(0)} = \frac{1}{2}M \frac{d}{dt} \left[ y^{(0)} \right]^2,$$

dobimo z integriranjem enačbo:

$$E_0 = \frac{1}{2}M \left[ \dot{y}^{(0)} \right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2 M \left[ y^{(0)} \right]^2 = \text{konst.} \quad (8)$$

katere pomen je naslednji: kljub temu, da zaradi dušenja, ki je posledica suhega trenja, sistem ni konservativen in se energija nihala ne ohranja, obstaja v prvi fazi konstanta gibanja  $E_0$ , ki ima dimenzijo energije [3]. Energija nihala in konstanta gibanja se medseboj bistveno razlikujeta. Energija nihala se zaradi trenja v vsaki fazi gibanja stalno zmanjšuje, konstanta gibanja pa se ohranja v posamezni fazi gibanja, vendar se od faze do faze skokovito spreminja. V kakšni povezavi sta energija nihala in konstanta gibanja, bomo proučili v nadaljevanju. Konstanto gibanja v poljubni fazi bomo označili z  $E_n$ . V prvi fazi gibanja jo lahko izračunamo na samem začetku gibanja:

$$E_0 = \frac{1}{2}M \left[ \dot{y}^{(0)}(0) \right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2 M \left[ y^{(0)}(0) \right]^2 = \frac{1}{2}\omega^2 M \left( l - \mu_k g / \omega^2 \right)^2, \quad (9)$$

mehanska energija nihala  $U_0$  v prvi fazi gibanja pa je vsota kinetične energije nihala  $T_0$  in potencialne energije nihala  $V_0$ :

$$U_0 = T_0 + V_0 = \frac{1}{2}M \left[ \dot{x}^{(0)}(t) \right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2 M \left[ x^{(0)}(t) \right]^2 = \frac{1}{2}M \left[ (\mu_k g / \omega - \omega l) \sin \omega t \right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2 M \left[ (l - \mu_k g / \omega^2) \cos \omega t + \mu_k g / \omega^2 \right]^2. \quad (10)$$

Vse faze gibanja trajajo enako dolgo. Trajanje vsake faze gibanja je dolgo  $\pi / \omega$  sekund. V času  $t = \pi / \omega$  postane hitrost enaka nič,  $\dot{x}^{(0)}(\pi / \omega) = \dot{y}^{(0)}(\pi / \omega) = -\omega y^{(0)}(0) \sin \pi = 0$  in v tem trenutku se smer hitrosti spremeni. Trenutek, v katerem hitrost postane enaka nič, smer hitrosti pa spremeni, pomeni konec posamezne faze gibanja. Na koncu prve faze gibanja je transformirani pomik:

$$y^{(0)}(\pi / \omega) = y^{(0)}(0) \cos \pi = -y^{(0)}(0) = \mu_k g / \omega^2 - l, \quad (11)$$

prvotni pomik je:

$$x^{(0)}(\pi / \omega) = y^{(0)}(\pi / \omega) + \mu_k g / \omega^2 = 2\mu_k g / \omega^2 - l, \quad (12)$$

pospešek na koncu prve faze pa je:

$$\ddot{x}^{(0)}(\pi / \omega) = \ddot{y}^{(0)}(\pi / \omega) = -\omega^2 y^{(0)}(0) \cos \pi = \omega^2 y^{(0)}(0) = \omega^2 l - \mu_k g > 0. \quad (13)$$

Ker se v trenutku  $t = \pi / \omega$  spremeni smer hitrosti, se gibanje nadaljuje v naslednji fazi le pod pogojem, da velja:

$$M\ddot{x}^{(0)}(\pi/\omega) > \mu_s Mg \Rightarrow \omega^2 l > (\mu_s + \mu_k)g. \quad (14)$$

V drugi fazi gibanja nihalo niha v nasprotni smeri, nasprotno pa je tudi delovanje torne sile. Gibalno enačbo zaradi spremembe smeri delovanja torne sile zapišemo v obliki:

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = -\mu_k g, \quad (15)$$

skupaj z začetnimi pogoji  $x^{(1)}(\pi/\omega) = 2\mu_k g/\omega^2 - l, \dot{x}^{(1)}(\pi/\omega) = 0$ . S transformacijo:

$$y^{(1)} = x^{(1)} + \mu_k g/\omega^2 \quad (16)$$

izrazimo začetni transformirani pomik druge faze gibanja:

$$y^{(1)}(\pi/\omega) = x^{(1)}(\pi/\omega) + \mu_k g/\omega^2 = 3\mu_k g/\omega^2 - l \quad (17)$$

in enačbo (15) prevedemo ponovno na enačbo (4) z zgornjim indeksom <sup>(1)</sup>, to pot z rešitvijo:

$$y^{(1)}(t) = y^{(1)}(\pi/\omega)\cos(\omega t - \pi), \dot{y}^{(1)}(t) = -\omega y^{(1)}(\pi/\omega)\sin(\omega t - \pi), \ddot{y}^{(1)}(t) = -\omega^2 y^{(1)}(\pi/\omega)\cos(\omega t - \pi). \quad (18)$$

Konec druge faze gibanja nastopi v času  $t = 2\pi/\omega$ , ko postane hitrost  $\dot{x}^{(1)}(t) = \dot{y}^{(1)}(t)$  ponovno enaka nič, oziroma ko spet spremeni smer. Časovni interval prve faze gibanja je  $(0, \pi/\omega)$ , časovni interval druge faze gibanja pa  $(\pi/\omega, 2\pi/\omega)$  in rešitvi (5) oziroma (18) veljata le znotraj posameznih intervalov. Tako je prvotni pomik druge faze gibanja oziroma prvotni pomik na intervalu  $(\pi/\omega, 2\pi/\omega)$  enak:

$$x^{(1)}(t) = y^{(1)}(t) - \mu_k g/\omega^2 = y^{(1)}(\pi/\omega)\cos(\omega t - \pi) - \mu_k g/\omega^2 = (3\mu_k g/\omega^2 - l)\cos(\omega t - \pi) - \mu_k g/\omega^2, \quad (19)$$

hitrost pa:

$$\dot{x}^{(1)}(t) = \dot{y}^{(1)}(t) = -\omega y^{(1)}(\pi/\omega)\sin(\omega t - \pi) = (\omega l - 3\mu_k g/\omega)\sin(\omega t - \pi). \quad (20)$$

Ob koncu druge faze gibanja je transformirani pomik:

$$y^{(1)}(2\pi/\omega) = y^{(1)}(\pi/\omega)\cos\pi = l - 3\mu_k g/\omega^2, \quad (21)$$

prvotni pomik je:

$$x^{(1)}(2\pi/\omega) = y^{(1)}(2\pi/\omega) - \mu_k g/\omega^2 = l - 4\mu_k g/\omega^2, \quad (22)$$

pospešek pa:

$$\ddot{x}^{(1)}(2\pi/\omega) = \ddot{y}^{(1)}(2\pi/\omega) = -\omega^2 y^{(1)}(\pi/\omega)\cos\pi = 3\mu_k g - \omega^2 l. \quad (23)$$

S pomočjo enačbe (17) lahko izračunamo konstanto gibanja  $E_1$ , ki se ohranja v drugi fazi:

$$E_1 = \frac{1}{2}M\left[\dot{y}^{(1)}(\pi/\omega)\right]^2 + \frac{1}{2}M\left[y^{(1)}(\pi/\omega)\right]^2 = \frac{1}{2}M\left(3\mu_k g/\omega^2 - l\right)^2, \quad (24)$$

s pomočjo enačb (19) in (20) pa mehansko energijo nihala v drugi fazi gibanja:

$$U_1 = \frac{1}{2}M \left[ \dot{x}^{(1)}(t) \right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2 M \left[ x^{(1)}(t) \right]^2 = \frac{1}{2}M \left[ (\omega l - 3\mu_k g / \omega) \sin(\omega t - \pi) \right]^2 + \frac{1}{2}\omega^2 M \left[ (3\mu_k g / \omega^2 - l) \cos(\omega t - \pi) - \mu_k g / \omega^2 \right]^2 \quad (25)$$

Če je na koncu druge faze gibanja izpolnjen pogoj:

$$\left| M \ddot{x}^{(1)}(2\pi / \omega) \right| > \mu_s M g \Rightarrow \left| 3\mu_k g - \omega^2 l \right| > \mu_s g, \quad (26)$$

se nihanje nadaljuje z naslednjo fazo, v nasprotnem primeru pa se gibanje umiri v legi  $x^{(1)} = x^{(1)}(2\pi / \omega)$ . S pomočjo prvih dveh faz gibanja lahko opišemo vse morebitne nadaljnje faze gibanja togega telesa po ravni površini. V vsaki fazi gibanja se konstanta gibanja ohranja, trajanje posamezne faze pa ustreza eni polperiodi nihanja, oziroma času  $T_{1/2} = \pi / \omega$  sekund.

## 2.2 Algoritem za izračun dinamike harmoničnega nihala s suhim trenjem

Z uvedbo funkcije:

$$n = \frac{1}{T_{1/2}} \left[ t - \text{mod} \left( t / T_{1/2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \omega t - \text{mod}(\omega t / \pi) \right] \quad (27)$$

določimo indeks posamezne faze gibanja. Indeks faze gibanja je celo število  $n = 0, 1, 2, \dots$ , kjer  $n = 0$  označuje prvo fazo gibanja. S pomočjo indeksa faze gibanja določimo zakone gibanja za poljubno fazo:

$$\ddot{x}^{(n)} + \omega^2 x^{(n)} = (-1)^n \mu_k g, \quad (28)$$

$$y^{(n)} = x^{(n)} + (-1)^{n+1} \mu_k g / \omega^2, \quad \ddot{y}^{(n)} + \omega^2 y^{(n)} = 0, \quad (29)$$

kjer  $x^{(n)}$  označuje prvotni pomik  $(n+1)$ -ve faze gibanja,  $y^{(n)}$  pa transformirani pomik v  $(n+1)$ -ti fazi. Pomika  $x^{(n)}$ ,  $y^{(n)}$  definiramo pri vrednostih časa  $t$  na intervalu  $[n\pi / \omega, (n+1)\pi / \omega]$ , izven tega intervala pa so funkcijske vrednosti  $x^{(n)}$ ,  $y^{(n)}$  brez pomena. Z uvedbo Heavisideovih funkcij:

$$H(t - n\pi / \omega) = \begin{cases} 1, & \text{če je } t \geq n\pi / \omega \\ 0, & \text{če je } t < n\pi / \omega \end{cases} \quad (30)$$

izrazimo rešitev enačbe (29) na intervalu  $[n\pi / \omega, (n+1)\pi / \omega]$  v obliki:

$$y^{(n)}(t) = \left[ H(t - n\pi / \omega) - H(t - (n+1)\pi / \omega) \right] y^{(n)}(n\pi / \omega) \cos(\omega t - n\pi), \quad (31)$$

$$\dot{y}^{(n)}(t) = -[H(t - n\pi/\omega) - H(t - (n+1)\pi/\omega)]\omega y^{(n)}(n\pi/\omega)\sin(\omega t - n\pi), \quad (32)$$

$$\dot{y}^{(n)}(t) = -[H(t - n\pi/\omega) - H(t - (n+1)\pi/\omega)]\omega^2 y^{(n)}(n\pi/\omega)\cos(\omega t - n\pi), \quad (33)$$

konstanta gibanja v  $(n+1)$ -ti fazi pa se izraža z enačbo:

$$E_n = \frac{1}{2}M[\dot{y}^{(n)}(n\pi/\omega)]^2 + \frac{1}{2}M[y^{(n)}(n\pi/\omega)]^2 = \frac{1}{2}M[y^{(n)}(n\pi/\omega)]^2 = \text{konst.} \quad (34)$$

Za rekonstrukcijo celotnega gibanja potrebujemo začetne pogoje posameznih faz gibanja, kjer  $y^{(n)}(n\pi/\omega)$  pomeni začetni pogoj v  $(n+1)$ -vi fazi gibanja. Celotno gibanje do umiritve rekonstruiramo z rekurzivnim ponavljanjem algoritma, v katerem izračunamo prvotne pomike, transformirane pomike, hitrosti, pospeške, konstante gibanja in mehansko energijo nihala. S štetjem polperiod nihanja oziroma posameznih faz gibanja določimo tudi čas  $T_k$ , ki preteče, preden se nihanje harmoničnega nihala s suhim trenjem umiri:

**Algoritem.**

**Postavi**

$$n = 0, \quad x(0) = x^{(0)}(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad U(0) = 0, \quad x(0) = x^{(0)}(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0$$

**Ponavljaj**

$$\text{Izračunaj} \quad y^{(n)}(n\pi/\omega) = x^{(n)}(n\pi/\omega) + (-1)^{n+1} \mu_k g / \omega^2,$$

$$\forall t \in [n\pi/\omega, (n+1)\pi/\omega],$$

$$y^{(n)}(t) = [H(t - n\pi/\omega) - H(t - (n+1)\pi/\omega)]y^{(n)}(n\pi/\omega)\cos(\omega t - n\pi),$$

$$\dot{y}^{(n)}(t) = \dot{x}^{(n)}(t) = -[H(t - n\pi/\omega) - H(t - (n+1)\pi/\omega)]\omega y^{(n)}(n\pi/\omega)\sin(\omega t - n\pi),$$

$$x^{(n)}(t) = [H(t - n\pi/\omega) - H(t - (n+1)\pi/\omega)][y^{(n)}(t) + (-1)^n \mu_k g / \omega^2],$$

$$U_n(t) = [H(t - n\pi/\omega) - H(t - (n+1)\pi/\omega)][\frac{1}{2}M\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2(t)],$$

$$\text{Zamenjaj} \quad x(t) \rightarrow x(t) + x^{(n)}(t), \quad U(t) \rightarrow U(t) + U_n(t),$$

$$\ddot{x}^{(n)}[(n+1)\pi/\omega] = \ddot{y}^{(n)}[(n+1)\pi/\omega] = -\omega^2 y^{(n)}(n\pi/\omega)\cos\pi = \omega^2 y^{(n)}(n\pi/\omega),$$

$$y^{(n)}[(n+1)\pi/\omega] = y^{(n)}(n\pi/\omega)\cos\pi = -y^{(n)}(n\pi/\omega),$$

$$x^{(n)}[(n+1)\pi/\omega] = y^{(n)}[(n+1)\pi/\omega] + (-1)^n \mu_k g / \omega^2,$$

$$\text{Povečaj} \quad n \rightarrow n+1,$$

**Dokler**

$$|\ddot{x}^{(n)}(n\pi/\omega)| > \mu_s g,$$

<b>Izračunaj</b>	$N = n - 1, T_k = N\pi / \omega,$
<b>Postavi</b>	$n = 0, E(t) = 0,$
<b>Ponavljaj</b>	
<b>Izračunaj</b>	$E_n = \frac{1}{2} \omega^2 M \left[ y^{(n)}(n\pi / \omega) \right]^2,$
<b>Zamenjaj</b>	$E(t) \rightarrow E(t) + E_n(t),$
<b>Povečaj</b>	$n \rightarrow n + 1,$
<b>Dokler</b>	$n < N.$

### 3 Rezultati

Oglejmo si rezultate izračuna nihanja harmoničnega nihala s suhim trenjem za primer togega telesa iz bakra, ki drsi po jekleni površini. Koeficient statičnega trenja je  $\mu_s = 0.54$ , koeficient kinetičnega trenja pa  $\mu_k = 0.36$ . Vzemimo, da je masa togega telesa  $M = 1$  kg, vzmetna konstanta pa  $k = 25$  N/m. Togo telo premaknemo glede na ravnotežno stanje za razdaljo  $x = l = 1$  m in izpustimo. Potek nihanja pomikov  $x(t)$  prikazuje Slika 1, časovni potek hitrosti  $v(t) = \dot{x}(t)$  in pospeškov  $a(t) = \ddot{x}(t)$  pa Slika 2. Časovni potek mehanske energije  $U(t)$  nihala in konstante gibanja  $E(t)$  prikazuje Slika 3. Iz časovnih potekov hitrosti in pospeška na Sliki. 2 kot tudi iz časovnega poteka mehanske energije nihala in konstante gibanja na Sliki. 3. razberemo, da je stanje mirovanja doseženo po treh fazah oziroma polperiodah gibanja, ki jim ustreza čas  $T_k = 3\pi / \omega = 3\pi \sqrt{M/k} = 1.885$  sek. Iz Slike 1. pa ugotovimo, da gibanje stanje mirovanja ne doseže v ravnotežni legi  $x = 0$ , temveč se ustavi ob majhnem negativnem pomiku (pri  $x = -0.130$  m).

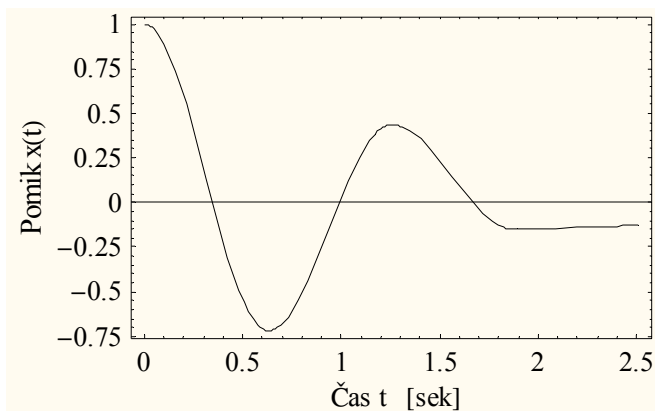
### 4 Zaključek

V članku je na osnovi gibalnih enačb harmoničnega nihala s suhim trenjem predstavljen algoritem, ki omogoča izračun celotne dinamike nihala. Pri tem uporabljamo konstante gibanja v posameznih fazah gibanja, ki omogočajo rekonstrukcijo celotnega gibanja do stanja mirovanja. Uspeh predstavljenega dela vzbuja upanje, da bo koncepte, predstavljene v tem članku, mogoče uporabiti tudi pri zmanjševanju vibracij z upravljanjem torne sile v semiaktivnem sistemu vzmetenja s spremenljivo togostjo.

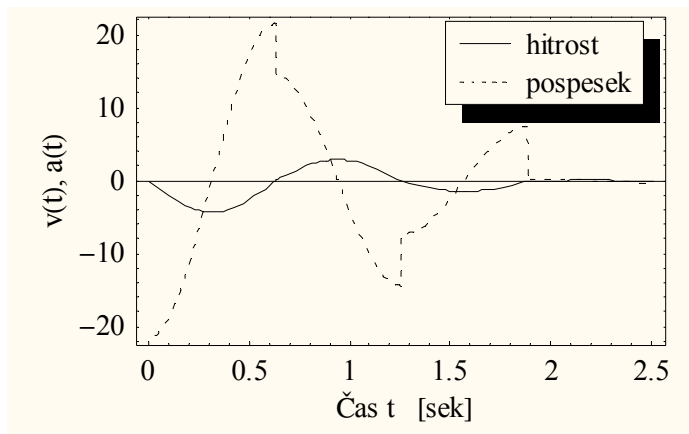
### Literatura

- [1] R. Pušenjak, *Analiza nelinearnih oscilatorjev z več prostostnimi stopnjami – Analysis of Nonlinear Oscillators with Finite Degrees of Freedom*. Stroj.vestn. **43** (5-6), 219--230, 1997.
- [2] L.D. Landau in E.M. Lifshitz, *Mechanics* 3<sup>rd</sup> edn. Oxford: Pergamon, 1976.
- [3] H. Goldstein, *Classical Mechanics* 2<sup>nd</sup> edn. Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.

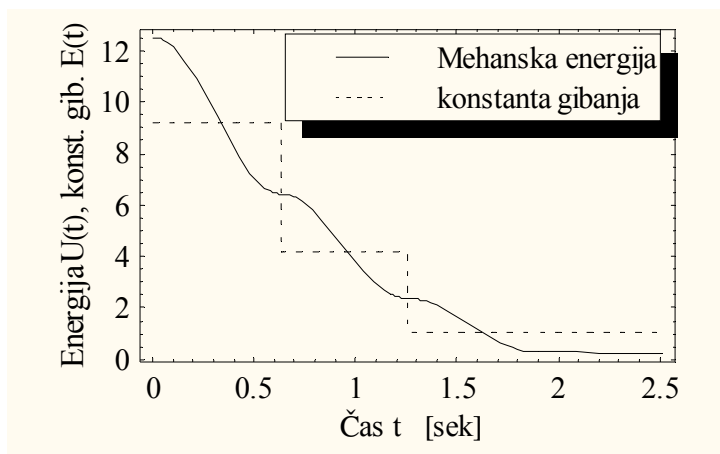




Slika 1: Časovni potek pomikov harmoničnega nihala s suhim trenjem.



Slika 2: Časovni potek hitrosti in pospeškov.



Slika 3: Časovni potek mehanske energije nihala in konstante gibanja



## ***Kombinacijska resonanca nosilca s togo-členkastim vpetjem z uporabo modificirane Lindstedt-Poincarejeve metode in metode koračnega harmonskega ravnovesja***

*R. Pušenjak<sup>1</sup> in M. Oblak<sup>2</sup>*

### ***Combination Resonance of Clamped-Hinged Beam by using Modified Lindstedt-Poincare Method and Incremental Harmonic Balance Method***

**Povzetek.** V članku je predstavljena uporaba modificirane Lindstedt-Poincarejeve metode (ML-PM) pri izračunu kombinacijske resonance nosilca s togo-členkastim vpetjem. ML-PM je zasnovana tako, da omogoča obravnavo nosilcev z velikimi kubičnimi nelinearnostmi in viskoznim dušenjem. Izvedena je primerjava rezultatov analize z metodo koračnega harmonskega ravnovesja (MKHR).

**Abstract.** The paper presents the application of the Modified Lindstedt-Poincare Method for the computation of the combination resonance of the clamped-hinged beam. The ML-PM is formulated to treat beams with high cubic nonlinearities including viscous damping. The results obtained by ML-PM are compared with results of the incremental harmonic balance method (IHBM).

#### **1 Uvod**

Skupna značilnost za Lindstedt-Poincarejevo metodo (L-PM) in metodo koračnega harmonskega ravnovesja (MKHR) je linearizacija osnovnega nelinearnega problema, pri čemer sistem nelinearnih diferencialnih enačb prevedemo v sistem linearnih diferencialnih enačb pri L-PM in v sistem linearnih koračnih diferencialnih enačb pri MKHR [1]. Pomembna razlika med obema metodama je v nastavkih rešitev. Pri L-PM je za rešitev izbrana potenčna vrsta, pri MKHR pa okrnjena Fourierjeva vrsta, ki načeloma lahko vsebuje poljubno mnogo členov. Prvi člen potenčne vrste v L-PM da rešitev, ki ustreza linearnemu sistemu in predstavlja generativno rešitev za aproksimacije višjih redov. Potenčna vrsta je izražena v odvisnosti od majhnega perturbacijskega parametra  $\varepsilon$  z namenom, da preide v

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

rešitev linearnega sistema, če parameter  $\varepsilon$  postane enak nič. Značilnost LP-M je, da moramo s tem parametrom izraziti tudi nelinearnosti sistema, dušenje v sistemu in vzbujanje sistema. To omejuje uporabnost L-PM na majhne nelinearnosti, majhno dušenje in šibko vzbujanje. V nasprotju s tem lahko pri MKHR rešujemo nelinearne probleme z velikimi nelinearnostmi, velikim dušenjem in poljubnim vzbujanjem, le da moramo v okrnjeni Fourierjevi vrsti uporabiti zadostno število harmoničnih členov, na razpolago pa moramo imeti tudi dober začetni približek. Modificirana Lindstedt-Poincarejeva metoda (ML-PM) odpravlja osnovno pomanjkljivost L-PM tako, da za izražanje nelinearnosti sistema, dušenja in vzbujevalnih amplitud dopušča uporabo poljubno velikega parametra  $\varepsilon$ , potenčno vrsto za nelinearno frekvenco nihanja nadomesti z novim perturbacijskim parametrom  $\alpha$ , ki je manjši od ena ne glede na to, kako velik je prvotni parameter  $\varepsilon$ , rešitev sistema enačb pa izrazi samo s potenčno vrsto novega (majhnega!) parametra [2]. Ta pretvorba je zasnovana na lastnosti, da so členi potenčne vrste za nelinearno frekvenco povsem enaki tako pri prvotnem parametru  $\varepsilon$  kot pri novem parametru  $\alpha$ . Iz literature [3] je znano, da je ML-PM bila uporabljena pri nelinearnih sistemih brez dušenja, v delu [2] in v tem prispevku pa je metoda razširjena tudi na sisteme z dušenjem. Značilni primer nelinearnega mehanskega sistema s kubičnimi nelinearnostmi in viskoznim dušenjem je v [4] izpeljan za problem upogibnih nihanj nosilcev s togo-členkastim vpetjem. V tem članku bomo prikazali uporabnost ML-PM pri kombinacijski resonanci takega nosilca, dobljene rezultate pa bomo presojali tudi s pomočjo rezultatov, ki jih dobimo z MKHR.

## 2 Upogibna nihanja nosilca s togo-členkastim vpetjem

Enačbe upogibnih nihanj nosilca s togo-členkastim vpetjem povzamemo po članku [4]:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \varepsilon \tilde{c}_n \frac{du_n}{dt} + \omega_{L_n}^2 u_n - \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{\Gamma}_{mnpq} u_m u_p u_q = p_n \cos a_n \alpha t, \quad n=1,2,\dots,N \quad (1)$$

kjer  $u_n$  predstavlja generalizirane prečne pomike nelinearnih upogibnih nihanj,  $\tilde{c}_n$  koeficiente viskoznega dušenja,  $\omega_{L_n}$  linearne frekvence nedušenega prostega nihanja,  $\tilde{\Gamma}_{mnpq}$  koeficiente kubičnih nelinearnosti nosilca in  $p_n$  amplitude zunanjega harmoničnega vzbujanja nosilca. Iz praktičnih razlogov se omejimo na  $N$  prostostnih stopenj, ki ustrezajo  $N$  modalnim načinom nihanja. V tem delu dopuščamo, da  $\varepsilon$  predstavlja poljubno velik pozitivni parameter. Na ta način lahko s pomočjo zamenjav:

$$c_n = \varepsilon \tilde{c}_n, \quad \Gamma_{mnpq} = \varepsilon \tilde{\Gamma}_{mnpq}, \quad p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{nk}, \quad (2)$$

obravnavamo nosilce, ki imajo lahko poljubno velike kubične nelinearnosti, od katerih ne zahtevamo majhnega viskoznega dušenja in se tudi ne omejujemo na šibko vzbujanje. S parametrom  $a_n$  izrazimo razmerje med vzbujevalno frekvenco in nelinearno frekvenco periodičnega nihanja sistema  $\omega$  in s tem razširimo obseg raziskav iz primarnih, super-

harmoničnih in subharmoničnih še na kombinacijske resonance. Med upogibnimi nihanji nas v tem članku zanimajo periodična nihanja, pri katerih zadostuje ena sama časovna skala [4]:

$$\tau = \eta \omega t, \quad (3)$$

kjer je  $\eta$  subharmonski faktor, ki poleg osnovnih in superharmoničnih dopušča obravnavo tudi subharmoničnih resonanc. Z uvedbo časovne skale  $\tau$  preide enačba (1) na obliko:

$$\eta^2 \omega^2 \frac{d^2 u_n}{d\tau^2} + \varepsilon \eta \tilde{\omega}_n \frac{du_n}{d\tau} + \omega_{L_n}^2 u_n - \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{I}_{mnpq} u_m u_p u_q = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{nk} \cos(a_n \tau / \eta) \quad n=1,2,\dots,N \quad (4)$$

## 2.1 Modificirana Lindstedt-Poincarejeva metoda

Bistveni korak v ML-PM je razvoj nelinearne frekvence nihanja  $\omega$  v potenčno vrsto:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k, \quad (5)$$

kjer vsak posamezni člen  $\varepsilon^k \omega_k$  zamenjamo s členom:

$$\varepsilon^k \omega_k = \alpha^k \delta_k \omega_0^2 / (1 - \alpha \operatorname{sgn} \alpha) \quad (6)$$

ter vrsto (5) nadomestimo s potenčno vrsto parametra  $\alpha$ :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \delta_k \omega_0^2 / (1 - \alpha \operatorname{sgn} \alpha). \quad (7)$$

Če izberemo  $\delta_1 = 1$ , se stari parameter  $\varepsilon$  izraža z novim parametrom  $\alpha$  v obliki:

$$\varepsilon = \alpha \omega_0^2 / \omega_1 (1 - \alpha \operatorname{sgn} \alpha). \quad (8)$$

Ob predpostavki, da je  $\varepsilon$  pozitivno število, sledi, da sta  $\omega_1$  in  $\alpha$  vedno istega znaka:

$$\operatorname{sgn} \omega_1 = \operatorname{sgn} \alpha \quad (9)$$

in perturbacijski parameter  $\alpha$  izrazimo s parametrom  $\varepsilon$  v obliki:

$$\alpha = \varepsilon \omega_1 / \left( \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 \operatorname{sgn} \omega_1 \right). \quad (10)$$

Enačba (10) kaže, da je absolutna vrednost parametra  $\alpha$  pri vsakem pozitivnem  $\varepsilon$  manjša od enote,  $|\alpha| < 1$ . V obliki potenčne vrste novega parametra  $\alpha$  iščemo rešitev enačbe (4):

$$u_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k u_{nk}, \quad (11)$$

in z njim nadomestimo tudi vzbujanje:

$$p_n = p_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{nk} \alpha^k \delta_k \omega_0^2 / \omega_k (1 - \alpha \operatorname{sgn} \alpha). \quad (12)$$

Ker so linearne frekvence nedušenega prostega nihanja  $\omega_{L_n}$  približno v celoštevilčnem razmerju  $\lambda_n / \lambda_i$ , kjer je  $\lambda_i$  celo število, ki ustreza eni od lastnih frekvenc  $\omega_{L_n}$ ,  $\lambda_n$  pa celo število, ki ustreza lastni frekvenci resonance, ki jo proučujemo, lahko linearne frekvence  $\omega_{L_n}$  izrazimo v odvisnosti od frekvence  $\omega_0$  s pomočjo razglasitev  $\sigma_n$ :

$$\omega_{L_n}^2 = \omega_0^2 \left[ (\lambda_n / \lambda_i)^2 + \alpha \sigma_n / \omega_1 (1 - \alpha \operatorname{sgn} \alpha) \right]. \quad (13)$$

Z izenačevanjem členov ob rastočih potencah parametra  $\alpha$  generiramo zaporedje enačb:

$$\alpha^0: \quad \eta^2 \frac{d^2 u_{n0}}{d\tau^2} + (\lambda_n / \lambda_i)^2 u_{n0} = \frac{p_{n0}}{\omega_0^2} \cos(a_n \tau / \eta), \quad (14)$$

$$\alpha^1: \quad \eta^2 \frac{d^2 u_{n1}}{d\tau^2} + (\lambda_n / \lambda_i)^2 u_{n1} = (p_{n1} / \omega_1 - p_{n0} \operatorname{sgn} \alpha / \omega_0^2) \cos(a_n \tau / \eta) + \eta^2 (\operatorname{sgn} \alpha - 1) \frac{d^2 u_{n0}}{d\tau^2} - \eta \tilde{c}_n \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{du_{n0}}{d\tau} + \left[ \operatorname{sgn} \alpha (\lambda_n / \lambda_i)^2 - \sigma_n / \omega_1 \right] u_{n0} + \frac{1}{\omega_1} \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{F}_{nmpq} u_{m0} u_{p0} u_{q0}, \quad (15)$$

$$\alpha^2: \quad \eta^2 \frac{d^2 u_{n2}}{d\tau^2} + (\lambda_n / \lambda_i)^2 u_{n2} = \frac{p_{n2} \delta_2}{\omega_2} \cos(a_n \tau / \eta) + \eta^2 (\operatorname{sgn} \alpha - 1) \frac{d^2 u_{n1}}{d\tau^2} - \eta^2 \delta_2 \frac{d^2 u_{n0}}{d\tau^2} - \eta \tilde{c}_n \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{du_{n1}}{d\tau} - \frac{1}{2} \eta \frac{\omega_0}{\omega_1} \tilde{c}_n \frac{du_{n0}}{d\tau} + \left[ \operatorname{sgn} \alpha (\lambda_n / \lambda_i)^2 - \frac{\sigma_n}{\omega_1} \right] u_{n1} + \frac{1}{\omega_1} \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \beta_{nmpq} u_{m0} u_{p0} u_{q1}, \quad (16)$$

z upoštevanjem lastnosti koeficientov:

$$\beta_{nmpq} = \tilde{F}_{nmpq} + \tilde{F}_{nmqp} + \tilde{F}_{npmq} - \quad (17)$$

Splošno rešitev nič-tega reda, oziroma rešitev enačbe (13) dobimo v obliki:

$$u_{n0} = A_{n0} \cos[(\lambda_n / \eta \lambda_i) \tau - \Phi_{n0}] + F_{n0} \cos(a_n \tau / \eta), \quad (18)$$

kjer je  $F_{n0} \cos(a_n \tau / \eta)$  neka partikularna rešitev in:

$$F_{n0} = p_{n0} \lambda_i^2 / \omega_0^2 (\lambda_n^2 - a_n^2 \lambda_i^2). \quad (19)$$

Rešitev (18) je generativna rešitev za aproksimacije višjega reda. Z vstavljanjem te rešitve in pripadajočega odvoda v enačbo (15) ter odstranitvijo sekularnih členov dobimo aproksimacijo prvega reda. Ko je rešitev dobljena, postopek ponovimo pri enačbi (16) in z odstranitvijo sekularnih členov te enačbe tvorimo aproksimacijo drugega reda. V podrobnosti se tu ne moremo spuščati, vendar smo postopek odstranitve sekularnih členov opisali že v [5]. Z enačbami (14-16) in enačbo (11) lahko generiramo rešitev, ki vsebuje največ tri člene potenčne vrste. Enačbe (14-16) kažejo, da postajajo aproksimacije tem bolj obsežne in nepregledne, čim višjemu redu pripadajo. Zato je izredno pomembno, da potenčna vrsta (11) naglo konvergira. V praksi presojamo, ali rešitev konvergira pri aproksimaciji drugega reda. Če konvergira, postopek ustavimo. V nasprotnem primeru moramo uporabiti višjeredne aproksimacije, za kar se pa le redko odločimo.

## 2.2 Metoda koračnega harmonskega ravnovesja

Kot je bilo že omenjeno, lahko metodo koračnega harmonskega ravnovesja uporabimo pri poljubno velikih nelinearnostih in zato v metodi ne uporabljamo perturbacijskega parametra [1]. Neposredna primerjava med ML-PM in MKHR je s tem precej otežena. Da bi se težavi izognili, smo v tem članku formulacijo MKHR priredili tako, da smo uvedli parameter  $\varepsilon$ , ki je tako kot v ML-PM lahko poljubno velik. Izhodiščne enačbe so s tem spet enačbe upogibnih nihanj nosilca (1-4), pri katerih predpostavimo neko periodično začetno rešitev ali izberemo nek začetni približek ter z dodajanjem prirastkov:

$$u_n^{nov} = u_n + \Delta u_n, \quad \omega^{nov} = \omega + \Delta\omega, \quad p_{nk}^{nov} = p_{nk} + \Delta p_{nk}, \quad (n=1,2,\dots,N) \quad (20)$$

iščemo sosednjo (novo) periodično rešitev. Uvrstitev prirastkov (20) v enačbo (4) in opustitev vseh členov, ki so v prirastkih nelinearni, privede na sistem linearnih koračnih diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \eta^2 \omega^2 \frac{d^2 \Delta u_n}{d\tau^2} + \varepsilon \eta \omega \tilde{\omega}_n \frac{d \Delta u_n}{d\tau} + \omega_{L_n}^2 \Delta u_n - \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (\tilde{I}_{nmpq} + \tilde{I}_{npmq} + \tilde{I}_{nqmp}) u_m u_p \Delta u_q = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{nk} \cos(a_n \tau / \eta) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Delta p_{nk} \cos(a_n \tau / \eta) - \eta^2 \omega^2 \frac{d^2 u_n}{d\tau^2} - \varepsilon \eta \omega \tilde{\omega}_n \frac{d u_n}{d\tau} - \omega_{L_n}^2 u_n + \\ \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{I}_{nmpq} u_m u_p u_q - \Delta\omega \left( 2\eta^2 \omega \frac{d^2 u_n}{d\tau^2} \right), \quad n=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (21)$$

Periodično rešitev enačbe (21) predstavimo v obliki okrnjene Fourierjeve vrste:

$$u_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_n, \quad \Delta u_n = \mathbf{T} \cdot \Delta \mathbf{a}_n, \quad (22)$$

kjer je  $\mathbf{T} 1 \times N_h$  matrika harmoničnih funkcij,  $N_h$  število kosinusnih in sinusnih elementov matrike  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{a}$  in  $\Delta \mathbf{a}$  pa sta  $N_h$  razsežna vektorja Fourierjevih koeficientov in pripadajočih prirastkov Fourierjevih koeficientov. Z Galerkinovim postopkom [1] enačbo (21) prevedemo na sistem linearnih algebrskih enačb za neznane vektorje prirastkov Fourierjevih koeficientov:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n \cdot \Delta \mathbf{a}_n - \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (\tilde{I}_{nmpq} + \tilde{I}_{npmq} + \tilde{I}_{nqmp}) \mathbf{H}_{mp} \cdot \Delta \mathbf{a}_q = \\ \mathbf{P}_n + \Delta \mathbf{P}_n - \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{a}_n + \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{I}_{nmpq} \mathbf{H}_{mp} \cdot \mathbf{a}_q - \Delta\omega \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_n \end{aligned}, \quad (23)$$

kjer je:

$$\mathbf{H}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \cdot \left( \eta^2 \omega^2 \ddot{\mathbf{T}} + \varepsilon \eta \tilde{\omega}_n \omega \dot{\mathbf{T}} + \omega_{L_n}^2 \mathbf{T} \right) d\tau, \quad \mathbf{H}_{mp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_m^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_p \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\tau, \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_{nk} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \cos(a_n \tau / \eta) d\tau, \quad \Delta \mathbf{P}_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Delta p_{nk} \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \cos(a_n \tau / \eta) d\tau, \quad (25)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\pi} \eta^2 \omega \int_0^{2\pi} \mathbf{T}^T \cdot \ddot{\mathbf{d}} d\tau \quad (26)$$

S pomočjo vektorjev ostankov:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{a}_n + \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{\Gamma}_{nmpq} \mathbf{H}_{mp} \cdot \mathbf{a}_q, \quad (n=1,2,\dots,N) \quad (27)$$

in združevanjem matrik  $\mathbf{H}_n$ ,  $\mathbf{H}_{mp}$  v tangentno matriko  $\mathbf{H}$ , vektorjev ostankov  $\mathbf{R}_n$  v skupni vektor ostankov  $\mathbf{R}$ , vektorjev  $\Delta\mathbf{P}_n$  v skupni vektor  $\Delta\mathbf{P}$  in podobnim združevanjem vektorjev  $\mathbf{a}_n$ ,  $\Delta\mathbf{a}_n$  v skupni vektorja  $\mathbf{a}$ ,  $\Delta\mathbf{a}$  tvorimo skupno matrično enačbo:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{a} = \mathbf{R} + \Delta\mathbf{P} - \Delta\omega \sum_{i=1}^N \text{diag}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}. \quad (28)$$

Enačbo (28) rešujemo iterativno z Newton-Raphsonovim postopkom. Na vsakem koraku iterativnega postopka izračunamo nove vrednosti:

$$\mathbf{a}^{nov} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{a} \quad (29)$$

skupnega vektorja Fourierjevih koeficientov pri dani vrednosti frekvence  $\omega$  (v tem primeru je  $\Delta\omega=0$ ) in postopek končamo, ko postane norma vektorja  $\mathbf{R}$  dovolj majhna. Zatem povečamo izbrano frekvenco  $\omega$  za predpisani  $\Delta\omega$  in izračun ponovimo pri novi frekvenci. Postopek se imenuje frekvenčna augmentacija in je osnova za konstrukcijo resonančnih krivulj. Vendar se na splošno v resonančnih krivuljah pojavijo bifurkacije v obliki obračalnih točk, možni pa so tudi prehodi k aperiodičnemu ali celo kaotičnemu nihanju, kjer postopek frekvenčne augmentacije odpove in ga moramo opremiti še z močnejšim orožjem, s takoimenovano metodo ločne dolžine [1]. Pri konstrukciji resonančnih krivulj kombinacijske resonance frekvenčna augmentacija običajno ni najprimernejša metoda. Razlogov za to je več, pri čemer najpogosteje ne poznamo primerne začetne rešitve pri izbrani frekvenci, zaradi česar Newton-Raphsonov postopek ne konvergira ali konvergira zelo počasi, lahko pa obstajajo tudi frekvenčna področja, v katerih ni nobenih realnih rešitev in frekvenčne augmentacije ne moremo uporabiti. Namesto frekvenčne augmentacije zato raje uporabimo amplitudno augmentacijo, pri kateri med Newton-Raphsonovim postopkom ne spreminjamo enega od Fourierjevih koeficientov (pripadajoči prirastek Fourierjevih koeficientov je enak nič,  $\Delta a_{i,j} = 0$ , ( $i=1,2,\dots,N, j=1,2,\dots,N_h$ )), vendar pa moramo med neznanke vključiti neznan prirastek nelinearne frekvence  $\Delta\omega$ . Prirastek  $\Delta\omega$  vključimo na mestu prvotnega koeficienta  $\Delta a_{i,j}$ , modificiramo pa tudi tangentno matriko  $\mathbf{H}$  tako, da  $(i \times N_h + j)$ -ti stolpec zamenjamo z vektorjem  $\sum_{i=1}^N \text{diag}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$ . Ko dobimo konvergentno rešitev, izbrani Fourierjev koeficient  $a_{i,j}$  povečamo za izbrani prirastek  $\Delta a_{i,j}$  in postopek ponovimo. Tudi pri uporabi amplitudne augmentacije se uporabi metode ločne dolžine v bifurkacijskih točkah ne moremo odpovedati.

### 3 Kombinacijska resonanca nosilca s togo-členkastim vpetjem

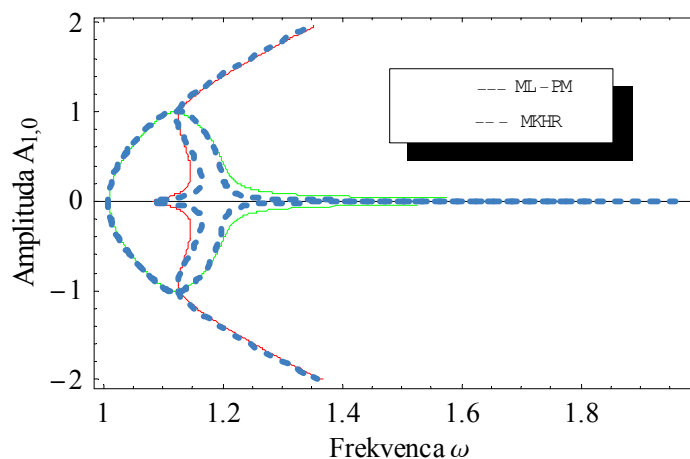
Oglejmo si uporabo ML-PM in MKHR pri kombinacijski resonanci nosilca s togo-členkastim vpetjem. Robni pogoji nosilca so podani v [4]. V analizi se omejimo na prvi dve modalni obliki upogibnih nihanj,  $N=2$  in izberemo vrednost parametra  $\varepsilon=1$ . Kombinacijsko resonanco za  $\eta=1$  vzbujamo s kosinusno vzbujevalno silo z amplitudama  $p_{10} = p_{20} = 0.5$  in frekvenco  $2\omega$ , to je s koeficientoma  $a_1 = a_2 = 2$ . Na osnovi enačb [4]:

$$\phi_m(x) = A_m \left[ (\cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x)(\sinh \lambda_m - s \sin \lambda_m) - (s \sinh \lambda_m x - s \sin \lambda_m x)(\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m) \right],$$

$$\tilde{I}_{nmpq} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\phi_m}{dx} \frac{d\phi_n}{dx} dx \int_0^1 \frac{d\phi_p}{dx} \frac{d\phi_q}{dx} dx, \quad (30)$$

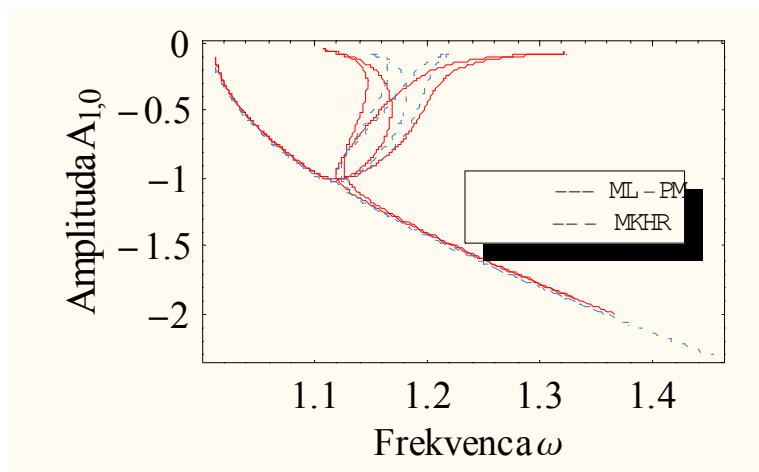
dobimo vrednosti koeficientov  $\tilde{I}_{1111} = -0.278769, \dots, \tilde{I}_{1122} = \tilde{I}_{2211} = -1.03871, \dots, \tilde{I}_{2222} = -3.8703$ ,

ki kažejo, da so posamezne kubične nelinearnosti razmeroma velike. Linearni frekvenci prvih dveh nihajnih oblik sta v razmerju 1:3.2406 zaradi česar imamo hkrati s kombinacijsko resonanco še notranjo resonanco nosilca [6]. Kombinacijska resonanca za amplitudo  $A_{10}$  v enačbi (16) je prikazana na slikah 1 in 2. Slika 1 prikazuje potek amplitude  $A_{10}$  v odvisnosti od nelinearne frekvence  $\omega$  pri nedušenem nosilcu,  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ . Na Sliki 2 pa je prikazana kombinacijska resonanca za dušeni nosilec z viskoznim dušenjem  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0.00001$ . Potek kombinacijske resonance na sliki 2 je zaradi simetrije prikazan samo za negativne vrednosti amplitud  $A_{10}$ . Pri konstrukciji kombinacijske resonance v ML-PM pričnemo z vrednostjo amplitude  $A_{10} = -2$ , nato pa amplitude povečujemo s korakom  $\Delta A_{10} = 0.01$ . Oba resonančna poteka kažeta na celotnem območju razmeroma dobro ujemanje med ML-PM in MKHR, v posameznih področjih amplitud pa celo zelo dobro ujemanje.



Slika 1. : Kombinacijska resonanca nedušenega nosilca.





Slika 2. : Kombinacijska resonanca dušenega nosilca s koeficientoma dušenja  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0.00001$ .

#### 4 Zaključek

V članku je predstavljena uporaba ML-PM in MKHR pri kombinacijski resonanci nosilca s togo-členkastim vpetjem. ML-PM dokazuje uporabnost pri velikih kubičnih nelinearnostih nosilca, obenem pa je metoda razširjena tako, da lahko upošteva tudi dušenje. MKHR lahko uporabljamo pri poljubno visokih nelinearnostih in poljubno velikem dušenju, na razpolago pa moramo imeti dober začetni približek. Obe metodi kažeta dobro ujemanje rezultatov.

#### Literatura

- [1] R. Pušenjak, M. Oblak, *Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities*, Int. j. numer. methods eng., Vol. 59, No. 2. , 255--292, 2004.
- [2] M. Oblak, R. Pušenjak, *Lindstedt-Poincarejeva metoda za dinamične sisteme z velikimi nelinearnostmi*. Kuhljevi dnevi '04, Otočec, 30. sept.-1.okt. 2004. Zbornik del. Ljubljana: SDM, 2004, 197—204.
- [3] Y.K. Cheung, S.H. Chen and S.L. Lau, *A modified Lindstedt-Poincare method for certain strongly non-linear oscillators*, Int.J. for Non-linear Mech., **26**, 367—378,1991.
- [4] R. Pušenjak, M. Oblak, *Lindstedt-Poincarejeva metoda z več časovnimi skalami za dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi*. Kuhljevi dnevi '04, Otočec, 30. sept.-1.okt. 2004. Zbornik del. Ljubljana: SDM, 2004, 213—220.
- [5] R. Pušenjak, *Kombinacijske resonance v sistemih s kvadratičnimi nelinearnostmi z razširjeno Lindstedt-Poincarejevo metodo*, Kuhljevi dnevi '01, Portorož, 27-28. sept. 2001. Zbornik del. Ljubljana: SDM, 2001, 129--136.
- [6] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Willey-Interscience, New York, 1979.



## *Numerična simulacija ploščatega prenosnika toplote s kovinsko peno*

Matjaž Ramšak in Matjaž Hriberšek<sup>1</sup>

### *Numerical simulation of plate heat exchanger with metal foam*

**Povzetek.** V prispevku prikazujemo numerično simulacijo toplotno hidravličnih razmer v ploščatem prenosniku toplote z ali brez kovinske pene. Uporabili smo programski paket za računsko dinamiko tekočin CFX 5.7.1. Validacija izračunanih rezultatov je narejena z empiričnimi enačbami za tlačni padec in prestop toplote v primeru brez kovinske pene.

**Abstract.** The article deals with numerical simulation of thermo-hydraulic conditions in the parallel plate heat exchanger with or without metal foam. The computational fluid dynamics program CFX 5.7.1 was used. The validation of computed results was performed using empirical equations for pressure drop and heat transfer coefficient in the case without metal foam.

#### 1 Uvod

Uporaba kovinskih pen oziroma polnil za kompaktno toplotne prenosnike je zelo perspektivna in tema mnogih novejših člankov, npr. Boomsma et al. (2003), Phanikumar in Mahajan (2002), Hriberšek (2001). Avtor Boomsma podaja maksimalne izmerjene toplotne tokove med grelnikom in kovinsko peno hlajeno z vodo  $690\text{kW}/\text{m}^2$ , pri čemer je dimenzija pene le  $40*40*2$  mm. Področje uporabe je zelo široko, za nas je posebej zanimiva uporaba v kompaktnih prenosnikih toplote.

V programskem paketu CFX5, ki je bil uporabljen za rešitev razširjenega sistema Navier-Stokesovih enačb, opišemo dodatne hidravlične upore v porozni snovi kot izotropen ponor  $S_i$  v gibalni enačbi  $i$ -te smeri,

$$S_i = -\frac{\mu}{K_{PER}}U_i - K_{LOSS}\frac{\rho}{2}|\vec{U}|U_i. \quad (1)$$

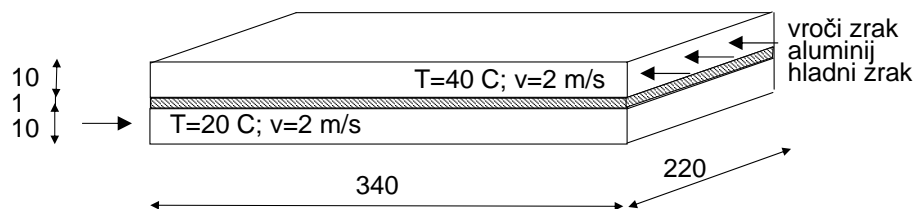
Pri tem je  $\mu$  dinamična viskoznost in  $\rho$  gostota tekočine,  $K_{PER}$  permeabilnost oz. propustnost,  $K_{LOSS}$  koeficient upora in  $U_i$  komponente hitrosti. V enačbi prenosa toplote prisotnost

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

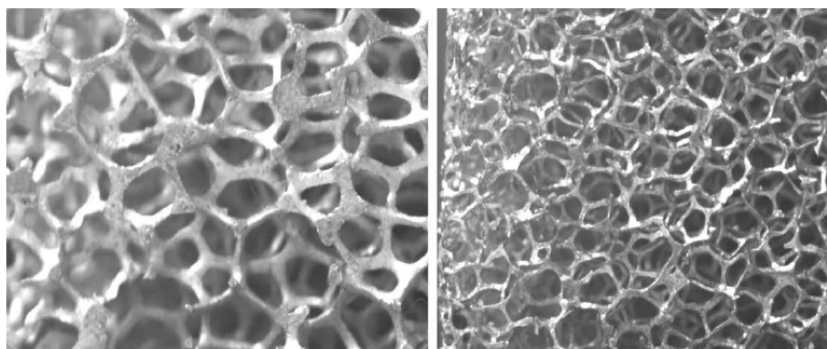
kovinske pene v poroznem kanalu opišemo z efektivno prevodnostjo  $\lambda_{eff}$ , ki jo v najenos-tavnejšem primeru lahko izračunamo z uporabo mešalnega pravila in definicije poroznosti, ali izmerimo. V našem primeru uporabimo izmerjene vrednosti, ki so kar 2 do 4 krat manjše od izračunane vrednosti z mešalnim pravilom. Vpliv naravne konvekcije smo zanemarili.

### 1.1 Predstavitev problema



Slika 1 : Geometrija problema in robni pogoji.

Obravnavamo ploščati prenosnik toplote s protismernim tokom. Geometrijo problema z robni-mi pogoji smo prikazali na sliki 3. Obravnavali bomo 3 variante: (a) brez polnila (kovinske pene), (b) polnilo samo na strani hladnega zraka in (c) polnilo na obeh straneh. Uporabili bomo dve varianti aluminijaste pene s komercialnimi oznakami 5 PPI in 40 PPI, slika 2.



Slika 2 : Redka aluminijasta pena 5 PPI (levo) in gostejša 40 PPI (desno), kjer številka pred PPI pove gostoto praznin. Slike iz Phanikumar (2002).

Termo-hidravlične lastnosti pene smo povzeli po Phanikumar (2002) in jih prikazali v tabeli 1.

**Tabela 1** : Termo-hidravlične lastnosti aluminijaste pene 5 PPI in 40 PPI, Phanikumar (2002).

Oznake:  $d$ - premer vlaken,  $p$ - premer praznin.

	poroznost	$d$ [mm]	$p$ [mm]	$\lambda_{eff}$ [W/mK]	$K_{PER}$ [m <sup>2</sup> ]	$K_{LOSS}$ [m <sup>2</sup> ]
5 PPI	0.90	.56	4.2	7.7	2.0e-7	200
40 PPI	0.96	.21	1.7	3.2	6.0e-8	370

## 2 Validacija numeričnega modela za izvedbo brez kovinske pene

Pred izračunom prenosa toplote v sistemu s kovinsko peno smo preverili natančnost numeričnega modela za primer prenosa toplote v ravnem kanalu, za katerega so bile izvedene številne empirične korelacije.

## 2.1 Empirična rešitev

Tok zraka med ploščama lahko zaradi končne širine obravnamo na tri načine:

- (1) kot tok v cevi z ustreznim hidravličnim premerom,
- (2) kot ravninski tok v kanalu med dvema ploščama in
- (3) kot razvoj mejne plasti ob ravni plošči.

Ker sta kanala relativno kratka, imamo opravka z razvijajoče mejno plastjo, kar moramo upoštevati pri izbiri ustreznih empiričnih korelacij.

*Laminarni ali turbulentni tok?* Odgovor na to vprašanje v tem primeru ni tako enostaven. Povprečna hitrost zraka na vstopu je  $2\text{ m/s}$ , kar nam daje v primeru (1)  $Re_{d_h} = 2468$ , torej ravno čez mejo kritičnega števila  $Re_{kr} = 2300$ . Odgovor na zastavljeno vprašanje na tem mestu je: turbulentni tok oziroma prehodno območje. V tem primeru smo uporabili snovske lastnosti zraka pri  $25^\circ\text{C}$ , kar ustreza razmeram v hladnem kanalu. Če uporabimo snovske lastnosti zraka pri  $40^\circ\text{C}$ , je  $Re_{d_h} = 2174$ , torej laminarni tok. Velja omeniti, da se pri večini kapljevin (voda, olje) kinematična viskoznost z višanjem temperature manjša, kar pomeni da 'lažje' tečejo. Pri večini plinov (zrak, vodik), pa se viskoznost zraka z višanjem temperature večja, kar pomeni da 'težje' tečejo. Če obravnavamo tok med ploščama z (2), potem je  $Re_{H/2} = 645$  kar je precej večje od  $Re_{kr} = 450$ , torej imamo turbulenten tok. Če pa tok analiziramo s (3), dobimo  $Re_L = 4 * 10^4$ , kar je precej manj kot  $Re_{kr} = 3 * 10^5$ , torej imamo laminaren tok. Razprava je bolj teoretične narave, saj bi pri izvedbi eksperimenta težko dosegli laminaren tok na vstopu. Na podlagi povedanega, je verjetno pravilen odgovor: *turbulenten*. Kakorkoli, empirično analizo smo naredili ob predpostavki za laminarne in turbulentne tokovne razmere.

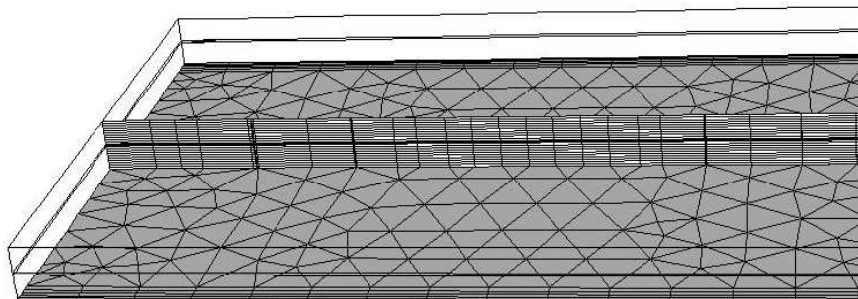
V nadaljevanju bomo navedli uporabljene empirične izraze. Začnimo s hidravlično analizo. Tlačne padce smo izračunali s pomočjo Colebrookove enačbe (Strojniški priročnik) za razviti tok v primeru (1). Vstopno območje smo zajeli z lokalnim koeficientom izgub  $\zeta = 0.50$  (Strojniški priročnik). Toplotno prestopnost v primeru (1) za laminarne tokovne razmere smo izračunali z enačbo (7.220) v Alujevič in Škerget 1990 (prav tako vse ostale enačbe) z upoštevanjem vstopnega območja, medtem ko je Nusseltovo število za razviti tok konstantno in znaša za pričujoči pravokotni kanal približno 8. Enako smo postopali v primeru (2). Turbulentno prestopnost v vstopnem območju smo izračunali z en. (7.232), medtem ko smo v razvitem območju uporabili Dittus-Boelterjevo enačbo (7.226). V primeru (3) za laminarni tok velja en. (7.127) ter za turbulentni tok en (7.187). Rezultati izračunov so zbrani v tabeli 5.

## 2.2 Diskretizacija računskega območja

Pri tvorbi računske mreže se pogosto pojavijo problemi pri diskretiziranju zelo tankih območij. Zaradi zelo tanke pločevine med kanaloma, je splošno mreženje v CFX5 s tetraedri odpovedalo zaradi problema premajhnih kotov. Kot primerno se je izkazalo mreženje s funkcijo '2D extruded', ki omogoča preslikavo ravninske mreže, rezultat pa so tristrane in štiristrane prizme.

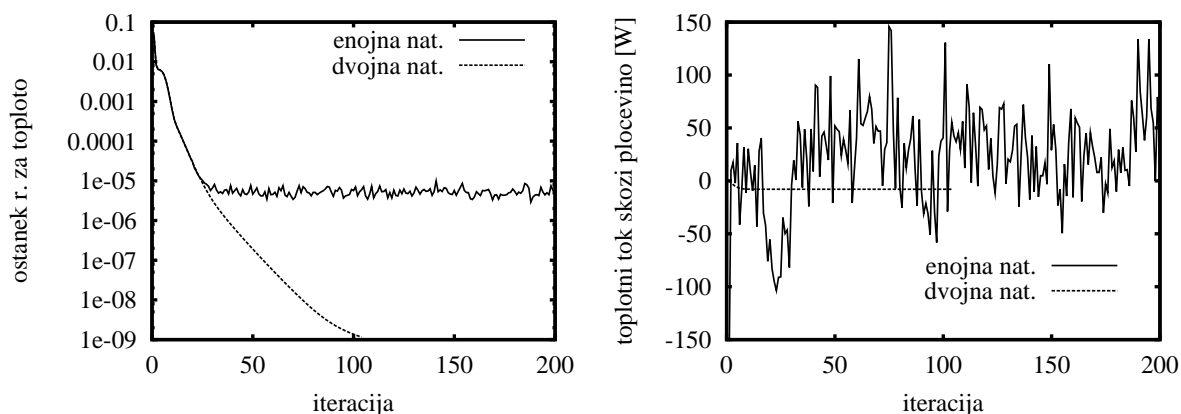
## 2.3 Konvergenca numerične sheme

Sprva primer (kakor po pravilu) ni konvergirala. Poskušali smo različne vrednosti podrelaksacij, časovnih korakov, 'upwindinga' za stabilizacijo konvektivnega člena, gostejše mreže, vendar brez uspeha. Ključnega pomena je v tem primeru računanje z dvojno natančnostjo, slika 4.



**Slika 3** : Naredkejša mreža z 11.000 vozlišči. Tristrane in štiristrane prizme so uniformne po višini, reazen pri mreži uporabljeni pri SST turbulentnem modelu.

Značilnost kon/divergence z enojno natančnostjo je ustalitev ostanka rešitve pri približno  $10^{-5}$ . Očitni vzrok nekonvergenca je silovito nihanje vrednosti toplotnega toka skozi pločevino, ki je velikostnega razreda  $\pm 100W$ , medtem ko se le ta hitro ustali pri vrednosti približno  $-10W$  pri dvojni natančnosti. Omenjeni vzorec se je ponovil pri vseh fizikalnih modelih.



**Slika 4** : Konvergenca toplotnega toka v pločevini(levo) in vrednost toplotnega toka skozi pločevino (desno) v enojni in dvojni natančnosti računanja.

#### 2.4 Rezultati: občutljivost na gostoto mreže

Občutljivost rezultatov na gostoto mreže smo prikazali v tabeli 2, kjer je za laminarni tok razvidna konvergenca vseh rezultatov k določeni vrednosti. Že pri mreži št. 2 se toplotni rezultati z višjo gosto mreže spremenijo manj kot 1 %, tlačni padec pa manj kot 3 %. Pri mreži št. 3 se tlačni padec spremeni samo še za 0.7 %. Glede na porabo računskega časa smo ugotovili, da je mreža 3 z 166.000 vozlišči v tem primeru dovolj gosta.

**Tabela 2** : Nodalizacijska analiza za primer laminarnega toka

mreža, št. vozlišč	11.000	57.000	166.000	267.000
top. tok skozi pločevino [W]	9.21	9.27	9.27	9.27
sprememba temp. zraka [ $^{\circ}C$ ]	2.48	2.55	2.55	2.55
tlačni padec [Pa]	2.75	2.99	3.06	3.08

Z enakimi mrežami smo izračune ponovili tudi s  $k - \epsilon$  modelom in zidnimi funkcijami, tabela 3 in SST turbulentnim modelom, tabela 4.

**Tabela 3** : Nodalizacijska analiza za primer turbulentnega toka.  $k - \epsilon$  model z zidnimi funkcijami.

mreža, št. vozlišč	11.000	57.000	166.000	267.000
št. iteracij	156	535	915	1354
CPU [ur]	0.28	4.2	20	32.
CPU/iter [s]	6.5	28.	79	86
spomin[MB]	-	153	384	617
top. tok skozi pločevino [W]	8.38	7.79	7.56	7.46
sprememba temp. zraka [ $^{\circ}C$ ]	1.62	1.51	1.46	1.44
tlačni padec [Pa]	1.57	1.44	1.38	1.36

Ker so bile  $y^+$  vrednosti na prvem elementu ob steni nekoliko prevelike na redkejših mrežah, smo mrežo 3 spremenili, tako da smo zgostili elemente po višini ob bližini zidu, mreža 166.000\*, kjer je  $y^+$  le 0.77. Priporočene mejne vrednosti za največji  $y^+$  so v splošnem približno 1-4. Torej modificirana mreža 3 tako v tem pogledu kot tudi pri primerjavi občutljivosti rezultatov na gostoto mreže, ki je v primeru obeh uporabljenih turbulentnih modelov zelo podobna kot pri laminarnem toku, več kot ustreza.

**Tabela 4** : Nodalizacijska analiza za primer turbulentnega toka. SST model. Zadnja mreža \* je zgoščena v bližini zidov.

mreža, št. vozlišč	11.000	57.000	166.000	267.000	166.000*
top. tok skozi pločevino [W]	10.9	11.3	10.7	10.7	11.2
sprememba temp. zraka [ $^{\circ}C$ ]	2.16	2.36	2.32	2.33	2.56
tlačni padec [Pa]	2.07	2.43	2.51	2.60	3.01
$y^+$ vrednost na prvem el. ob zidu	10.0	5.3	3.5	2.6	0.77

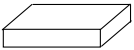
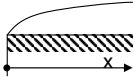
## 2.5 Rezultati: izbira fizikalnega modela

Rezultati toplotne prestopnosti vseh treh računskih modelov (laminarni=12, turb.  $k - \epsilon$ =10, turb. SST=15  $W/m^2K$ ) se ne razlikujejo dosti v absolutnem smislu, relativno pa kar 50 %, tabela 5. Izračunane vrednosti so nekoliko nizke v primerjavi z empiričnimi izrazi za vstopno območje.

Odlično ujemanje toplotne prestopnosti smo dobili med CFX-lam=12  $W/m^2K$  in konstantno vrednostjo (11  $W/m^2K$ ) za laminarni tok v ekvivalentnem kanalu z ustreznim hidravličnim premerom, poglavje 2.1, primer (1). Praktično enako toplotno prestopnost (15  $W/m^2K$ ) smo dobili tudi za turbulentni režim pretakanja; CFX-SST in Dittus-Boelterjevo korelacijo, ki sicer velja za razviti tok. V tem primeru se dobro ujemata tudi tlačna padca, CFX-SST=3.0 Pa in turbulentni (1)=3.2 Pa. Na podlagi slednjega, trdimo, da je najustreznejša simulacija turbulentna, izvedena s CFX-SST modelom, ki je najbližja rezultatom empirične analize turbulentnega toka v cevi z ustreznim hidravličnim premerom. Za ustreznejšo diskusijo bi morali imeti tudi rezultate meritev.

Primerjava računskega časa kaže izenačenost med posameznimi modeli. Presenetljivo pri tem je, da ima simulacija laminarnih tokovnih razmer 10 % večji čas od ostalih dveh turbulentnih, tabela 5.

Povsem razumljivo je, da so termo-hidravlični rezultati izračunani s  $k - \epsilon$  modelom najnižji v smislu intenzivnosti prenosa toplote, saj uporaba zidnih funkcij predpostavlja razvite tokovne razmere, kar je v našem primeru najslabši približek.

	L [mm]	Re	Re <sub>kr</sub>	$\alpha$ -lam. [W/m <sup>2</sup> K]	$\alpha$ -turb. [W/m <sup>2</sup> K]	dp-lam [Pa]	dp-turb [Pa]
	dh 19	2500 turb.	2300	vst. 53 raz. 11	vst. 19 raz. 15	vst. 2.3 raz. 1.1	vst. 3.2 raz. 2.0
	x 340	4*10 <sup>4</sup> lam.	3*10 <sup>5</sup>	raz. 10	raz. 13	---	---
	CPU <sub>[h]</sub>	Niter	CPU/it <sub>[s]</sub>				
CFX lam	23	2900	28	12		3.1	
CFX k-e	20	900	79	10		1.3	
CFX SST	20	1000	73	15		3.0	

**Slika 5** : Primerjava numeričnih rezultatov brez kovinske pene z empiričnimi rezultati. Oznake: *vst*-empirični rez. veljavni za vstopni del, in *raz*- za razviti tok, *dp*- tlačni padec,  $\alpha$ - prestopnost toplote

### 3 Izvedba s kovinsko peno

Uporaba kovinske pene v enem ali obeh kanali toplotnega prenosnika lahko pomembno izboljša toplotne delovne karakteristike, obenem pa zaradi večjega upora porozne snovi toku zraka tudi poveča tlačni padec. Težav pri izbiri fizikalnega modela v porozni snovi ni, saj je tok laminaren. To dejstvo potrjuje tudi Reynoldsovo število za porozno snov podano v Kaviany (1995) kot

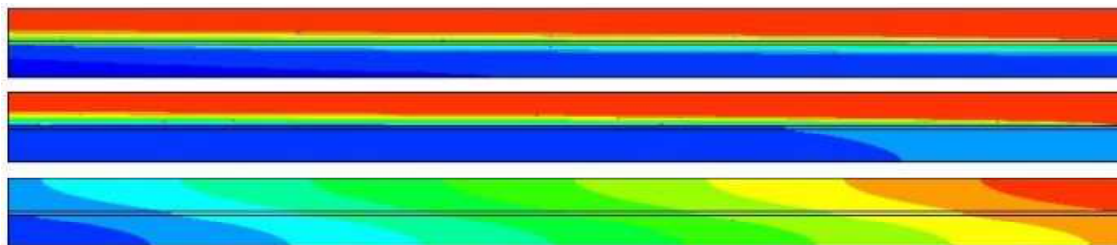
$$Re = \frac{v\sqrt{K}}{\nu},$$

kjer za karakteristično dolžino uporabimo kvadratni koren poroznosti  $K$ . To število znaša za redkejšo peno 5 PPI 58, za gostejšo 40 PPI pa le 32. Zaradi enostavnosti smo tudi v kanalu brez pene predpostavili laminaren tok. Na sliki 6 predstavljamo temperaturno polje po navpičnem prerezu prenosnika za vse tri variante.

Številčni rezultati so zbrani v naslednji tabeli 5.

Intenzivnost prenosa toplote v porozni snovi izrazimo z brezdimenzijskim Nusseltovim številom, ki ga definiramo kot Boomsma et.al. (2003)

$$Nu = \frac{Q}{A_{ploc}(T_{ploc} - T_{f,vstop})} \frac{d_h}{\lambda_f},$$



**Slika 6** : Potek temperaturnega polja v navpičnem prerezu prenosnika. Od vrha navzdol si sledijo: (a) varianta brez polnila, (b) polnilo je spodaj na strani hladnega zraka in (c) polnilo je v obeh zračnih kanalih.

kjer je  $Q$  toplotni tok,  $A_{con}$  površina pločevine,  $T_{ploc}$  povprečna temp. pločevine,  $T_{f,vstop}$  temperatura tekočine na vstopu v porozno snov,  $d_h$  hidravlični premer poroznega kanala in  $\lambda_f$  prevodnost tekočine v porozni snovi.

Tlačni padec v porozni snovi izrazimo z brezdimenzijskim Fanningovim koeficientom trenja  $f$

$$f = \frac{\Delta p}{4 \frac{L}{d_h} \frac{\rho v^2}{2}},$$

kjer je  $L$  dolžina kanala.

**Tabela 5** : Rezultati za vse tri variante polnjenja: (a) brez polnila, (b) polnilo na strani hladnega zraka in (c) polnilo na obeh straneh.

varianta	(a)	5 PPI		40 PPI	
		(b)	(c)	(b)	(c)
top. tok skozi pločevino [W]	9.27	16.5	93.5	16.4	88.3
povprečna temp. pločevine [ $^{\circ}$ C]	30.0	21.5	30.0	21.6	30.0
$Nu$ porozne snovi [-]	-	108	92	100	87
sprememba temp. vročega zraka [ $^{\circ}$ C]	2.55	3.1	17.9	3.1	16.8
sprememba temp. vročega zraka [ $^{\circ}$ C]	2.55	4.3	17.9	4.3	16.8
tlačni padec hladnega zraka [Pa]	3.06	231	231	513	513
tlačni padec vročega zraka [Pa]	3.06	3.06	231	3.06	513
Fanningov faktor trenja $f$ [-]	0.02*	1.37		3.04	

V skladu s pričakovanji se toplotni tok v pločevini znatno poveča z uporabo kovinske pene na obeh straneh (10 krat). Če kovinsko peno uporabimo samo na eni strani, se toplotni tok poveča skoraj dvakrat. V tem primeru je povprečna temperatura pločevine samo dobro stopinjo večja kot je temperatura hladnega zraka v kovinski peni. Poudariti moramo, da smo v simulaciji predpostavili idealni stik kovinske pene in pločevine. Za realnejšo sliko bi morali oceniti kontaktne upore. Povečanje termičnega izkoristka je pozitivna posledica, negativna je seveda približno 100 krat večji tlačni padec. Izračunana moč ventilatorja v tem primeru se poveča iz 0.01 W na 1 W pri 5 PPI in 2 W pri 40 PPI.

V nadaljevanju podajamo primerjavo rezultatov med kovinskima penama 5 PPI in 40 PPI. Da je tlačni upor gostejše pene 40 PPI večji je pričakovano. Ni pa povsem v skladu s pričakovanji,



da je pri gostejši peni malenkost manjša toplotna moč prenosnika pri obeh variantah (b) in (c). Rezultat postane logičen, če upoštevamo, da je izmerjena efektivna prevodnost redke pene kar dvakrat večja od goste pene, tabela 1. Verjetno je razlog v mnogo debelejših vlaknih pri redki peni in s tem večjimi pretočnimi preseki za toplotne tokove. Očitno nastopi pri tanjših vlaknih stanje analogno primeru previtkih reber, kjer podaljševanje reber ne povečuje toplotne moči, ker se temperatura reber približno izenači z okolišnim medijem. To hipotezo potrjuje tudi nekoliko nižja temperatura pločevine pri polnilu z debelejšimi vlakni.

#### 4 Zaključki

Prikazali smo numerično simulacijo termo-hidravličnih razmer v ploščatem prenosniku toplote z ali brez polnila iz aluminijaste pene s programskim paketom računalniške dinamike tekočin CFX 5.7.1.

Najpomembnejši zaključek je povezan s količino toplote, ki je prenešana skozi pločevino. Ta se poveča skoraj za dvakrat v primeru, kjer imamo polnilo samo na eni strani v primerjavi z referenčnim primerom brez polnila. Če uporabimo polnilo na obeh straneh, pa imamo kar desetkrat večji prenos toplote, pri čemer se tlačni padec poveča za velikostni razred 100. Zanimive rezultate smo dobili pri primerjavi obeh kovinskih pen, kjer se je redka pena izkazala za boljšo.

#### Literatura

- [1] Alujevič A. in Škerget L.: Prenos toplote, Univerza v Mariboru, 1990
- [2] Boomsma K, Poulikakos D. in Zwick F.: Metal foams as compact high performance heat exchangers. *Mechanics of materials* 35, 2003, 1161-1176
- [3] CFX 5.7.1, Ansys Europe
- [4] Hriberšek, M., Bašič, S., Škerget, L., Širok, B.: Numerical modeling of heat and fluid flow conditions of a laundry dryer condenser. PIERUCCI, S. (ed.), The Fifth Italian Conference on Chemical and Process Engineering, ICheaP-5, Florence, Italy, Proceedings. Milano: AIDIC, 2001, vol. 2, pp. 759-764.
- [5] Kaviany, M: Principles of heat transfer in porous media, sec. ed. Springer-Verlag, new York, 1995
- [6] Kraut B.: Strojniški priročnik
- [7] Phanikumar, M.S. in Mahajan R.L.: Non-Darcy natural convection in high porosity metal foams. *Int.J. of Heat and Mass T.* 45, 2002, 3781-3793



## *Nasproti hitrostno vrtinčni formulaciji simulacije velikih vrtincev z metodo robnih elementov*

Jure Ravnik,<sup>1</sup> Leopold Škerget<sup>2</sup> in Matjaž Hriberšek<sup>3</sup>

### *Towards Velocity-Vorticity Based Large Eddy Simulation with Boundary Element Method*

**Povzetek.** Članek opisuje izpeljavo hitrostno vrtinčne formulacije simulacije velikih vrtincev za opis turbulentnega toka tekočin na podlagi dveh teorij. Richardson-Kolmogorov koncept energijske kaskade in disipacije majhnih skal služi kot podlaga za prvo, medtem ko je Taylorejeva hipoteza o prenosu vrtinčnosti osnova za drugo. S pomočjo enstrofijskega podmrežnega modela smo raziskovali prehod v turbulentni režim toka pri pojavu naravne konvekcije v diferencialno greti kotanji z razmerjem stranic 1 : 4 pri Rayleighovem številu  $Ra = 10^9$ .

**Abstract.** The paper presents two alternative derivations of large eddy simulation in velocity vorticity formulation. The first is based on Richardson-Kolmogorov energy cascade and dissipation by the small scales theory and the other on Taylor's vorticity transfer hypothesis. Taylor's theory based LES vorticity transport equation is used along with the enstrophy based subgrid scale closure model to investigate the onset of turbulent fluid flow behavior in a differentially heated 1 : 4 enclosure at Rayleigh number value  $Ra = 10^9$ .

## 1 Uvod

V hitrostno vrtinčni formulaciji Navier-Stokes enačb opišemo tok tekočine s hitrostnim in vrtinčnim poljem. Povezujeta ju Poissonova enačba kinematike in difuzivno-konvektivna enačba prenosa vrtinčnosti. Rešitev enačbe kinematike z metodo robnih elementov (BEM) nam poda vrednost vrtinčnosti na robu in s tem Dirichletov problem za prenosno enačbo vrtinčnosti. Hitrostno vrtinčno formulacijo simulacije velikih vrtincev (LES) so raziskovali različni avtorji [13], [3] vsak s svojim načinom izračuna robnih vrtinčnosti. Mi predlagamo uporabo BEM

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>3</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

zaradi edinstvene možnosti za določanje robnih vrednosti na podlagi Biot-Savarovega zakona. Žal rešitve enačbe Poissonovega tipa z BEM zahteva velike matrike integralov, kar zahteva veliko računalniškega spomina in omejuje največje število vozlišč. Zato rešujemo z BEM samo enačbo kinematike, LES prenosno enačbo za vrtinčnost pa z metodo končnih elementov (FEM). V predstavljenem delu bomo izpeljali LES prenosno enačbo za vrtinčnost na podlagi dveh priznanih teorij - Taylorjeva teorija prenosa vrtinčnosti in Richardson-Kolmogorova energijska kaskada in disipacija na mali skali. Kot prvi testni primer, prikazujemo rešitev pojava naravne konvekcije v 1 : 4 kotanji.

## 2 Hitrostno vrtinčna formulacija simulacije velikih vrtincev

Predpostavimo nestisljivo viskozno newtonsko tekočino s konstantnimi snovskimi lastnostmi. V Boussinesqjevem približku se zakoni ohranitve mase, gibalne količine in energije v brezdimenzijski obliki zapišejo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -PrRa(T - 1)\vec{g} - \frac{1}{Eu}\vec{\nabla}p + Pr\nabla^2\vec{v}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \nabla^2 T, \quad (3)$$

kjer smo vpeljali kriterjalna števila: Prandtlovo  $Pr$ , Rayleighovo  $Ra$  in Eulerjevo  $Eu$ . Zaradi omejenih računalniških zmogljivosti v inženirski praksi dandanes še ni mogoče simulirati vseh skal turbulentnega gibanja z reševanjem sistema enačb (1)-(3). Simulacija velikih vrtincev (LES) je alternativni pristop, kjer numerično simuliramo velike skale turbulentnega gibanja, vpliv malih pa modeliramo. Kolmogorov [5] je za izotropno turbulenco pri velikih  $Re$  ugotovil, da je vpliv majhnih skal izključno energijski. Male skale so odgovorne za disipacijo kinetične energije, ki prihaja iz razpada velikih vrtincev, v notranjo energijo tekočine. S krajevnim filtriranjem tokovnih polj majhne skale odstranimo iz toka. Na drugi strani uporabimo računsko mrežo ravno tako gosto, da z njo lahko opišemo vse fizikalne lastnosti filtriranega tokovnega polja. Pokazano je bilo [10], da mora biti velikost elementa mreže istega reda velikosti kot širina filtra. Za oster spektralni filter velja, da sta širina filtra in velikost celice v mreži enaka.

Uveljavljen LES pristop [5],[10] je sledeč: enačbe ohranitve krajevno filtriramo in jih zapišemo v obliki, ki ima enake člene kot nefiltrirane enačbe z dodatnim členom, ki opisuje razliko med enačbama - to je disipacijo kinetične energije. Zaradi poenostavitve pisave, so od tu dalje vse količine krajevno filtrirane. Filtrirane enačbe ohranitve (1)-(3) zapišemo takole

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -PrRa(T - 1)\vec{g} - \frac{1}{Eu}\vec{\nabla}p + Pr\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}^v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = \nabla^2 T - \vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}^h, \quad (6)$$

kjer je rezidualni napetostni tenzor  $\underline{\tau}^v = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j$  razlika med filtriranim produktom hitrostnih komponent in produktom filtriranih hitrostnih komponent. Tu smo operacijo filtriranja poudarili

s črto zgoraj. Podobno velja za rezidualni temperaturni vektor  $\vec{\tau}^h = \overline{T\vec{v}} - \overline{T}\vec{v}$ . Tudi ta je razlika med filtriranim produktom hitrostnega in temperaturnega polja in produktom filtriranih polj. Hitrostno tlačna formulacija LES (4)-(6) ni zaprta dokler ne predpišemo konstitutivnih modelov za rezidualni tenzor in vektor.

Vpeljimo vrtinčnost  $\vec{\omega}$  kot rotor hitrostnega polja  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ . Po definicijo mora biti vrtinčno polje solenoidno  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0$ . Zakon ohranitve mase (4) uporabimo, da iz definicije vrtinčnosti izpeljemo enačbo kinematike

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} = -\nabla^2 \vec{v} \implies \nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0. \quad (7)$$

Enačba kinematike povezuje hitrostno in vrtinčno polje za vsako točko v prostoru in času. Tako hitrostno kot vrtinčno polje mora biti solenoidno, da bo enačba kinematike izpolnjena.

Z delovanjem operatorja rotor na filtrirani enačbi ohranitve gibalne količine (5) iz nje odpade tlak. Po preoblikovanju [7] dobimo prenosno enačbo za vrtinčnost

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + Pr \nabla^2 \vec{\omega} - Pr Ra \vec{\nabla} \times (T - 1) \vec{g} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}^v. \quad (8)$$

Enačba (8) povezuje Stokesov snovski odvod vrtinčnosti na levi z deviatornim, difuzijskim, vzgonskim in podmrežnim členom na desni. Deviatorni člen  $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  je odgovoren za zvijanje in raztegovanje vrtincev in je neposreden dokaz tri-dimenzionalnega značaja turbulentnega toka. V primerih ravninskih tokov, ko je vrtinčnost vedno pravokotna na ravnino toka, je ta člen identično enak nič.

Zgoraj predstavljeno izpeljavo LES prenosne enačbe za vrtinčnost smo začeli z filtrirano enačbo ohranitve gibalne količine. Možen je tudi obraten postopek [13]. Najprej lahko izpeljemo prenosno enačbo za vrtinčnost in jo šele nato filtriramo. Na ekvivalenten način zgoraj opisanemu [7] dobimo

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + Pr \nabla^2 \vec{\omega} - Pr Ra \vec{\nabla} \times (T - 1) \vec{g} + \vec{\nabla} \times \vec{\tau}^\omega, \quad (9)$$

kjer je rezidualni vrtinčni vektor  $\vec{\tau}^\omega = \overline{\vec{v} \times \vec{\omega}} - \vec{v} \times \vec{\omega}$  razlika med filtrom produkta komponent hitrostnega in vrtinčnega polja in produktom filtriranih komponent hitrostnega in vrtinčnega polja. Po teoriji Taylorja [12] predstavlja disipacijo vrtinčnosti zaradi majhnih skal v turbulentnem toku. Ko primerjamo obe obliki enačbe prenosa vrtinčnosti (8) in (9) opazimo, da velja povezava med rezidualnim napetostim tenzorjem in rezidualnim vrtinčnim vektorjem

$$\vec{\tau}^\omega = -\vec{\nabla} \cdot \underline{\tau}^v, \quad (10)$$

vendar pa je potrebno pripomniti, da izpeljavi temeljita na različnih predpostavkah. Medtem ko prva (8) bazira na Kolmogorov - Richardsonovi energijski kaskadi in disipaciji kinetične energije malih skal, temelji vrtinčna oblika (9) na Taylorjevi [12] zamisli o prenosu in disipaciji vrtinčnosti. Konstitutivni modeli za  $\vec{\tau}^\omega$  in  $\underline{\tau}^v$  navadno ne zadoščajo enačbi (10).

Veliko LES študij uporablja model Smagorinskega [11] ali model na podlagi vrtinčnosti [3] za modeliranje disipativnega vpliva majhnih skal. Oba tipa modelov opisujeta prispevek majhnih podmrežnih skal s pomočjo hipoteze turbulentne viskoznosti. Gre za analogijo z molekularnim

prenosom kinetične energije v toplotno, torej s procesom, ki ga definira viskoznost. Rezidualni temperaturni vektor pa modeliramo na podlagi gradientne hipoteze. Vpeljimo brezdimenzijsko pod mrežno viskoznost  $\nu_{sgs}$  in pod mrežno difuzivnost  $\alpha_{sgs}$  z

$$\underline{\tau}^v = -2\nu_{sgs}\underline{\dot{\epsilon}}, \quad (11)$$

$$\vec{\tau}^\omega = -\nu_{sgs}\vec{\nabla} \times \vec{\omega}, \quad (12)$$

$$\vec{\tau}^h = \alpha_{sgs}\vec{\nabla} T. \quad (13)$$

Tenzor deformacijskih hitrosti  $\underline{\dot{\epsilon}}$  definiramo v tenzorskem zapisu takole  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ . Ko vstavimo rezidualni napetostni tenzor (11) v LES prenosno enačbo za vrtničnost (8) dobimo

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + Pr\nabla^2\vec{\omega} - PrRa\vec{\nabla} \times (T-1)\vec{g} + 2\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \nu_{sgs}\underline{\dot{\epsilon}}. \quad (14)$$

Ko pa vstavimo rezidualni vrtnični vektor (12) v enačbo (9) in preuredimo [7], pa pridemo do

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (Pr + \nu_{sgs})\nabla^2\vec{\omega} - PrRa\vec{\nabla} \times (T-1)\vec{g} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{\nabla}\nu_{sgs}). \quad (15)$$

Rezidualni temperaturni vektor (13) vstavimo v difuzijsko konvektivno enačbo za temperaturo (6) in dobimo

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T = (1 + \alpha_{sgs})\nabla^2 T + \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla}\alpha_{sgs}. \quad (16)$$

Obe obliki enačbe prenosa vrtničnosti (14) in (15) vsebujeta pod mrežno viskoznost. Zanj je bilo predlaganih več modelov. Smagorinsky [11] je zapisal

$$\nu_{sgs} = (C_s\Delta)^2 \sqrt{2\underline{\dot{\epsilon}} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}}, \quad (17)$$

medtem ko je Mansour [4], [16] predlagal model, ki temelji na enstrofiji;

$$\nu_{sgs} = (C\Delta)^2 \sqrt{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}}. \quad (18)$$

Uporabili bomo oster spektralni filter. Zanj velja  $\Delta = (\Delta_x\Delta_y\Delta_z)^{\frac{1}{3}}$ , kjer so  $\Delta_i$  razdalje med mrežnimi vozlišči v vseh treh smereh. Konstanto Smagorinskaga  $C_s$  in  $C$  je mogoče teoretično opredeliti, v praksi raziskovalci uporabljajo vrednosti med 0.065 in 0.23 [5]. Poznano je tudi [1], da v bližini sten turbulentna nihajna ne obstajajo. Zato morata rezidualni napetostni tenzor (11) in rezidualni vrtnični tenzor (12) limitirati proti nič, ko se približujemo steni. Za doseg tega uporabimo dušenje širine filtra, navadno z Van Driest ali Poimellyjevim dušilnim faktorjem [1].

Na podlagi eksperimentalnih opazovanj turbulentne viskoznosti izotropne turbulence je bilo ugotovljeno, da je primerljiva s turbulentno difuzivnostjo za celoten turbulenten spekter. Njuna zveza pa je blizu linearni:

$$\alpha_{sgs} = \frac{1}{Pr_t}\nu_{sgs}, \quad (19)$$

kjer smo vpeljali empirično določeno turbulentno Prandtlovo število.

### 3 Numerično reševanje z metodama robnih in končnih elementov

Za prvi testni primer hitrostno vrtnične simulacije velikih vrtnicev smo izbrali ravninsko geometrijo. Čeprav je vrtničnost v dveh dimenzijah skalarno polje in 2D simulacija turbulentnega toka ne opiše popolnoma (deviatroni člen v prenosni enačbi za vrtničnost odpade) verjamemo, da so ti preliminarni testi uporabni za določanje potrebne gostote mreže in časovnega koraka. V ravninski geometriji enačba kinematike (7) povezuje hitrostno in vrtnično polje:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

V tem članku predstavljene rezultate smo dobili z reševanjem LES prenosne enačbe za vrtničnost z na enstrofiji temelječim modelom podmrežne viskoznosti. V ravninski geometriji deviatroni člen v enačbi (15) odpade skupaj z vektorskim produktom vrtničnosti in gradienta podmrežne viskoznosti. Ravninska oblika LES prenosne enačbe za vrtničnost z enstrofijskim vektorjem je

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \omega = (Pr + v_{sgs}) \nabla^2 \omega - PrRa \vec{\nabla} \times (T - 1) \vec{g}. \quad (21)$$

Gravitacijski pospešek usmerimo v negativno smer  $y$ . Z njim prepisemo enačbo (21), vstavimo še podmrežno viskoznost (18) in dobimo

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \left( Pr + (C\Delta)^2 \sqrt{\omega^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + PrRa \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (22)$$

Difuzivno konvektivna enačba za temperaturo (16) se zapiše s Prandtlovo hipotezo turbulentne difuzije (18) in z enstrofijsko podmrežno viskoznostjo v komponenti obliki takole

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \left( 1 + \frac{1}{Pr_t} (C\Delta)^2 \sqrt{\omega^2} \right) \nabla^2 T + \frac{C^2}{Pr_t} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial (\Delta)^2 \sqrt{\omega^2}}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial (\Delta)^2 \sqrt{\omega^2}}{\partial y} \right) \quad (23)$$

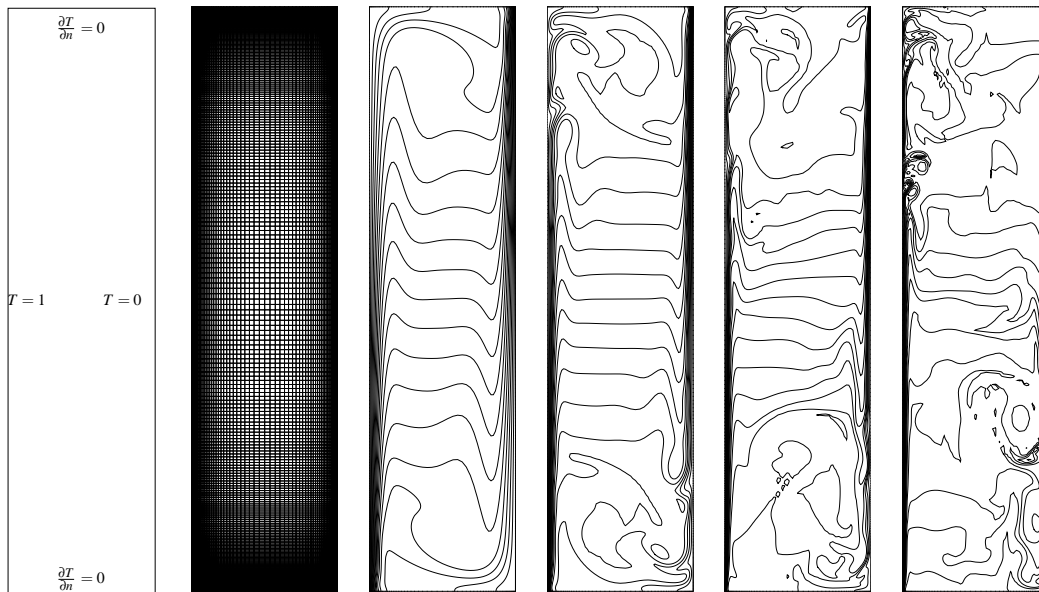
Celoten sistem enačb sestavljajo: enačbi kinematike (20) in difuzijsko konvektivni enačbi za temperaturo (23) in vrtničnost (22). Postopek reševanja je sledeč: najprej rešimo enačbi kinematike, da dobimo vrednosti na robu. Zaradi visokih zahtev metode robnih elementov po pomnilniku smo bili prisiljeni uporabiti metodo končnih elementov za ostale enačbe, Poskušali smo uporabiti metodo robnih elementov v kombinaciji z valčno transformacijo [6], a smo ugotovili, da je metoda končnih elementov manj časovno potratna od valčno transformirane metode robnih elementov. Z znanimi vrednostmi vrtničnosti na robu rešimo enačbi kinematike še enkrat za novo hitrostno polje v območju. Novo temperaturno polje dobimo na podlagi novega hitrostnega polja z rešitvijo enačbe (23). Končno novo vrtnično polje dobimo z rešitvijo prenosne enačbe za vrtničnost (22) na podlagi novega hitrostnega polja in vzgona, ki ga dobimo iz novega temperaturnega polja. Postopek ponavljamo, dokler ni izpolnjen konvergentni kriterij.

Reševanje enačb kinematike z metodo robnih elementov je podrobno opisano v [8] in [6] in je tu ne bomo ponavljali. Rešitev transportnih enačb z metodo končnih elementov je opisana v [7] in je tu tudi ne bomo ponavljali.

#### 4 Pojav nestacionarnega turbulentnega toka v diferencialno greti kotanji

Raziskujemo nestabilnost pojava naravne konvekcije v kotanji z razmerjem stranic 1 : 4. Raziskovalci Ingber [2], [14] in [15] ter [9] poročajo, da je tok za Rayleighovo število manj kot  $Ra = 10^5$  stacionaren, medtem ko za Rayleighovo število več kot  $Ra > 10^5$  pride do prehoda v nestacionarni režim toka.

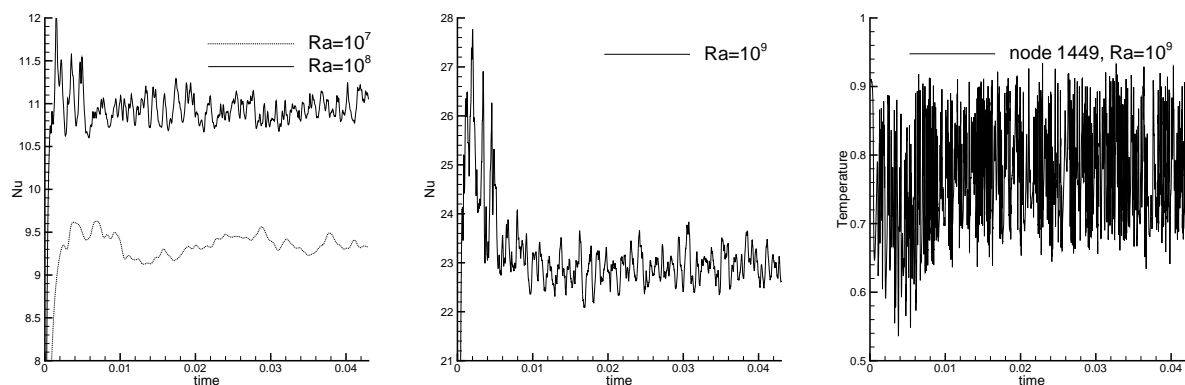
Simulacijo smo izvajali na mreži  $32 \times 128$  devet točkovnih elementov. Uporabili smo Prandtlovo število za zrak  $Pr = 0.71$  in turbulentno Prandtlovo število  $Pr_t = 0.6$ . Računali smo z Rayleighovimi števili do  $Ra = 10^9$ . Ugotovili smo, da za vrednosti manjše in enake  $Ra = 10^6$  dobimo stacionarne razmere, medtem ko višji  $Ra$  vodi do nestacionarnih kaotičnih tokovnih razmer. V robnem sloju nastajajo vrtinci, ki se s konvekcijo pomikajo ob stenah. Za simulacije do  $Ra = 10^8$  smo uporabili brezdimenzijski časovni korak  $\Delta t = 10^{-5}$ , pri  $Ra = 10^9$  pa smo uporabili  $\Delta t = 10^{-6}$ . V kotanji z dimenzijami  $0.25 \times 1m$  napolnjeni z zrakom pri  $Ra = 10^9$  je



**Slika 1** : iz leve proti desni: robni pogoji, mreža, temperaturna polja [0.05:0.05:0.95]: stacionarno stanje  $Ra = 10^6$ , LES rešitve pri  $Ra = 10^7$ ,  $Ra = 10^8$  ob  $t = 0.05$  in  $Ra = 10^9$  ob času  $t = 0.01$  začenši s stacionarnim stanjem  $Ra = 10^6$ .

temperaturna razlika med stenama približno  $\Delta T \approx 660K$ , časovni korak pa 4 milisekunde.

Slika 1 prikazuje temperaturna polja za  $Ra = 10^6 \dots 10^9$ . S povečevanjem  $Ra$  števila opazimo izrazitejši nestacionarno kaotični izgled temperaturnih polj. Toplotni tok skozi steno opišemo s povprečnim Nusseltovim številom  $Nu = \frac{1}{4T_0} \int_0^4 \frac{\partial T}{\partial x} dy$ . Odvisnost  $Nu$  od časa je prikazana na sliki 2. Za  $Ra = 10^9$  prikazujemo tudi odvisnost temperature od časa v točki (2.9981, 0.0255). Opazimo izrazit neponavljajoč in kaotičen značaj temperaturnih fluktuacij in fluktuacij Nussletovega števila.



**Slika 2** : iz leve proti desni: Odvisnost Nusseltovega števila  $Nu$  od časa za  $Ra = 10^7$ ,  $Ra = 10^8$  in  $Ra = 10^9$ , odvisnost temperature od časa v točki (2.9981, 0.0255) pri  $Ra = 10^9$ .

## 5 Zaključki

Hitrostno vrtinčna formulacija simulacije velikih vrtincev v kombinaciji z metodo robnih elementov, ki smo jo predstavili v tem članku, kaže dobre možnosti za numerično simulacijo turbulentnih tokov. Z rešitvijo robnih vrtinčnosti z BEM dobimo robne pogoje za enačbo prenosa vrtinčnosti, ki jo rešimo s FEM.

Velike zahteve BEM po pomnilniku bomo poskušali omiliti z uporabo paralelnega računanja, s tehniko večobmočnega računanja in z modernimi algoritmi za stiskanje podatkov, kot je valčna transformacija.

Pojav naravne konvekcije v 1 : 4 kotanji se je pokazal kot dober primer prehoda iz laminarnega v turbulentni režim toka. V bodoče bomo izračune ponovili s povečano gostoto mreže in pri višjih Rayleighovih številih.

## Literatura

- [1] Breuer, M., (2002), *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*, Shaker Verlag, Aachen
- [2] Ingber, M.S., (2003), A vorticity method for the solution of natural convection flows in enclosures. *Int. J. Numer. Meth. for Heat & Fluid Flow*, 13, 655–671.
- [3] Mansfield, JR., Knio, OM., Meneveau, C., (1998), “A dynamic LES scheme for vorticity transport equation: formulation and a priori tests”, *J Comput Phys*, 145, 693–730.
- [4] Mansour, N. N., Ferziger, J. H., Reynolds, W. C., (1978), *Large-eddy simulation of a turbulent mixing layer*, Report TF-11, Thermosciences Div., Dept. of Mech. Eng., Stanford University.
- [5] Pope, S.B., (2000), *Turbulent Flows*, Cambridge University Press.



- [6] Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek M., (2004), The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, 1303–1314.
- [7] Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek M., (2005), Towards Velocity-Vorticity Based Large Eddy Simulation with Boundary Element Method, *Proceedings of 2. Workshop on Advanced Computational Engineering Mechanics*, Erlangen.
- [8] Škerget, L., Hriberšek, M., Žunič, Z., (2003), Natural convection flows in complex cavities by BEM, *Int J Num Meth for Heat & Fluid Flow*, 13(6), 720–735.
- [9] Škerget, L., Samec N., Ravnik, J. (2005) BEM for the solution of natural convection enclosure with large temperature gradients, *Proceedings Aveiro: Centre for Mechanical technology and Automation: Department of Mechanical Engineering*, 691-698.
- [10] Sagaut, P., (2002), *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows, An Introduction*, Springer Verlag.
- [11] Smagorinsky, J., (1963), “General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic equations”, *Mon Weather Rev*, 91, 99–164.
- [12] Taylor, G.I., (1932), “The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion”, *Proc London Math Soc. Ser A*, 151–421
- [13] Tenaud, C., Pellerin, S., Dulieu, A., Phuoc, L. Ta, (2005), “Large Eddy Simulation of a spatially developing incompressible 3D mixing layer using  $\nu - \omega$  formulation”, *Comput Fluids*, 34, 67–96.
- [14] Vierendeels, J., Merci, B., Dick, E., (2001), Numerical study of the natural convection heat transfer with large temperature differences. *Int. J. Numer. Meth. for Heat & Fluid Flow*, 11, 329–341.
- [15] Weisman, C., Calsyn, L., Dubois, C., Le Quere, P. (2001): Sur la nature de la transition a l’instationare d’un ecoulement de convection naturelle en cavite differentiellement chauffee a grands ecart de temperature. *Comptes rendus de l’academie des sciences Serie II b, Mecanique*, 343–350, Elsevier.
- [16] Winckelmans, G. S., Lund, T. S., Carati, D., Wray, A. A., (1996), *A priori testing of subgrid-scale models for the velocity pressure and vorticity-velocity formulations* Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program 1996.



## Vpliv parametra “Aspect Ratio” na konvergenco numerične simulacije toka tekočine v mikro kanalu

Z. Rek<sup>1</sup>, I. Žun<sup>2</sup>

### Influence of Parameter Aspect Ratio on the Convergence of Numerical Simulation of Fluid Flow in a Micro Channel

**Povzetek.** V prispevku je prikazan vpliv parametra “Aspect Ratio” na konvergenco numerične simulacije v primeru toka tekočine v mikro kanalu. Narejena je primerjava rezultatov numerične simulacije toka viskozne nestisljive tekočine s prenosom toplote za tri okrogle cevi (mini in mikro kanale) s premeri  $20mm$ ,  $2mm$  in  $0,2mm$ . Dolžina cevi in število kontrolnih volumnov je v vseh treh primerih enako, tako, da se parameter “Aspect Ratio” spreminja. Rezultati izračuna so primerjani med seboj in z analitično rešitvijo.

**Abstract.** This paper shows an influence of the Aspect Ratio parameter on the convergence of numerical simulation of fluid flow in mini and micro channels. The comparison of the results for numerical simulation of viscous incompressible fluid flow with heat transfer of  $20mm$ ,  $2mm$  in  $0,2mm$  diameters was made. The pipe length and the number of control volumes is the same for all three cases, so Aspect Ratio was adopted according to the channel length and diameter. The results of the computation are well in accordance to the analytical solution.

## 1 Uvod

V računski dinamiki tekočin velja pravilo, da naj bo parameter “Aspect Ratio” čim manjši, glej [1]. Parameter  $a_r$  je definiran kot največja vrednost razmerja robov ploskev, ki omejujejo kontrolni volumen. Kontrolni volumen oblike heksaedra, ki ga uporabljamo v naših izračunih, je prikazan na sliki 1. V tem primeru je

$$a_r = \frac{\max(a, b, c)}{\min(a, b, c)} \quad (1)$$

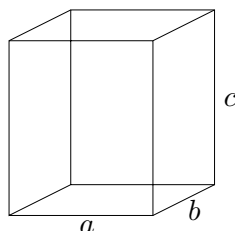
Idealna vrednost je  $a_r = 1$ , kar pomeni, da so robovi kontrolnega volumna enako dolgi. Tega v veliki večini primerov zaradi kompleksnosti geometrije ni mogoče zagotoviti.

<sup>1</sup>Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Laboratorij za dinamiko fluidov in termodinamiko

<sup>2</sup>Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Laboratorij za dinamiko fluidov in termodinamiko

Izkušnje so pokazale, da je za dobro konvergenco numeričnega postopka sprejemljiva vrednost  $1 \geq a_r \leq 10$ . Če je ta parameter  $> 10$ , lahko nastopijo težave.

To priporočilo postane zelo omejujoče v primeru numerične simulacije toka tekočine v mini in mikro kanalih. Poglejmo primer: Izračunati želimo tokovne razmere v mikro kanalu kvadratnega prereza s stranico  $a = 100\mu$  in dolžine  $L = 10cm$ . Minimalno število celic za opis hitrostnega, tlačnega in temperaturnega polja v prečni (radialni) smeri je  $20 \times 20$ . Če bi želeli imeti  $a_r = 1$ , bi v vzdolžni (aksialni) smeri potrebovali 20 000 kontrolnih volumnov. Skupno število bi bilo tako 8 milijonov celic, kar je že na meji spominskih in časovnih zmogljivosti današnjih računalnikov. V primeru  $a_r = 10$  dobimo še vedno 800 000 celic. Tudi to število je velik zalogaj za PC-je, na katerih izvajamo CFD kodo.



Slika 1: Kontrolni volumen - heksaeder.

Pri gibanju tekočine v mikro kanalih velja, da se razmere v glavnem spreminjajo vzdolž toka. V tem primeru lahko računsko območje diskretiziramo s celicami, pri katerih je  $a_r > 10$ . Do katere vrednosti lahko gremo, da še dobimo dobro konvergenčno rešitev, je prikazano v nadaljevanju.

Za analizo vpliva parametra  $a_r$  smo uporabili laminaren tok nestisljive viskozne tekočine v cevi. Tekočina se segreva zaradi konstantnega toplotnega toka skozi steno cevi. Snovske lastnosti so izbrane tako, da sta  $Re = 1000$  in  $Pr = 1$ . Slednje pomeni, da sta debelina hidrodinamične in temperaturne mejne plasti enaki, glej [2].

Za laminaren tok velja, da je razmerje med vstopno dolžino in premerom cevi določeno z izrazom  $x_{fd,h}/D = 0,05Re$ , glej [3]. Pri izbranem Reynoldsovem številu je tako vstopna dolžina enaka  $50D$ . S pomočjo tega podatka smo se odločili za dolžino cevi. Za varnost smo dodali še 10 premerov, tako da je bila minimalna dolžina cevi v naših simulacijah  $L = 60D$ . Računali smo za tri različne premere cevi, in sicer:  $D = 20mm$ ,  $D = 2mm$  in  $D = 0,2mm$ . Dolžina cevi je v vseh treh primerih enaka  $L = 1200mm$ . Enako je tudi število kontrolnih volumnov. Zaradi tega se z manjšanjem premera povečuje dolžina celic v osni smeri. Tabela 1 kaže parameter  $a_r$  v odvisnosti od premera cevi.

$D$	$20mm$	$2mm$	$0,2mm$
$a_r$	2	13	135

Tabela 1: Premer mikro kanala in parameter  $a_r$ .

## 2 Numerična simulacija

### 2.1 Vodilne enačbe

Lamirano gibanje viskozne nestisljive tekočine je opisano z Navier-Stokesovimi enačbami, ki predstavljajo ohranitev mase in gibalne količine. Zanima nas samo stacionarno stanje. Ker so tudi snovske lastnosti konstantne, se enačbe precej poenostavijo, glej [4]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} \quad (3)$$

Pri čemer so:  $\vec{v}$  vektor hitrosti,  $p$  tlak,  $\rho = 1000\text{kg}/\text{m}^3$  gostota in  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  kinematična viskoznost.

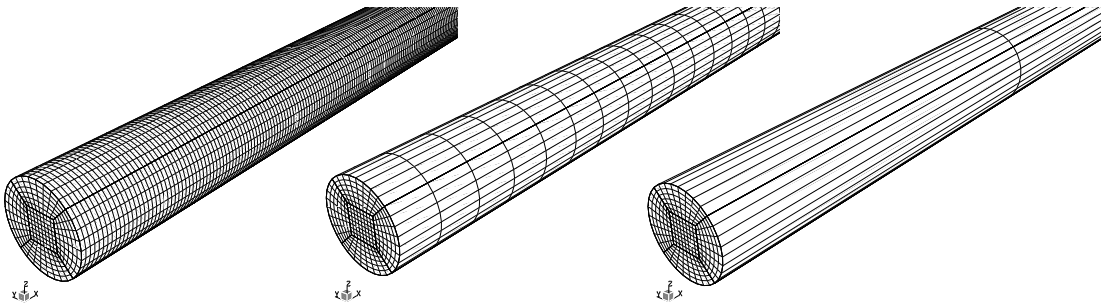
Ker imamo tudi prenos toplote, velja še enačba za ohranitev energije:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)T = a\nabla^2T \quad (4)$$

Kjer sta  $T$  temperatura in  $a = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$  difuzivnost.

### 2.2 Diskretni model

Za diskretizacijo računskega območja je uporabljena strukturirana mreža kontrolnih volumnov, sestavljena iz petih blokov, glej [5]. V prečnem preseku je število celic  $4(6 \times 8) + 8 \times 8$ , medtem, ko imamo v osni smeri 1200 celic. Skupno število kontrolnih volumnov je tako 307 200, slika 2. Parametri kvalitete računske mreže za vse tri primere so prikazani v tabeli 2. Po teh kriterijih, razen "Aspect ratio", so mreže ustrezne in niso vplivali na konvergenco pri numeričnem reševanju.



Slika 2: Računska mreža za  $a_r = 2, 13, 135$ .

### 2.3 Robni in začetni pogoji

Robni pogoji so naslednji:

Parameter	$a_r = 2$		$a_r = 13$		$a_r = 135$	
	max	min	max	min	max	min
Orthogonal Deviation	45	0	45	0	45	0
Grid Expansion	1,28	1	1,28	1	1,28	1
Skew Ratio	1.4	1	1,01	1	1	1
Twist Angle	13,7	0	13,8	0	19	0
Taper Ratio	1,2	1	1,2	1	1,2	1
Aspect Ratio	2,1	1,07	13,5	9.38	135	95,5

Tabela 2: Parametri kvalitete mreže.

- Vstop:

$$v_x = \begin{cases} 0,05m/s & ; a_r = 2 \\ 0,5m/s & ; a_r = 13 \\ 5m/s & ; a_r = 135 \end{cases} \quad (5)$$

$$v_y = v_z = 0 \quad (6)$$

$$T = 20^\circ C \quad (7)$$

- Izstop:

$$\text{Neumannov robni pogoj } \frac{\partial}{\partial n} = 0 \quad (8)$$

- Stena:

$$\vec{v} = 0 \quad (9)$$

$$q_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 10^4 W/m^2 K \quad (10)$$

Masni pretok je tako v vseh treh primerih enak in je znašal  $\dot{m} = 1,561 \cdot 10^{-3} kg/s$ . Začetni vrednosti za hitrost in temperaturo sta bili:  $\vec{v} = 0$  in  $T = 20^\circ C$ .

## 2.4 Računski postopek

Za numerično simulacijo je bil uporabljen CFD programski paket CFX-4, ki temelji na metodi kontrolnih volumnov in blok-nestrukturiranih mrežah, glej [6].

Program uporablja tehniko "segregated" solverja, kar pomeni, da rešujemo lineariziran sistem transportnih enačb za vsako spremenljivko  $v_x, v_y, v_z, T$ . Za izračun tlaka je uporabljena PISO "Pressure-Correction" shema z redukcijskim faktorjem 0,01 za tlak. Za reševanje sistema linearnih enačb za tlak je bil uporabljen "Algebraic Multi Grid" (AMG) solver, medtem, ko je bil za ostale spremenljivke uporabljen "Block Stone" solver. Za hitrost in entalpijo je bila uporabljena hibridna diferenčna shema (HDS), za tlak pa centralna diferenčna shema (CDS). Podrelaksacijski faktorji so bili: 0.7 za hitrost in 1.0 za tlak, entalpijo ter temperaturo. Konvergenčni kriterij "Residual Mass Flow" je bil  $10^{-6} kg/s$  oz. maksimalno število iteracij 1000. Povprečni redukcijski faktorji, doseženi z linearnim solverjem, so bili  $10^{-1}$  za residuume gibalne enačbe in entalpijsko enačbo, ter  $10^{-3}$  za residuum enačbe ohranitve mase.

### 3 Rezultati in diskusija

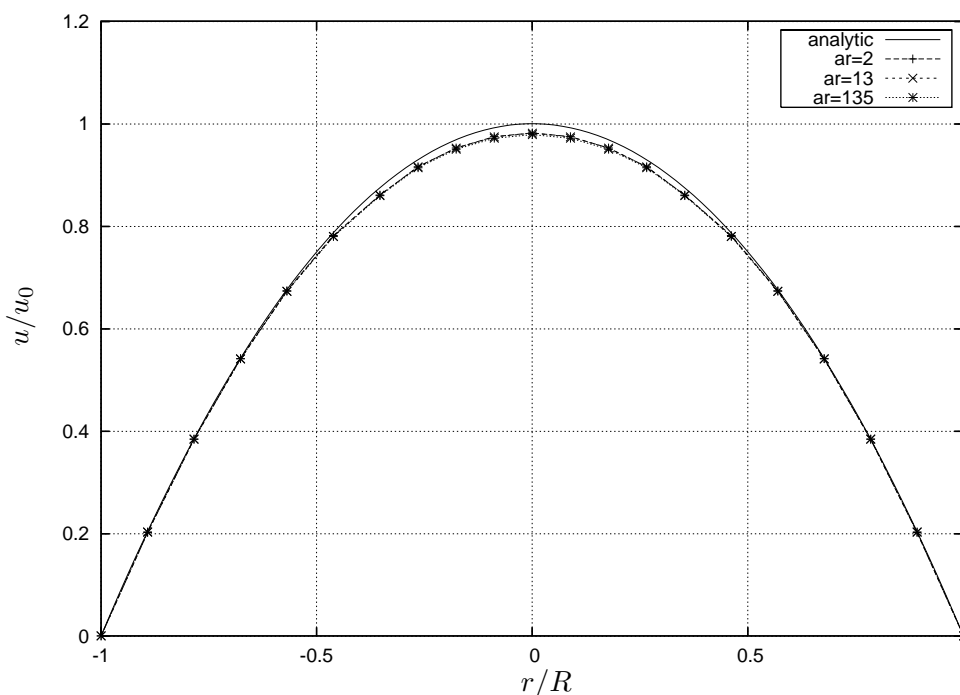
Geometrija in robni pogoji so bili izbrani tako, da obstaja tudi analitična rešitev. Z njo primerjamo rezultate numerične simulacije. Za laminarni tok v okrogli cevi se hitrostni profil popolnoma razvije na razdalji  $x_{fd,h} = 0,05ReD = 50D$  od vstopa. Hitrostni profil ima obliko parabole

$$u = 2u_m \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad 0 \leq r \leq R \quad (11)$$

kjer je  $u_m$  = povprečna hitrost, ki je določena z masnim pretokom in ploščino preseka cevi

$$\dot{m} = \rho u_m A_c \quad (12)$$

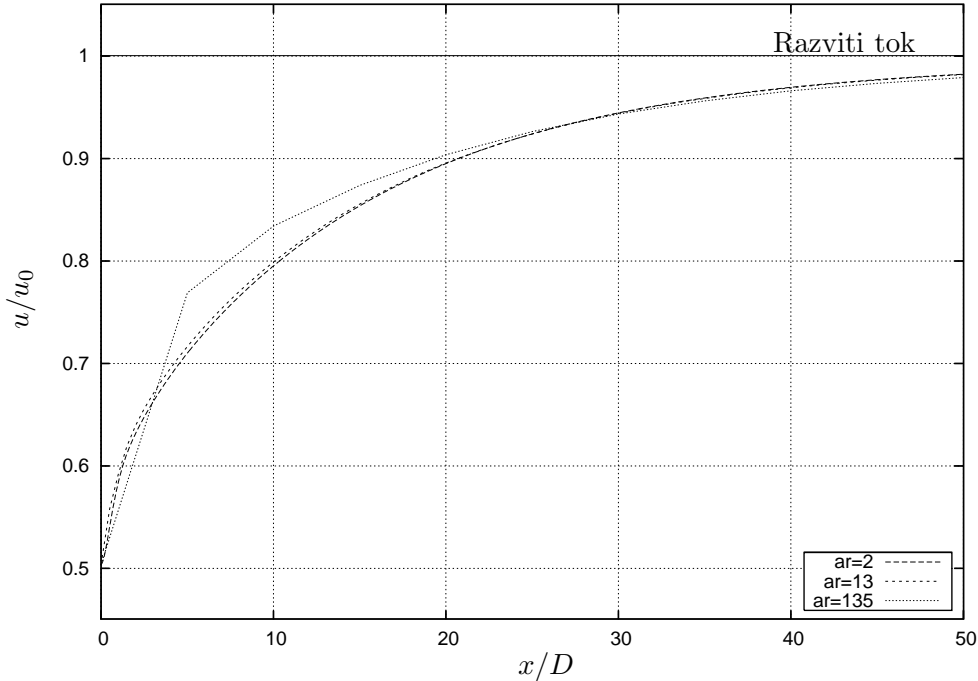
Maksimalna hitrost na osi je  $u_0 = 2u_m$ . Slika 3 prikazuje hitrostne profile na razdalji  $50D$ . Vidi se dobro ujemanje profilov za vse tri diskretizacije, kar pomeni, da lahko uporabljamo kontrolne volumne z  $a_r = 135$ . Iz slike tudi vidimo, da je nekaj večje odstopanje numerične rešitve od analitične na osi. To je posledica relativno redke diskretizacije v radialni smeri, kjer imamo samo 20 celic. Veliko boljše ujemanje bi dobili, če bi to število povečali na npr. 40 celic, vendar bi bila v tem primeru mreža prevelika ( $\approx 1,2$  milijona kontrolnih volumnov) in bi bili računski časi predolgi.



Slika 3: Hitrostni profil  $u(r)$  pri  $x_{fd,h} = 50D$ .

Na sliki 4 so prikazani hitrostni profili  $u(x)$  na osi. Vidi se, da je v začetnem območju

gradient hitrosti v primeru  $a_r = 135$  nekoliko slabše popisan, vendar se kasneje skupaj z ostalima dvema lepo asimptotično približuje analitični vrednosti.



Slika 4: Hitrotni profil  $u(x)$  pri  $r = 0$ .

Poleg hitrostnih profilov je zanimiv podatek tudi ujemanje s faktorjem trenja (“Friction Factor”), glej [2], ki v primeru razvitega laminarnega toka za  $Re = 1000$  znaša

$$f = \frac{-(dp/dx)D}{\rho u_m^2/2} = \frac{64}{Re} = 0,064 \quad (13)$$

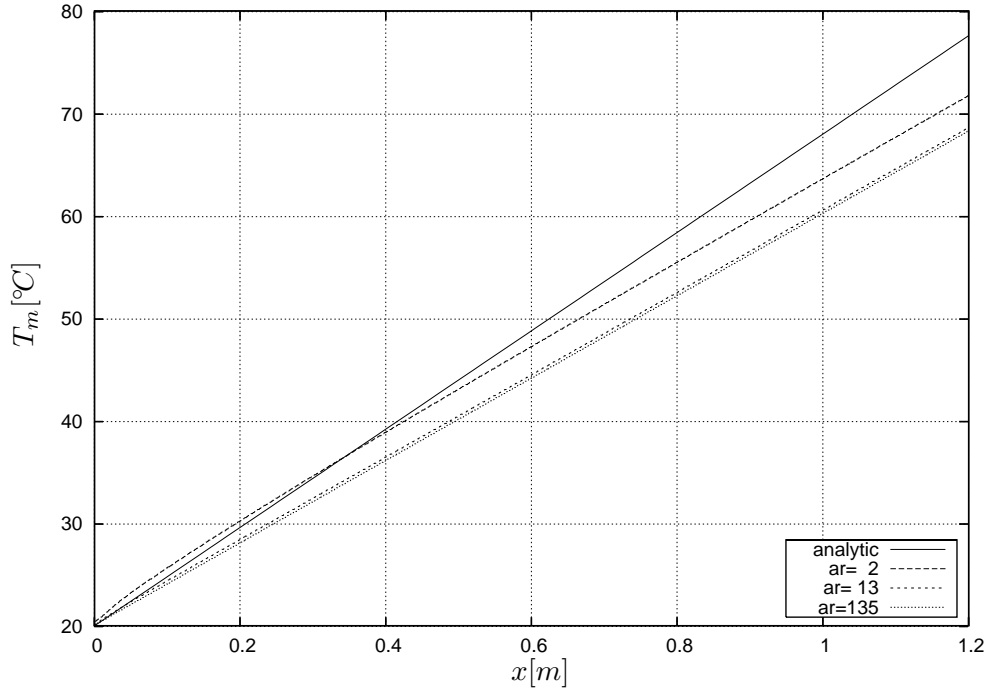
Primerjava je prikazana v tabeli 3. Vidimo, da je ujemanje dobro, kar pomeni, da je gradient tlaka dobro opisan tudi pri  $a_r = 135$ .

$a_r$	2	13	135
$f$	0,0671	0,0671	0,0677

Tabela 3: Faktor trenja pri  $x_{fd,h}$ .

Slika 5 kaže potek povprečne temperature v cevi. Definirana je z izrazom, glej [2]

$$T_m = \frac{1}{\dot{m}c_v} \int_{A_c} \rho u c_v T dA_c = \frac{1}{u_m A_c} \int_{A_c} u T dA_c \quad (14)$$



Slika 5: Povprečna temperatura v mikro kanalu.

Pri konstantni gostoti toplotnega toka ( $q_s = \text{const.}$ ) lahko povprečno temperaturo na preseku v razdalji  $x$  določimo iz zveze

$$\dot{m}c_p(T_{m,x} - T_{m,i}) = q_s P \quad (15)$$

kjer je  $P$  površina stene cevi in  $T_{m,i}$  povprečna temperatura na vstopu. Tako dobimo

$$T_{m,x} = T_{m,i} + \frac{q_s \pi D}{\dot{m}c_p} x \quad (16)$$

Razlika med povprečno temperaturo na vstopu in izstopu je tako

$$\Delta T_m = T_{m,o} - T_{m,i} = \frac{q_s \pi D L}{\dot{m}c_p} = 57,6 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (17)$$

Tabela 4 kaže razliko med povprečno temperaturo na vstopu ( $x = 0$ ) in izstopu  $x = L = 1,2\text{m}$  iz cevi za vse tri simulacije. V tem primeru je še bolj očitno, da je resolucija mreže v radialni smeri premajhna, saj je difuzija toplote (in s tem segrevanje tekočine) s stene cevi slabše popisana. Vendar zopet vidimo, da ni bistvenih odstopanj med  $a_r = 13$  in  $a_r = 135$ .



$a_r$	2	13	135
$\Delta T_m$	51,3 °C	48,5 °C	48,2 °C

Tabela 4: Razlika povprečnih temperatur na vstopu ( $x = 0$ ) in izstopu ( $x = 1,2m$ ).

## 4 Sklepi

Iz prikazanega sklepamo, da lahko v primeru toka tekočine v mikro kanalu uporabimo računsko mrežo s parametrom “Aspect Ratio”  $> 10$ , čeprav CFD praksa pravi, da to ni priporočljivo. Vidimo, da ni bistvenih odstopanj med rezultati numerične simulacije pri  $a_r = 2$ ,  $a_r = 13$  in  $a_r = 135$ .

## Literatura

- [1] *Best Practice Guidelines*. ERCOFTAC Special Interest Group on “Quality and Trust in Industrial CFD”, Editors: M. Casey and T. Wintergerste, 2000.
- [2] F.P. Incropera, D.P. DeWitt: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [3] G.K. Batchelor: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [4] J.C. Tannehill, D.A. Anderson, R.H. Pletcher: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, Washington, 1997.
- [5] CFX-Build: *Using CFX-Build 4*. AEA Technology, 1999.
- [6] CFX-4: *User Documentation*. AEA Technology, 1999.



## *Dva pristopa k uporabi konvektnega koordinatnega sistema v analizi deformabilnih teles pri velikih deformacijah.*

*T. Rojc in B. Štok*

### *Two approaches to convected frames in solid analysis at finite deformations*

**Povzetek.** Obravnavana sta dva pristopa k uporabi konvektivnih koordinat v analizi deformabilnega telesa pri velikih deformacijah. V enem je deformacijski gradient tolmačen kot transformacija, v drugem pa kot tenzor.

**Abstract.** Two insights into usage of convected coordinates in finite deformation analysis of solids is presented. In one of them deformation gradient is interpreted as a transformation, in the other one it is represented as a tensor.

#### **1 Uvod**

V prispevku sta predstavljena dva pristopa k uporabi konvektnega koordinatnega sistema v nelinearni mehaniki trdnih teles v območju velikih deformacij. Prvi, ki sledi izvornemu delu Oldroyda [3], temelji na enačbah gibanja telesa in deformacijskemu gradientu ne namenja nobene vplivne vloge, drugi pa temelji na tenzorskem tolmačenju deformacijskega gradienta in je v nelinearni mehaniki trdnih teles v splošni rabi, tudi v primeru uporabe konvektnega sistema. (glej npr. [1], [2], [7], [8]). Zanimivo je, da je pristop, ki ne namenja deformacijskemu gradientu tenzorske vloge, uporabljen tudi pri nas in je predstavljen v domačih učbenikih Sajeta in Srpčiča [5] in [6]. Taka obravnava lahko vodi v nerazumevanje teorij materialnih modelov, temelječih na lokalni multiplikativni razdelitvi deformacijskega gradienta. Zato smo se v tem prispevku odločili prikazati oba pristopa.

Drugi razlog za pričujoči prispevek je, da prikažemo invariantni pristop k obravnavi nelinearne mehanike, in da v tej zvezi pojasnimo pomen Lie-jevega odvoda. Invariantni pristop je namreč v tuji literaturi, ki se ukvarja z analizo splošnih teles predvsem z vidika razvoja materialnih modelov, prevladujoč. Lupine in ukrivljeni nosilci so v tem kontekstu obravnavani kot posebni primeri, ki so seveda iz geometrijskega stališča lahko izredno zahtevni.

Tretji razlog pa je, da pokažemo, kako je ideja o 'konvektivnem pristopu' zašla v multiplikativno formulacijo nelinearnih materialnih modelov. Termin 'konvektivne koordinate' izvira iz

angleškega ‘convected coordinates’, ki se kar pogosto pojavlja v tuji literaturi. Ker so te, v prostoru opazovanja mehanskega problema, v splošnem krivočrtne, smo za izhodišče v našem razširjenem prispevku izbrali kar besedilo, ki je podano v 2. delu učbenika avtorjev Sajeta in Srpčiča [5]. Snov je namreč v tem učbeniku z vidika uporabe krivočrtnih koordinat neoporečno podana in pri nas tudi mnogim znana, delo Oldroyda, [3], ki je v enciklopediji fizike [7], (glej paragraf 66B), omenjeno kot eno izmed prvih del s področja uporabe konvektivnih koordinat, pa ne.

Besedilo v razširjeni verziji članka, ki je objavljeno samo v elektronski obliki in zapisano na zgoščenko, [4], je razdeljeno v tri razdelke, od katerih je osrednja tema podana v drugem. Značilnosti obeh pristopov h konvektivnemu opisu, so v slednjem obširneje prikazane v dveh podrazdelkih: “2.1 Interpretacija s koordinatno transformacijo [Saje, Srpčič: 6]”, in “2.2 Tenzorska interpretacija [Truesdell, Noll: 9]”. Pri tem je snov v [4] zastavljena tako, da bi vsem tistim, ki poznajo osnove nelinearne mehanike samo z vidika dela [5], predstavili še z drugačnega vidika. Namreč, učbenik [5] verjetno ne prebirajo samo slušatelji predavanj obeh avtorjev, temveč tudi tisti, ki te možnosti nimajo in jim je v delu [5] podana snov edina informacija. Tako pridobljeno znanje pa lahko, kot smo že omenili, vodi v nerazumevanje ‘multiplikativnih teorij’ pri razvoju materialnih modelov.

V članku se po eni strani ukvarjamo s problemom opisovanja deformacije in izpeljave znanih količin, po drugi strani pa podajamo tudi informacije o tem, kako pristopajo k problemu v spodaj navedeni literaturi. Ker je bilo besedilo napisano s sestavljanjem raznih misli, ki so bile namenjene pripravi drugega članka (o multiplikativnem pristopu k razvoju materialnih modelov), je v njem, prav gotovo na nekaj mestih, prekinjena rdeča nit, ki bi morala te misli medseboj trdneje povezati. Nekaj nedoslednosti je tudi s terminologijo, saj je težko obdržati izraze iz enega vira, ko različni avtorji v literaturi uporabljajo za nekatere pojme, pri opisovanju istega fizikalnega problema, različne izraze. To vsekakor velja za terminologijo in zapise enačb iz matematičnega vidika, npr. v zvezi z Lie-jevem odvodom, saj smo informacije o njem pridobili le iz periodične literature, ki se ukvarja z mehanskimi problemi, ne pa z matematiko. Iz navedenih razlogov poudarjamo v naslednjem razdelku samo še nekatera bistva iz [4], ki jih marsikdo lahko, zaradi dolžine besedila, spregleda, ali jih napačno razume in to lastnost pripiše piscu obeh besedil.

## 2 Nekaj pojasnil

V [4] smo vse izpeljave količin zasnovali na uporabi dveh konfiguracij telesa, ki predstavljata njegovo lego v prostoru opazovanja v dveh različnih trenutkih. To je t.i. *začetne konfiguracije*  $\mathcal{K}_0$ , ki pripada začetnemu trenutku  $t_0$ , v katerem poznamo vse mehanske količine telesa, vključno z njeno geometrijo, in t.i. *trenutne konfiguracije*  $\mathcal{K}_t$ , ki sovпада s telesom  $\mathcal{B}$ , in je predmet opazovanja vseh geometrijskih sprememb, ki jih telo utrpri pri gibanju in deformaciji iz prej omenjene začetne konfiguracije. Torej začetna konfiguracija  $\mathcal{K}_0$  je v prostoru opazovanja fiksna, medtem ko  $\mathcal{K}_t$  obravnavamo kot od časa odvisno in spreminjajočo se konfiguracijo. Obe smo predstavili kot predmet opazovanja nekega opazovalca, ki misli, da v prostoru, v katerem opazuje telo, miruje, in da lahko vse mehanske spremembe v telesu opiše glede na svoj t.i. prostorski koordinatni sistem. V tej zvezi se nismo posebej ukvarjali z objektivnostjo takega pristopa k opazovanju mehanskega problema, in smo privzeli, da ta gotovo, seveda pod določenimi pogoji, omogoča pravilno zaznati

deformacijo telesa, ne pa tudi ugotoviti njegove izhodiščne lege.

S pomenom fiksne konfiguracije  $\mathcal{K}_0$ , ki smo jo imenovali tudi *referenčna*, se prav tako nismo posebej ukvarjali, in smo jo vezali samo na začetne pogoje telesa, v katere spada tudi geometrija same konfiguracije. Tu naj dodamo, da lahko za  $\mathcal{K}_0$  izberemo katerokoli drugo konfiguracijo telesa, ki jo je, jo in bo telo zasedalo pri svojem gibanju in deformaciji v nekem časovnem območju npr.  $[t_0, t_k]$ , kjer indeks 'o' stoji za začetek, 'k' pa za konec opazovanja telesa. Seveda bi lahko za referenčno konfiguracijo izbrali tudi tako, ki jo telo pri svojem gibanju nikoli ne zaseda, kar pomeni, da opazovalec opisuje pravo začetno konfiguracijo telesa s krivočrtnim koordinatnim sistemom, pri čemer mora poznati funkcijsko zvezo s prostorskimi kartezičnimi koordinatami, če želi gibanje in deformacijo telesa opazovati v prostoru, kjer je metrika v vseh njegovih točkah znana vnaprej.

V komponentni obliki smo mehanske količine obravnavali samo v razdelku 2.1, v katerem smo vpeljali že zgoraj imenovani *fiksni prostorski kartezični koordinatni sistem*, *materialne koordinate* in posredno tudi *konvektni koordinatni sistem*, katerega pomen smo prikazali v definiciji deformacije in v definiciji materialno objektivne t.i. Oldroydove hitrosti napetostnega tenzorja. Konvektni koordinatni sistem je krivočrtni, ki je definiran v prostoru opazovanja gibanja telesa in ki se deformira istočasno z njegovo trenutno konfiguracijo. Čeprav lahko v nekem smislu istovetimo materialne koordinate s konvektivnimi, običajno tega ne delamo. Materialne koordinate imajo namreč nalogo identificirati delce v telesu, ki ga obravnavamo kot svoj, t.i. materialni prostor, konvektne koordinate pa so vezane na njihove lege v prostoru opazovalca, in so uporabljene za definicijo t.i. *konvektivnih baznih vektorjev* v tem prostoru. Bistvo vseh pristopov je namreč ločevanje med telesom in delci ter njegovo konfiguracijo in legami delcev. Konfiguracije in pripadajoče točke v njih, ki pripadajo izbranim trenutkom, lahko v prostoru opazovalca 'zamrznemo', telo pa ne. Taka terminologija je potrebna, da lahko opazimo razliko v pomenu enoparametrične družine naslednjih koordinatnih enačb:

$$x^i = \chi^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \text{ali} \quad x^i = \chi^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad i=1,2,3, \quad (1)$$

ki naj bodo enolične in take, da je  $J = \det[\partial\chi^i/\partial\xi^j] > 0$  (glej npr. [5]). Parameter  $t$  naj v vseh spodaj navedenih primerih pomeni čas, ali psevdočas,  $\chi^i$  pa temu času 'pripadajoče funkcije' med paroma med seboj neodvisnih koordinat  $x^i$  in  $\xi^i$ . Če predstavljajo  $\xi^i$  *materialne* koordinate delca telesa  $\mathcal{B}$ , torej  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \xi$ , in  $\xi \in \mathcal{B}$ , in  $x^i$  kartezične *prostorske* koordinate, ki jih t.i. mirujoči opazovalec vpelje za identifikacijo točk v prostoru, potem predstavljajo en. (1) **koordinatne enačbe gibanja telesa**. Z njimi lahko definiramo lego delca v opazovanem trenutku in trenutno konfiguracijo telesa  $\mathcal{K}_t$ . Vsaka točka iz območja  $\mathcal{K}_t$ , torej  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}_t$  potem predstavlja trenutno lego delca  $\xi$ , ki ga lahko najdemo v  $\mathcal{B}$  iz inverznih enačb (1). Vse ostale možnosti zgornjih enačb prepuščamo bralcu.

Vzemimo zdaj drugi primer. Pomen koordinat  $x^i$  naj bo isti kot zgoraj,  $\xi^i$  pa naj predstavljajo konvektne koordinate. Torej  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbf{x}_t$ , kjer  $\mathbf{x}_t$  označuje lego delca v trenutku  $t$ , enačbe (1) pa tolmačimo kot **transformacijske enačbe**, katerih matriko parcialnih odvodov in njene obrata lahko uporabimo za transformacijo mehanskih količin, izraženih v komponentni obliki, in sicer, iz konvektivnega koordinatnega sistema v prostorskega in obratno. Ker lahko konvektni koordinatni sistem zamrznemo v poljubnem času od  $t_0$  do opazovanega trenutka  $t$ , lahko s pomočjo dveh nizov koordinatnih enačb (1), npr. pri času  $t_1$  in  $t_2$ , definiramo deformacijo kot razliko konvektivnih metričnih tenzorjev. Oldroyd je v [3] princip konvektivnih

koordinat uporabil za definicijo materialno objektivnih časovnih odvodov mehanskih količin, ki so potrebni v konstitutivnih enačbah izraženih v hitrostni obliki. Naprimer, v hipoelastičnem materialnem modelu povezujemo komponente materialno objektivne hitrosti napestostnega tenzorja z ustrežno hitrostjo deformacijskega tenzorja. Uporaba konvektivnega sistema je za lupine in krivočrtne linijske elemente neizogibna (glej npr [5]), v primeru modeliranja splošnih teles v področju velikih deformacij pa je nepotrebna. Seveda velja to le v primeru koordinatnega opisa, ki smo ga uporabljali v [4] v podrazdelku 2.1. Tam imajo namreč komponente deformacijskega gradienta vlogo transformacijskih koeficientov in taka vloga lahko ovira razumeti smisel razvoja materialnih modelov na podlagi lokalne multiplikativne razdelitve deformacijskega tenzorja. V invariantnem pristopu, prikazanem v 2.2 v [4], te ovire ni in zato je osnovna ideja konvektivnega sistema, ki vidi deformacijo delcev telesa v spremembi metričnega tenzorja, uporabljena tudi v omenjeni t.i. multiplikativni teoriji.

Za konec si oglejmo še en način tolmačenja koordinatnih en. (1). Tudi tu naj bo vloga koordinat  $x^i$  taka kot prej, koordinate  $\xi^i$  pa naj predstavljajo t.i. prostorske *referenčne koordinate* leg delcev v referenčni konfiguraciji  $\mathcal{K}_R$ , t. j.  $\mathbf{X}_R \in \mathcal{K}_R$ . V tem primeru lahko sistem (1) tolmačimo kot *enačbe deformacije* in gibanja telesa  $\mathcal{B}$  iz njegove referenčne konfiguracije,  $\mathcal{K}_R$ , v trenutno  $\mathcal{K}$ , ki je običajno predmet analize kinematičnih razmer opazovanega telesa. V tem smislu bi lahko enačbe (1) tolmačili tudi v razdelku 2.2, toda tam je vsa snov predstavljena v invariantni obliki (tako kot v [2] in [8]), ki lahko zajame vse tri načine tolmačenja koordinatnih enačb, vloga deformacijskega tenzorja pa ostane v vseh treh načinih enaka, t.j. tenzorska. Seveda bi bil mogoč prikaz celotne snovi iz razdelka 2.2 tudi v komponentni obliki in bi lahko opazili, da predstavlja sistem konvektivnih koordinat samo nek posebni koordinatni sistem splošnega pristopa, ki je prikazan v [1] in [7]. Za opozorilo naj še povemo, da smo v razdelku 2.2 v [4], zaradi poenostavitve celotne snovi, za referenčno konfiguracijo telesa upoštevali kar začetno  $\mathcal{K}_0$ , malo več svobode pa smo si privoščili v razdelku 2.1, da smo podrobneje pokazali značilnosti konvektivnega koordinatnega sistema.

## Literatura

- [1] A. C. Eringen, *Nonlinear theory of continuous media*. McGraw-Hill Series in Engineering Sciences, 1962.
- [2] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, NY, 1981.
- [3] J. G. Oldroyd, *On the formulation of rheological equations of state*. Proc. Royal Society of London series, A—Mathematical and physical sciences, 523-541, 1950.
- [4] T. Rojc, B. Štok, *Dva pristopa k uporabi konvektivnega koordinatnega sistema v analizi deformabilnih teles pri velikih deformacijah.*, Kuhljevi dnevi 2005, Podčetrtek, sept., 2005.
- [5] M. Saje, S. Srpčič, *Osnove nelinearne mehanike trdnih teles*. Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1993.
- [6] S. Srpčič, *Mehanika trdnih teles*. Univerzitetni učbenik, FGG, Ljubljana, 2003.
- [7] C. Truesdell, R.A. Toupin, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Band III/1, Springer/Verlag, Berlin, 1960.
- [8] C. Truesdell, W.Noll, *The Nonlinear Field Theories*, Handbuch der Physik, Band III/3, Springer/Verlag, Berlin, 1965.



## *Točna analiza dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem striga in zdrsa*

S. Schnabl, I. Planinc, M. Saje, G. Turk<sup>1</sup>

### *Exact solution of two-layered beams with shear and interlayer slip*

**Povzetek.** Predstavljen je matematični model in njegova analitična rešitev za točno analizo mehanskega obnašanja dvoslojnih materialno in geometrijsko linearnih ravninskih protoležečih nosilcev z upoštevanjem strižne deformacije prečnega prereza in zdrsa med sloji. Z izvedeno parametrično analizo smo analizirali vpliv strižne deformacije prečnega prereza na statične in kinematične količine posameznega sloja dvoslojnega prostoležečega nosilca obremenjenega s konstantno zvezno linijsko obtežbo. Analizirali smo vpliv strižnega deformiranja na obravnavane količine pri različnih geometrijskih in materialnih parametrih, kot so togost stika  $K$ , razmerje upogibne togosti proti strižni ( $E/G$ ) in razmerje razpona nosilca proti njegovi višini ( $L/h$ ). Primerjava tako dobljenih vertikalnih pomikov in prečnih sil pokaže, da je strižno deformiranje bolj pomembno za nosilce z bolj togo povezanimi sloji (večji  $K$ ), za kratke nosilce z majhnim razmerjem  $L/h$  in nosilcih iz materialov z visokimi vrednostmi razmerja  $E/G$ . V vseh teh primerih postane vpliv strižne deformacije na vertikalne pomike in prečne sile pomemben in mora tako biti pri načrtovanju takih konstrukcij upoštevan.

**Abstract.** A mathematical model is proposed and its analytical solution is derived for the analysis of the geometrically and materially linear two-layered beams with variable material and geometric characteristics of individual layer. The model takes into account the effect of the transverse shear deformation on displacements in each individual layer of a two-layer beam. The analytical study is carried out to evaluate the influence of the transverse shear deformation on the static and kinematic quantities. We study a simply supported two-layer planar beam subjected to the uniformly distributed load. Parametric studies have been performed to investigate the influence of shear varying material and geometric parameters, such as interlayer slip modulus ( $K$ ), flexural-to-shear rigidity ratios ( $E/G$ ) and span-to-depth ratios ( $L/h$ ) on those quantities. The comparisons of the results for vertical deflections and equilibrium shear forces show that shear deformations are more important for high slip modulus  $K$ , for “short” beams with small  $L/h$  ratios, and beams with high  $E/G$  ratios. In these cases the effect of the shear deformations becomes significant and has to be addressed in design.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

## 1 Uvod

Slojevite konstrukcije so v gradbeništvu pogosto uporabljeni konstrukcijski elementi. Uporabljajo se v mostogradnji, pri ojačitvah in sanacijah že obstoječih objektov oziroma njihovih delov, pri medetažnih konstrukcijah in podobno. Značilni primeri takih konstrukcij so armiranobetonske, sovprežne in t.i. 'sendvič' konstrukcije ter mnogo drugih. Mehansko obnašanje omenjenih konstrukcij je v veliki meri odvisno od načina povezanosti slojev oziroma od uporabljenih veznih sredstev. Absolutno togega stika tudi v primeru uporabe togih veznih sredstev praktično ni mogoče doseči. Posledica je medsebojni zdrs slojev. Ker pa ima običajno zdrs pomemben vpliv na mehansko obnašanje slojevitih konstrukcij, ga moramo pri analizi takih konstrukcij upoštevati.

Zanimanje za bolj natančno razumevanje obnašanja takih konstrukcij se je najprej pojavilo pri opazovanju avtocestnih mostov. Eksperimenti so potrdili odsotnost toge povezave med posameznimi sloji in v ta namen je bilo razvitih kar nekaj modelov za račun slojevitih konstrukcij. Temeljili so na linearno elastičnem materialu in Bernoullijevi hipotezi o ravnih prečnih prerezih. Verjetno prvi, nedvomno pa najbolj citirani je model Newmarka [13]. Kasneje razviti modeli se med seboj razlikujejo glede na uporabljene predpostavke, a v večini primerov se analiza z uporabo omenjenih modelov reducira na reševanje podobnih sistemov diferencialnih enačb drugega reda. Točna rešitev mehanskega obnašanja elastičnih prostoležečih nosilcev je v literaturi dobro znana [8, 9, 10, 11, 14, 16]. Z razvojem učinkovitih računskih postopkov in računalniške opreme, ki smo mu lahko priča v zadnjem času, pa je prišlo do izboljšanja elastičnih modelov in sicer tako, da omogočajo geometrijsko in materialno nelinearno analizo slojevitih konstrukcij, kot tudi upoštevanje časovnih vplivov, razpokanost ter podobno. Kar nekaj zanimivih numeričnih algoritmov je znanih iz literature [1, 3, 4, 5, 6, 7, 17].

Kot smo omenili že zgoraj, je ena izmed pomembnih predpostavk v teh modelih Bernoullijeva hipoteza o ravnih prečnih prerezih. Znano je, da klasična ali tudi inženirska Euler-Bernoullijeva teorija upogiba zanemari oziroma ne upošteva vpliva strižne deformacije prečnega prereza. Omenjena teorija temelji na predpostavki, da prerezi, ki so pred nastopom deformacije ravni in pravokotni na nedeformirano referenčno os nosilca ostanejo takšni tudi po njej. Posledica omenjene predpostavke je nična strižna deformacija oziroma neskončna strižna togost prečnega prereza. V realnosti material, ki bi imel takšne lastnosti seveda ne obstaja. Iz tega sledi, da je uporaba klasične teorije v nekaterih primerih vprašljiva. Tak primer so kratki in debeli (visoki) nosilci, pri katerih je razmerje  $E/G$  veliko in razmerje  $L/h$  majhno.

Prvi, ki je v teorijo upogiba nosilcev vključil tudi vpliv strižne deformacije je bil ukrajinski raziskovalec Timoshenko [18]. Vpliv strižne deformacije je upošteval kot dodatno rotacijo prečnega prereza. Na ta način je predpostavil, da je strižna deformacija konstantna po višini prereza. V literaturi je teorija dobro znana kot Timoshenkova teorija upogiba. V sedemdesetih letih prejšnjega stoletja je na ta način strižno deformacijo v svoj model vključil tudi Reissner [15]. Potreba po natančnejši določitvi razporeda in velikosti strižnih napetosti po prerezu (posebno v letalski in vesoljski industriji) je vodila do izpeljave bolj natančnih iterativnih strižnih teorij višjih redov. Naj omenimo le, da je začetni približek pri strižnih teorijah višjih redov analogna Euler-Bernoullijevi teoriji nosilcev, prva iteracija pa običajno Timoshenkovi teoriji upogiba. Ker v okviru zahtevane natančnosti višje iteracije pri analizi konstrukcij, ki nastopajo v grad-

beništvo ne vplivajo pomembno na rezultate, v prispevku obravnavamo le prvo iteracijo takih metod oziroma Timoshenkovo teorijo upogiba.

V literaturi ni zaslediti analitične rešitve dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij posameznih slojev in zdrsa med njimi. Zato v članku predstavimo točno rešitev mehanskega obnašanja geometrijsko in materialno linearnih dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem strižnih deformacij in zdrsom med sloji. S parametričnimi analizami pokažemo vpliv strižne deformacije na mehansko obnašanje takih konstrukcij. Na ta način prvi izpeljemo analitični model za račun slojevitih konstrukcij, ki upošteva strižno deformiranje prerezov in zdrs med posameznimi sloji. Z njim pokažemo, da imata zdrs in strižna deformacija v nekaterih primerih zelo velik vpliv na mehansko obnašanje slojevitih konstrukcij.

## 2 Osnovne enačbe dvoslojnega nosilca z upoštevanjem zdrsa in strižne deformacije ter postopek reševanja

Predstavljena formulacija modela dvoslojnega nosilca z upoštevanjem strižne deformacije ter zdrsa med sloji je osnovana na lineariziranih Reissnerjevih enačbah kinematično točnega modela ravninskega nosilca. Tako je mehansko obnašanje dvoslojnega nosilca z upoštevanjem strižne deformacije in zdrsom med sloji določeno z dvema ločenima sistemoma algebrasko – diferencialnih enačb. Sestavljajo jih kinematične, ravnotežne, konstitucijske in vezne enačbe ter pripadajoči statični in kinematični robni pogoji za vsak sloj slojevitega nosilca posebej. Razen  $\gamma^a$  in  $\gamma^b$ , ki sta strižni deformaciji spodnjega in zgornjega sloja, so enačbe in pomen ostalih oznak v njih detajlno predstavljene v [5], zato jih tu samo povzamemo:

$$u^{a'} - \varepsilon^a = 0, \quad u^{b'} - \varepsilon^b = 0, \quad (1)$$

$$w^{a'} + \varphi^a - \gamma^a = 0, \quad w^{b'} + \varphi^b - \gamma^b = 0, \quad (2)$$

$$\varphi^{a'} - \kappa^a = 0, \quad \varphi^{b'} - \kappa^b = 0, \quad (3)$$

$$w^a - w^b = 0, \quad (4)$$

$$\mathcal{N}^{a'} - p_t = 0, \quad \mathcal{N}^{b'} + p_t + p_x = 0, \quad (5)$$

$$Q^{a'} + p_n = 0, \quad Q^{b'} - p_n + p_z = 0, \quad (6)$$

$$\mathcal{M}^{a'} - Q^a = 0, \quad \mathcal{M}^{b'} - Q^b + m_y = 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{N}^a = \mathcal{N}_c^a = C_{11}^a \varepsilon^a + C_{12}^a \kappa^a, \quad \mathcal{N}^b = \mathcal{N}_c^b = C_{11}^b \varepsilon^b + C_{12}^b \kappa^b, \quad (8)$$

$$Q^a = Q_c^a = C_{33}^a \gamma^a, \quad Q^b = Q_c^b = C_{33}^b \gamma^b, \quad (9)$$

$$\mathcal{M}^a = \mathcal{M}_c^a = C_{21}^a \varepsilon^a + C_{22}^a \kappa^a, \quad \mathcal{M}^b = \mathcal{M}_c^b = C_{21}^b \varepsilon^b + C_{22}^b \kappa^b, \quad (10)$$

$$\Delta = u^a - u^b, \quad (11)$$

$$p_t = K\Delta, \quad (12)$$

in

$$x + u^a = x^* + u^b \rightarrow x^* = x + \Delta, \quad (13)$$

$$Q = Q^a + Q^b, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}^a + \mathcal{M}^b. \quad (14)$$

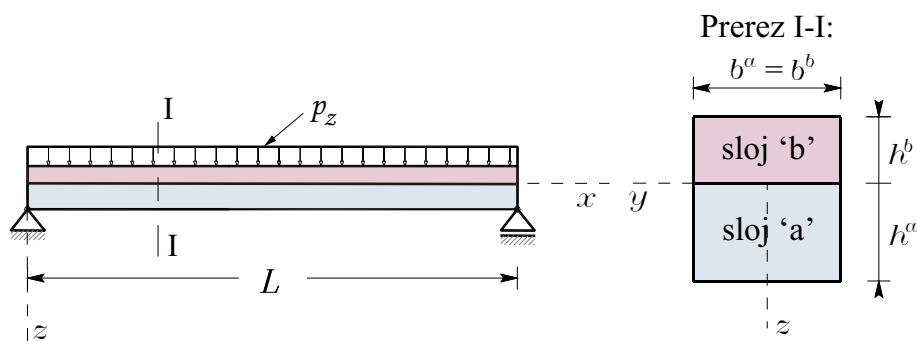


V enačbi (9) koeficienta  $C_{33}^a$  in  $C_{33}^b$  predstavljata strižni togosti prečnih prerezov posameznih nosilcev. Sistem (1)–(12) sestavlja 21 enačb za 21 neznanih funkcij  $u^a, u^b, w^a, w^b, \varphi^a, \varphi^b, \varepsilon^a, \varepsilon^b, \kappa^a, \kappa^b, \gamma^a, \gamma^b, \mathcal{N}^a, \mathcal{N}^b, Q^a, Q^b, \mathcal{M}^a, \mathcal{M}^b, \Delta, p_t, p_n$ , medtem ko sestavlja sistem (13)–(14) 3 enačbe za 3 neznanne funkcije  $x^*, Q, \mathcal{M}$ . Glede na preprostost sistema enačb (1)–(12) je reševanje le tega preprosto.

Najprej z integriranjem rešimo ravnotežne enačbe, v nadaljevanju s konstitucijskimi enačbami izrazimo deformacijske količine v odvisnosti od statičnih začetnih vrednosti nosilca. Nato z dobljenimi izrazi za deformacije z integriranjem rešimo kinematične enačbe. Tako izrazimo statične začetne vrednosti nosilca v odvisnosti od kinematičnih robnih količin. Na koncu iz ravnotežja vozlišč konstrukcije izračunamo neznanne robne kinematične količine nosilca.

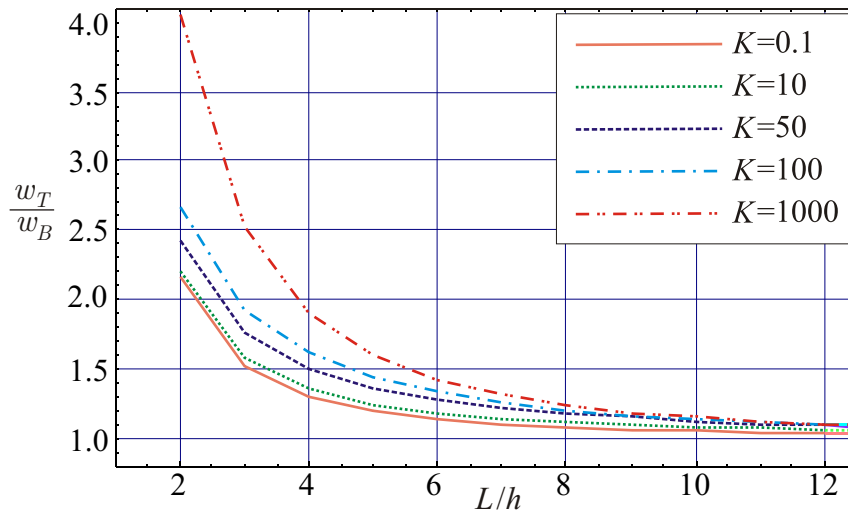
### 3 Parametrična analiza

Učinkovitosti predstavljenega računskega postopka za točno analizo dvoslojnih nosilcev prikazemo s parametrično študijo vpliva strižne deformacije na mehansko obnašanje prostoležečega dvoslojnega nosilca obremenjenega z zvezno linijsko obtežbo  $p_z$  (glej sliko 1). V okviru izvedene parametrične študije smo analizirali vpliv različnih parametrov, kot so togost stika  $K$ , razmerje upogibne in strižne togosti  $E/G$ , razmerje dolžine proti višini nosilca  $L/h$  itd., na statične in kinematične količine dvoslojnega prostoležečega nosilca in rezultate primerjali z rešitvami dobljenimi z uporabo klasične upogibne teorije.



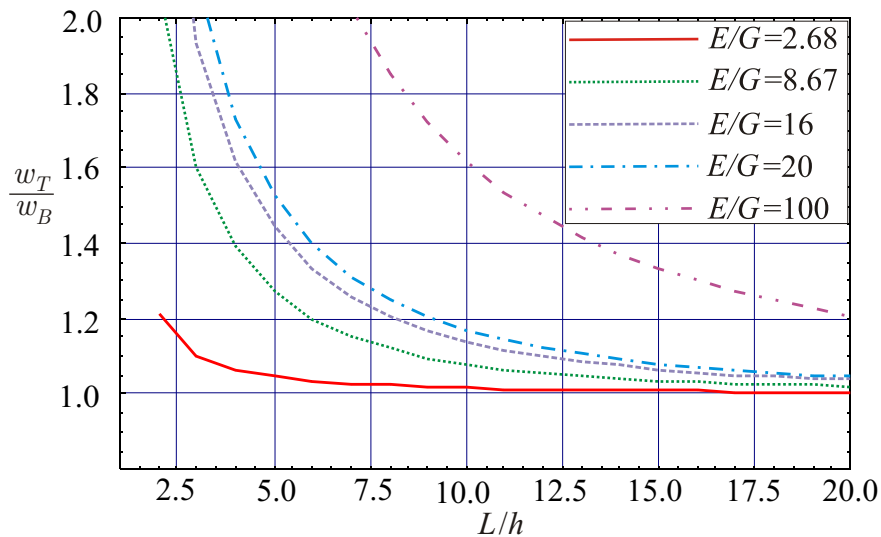
**Slika 1** : Geometrija, obtežba in materialne karakteristike enostavno podprtega dvoslojnega prostoležečega nosilca.

Primerjava vertikalnih pomikov, izračunanih na sredini razpona nosilca in za različne togosti stika  $K$  in  $L/h$  po Timoshenku ( $w_T$ ) in po Bernoulliju ( $w_B$ ), pokaže, da je vpliv strižne deformacije večji za večje vrednosti  $K$  in za manjše  $L/h$ . Vpliv strižne deformacije raste z večanjem  $K$  in manjšanjem  $L/h$ . Iz slike 2 je razvidno, da je v primeru lesenih nosilcev, kjer je razmerje  $E/G = 16$ , vpliv striga tudi v primeru relativno vitkih nosilcev ( $L/h = 10$ ) precejšen. Vpliv je še večji pri krajših nosilcih ( $L/h = 5$ ), kjer za različne togosti stika  $K$  znaša od 19.2% do 59.5%. Poleg tega smo analizirali tudi vpliv izbire materiala ( $E/G$ ) na velikost vpliva strižne deformacije na vertikalne pomike dvoslojnega prostoležečega nosilca (glej sliko 3).



**Slika 2** : Vpliv strižne deformacije na vertikalne pomike lesenega dvoslojnega prostoležečega nosilca  $E/G = 16$ , pri različnih vrednostih  $K$  in  $L/h$ .

Vertikalne pomike smo izračunali za različna razmerja ( $E/G$ ). V primeru izotropnega materiala z  $E/G = 2.68$  (jeklo, aluminij, baker, itd.) znaša vpliv striga pri  $L/h = 5$  od 0.3% do 8.3% za togosti stika  $0.001\text{kN/cm}^2 \leq K \leq 1000\text{kN/cm}^2$ . Za take nosilce je vpliv striga zanemarljiv z izjemo zelo kratkih nosilcev ( $L/h \leq 3$ ) in zelo togih stikov ( $K \geq 100\text{kN/cm}^2$ ). V primeru

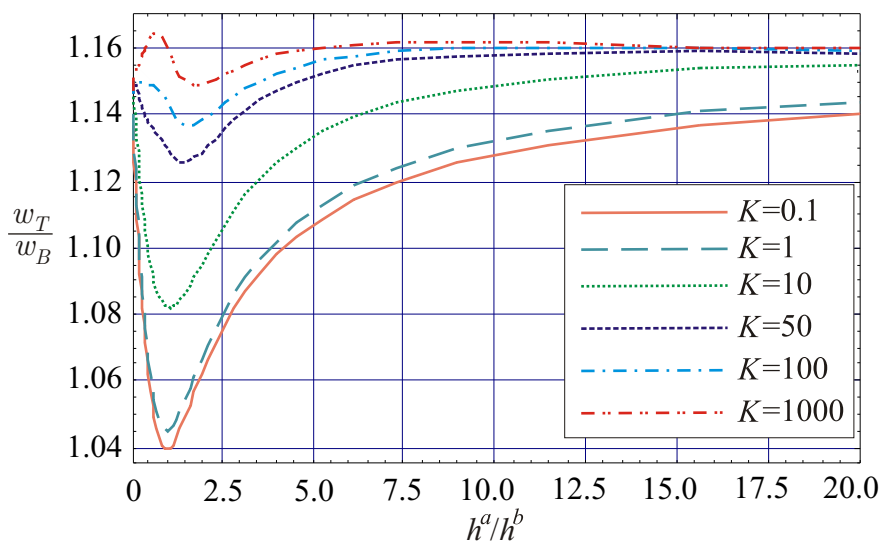


**Slika 3** : Vpliv strižne deformacije na vertikalne pomike lesenega dvoslojnega prostoležečega nosilca z  $K = 100$ , pri različnih vrednostih  $E/G$  in  $L/h$ .

nosilcev iz steklenih vlaken  $E/G = 8.67$  in  $L/h = 10$  je vpliv striga manjši od 8.4% in je tako

zanemarljiv, medtem ko postane pomemben pri  $L/h \leq 5$  saj je od 10.4% do 32.9%. Rezultati za leseni nosilec z  $E/G = 16$  so prikazani na sliki 2. Poleg tega smo izračunali tudi vpliv striga za material, ki nima realnih lastnosti. V primeru, da je  $E/G = 100$  in  $10 \leq L/h \leq 20$ , znaša vpliv striga od 7.6% do 21.0%.

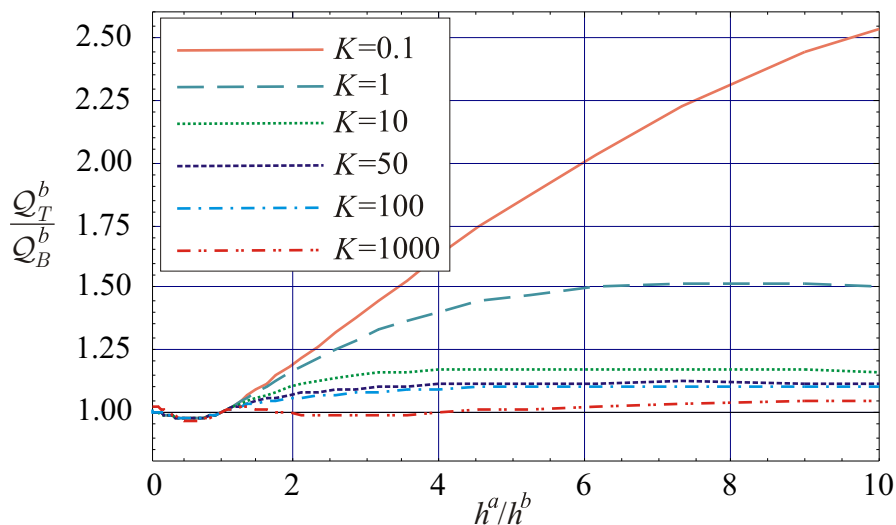
Slika 4 prikazuje vpliv strižne deformacije na vertikalne pomike za različne  $K$  in različna razmerja višin posameznih slojev ( $h^a/h^b$ ). V primeru relativno vitkih lesenih dvoslojnih nosil-



**Slika 4** : Vpliv strižne deformacije na vertikalne pomike lesenega dvoslojnega prostoležečega nosilca z  $L/h = 10$  in  $E/G = 16$ , pri različnih vrednostih  $K$  in  $h^a/h^b$ .

cev ( $L/h = 5$  in  $E/G = 16$ ) vidimo, da je vpliv striga za določen  $K$  minimalen, ko sta sloja približno enakih višin. Iz slike 4 je tudi razvidno, da je odstopanje vpliva striga za različna razmerja  $h^a/h^b$  večje za bolj toge stike. Za podajne stike ( $K \leq 1 \text{ kN/cm}^2$ ) pa je vpliv striga za določeno razmerje  $h^a/h^b$  lahko do štirikrat manjši kot v primeru dokaj togega stika ( $K \geq 100 \text{ kN/cm}^2$ ).

Analizirali smo tudi vpliv  $h^a/h^b$  in  $K$  na velikost vpliva strižne deformacije na velikost prečnih sil. Za primer dvoslojnega nosilca z  $E/G = 16$  in  $L/h = 10$  smo izračunali prečne sile. Izkaže se (glej sliko 5), da so lahko prečne sile v sloju, ki je zelo tanek v primerjavi z drugim v primeru podajnega stika ( $K \leq 0.1 \text{ kN/cm}^2$ ) tudi do 2.5-krat večje, kot so prečne sile v tem sloju izračunane po klasični upogibni teoriji.



**Slika 5** : Vpliv strižne deformacije na velikost prečne sile  $Q^b$  lesenega dvoslojnega prostoležečega nosilca z  $L/h = 10$  in  $E/G = 16$ , pri različnih vrednostih  $K$  in  $h^a/h^b$ .

#### 4 Zaključek

V članku smo predstavili računski postopek za točno analizo mehanskega obnašanja geometrijsko in materialno linearnih dvoslojnih prostoležečih nosilcev z upoštevanjem strižne deformacije prečnih prerezov in medsebojnim zdrsom med slojema. S parametrično analizo smo pokazali, da ima strižno deformiranje v nekaterih primerih pomemben vpliv na vertikalne pomike. Še posebej je vpliv izrazit pri kratkih lesenih dvoslojnih nosilcih katerih sloji so dokaj toga povezani. Pokazali smo tudi, da so prečne sile tankega sloja lahko tudi do 2.5-krat večje, kot pa prečne sile izračunane z uporabo klasične upogibne teorije.

#### 5 Zahvala

Pričujoči prispevek Simona Schnabla je del raziskovalnega projekta št. 3311-02-831625, ki ga finančno podpira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije. Za podporo se iskreno zahvaljujemo.

#### Literatura

- [1] A. Ayoub, *A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams*, Finite Elements in Analysis and Design, 37, 929–959, 2001.
- [2] G. R. Cowper, *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*, Journal of Applied Mechanics, 33(2), 335–340, 1966.
- [3] B. Čas, M. Saje, I. Planinc, *Nonlinear finite element analysis of composite planar frames with inter-layer slip*, Computers and Structures, 82, 1901–1912, 2004.

- [4] B. Čas, S. Bratina, M. Saje, I. Planinc, *Non-linear analysis of composite steel-concrete beams with incomplete interaction*, Steel and Composite Structures, 4(6), 489–507, 2004.
- [5] B. Čas, *Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji*, doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2004.
- [6] G. Fabbrocino, G. Manfredi, E. Cosenza, *Modelling of continuous steel-concrete composite beams: computational aspects*, Computers and Structures, 80, 2241–2251, 2002.
- [7] N. Gattesco, *Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection*, Journal of Constructional Steel Research, 52, 195–218, 1999.
- [8] U. A. Girhammar, V. K. A. Gopu, *Composite beam-columns with inter-layer slip—exact analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 199(4), 1265–1282, 1993.
- [9] J. R. Goodman, E. P. Popov, *Layered wood systems with inter-layer slip*, Wood Science, 1(3), 148–158, 1969.
- [10] N. A. Jasim, *Computation of deflections for continuous composite beams with partial interaction*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures and Buildings 122, 347–354, 1997.
- [11] N. A. Jasim, A. A. M. Ali, “*Deflections of composite beams with partial shear connection*”, Structural Engineer, 74, Nos. 23 and 24, 1996.
- [12] R. T. Leon, I. M. Viest, *Theories of incomplete interaction in composite beams*, Composite construction in steel and concrete III, ASCE, 858–870, 1998.
- [13] N. M. Newmark, C. P. Siest, C. P. Viest, *Test and analysis of composite beams with incomplete interaction*, Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, 1, 75–92, 1951.
- [14] G. Ranzi, M. A. Bradford, B. Uy, *A general method of analysis of composite beams with partial interaction*, Steel and Composite Structures, 3(3), 169–184, 2003.
- [15] E. Reissner, *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*, Journal of Applied Mechanics and Physics (ZAMP), 23, 795–804, 1972.
- [16] S. Schnabl, I. Planinc, M. Saje, B. Čas, G. Turk, *An analytical model of layered continuous beams with partial interaction*, Structural Engineering and Mechanics, submitted for publication.
- [17] S. T. Smith, J. G. Teng, *Interfacial stresses in plated beams*, Engineering Structures, 23, 857–871, 2001.
- [18] S. P. Timoshenko, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Philosophical Magazine, Series 6, 41(245), 744–746, 1921.



## *Vpliv kristalografske orientacije zrn na mikrostrukturno kratke razpoke v nerjavnem jeklu 316L*

I. Simonovski<sup>1</sup>, K.-F. Nilsson<sup>2</sup> in L. Cizelj<sup>1</sup>

### *The Effect of Crystallographic Orientations on the Microstructurally Small Cracks in 316L Stainless Steel*

**Povzetek.** Predstavljen je model končnih elementov za simulacijo obnašanja mikrostrukturno kratkih razpok v nerjavnem jeklu 316L. Model vključuje naključne oblike in velikosti kristalnih zrn ter napredni konstitutivni model plastičnih deformacij zaradi zdrsa kristalnih ravnin. Normalna (NOR) in prečna komponenta (POR) odpiranja vrha razpoke je izračunana za več polikristalov z različnimi kristalografskimi orientacijami zrn. Pokazano je, da rotacija kristalografske orientacije zrna z razpoko spremeni NOR za 1.78, POR pa za 1.37. Orientacije kristalografskih orientacij sosednjih zrn imajo manjši vpliv. Dodatno je pokazano, da velikost območja plastičnosti hitro postane primerljiva z velikostjo razpoke, kar pri mikrostrukturno kratkih razpokah omejuje uporabo modelov linearne elastične lomne mehanike.

**Abstract.** A plane-strain finite element crystal plasticity model of microstructurally small cracks emanating at a surface grain in a 316L stainless steel is presented. The crack tip opening (NOR) and sliding displacements (POR) are computed for polycrystal models, considering also different crystallographic orientations. Rotating the crystal lattice of the crack-containing grain can change the NOR and POR by a factor of up to 1.78 and 1.37, respectively. For the same case rotating the crystallographic orientations of the neighbouring grains has a slightly smaller effect. Another important observation is that the crack tip plastic zone becomes comparable with the crack size already at relatively low loads (well below  $0.5R_{p0.2}$ ) and linear elastic fracture models are therefore not applicable.

## 1 Uvod

Lastnosti mikrostrukturno kratkih razpok se bistveno razlikujejo od lastnosti dolgih razpok. Povprečna hitrost rasti razpoke je lahko pri ekvivalentni obremenitvi ( $\Delta K$ ) konice razpoke za

---

<sup>1</sup> Institut "Jožef Stefan", Odsek za reaktorsko tehniko, Jamova 39, SI-1000 Ljubljana, Slovenija

<sup>2</sup> Institute for Energy, European Commission, DG-JRC, Postbus 2, 1755 ZG Petten, Nizozemska

kratko razpoko bistveno večja kot za dolgo razpoko [1]. Poleg tega mikrostrukturno kratke razpoke rastejo tudi pod mejo ( $\Delta K_{th}$ ), kjer dolge razpoke ne rastejo več [2]. Lokalna hitrost rasti kratke razpoke je močno odvisna tudi od mikrostrukturnih lastnosti okolice razpoke: mej kristalnih zrn, kristalografskih smeri, vključkov, praznin, materialnih faz, ipd. [3, 4]. Mikrostrukturno kratke razpoke pogosto nastanejo v lokaliziranih pasovih zdrs in najprej napredujejo izključno po drsnih ravninah. Obremenitev konice take razpoke je v splošnem mešanega tipa, razpoka pa spreminja smer; n.pr. pri prehodu meje kristalnega zrna.

Eksperimentalni podatki kažejo, da se normalna in prečna komponenta odpiranja konice razpoke pri prehodu meje kristalnega zrna zmanjšata [5]. Pri tem meja kristalnega zrna deluje kot ovira za napredovanje zdrs preko meje same in zato lahko začasno ustavi napredovanje območja plastičnosti [6]. Kristalografske orientacije posameznih zrn imajo pri tem pomemben vpliv in lahko zaustavijo, upočasnijo oz. pospešijo napredovanje razpoke [7].

V tem prispevku prikazujemo materialni model za izračun vpliva osnovnih mikrostrukturnih lastnosti na mikrostrukturno kratke razpoke s posebnim poudarkom na kristalografski orientaciji zrn. Vsakemu zrnju se dodeli naključna kristalografska orientacija z rotacijo kristala okoli Z osi iz začetne lege. Ta je enaka pri vseh kristalih in zagotavlja ravninsko deformacijsko stanje tudi po rotaciji okoli Z osi. Z rotacijo kristala okoli dodatne osi bi lahko dosegli tudi splošno deformacijsko stanje, kjer različne kristalografske orientacije zrna vplivajo tudi na nagib razpoke v smeri globine. V tem primeru bi morali uporabiti numerično zahtevnejši 3D model. Naključna oblika ter velikost kristalnih zrn sta vključeni v model z uporabo Voronojevega mozaika [8]. Izračun zdrs kristalnih ravnin omogoči vključen konstitutivni model kristalne plastičnosti. Z navedenim pristopom neposredno zajamemo deformacijski mehanizem kristalnih zrn.

## 2 Opis modela

### 2.1 Konstitutivni model

Elastična deformacija monokristala je v splošnem anizotropna. Popišemo jo s posplošenim Hookovim zakonom,

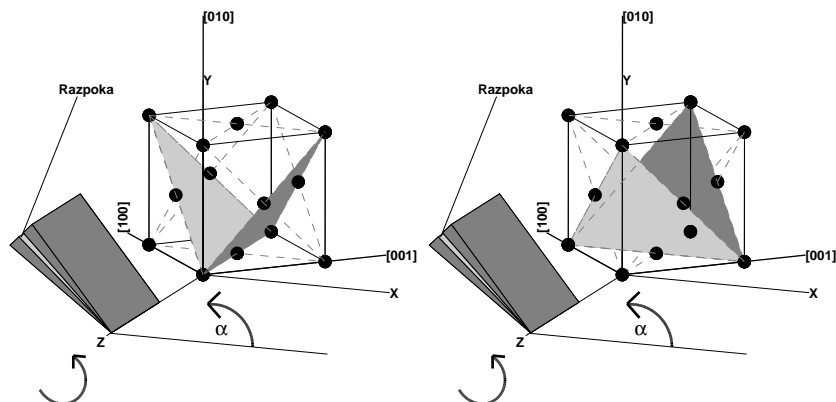
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (1)$$

kjer  $\sigma_{ij}$  predstavlja napetostni tenzor drugega reda,  $C_{ijkl}$  tenzor togosti četrtega reda in  $\epsilon_{kl}$  tenzor specifičnih deformacij drugega reda. Število neodvisnih komponent tenzorja togosti je za kubično kristalno strukturo 3.

Za popis plastičnega obnašanja materiala na nivoju kristalnega zrna smo uporabili teorijo kristalne plastičnosti [9]. Pri tej teoriji predpostavimo, da zadosti velika Schmidova napetost povzroči zdrs kristalnih ravnin, slika 1, in s tem tudi plastično deformacijo. Ostale mehanizme nastanka plastičnih deformacij zaenkrat zanemarimo. Kinematsko stanje v obliki hitrostnega gradienta  $\dot{u}_{i,j} = \frac{1}{dt} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  lahko razstavimo na elastični  $\dot{u}_{i,k}^{el}$  in plastični del  $\dot{u}_{k,j}^p$ ,  $\dot{u}_{i,j} = \dot{u}_{i,k}^{el} \dot{u}_{k,j}^p$ , pri čemer je plastični del izražen kot [10],

$$\dot{u}_{i,j}^p = \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{(\alpha)} s_i^{(\alpha)} m_j^{(\alpha)}. \quad (2)$$

Drсни sistem ( $\alpha$ ) definiramo z njegovo normalo  $m_i^\alpha$ , in drsno smerjo  $s_i^\alpha$ . Seštevanje poteka preko vseh aktivnih drsni sistemov.  $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$  predstavlja hitrost zdrsa v sistemu ( $\alpha$ ). Kumulativni zdrs,  $\gamma$ , definiramo kot,  $\gamma = \sum_{\alpha} \int_0^t |\dot{\gamma}^{(\alpha)}| dt$ .



Slika 1 : Drsne ravnine ploskovno centrirane kubične strukture ter razpoka pri  $\alpha = 0^\circ$ .

Utrjevanje materiala definiramo s povezavo med hitrostjo zdrsa  $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$  in Schmidovo napetostjo  $\tau^{(\alpha)}$  preko izrazov

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{a}^{(\alpha)} \left( \frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right) \left| \frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right|^{n-1}, \quad \tau^{(\alpha)} = s_i^{(\alpha)} \sigma_{ij} m_j^{(\alpha)} \quad (3)$$

Do plastifikacije pride kadar Schmidova napetost prestopi kritično strižno napetost  $\tau_0$ .  $\dot{a}^{(\alpha)}$  predstavlja referenčno stopnjo strižne deformacijske hitrosti,  $n$  občutljivostni koeficient strižne deformacije in  $g^{(\alpha)}$  trenutno stanje utrjevanja monokristala. To stanje izračunamo iz

$$\dot{g}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad (4)$$

kjer so  $h_{\alpha\beta}$  moduli utrjevanja. V tem delu uporabljamo Peirce et al. zakon o utrjevanju materiala [11], kjer so moduli utrjevanja definirani kot

$$h_{\alpha\alpha} = h(\gamma) = h_0 \operatorname{sech}^2 \left| \frac{h_0 \gamma}{\tau_s - \tau_0} \right|, \quad h_{\alpha\beta} = qh(\gamma), \quad (\alpha \neq \beta). \quad (5)$$

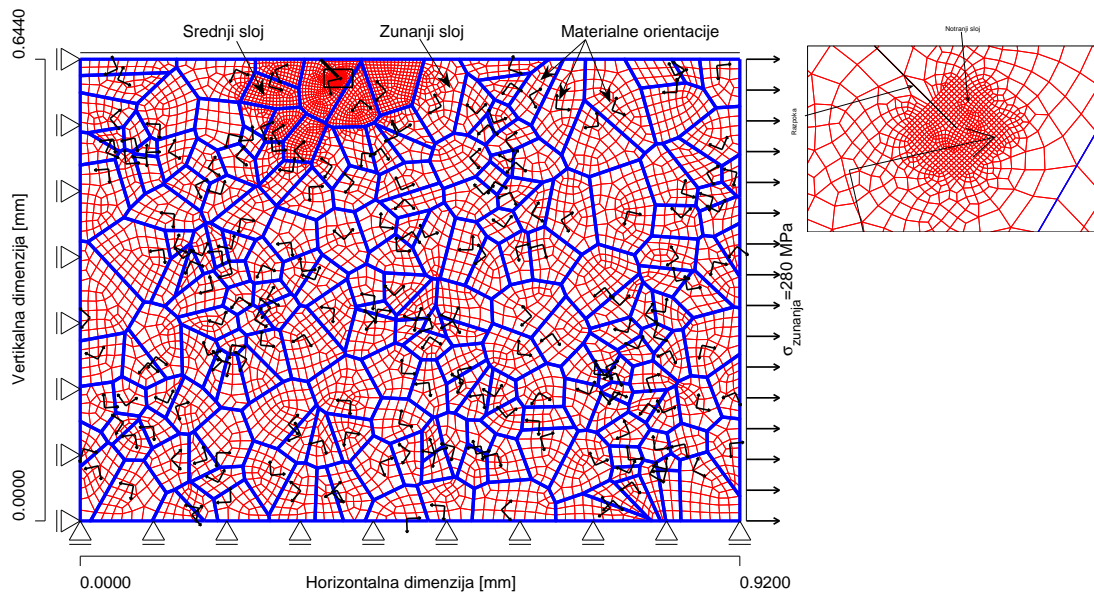
V zgornjem izrazu predstavlja  $h_0$  začetni modul utrjevanja,  $\tau_0$  mejo tečenja in  $\tau_s$  mejno napetost, nad katero se začnejo velike plastične deformacije [12].  $q$  je koeficient utrjevanja. Implementacija konstitutivnega modela je izvedena kot podprogram v ABAQUS paketu končnih elementov.

## 2.2 Opis strukturnega modela in materialnih parametrov

Model končnih elementov je pravokotni blok, sestavljen iz 212 kristalnih zrn naključne velikosti in oblike, slika 2. Vsako zrno razdelimo v mrežo 8-vozlíščnih, kvadratičnih končnih



elementov namenjenih ravninskemu napetostnemu stanju (CPE8R). Ravninsko deformacijsko stanje v ravnini XY dosežemo s postavitvijo modela na sliki 2 v XY ravnino. Kubično kristalno strukturo vsakega zrna (slika 1) postavimo tako, da je kot med [100] smerjo kristala in X osjo  $135^\circ$ . S tem dosežemo simetričnost kristala glede na XZ ravnino kar zagotavlja ravninsko deformacijsko stanje. Vsako kristalno zrno je dodatno zarotirano okoli Z osi za kot  $\alpha$  naključne vrednosti. S to dodatno rotacijo primarna oz. konjugirana drsna ravnina sovpade s smermi največjih strižnih napetosti pri  $\alpha = 9.735^\circ, 80.264^\circ, 99.735^\circ$  in  $170.264^\circ$ , slika 3.



**Slika 2** : Model končnih elementov, robni pogoji in zunanja obremenitev.

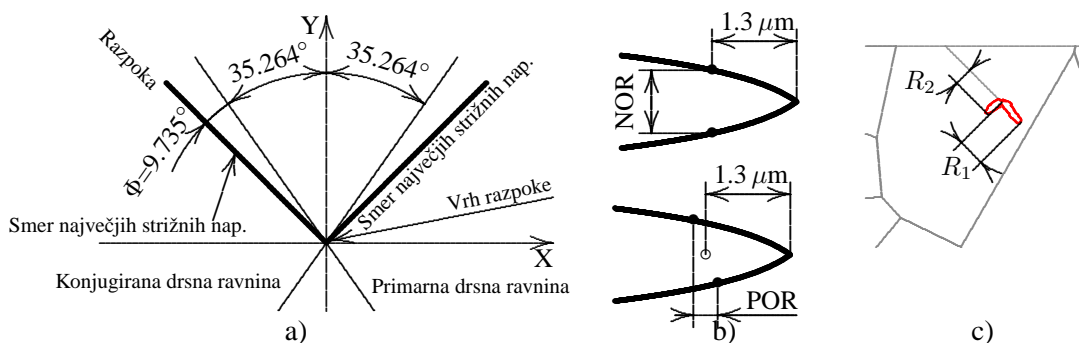
Kratko razpoko, značilno I. stopnjo rasti utrujenostne razpoke, predpostavimo v eni izmed smeri največjih strižnih napetosti, slika 3. Model na desnem robu obremenimo s statično zunanjo obremenitvijo 280 MPa. Predpisani robni pogoji so prikazani na sliki 2. Z njimi zahtevamo, da se desni oz. zgornji rob lahko premikata samo vzporedno levemu oz. spodnjemu robu. S tem v prvi aproksimaciji zajamemo vpliv okolišnega materiala, saj predpostavimo, da je model vgrajen v večje telo.

Za monokristal so bile uporabljene naslednje snovne konstante [13]:  $C_{iiii}=184000$  MPa,  $C_{ijij}=108000$  MPa,  $C_{ijji}=93600$  MPa,  $h_0=330$  MPa,  $\tau_s=270$  MPa,  $\tau_0=100$  MPa,  $n=55$ ,  $\dot{\alpha}^{(\alpha)}=0.001$  in  $q=1$ . Primernost izbrane mreže je bila potrjena v prejšnji analizi [13]. Opisani elasto-plastični materialni model je uporabljen v vseh nadaljnjih analizah.

### 3 Rezultati

#### 3.1 Vpliv kristalografske orientacije zrna z razpoko na odpiranje vrha razpoke

V tem delu smo spreminjali kristalografsko orientacijo zrna z razpoko od  $0^\circ$  do  $180^\circ$  v korakih po  $2^\circ$ . Zrnom, ki neposredno mejijo na zrno z razpoko, smo postavili kristalografsko orientacijo na  $269.4^\circ$ , kar je povprečna vrednost kristalografskih orientacij teh zrn, določenih z generator-



**Slika 3** : a) koti med drsnimi ravninami in ravnino razpoke pri  $\alpha = 0^\circ$ , b) definicija NOR in POR, c) definicija velikosti območja plastičnosti v dveh smereh.

jem naključnih števil. Dolžina razpoke je enaka  $0.5D$  pri čemer je  $D=70.87 \mu\text{m}$  kvadratni koren površine zrna z razpoko.

Za vsako kristalografsko orientacijo zrna z razpoko smo izračunali normalno (NOR) in prečno komponento (POR) odpiranja vrha razpoke v  $1.3 \mu\text{m}$  za vrhom razpoke, slika 3 b). Rezultate prikazuje slika 4. Opazimo lahko, da kristalografska orientacija zrna z rapoko pomembno vpliva na NOR in POR vrednosti. Pri največji zunanji obremenitvi  $280 \text{ MPa}$  sta razmerji  $\text{NOR}_{\text{max}}/\text{NOR}_{\text{min}}$  in  $\text{POR}_{\text{max}}/\text{POR}_{\text{min}}$   $1.78$  in  $1.37$ . Pri zunanji obremenitvi  $0.5R_{p0.2}=125 \text{ MPa}$  se ti vrednosti malo znižata (območje plastičnosti je pri nižji obremenitvi bistveno manjše) a sta še vedno  $1.42$  za NOR in  $1.21$  za POR.

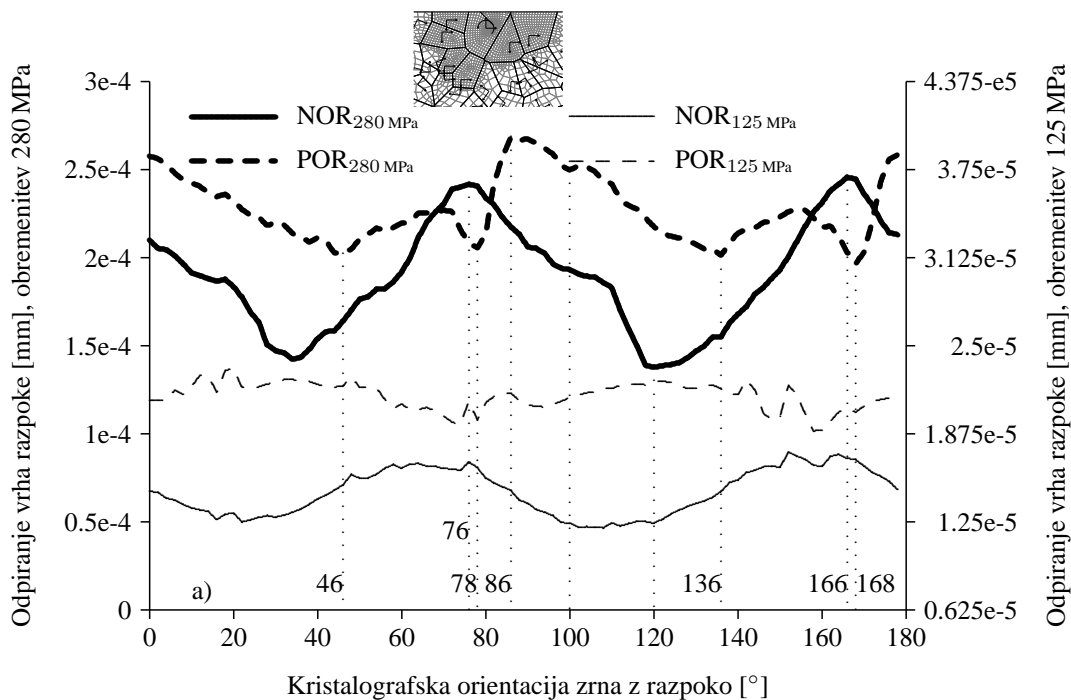
Obravnavali smo tudi primer, kjer smo kristalografsko orientacijo zrna z razpoko postavili na  $9.735^\circ$  (ravnina razpoke sovpada s primarno drsno ravnino), kristalografske orientacije zrn, ki neposredno mejijo na zrno z razpoko, pa smo simultano povečevali od  $0^\circ$  do  $180^\circ$  v korakih po  $2^\circ$ . Tudi v tem primeru smo opazili bistven vpliv kristalografskih orientacij;  $\text{NOR}_{\text{max}}/\text{NOR}_{\text{min}}=\text{POR}_{\text{max}}/\text{POR}_{\text{min}}=1.58$  pri zunanji obremenitvi  $280 \text{ MPa}$ .

### 3.2 Velikost območja plastične deformacije

V tem delu bomo prikazali vpliv meje kristalnega zrna na širitev območja plastičnosti okoli vrha razpoke dolžine  $0.5D$ . V ta namen bomo zrnu z razpoko določili kristalografsko orientacijo  $9.735^\circ$  (ravnina razpoke sovpada s primarno drsno ravnino), kristalografske orientacije zrn, ki neposredno mejijo na zrno z razpoko, pa postavimo na  $135^\circ$ . S tem dosežemo največjo možno razliko kotov med drsnimi ravninami v zrnu z razpoko in okolišnjimi zrni [13].

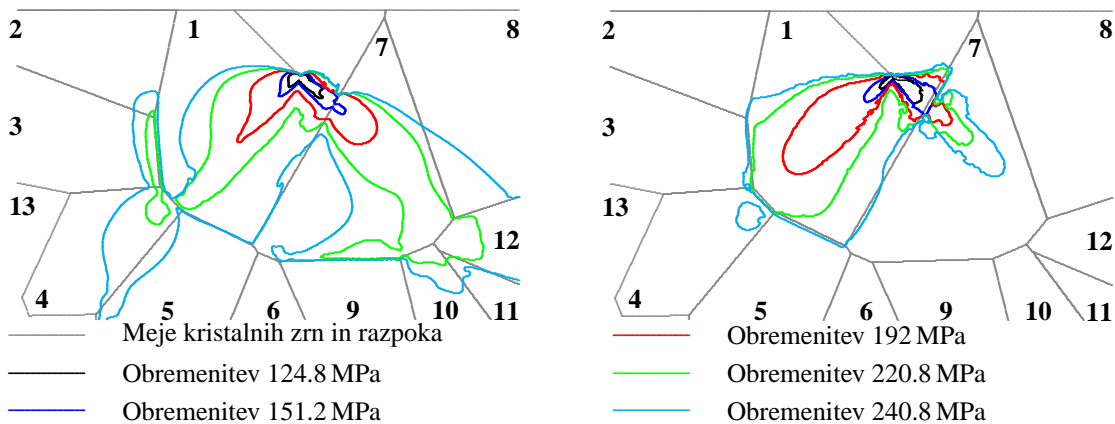
Za določitev območja plastifikacije materiala bomo uporabili dva kriterija. Prvi je klasičen Misesov kriterij  $\sigma_{Mises} = R_{p0.2}=250 \text{ MPa}$ . Drugi temelji na teoriji kristalne plastičnosti in primerja trenutno stanje utrjenosti monokristala  $g^{(\alpha)}$ , izraz (4), z začetno vrednostjo enako  $\tau_0$ . Trenutno stanje utrjenosti monokristala  $g^{(\alpha)}$  se v procesu plastifikacije materiala monotono povečuje. Do plastifikacije materiala po tem kriteriju torej pride, če je aktiven vsaj en drsni sistem:  $\max\left(\frac{g^{(\alpha)}}{\tau_0}\right) > 1$ .

Slika 5 prikazuje območje plastičnosti za oba navedena kriterija. Opazimo lahko, da se območje plastičnosti pri enaki zunanji obremenitvi med obema kriterijema precej razlikuje. Pri nizki zunanji obremenitvi so razlike relativno majhne. Območje plastičnosti v smeri razpoke ( $R_1$ ),



**Slika 4 :** Odpiranje vrha razpoke v odvisnosti od kristalografske orientacije zrna z razpoko.

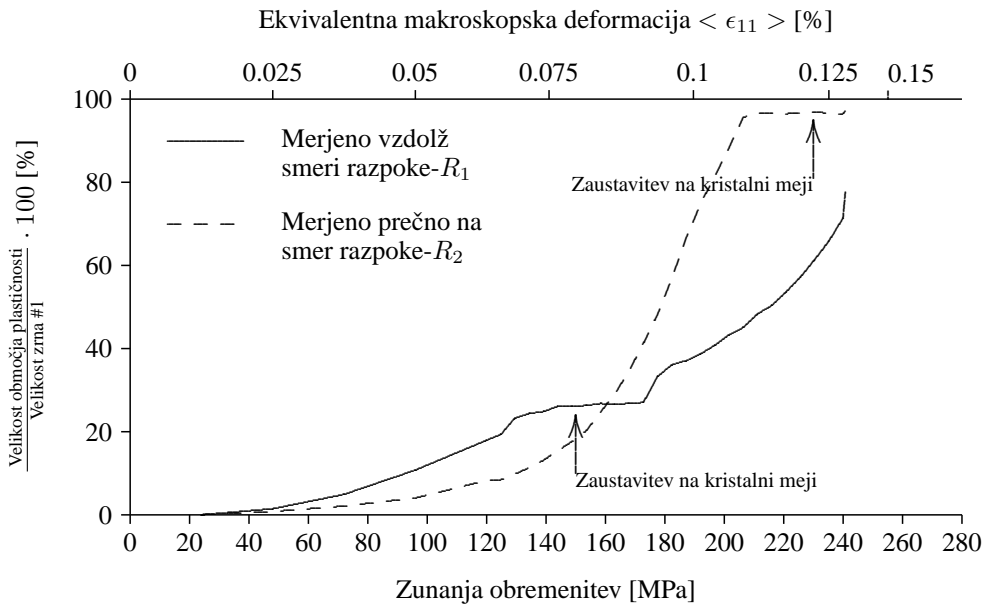
glej tudi sliko 3 c), doseže mejo kristalnega zrna pri zunanji obremenitvi malo nad 124.8 MPa  $\approx 0.5R_{p0.2}$ . Pri tej obremenitvi je velikost območja plastičnosti v smeri razpoke že enaka 20 % velikosti zrna z razpoko in ni več majhna v primerjavi z velikostjo zrna. Pogoji elastične lomne mehanike torej niso več izpolnjeni.



**Slika 5 :** Zone plastičnosti pri  $\alpha_{9.735}\alpha_{135}$  kristalografski orientaciji. Levo  $R_{p0.2}$  kriterij, desno  $\max\left(\frac{g^{(\alpha)}}{\tau_0}\right) > 1$  kriterij.

Z višanjem zunanje obremenitve se pri uporabi  $\max\left(\frac{g^{(\alpha)}}{\tau_0}\right) > 1$  območje plastičnosti razširi vzdolž meje med zrnoma #1 in #7, vendar meja preprečuje razširitev območja v zrno #7.

Številke zrn so prikazane na sliki 5. To je lepo vidno na sliki 6, kjer je krivulja velikosti območja plastičnosti v smeri  $R_1$  skoraj horizontalna med 140 and 170 MPa zunanje obremenitve. Območje plastičnosti premaga upor meje šele pri zadosti visoki zunanji obremenitvi, nakar se območje plastičnosti hitro razširi v zrno #7. Krivulja velikosti območja plastičnosti v smeri  $R_1$  zato hitro naraste. Podobno obnašanje rasti velikosti območja plastičnosti lahko opazimo tudi v smeri  $R_2$ . Ker je oddaljenost od kristalne meje v tej smeri večja, območje plastičnosti doseže kristalno mejo šele pri višji zunanji obremenitvi. Podobno kot v smeri  $R_1$  nato kristalna meja začasno zaustavi napredovanje območja plastičnosti.



**Slika 6** : Velikost območja plastičnosti v odvisnosti od zunanje obremenitve pri dolžini razpoke  $0.5D$  in  $\max\left(\frac{g^{(\alpha)}}{\tau_0}\right) > 1$  kriteriju.

#### 4 Zaključki

V prispevku je predstavljen pristop za modeliranje odziva mikrostrukturno kratkih razpok. Pristop vključuje modeliranje naključne narave kristalnih zrn ter napreden konstitutivni model za izračun plastične deformacije vsled zdrsa kristalnih ravnin.

Ugotovljeno je bilo, da kristalografske orientacije zrn pomembno vplivajo na normalno (NOR) in prečno komponento (POR) odpiranja vrha razpoke. Rotacija kristalografske orientacije zrna z razpoko spremeni NOR za 1.78, POR pa za 1.37. Orientacije kristalografskih orientacij sosednjih zrn imajo manjši vpliv.

Kristalna meja lahko začasno zaustavi rast območja plastičnosti okoli vrha razpoke. Z naraščanjem zunanje obremenitve se območje plastičnosti širi vzdolž kristalne meje, pri zadosti visoki zunanji obremenitvi pa meja ne more več zadrževati rasti območja plastičnosti v smeri razpoke. Območje plastičnosti se nato hitro razširi v sosednje zrno.

Metoda linearne elastične lomne mehanike zahteva, da je območje plastičnosti okoli vrha razpoke majhno v primerjavi z velikostjo razpoke same. V našem primeru je bilo pokazano, da je že pri obremenitvi  $\approx 0.5R_{p0.2}$  velikost plastičnega območja v smeri razpoke enaka 20 % velikosti zrna z razpoko. V tem primeru zgoraj navedeni pogoj metode linearne elastične lomne mehanike ni izpolnjen.

Slabosti trenutnega modela sta trenutno predvsem dve. Kristalne meje so modelirane samo kot geometrijska črta, kjer pride do spremembe kristalografske orientacije. V realnem materialu ima lahko meja kristala drugačne lastnosti od notranjosti kristala. Druga slabost pa je sam konstitutivni materialni model kristalne plastičnosti, ki na trenutni stopnji razvoja ne podpira cikličnega obremenjevanja. V nadaljnjem razvoju nameravamo ti dve pomanjkljivosti odpraviti.

## Literatura

- [1] S. Pearson. Initiation of fatigue cracks in commercial aluminum alloys and the subsequent propagation of very short cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 7(7):235–247, 1975.
- [2] H. Kitagawa and S. Takahashi. Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage. In *Proceedings of Second International Conference on Mechanical Behavior of Materials*, pages 627–631, Boston, 1976. ASM.
- [3] K. J. Miller. The behaviour of short fatigue cracks and their initiation. Part II-A general summary. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 10(2):93–113, 1987.
- [4] K. Hussain. Short fatigue crack behaviour and analytical models: a review. *Engineering Fracture Mechanics*, 58(4):327–354, November 1997.
- [5] C. Blochwitz, W. Tirschler, and A. Weidner. The growth of small fatigue cracks in 7075-t6 aluminium alloy. *Fatigue Engng Mater. Struct.*, 5:233–248, 1982.
- [6] W. L. Morris. The noncontinuum crack tip deformation behavior of surface microcracks. *Metallurgical Transactions A*, 11A:1117–1123, July 1980.
- [7] T. Zhai, A. J. Wilkinson, and J. W. Martin. A crystallographic mechanism for fatigue crack propagation through grain boundaries. *Acta Materialia*, 48(20):4917–4927, December 2000.
- [8] H. Riesch-Oppermann. Generation of 2-D random Poisson-Voronoi mosaics as framework for micromechanical modelling of polycrystalline materials-algorithm and subroutines description-. Technical Report FZKA 6325, Forschungszentrum Karlsruhe, 1999.
- [9] R. Hill and J. R. Rice. Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(6):401–413, 1972.
- [10] A. Needleman. Computational mechanics at the mesoscale. *Acta Materialia*, 48(1):105–124, January 2000.
- [11] D. Peirce, R. J. Asaro, and A. Needleman. Material rate dependence and localized deformation in crystalline solids. *Acta Metallurgica*, 31(12):1951–1976, December 1983.
- [12] Yonggang Huang. A user-material subroutine incorporating single crystal plasticity in the ABAQUS finite element program. Technical report, Harvard University, 1991.
- [13] I. Simonovski, K.-F. Nilsson, M. Kovač, and L. Cizelj. Microstructurally small cracks in 316l steel and their dependence on crystallographic orientations of grains. *Engineering Fracture Mechanics (submitted for publication)*, 2005.



## *Numerična in eksperimentalna analiza vodnega toka skozi šobo*

V. Šajn<sup>1</sup>, B. Juriševič<sup>2</sup>, F. Kosel<sup>3</sup> in M. Junkar<sup>4</sup>

## *Numerical and experimental analysis of water flow through nozzle*

**Povzetek.** V prispevku je predstavljena numerična in eksperimentalna analiza vodnega toka, ki izteka iz šobe in zadeva v togo steno. Pri numerični simulaciji je upoštevan ravninski tok nestisljivega turbulentnega toka tekočine z upoštevanjem proste površine brez vpliva gravitacije ali sile površinske napetosti. Pri eksperimentalni analizi je analiziran vodni tok skozi osnosimetrično šobo, ter porazdelitev statičnega tlaka na togi steni. Rezultati numeričnih simulacij zastojnega tlaka kažejo dobro ujemanje z eksperimentalnimi rezultati.

**Abstract.** This paper presents numerical and experimental analysis of water flow through nozzle, which than hits a rigid wall. Numerical simulation was performed with two-dimensional flow of incompressible, turbulent free surface flow with no influence of gravity nor surface tension force. Experimental analysis deals with water flow trough circular nozzle and static pressure distribution on rigid surface. Results of numerical simulations stagnation pressure shows good comparison with experimental results.

### 1 Uvod

Pri razvoju novih izdelkov je zelo pomembna prototipna izdelava, kjer je glavni cilj hitra in cenovno ugodna izdelava funkcionalnih prototipov. V primeru razvoja pločevinastih izdelkov se za prototipno izdelavo uporablja postopke kot je Inkrementalno Preoblikovanje Pločevine (IPP). Pri tem postopku se pločevino fiksno vgne ter z ustrežno kinematiko orodja enostavne oblike

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, viktor.sajn@fs.uni-lj.si

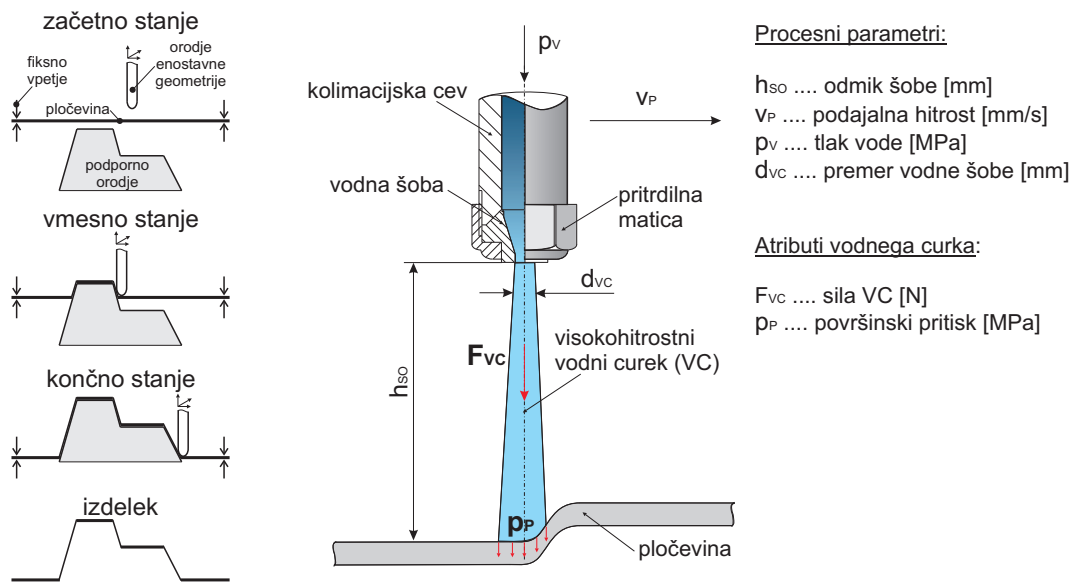
<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, bostjan.jurisevic@fs.uni-lj.si

<sup>3</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, franc.kosel@fs.uni-lj.si

<sup>4</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, miha.junkar@fs.uni-lj.si

kontrolirano vnaša lokalne plastične deformacije. V primerjavi s klasičnimi preoblikovalnimi postopki, kjer orodje praktično vsebuje obliko končnega izdelka, ter se izdelek preoblikuje v končno obliko v eni stopnji, je v primeru IPP kinematika orodja bistveno bolj kompleksna. Prednost IPP je predvsem v manjših stroški orodja ter krajšem času od zasnove do izdelave prvega kosa.

Na sliki 1 levo je prikazan osnovni princip IPP z uporabo podpornega orodja. Novejše raziskave so usmerjene v razvoj postopka brez uporabe podpornega orodja, kar bi še dodatno zmanjšalo stroške orodja, ter s tem povečalo fleksibilnost postopka. Po drugi strani pa ima IPP poleg večje fleksibilnosti še druge prednosti pred klasičnimi postopki preoblikovanja kot so globoki vlek. Izkazalo se je, da se v primeru IPP lahko doseže večje deformacije pred nastopom porušitve, ter da se lahko izdelata kompleksne oblike, katerih se z ostalimi postopki ne da.



**Slika 1** : Osnovni princip IPP s posameznimi stopnjami (levo) ter uporaba VC kot orodja pri IPP (desno).

Z uporabo visokohitrostnega vodnega curka (VC) namesto togega orodja enostavne oblike kot prikazuje slika 1 (desno) postane postopek še bolj fleksibilen, bistvena prednost pa je v ugodnih tornih razmerah med obdelovance in orodjem, kar pripomore k večji ekološki ustreznosti postopka.

Iz dosedanjih raziskav [3, 4], se je izkazalo da v primeru uporabe VC kot orodja za IPP je zastojni tlak ter njegova porazdelitev, ki nastane ob udarcu VC na površino obdelovanca zelo pomemben atribut. Poznavanje vpliva procesnih parametrov (tlak vode, oddaljenost šobe od obdelovanca, geometrija šobe, vpadni kot curka, ...) na zastojni tlak bi omogočilo učinkovitejše napovedovanje in krmiljenje procesa.

Raziskave na področju IPP z uporabo VC so bile večinoma izvedene z eksperimentalnim pristopom [5]. Numerične simulacije toka so zaradi popisa prostih površin toka tekočine bolj zahtevne. Namen predstavljene raziskave je numerična simulacija turbulentnega toka vode skozi šobo na

ravno togo steno, pri čemer je vpadni kot vodnega curka ortogonalen. Uporabljen je bil nestacionaren model toka turbulentnega fluida s standardnim  $k - \varepsilon$  turbulentnim modelom. Simulacija je eksperimentalno potrjena z merjenjem zastojnega tlaka VC, kar je prikazano v nadaljevanju.

## 2 Vodilne enačbe toka fluidov ter proste gladine

Pri časovno povprečenih Navier-Stokesovih enačbah zapišemo kontinuitetno in Navier-Stokesovo enačbo za tok nestisljive tekočine [7, 6]:

$$\begin{aligned} (\rho \bar{v}_i)_{,i} &= 0, \\ \rho_0 \dot{\bar{v}}_i &= \rho_0 f_i - \bar{p}_{,i} + \mu v_{i,jj} - \rho_0 (\overline{v_i v_j})_{,j}. \end{aligned} \quad (1)$$

kjer sta  $\bar{v}_i$  in  $\bar{p}$  časovno povprečna hitrost in tlak,  $v_i$  fluktuirajoča hitrosti in  $\mu$  dinamična viskoznost zraka. Reynoldsov napetostni tenzor popišemo z Boussinesquevo aproksimacijo

$$-\rho_0 \overline{v_i v_j} = \rho_0 \nu_T (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k_T, \quad (2)$$

kjer je  $k_T$  povprečna kinetična energija turbulentnih fluktuacij [1] in  $\nu_T$  turbulentna viskoznost. Pri modelu  $k - \varepsilon$  turbulentno viskoznost zapišemo

$$\nu_T = C_\mu \frac{k_T^2}{\varepsilon_T}. \quad (3)$$



**Slika 2 :** Mreža končnih elementov numeričnega modela.

Obe veličini  $k_T$  in  $\varepsilon_T$  določimo iz dodatnih enačb, ki vsebujejo nove empirične konstante. Za turbulentno kinetično energijo  $k_T$  velja

$$\frac{\partial k_T}{\partial t} + \bar{v}_i k_{T,i} = \left[ \left( \nu_0 + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) k_{T,i} \right]_{,i} + \nu_T (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} - \varepsilon_T, \quad (4)$$



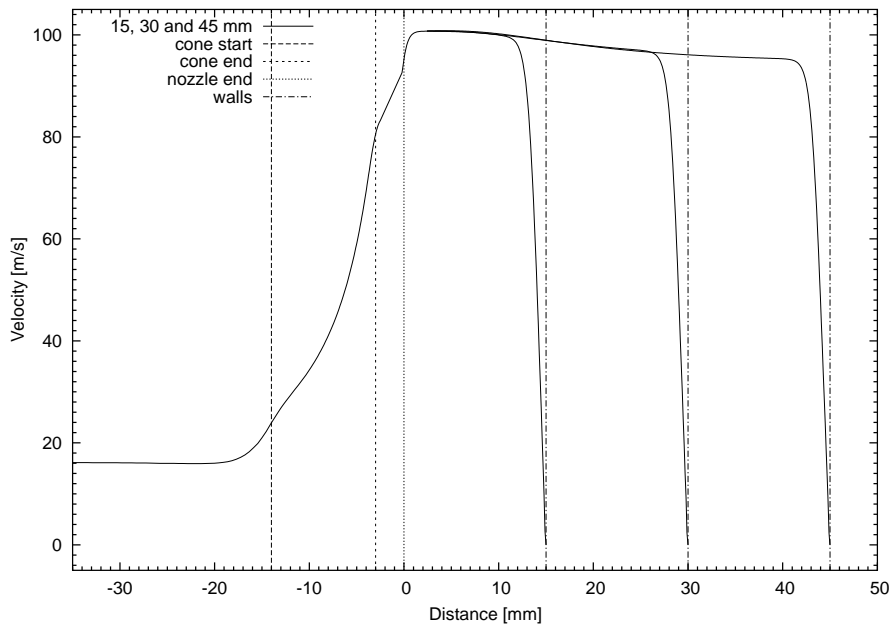
za disipacijo turbulentne kinetične energije  $\varepsilon_T$  pa

$$\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial t} + \bar{v}_i \varepsilon_{T,i} = \left[ \left( v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \varepsilon_{T,i} \right]_{,i} + C_{1\varepsilon_T} \frac{\varepsilon_T}{k} v_T (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) \bar{v}_{i,j} - C_{2\varepsilon_T} \frac{\varepsilon_T^2}{k} . \quad (5)$$

Konstante modela znašajo  $C_\mu = 0.009$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_{\varepsilon_T} = 1.3$ ,  $C_{1\varepsilon_T} = 1.44$  in  $C_{2\varepsilon_T} = 1.92$ . Enačbi (4) in (5) sta izpeljani na osnovi zaprtja povprečenih Navier-Stokesovih enačb na drugem nivoju [7]. Osnovne enačbe razširimo z dodatno enačbo stanja, ki popisuje stanje snovi v izbrani točki [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}_i f_{,i} = 0 , \quad (6)$$

kjer  $f$  predstavlja stanje snovi. Enačba dopolnjuje zakon ohranitve mase ob upoštevanju prostega ustvarjanja meje domene fluida. Za razliko od osnovnih enačb mehanike fluidov, ki jih numerično rešujemo z Eulerjevim načinom opazovanja, enačbo stanja rešujemo z Lagrangeovim načinom opazovanja. Opisan pristop nam olajša reševanje toka fluida z uporabo metode končnih elementov (MKE), kjer definiramo velikost stanja nad elementom  $F$ . Velikost stanja elementa je med 0, kar pomeni, da ne vsebujejo fluid in niso predmet izračuna, ter 1, kar pomeni, da so popolnoma zaliti s fluidom.



Slika 3 : Profil hitrosti vzdolž osi simetrije  $h_{so} = 15, 30$  in  $45$  mm.

Elementi pri katerih je  $0 < F < 1$  vsebujejo delež proste gladine. Po reševanju osnovnih enačb nestacionarnega turbulentnega toka tekočine, ter časovnega inkrementa, določimo premike vozlišč, ter novo obliko in položaj končnega elementa. Novo mrežo končnih elementov preslikamo

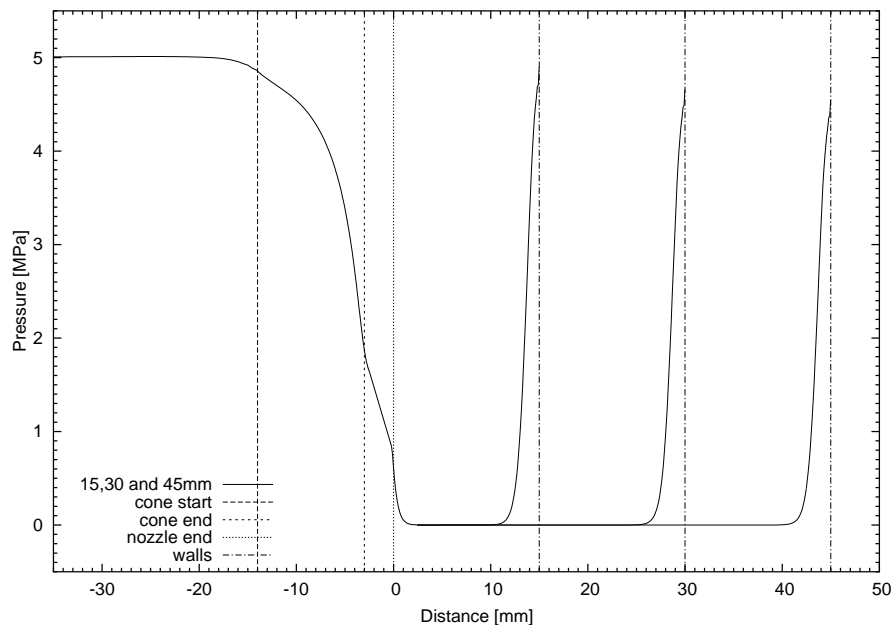
na izhodiščno. Novo velikost stanja končnega elementa izračunamo z upoštevanjem ploskovnih prispevkov, ter stanja sosednjih elementov:

$$F_{(t+\Delta t)} = \sum_l F_{(t)l} A_{(t+\Delta t)l} , \quad (7)$$

kjer  $A_{(t+\Delta t)l}$  delež ploskve končnega elementa nove mreže, ki je nad končnim elementom izhodiščne mreže katerega opazujemo. Algoritem bazira na tem, da je časovni inkrement tako majhen, da noben fluidni delec ne prečka kateregakoli elementa v mreži v enem časovnem inkrementu.

### 3 Numerične simulacije

Izvedli smo numerične simulacije toka skozi šobo premera  $d_{vc} = 1.6\text{ mm}$  z nadtlakom v komori  $p_v = 5\text{ MPa}$ . Izračune smo naredili za oddaljenosti od toge stene  $h_{so} = 15, 30$  in  $45\text{ mm}$ . Na sliki 2 je predstavljena ravninska mreža končnih elementov z upoštevanjem simetrije toka.



**Slika 4 :** Profil tlaka vzdolž osi simetrije  $h_{so} = 15, 30$  in  $45\text{ mm}$ .

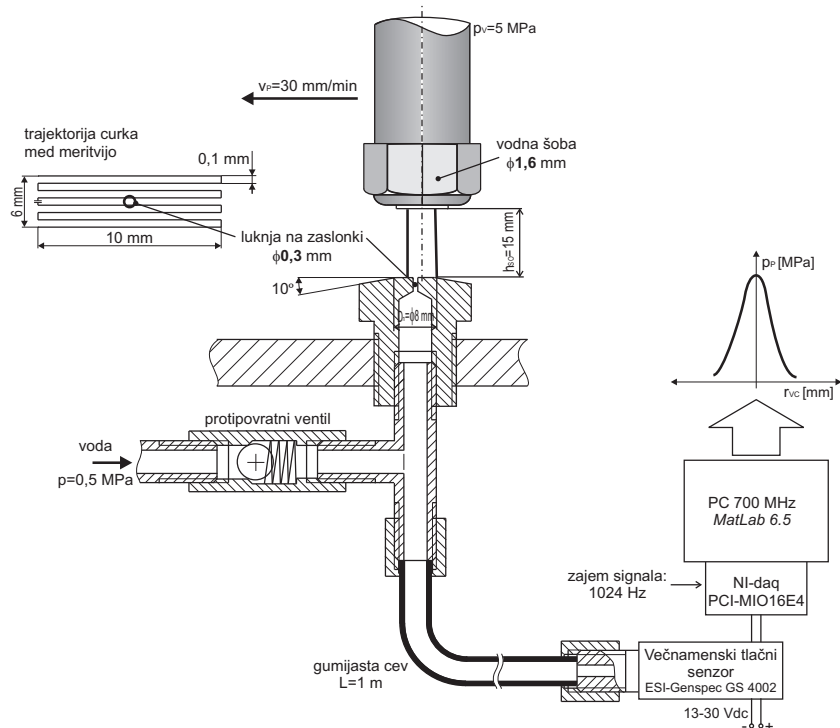
Glede na oddaljenost  $h_{so}$  je število uporabljenih vozlišč: 12765, 19375 in 26543. Robni pogoji stanja znotraj šobe upoštevajo popolno omočenost. Na stenah znotraj šobe in podlagi je podan robni pogoj viskozne stene. V odprtem prostoru omočenost ni definirana in se meja fluida prosto ustvarja. Največja koncentracija vozlišč je v območju predvidene zastojne točke na steni zaradi predvidenih največjih pozitivnih gradientov statičnega tlaka. Pri začetku simulacije je šoba v celoti prazna. Izračun nestacionarnega toka je izveden z najmanjšim časovnim inkrementom  $12 \cdot 10^{-9}\text{ s}$  pri simulaciji prehodnega pojava, ter tipičnim časovnim inkrementom  $250 \cdot 10^{-9}\text{ s}$  po

dosegi stacionarnosti toka. Na sliki 3, so predstavljene porazdelitve hitrosti vzdolž simetrijske osi za oddaljenost šobe od toge stene  $h_{so} = 15, 30$  in  $45\text{mm}$ :

Izhodišče horizontalne osi je zaključek šobe. Hitrost vodnega toka je v kolimacijski cevi  $16\text{m/s}$  in se po izstopu iz šobe zviša na največjo vrednost  $100.7\text{m/s}$ . Po izhodu iz šobe zaradi širjenja toka začne upadati hitrost. Največje upadanje hitrosti je pred togo steno. Grafi hitrosti se zaključijo z zastojno točko in nično hitrostjo. Na sliki 4 so predstavljeni grafi porazdelitve tlaka za oddaljenost šobe od toge stene  $h_{so} = 15, 30$  in  $45\text{mm}$ . Nadtlak kolimacijske cevi  $5\text{MPa}$  po izhodu iz šobe pade na okoliški. Nadtlak ponovno naraste pred samo togo steno in doseže v zastojni točki velikost robnega pogoje tlaka v kolimacijski cevi zmanjšano za izgube v šobi in izgube pri širjenju vodnega curka v prostem. Iz primerjave grafov različnih oddaljenosti je razvidno da se zastojni tlak na togi steni zmanjšuje z večanjem oddaljenosti toge stene od šobe.

#### 4 Eksperimentalna validacija numerične simulacije

Numerična simulacija interakcije VC s togo steno pod vpadnim kotom  $90^\circ$  je eksperimentalno potrjena z merjenjem statičnega tlaka po celotnem prečnem preseku vodnega curka. V ta namen je postavljen merilni sistem prikazan na sliki 5.

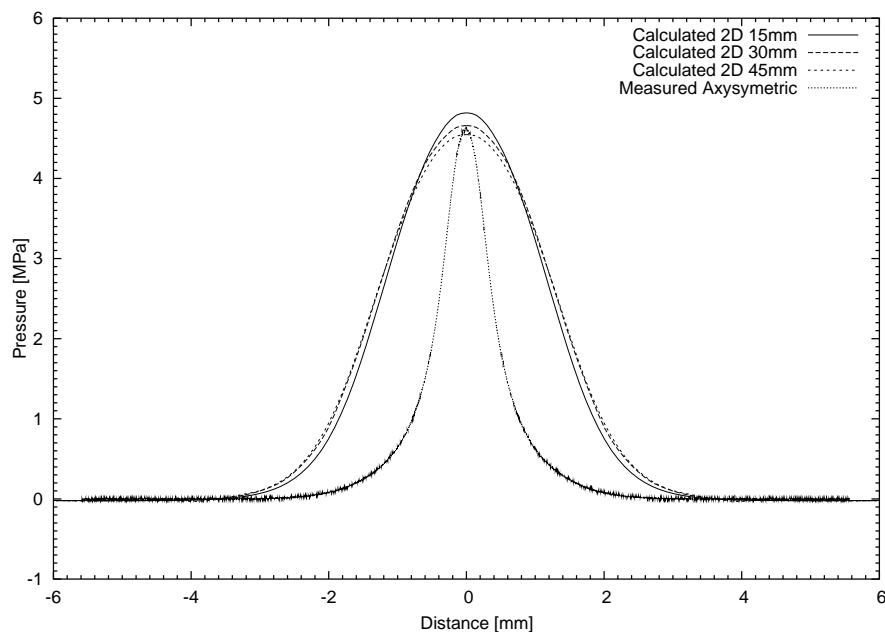


**Slika 5** : Merilni sistem za merjenje statičnega tlaka vodnega curka.

Zastojni tlak je merjen med gibanjem VC po vnaprej definirano trajektoriji, predstavljeni na sliki 5, čez luknjo premera  $0.3\text{mm}$  na posebej izdelani zaslonki, ki je preko fleksibilne cevi dolžine  $1\text{m}$  povezana s tlačnim dajalnikom. Podajalna hitrost je med meritvijo nastavljena na

30mm/min. Za merjenje tlaka se uporablja večnamenski tlačni dajalnik ESI-Genspec GS4002 z merilnim območjem od 0 do 25MPa, linearnostjo 0.1% ter natančnostjo 0.25%. Tlačni dajalnik je priključen na napajanje 13 – 30V DC ter izhod 0 – 10V DC. Signal iz tlačnega sensorja se med meritvijo zajema z uporabo NI-SAQ PCI-MIO16E4 kartice za zajem podatkov priključene na osebni računalnik. Frekvenca vzorčenja je 1024Hz, zajem in nadaljnja obdelava signala je izvedena s programskim orodjem MatLab 6.5.

Vodni curek se ustvari v konični šobi premera 1.6mm ter s kotom zožitve 20°. Tlak vode na črpalki je nastavljen na 5MPa. Med celotno meritvijo je šoba oddaljena od zaslonke 15mm. Merilni sistem je preko protipovratnega ventila priključen na vodno napeljavo z namenom preprečitve nastajanja zračnih prostorov med zaslonko in dajalnikom. Med izvajanjem meritev je bilo ugotovljeno, da pri prehodu vodnega curka preko luknje na zaslonki, odbiti curek vpliva na meritev tlaka. V ta namen je bila zaslonka delno postružena pod kotom 10° kar je bistveno prispevalo k zmanjšanju motilnih vplivov. Nestružen del zaslonke je premera 8mm.



**Slika 6** : Primerjava med izračunanimi in izmerjenimi  $p_z$  prečno na os simetrije.

Na sliki 6 so predstavljeni grafi porazdelitve tlaka prečno na tok okrog zastoje točke. Izmerjen graf velja za prostorski tok in izračunani grafi za ravninski tok. Podani grafi izračunanih tlakov so za razdalje stene od šobe  $h_{so} = 15, 30$  in  $45\text{mm}$ . Izhodišče horizontalne osi je zastoje točka na osi simetrije. Izmerjeno in izračunano porazdelitev tlaka lahko primerjamo le kvalitativno zaradi fizikalne različnosti toka. Porazdelitve tlaka imajo podobno obliko vendar je izračunana porazdelitev tlaka zaradi ravninskega toka bistveno širša kot izmerjena porazdelitev tlaka zaradi prostorskega toka. Zaradi kontinuitetne enačbe je širina toka v bližini podlage večja pri ravninski simulaciji toka, kot pri približno osnosimetričnem iztekanju iz šobe pri eksperimentu. V zastoje točki smo pri oddaljenosti  $h_{so} = 15\text{mm}$  izmerili statični tlak  $4.64\text{MPa}$ , kar je 3.8%

manj kot rezultat numerične simulacije 4.82MPa ob enaki oddaljenosti od stene.

## 5 Sklep

V prispevku smo predstavili numerično in eksperimentalno analizo vodnega toka, ki izteka skozi šobo ter udarja pravokotno na togo podlago. Predstavili smo izračunano in izmerjeno porazdelitev tlaka glede na oddaljenost toge stene od šobe. Iz priloženih rezultatov vidimo da je vodni curek uporabno orodje pri Inkrementalnem Preoblikovanju Pločevine (IPP) ob ustreznem večanju tlaka ter obliki šobe. Z uporabo vodnega curka pri IPP bi dosegli zmanjšanje stroškov izdelave orodij za preoblikovanje ter časa izdelave prototipov.

Za uspešno uporabo vodnega curka v IPP je pomembna velikost tlaka in njegova porazdelitev po površini obdelovanca. Dosedanje raziskave pa so bile usmerjene predvsem v smeri eksperimentalnih raziskovanj. Z uporabo numerične simulacije smo predstavili spreminjaje tlaka na togi steni ob variranju razdalje med šobo in togo steno ter tudi njeno porazdelitev znotraj šobe. Pri numeričnem pristopu smo simulirali prosto gladino, ki se tvori po izstopu vode iz šobe. Rezultate simulacij smo kvalitativno verificirali z meritvijo na realnem sistemu. Primerjava med rezultati simulacij in meritev kaže na dobro ujemanje zastojnega tlaka klub dejstvu, da je zaradi omejenih računalniških zmogljivosti simulacija izvedena kot ravninska, eksperiment pa kot prostorski. Nadaljevanje raziskav vidimo v prostorski simulaciji ter deformabilni podlagi. Z predlagano interakcijo fluid-solid bomo bolj natančno popisali fizikalno dogajanje pri uporabi vodnega curka v IPP.

## Literatura

- [1] Joel H. Ferziger and Milovan Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1999.
- [2] A. Huerta and W.K. Liu. Viscous flow with large free surface motion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69:277–324, 1988.
- [3] H. Iseki. Flexible and incremental bulging of sheet metal using high-speed waterjet. *JSME International Journal*, 44(2):486–493, 2001.
- [4] B. Jurisevic, K.C. Heiniger, Kuzman K., and M Junkar. Incremental sheet metal forming with a high-speed water jet. In *The International Deep Drawing Research Group 2003 Conference*, pages 139–148, 2003.
- [5] B. Jurisevic, M. Junkar, S. Jadhav, M. Kleiner, and K. Kuzman. Incremental sheet metal forming process with a water jet and rigid tool. In *17th International Conference on Water Jetting*, pages 71–81, 2004.
- [6] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. John Wiley & Sons Ltd., 1994.
- [7] D. C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1993.



## *Gradientna metoda zgostitve mreže pri simulaciji stisljivih tokov*

V. Šajn<sup>1</sup>, D. Nožak<sup>2</sup> in F. Kosel<sup>3</sup>

### *Gradient Method of Mesh Refinement in Compressible Flow*

**Povzetek.** V prispevku je predstavljen algoritem zgostitve mreže končnih elementov, ki deluje na principu največjih gradientov tokovnih spremenljivk. Z opisano metodo premreževanja je izvedena simulacija stisljivega adiabatnega toka turbulentnega fluida skozi De Lavalovo šobo. Uporabljena je metoda končnih elementov, ter gradient tlaka kot pogoj zgostitve. Rezultati numeričnih simulacij z uporabo gradientne metode se boljše ujemajo z eksperimentalnimi rezultati.

**Abstract.** This paper presents algorithm for mesh refinement of finite elements, which works on a principle of maximum gradient of fluid variables. The simulation of compressible adiabatic flow of turbulent fluid through De Laval nozzle was performed with described mesh refinement method. We used a finite element method and the pressure gradient as a condition for refinement. Results of numerical simulations with the use of gradient mesh refinement method shows better comparison with experimental results.

#### 1 Uvod

Numerični izračuni toka fluida predstavljajo alternativo eksperimentom. Natančnost numerične simulacije je pogojena s številom in velikostjo elementov mreže. Z večanjem števila elementov se večja tudi čas računanja in potreba po računalniškem spominu. Optimalna rešitev je, da bi numerična simulacija potekala na mreži, ki je groba na mestu majhnih sprememb tokovnih spremenljivk in gosta na mestih velikih sprememb tokovnih spremenljivk.

V tem prispevku bo prikazan postopek gradientne metode zgostitve mreže na principu največjih gradientov tokovnih spremenljivk, [4]. Postopek je iterativen in omogoča izračun na grobi osnovni mreži, na kateri se nato poiščejo polja z največjim gradientom tokovnih spremenljivk. To nam služi za nadaljno lokalno zgostitev mreže na izbranih elementih in ponoven izračun. Število lokalnih zgostitev mreže je lahko poljubno.

Z uporabo gradientne metode zgostitve, ter metode končnih elementov (MKE) je bil simuliran

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, viktor.sajn@fs.uni-lj.si

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, dejan.nozak@fs.uni-lj.si

<sup>3</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, franc.kosel@fs.uni-lj.si

tok stisljivega adiabatnega toka turbulentnega fluida skozi De Lavalovo šobo. Uporabljen je bil nestacionaren model toka turbulentnega fluida s standardnim  $k - \epsilon$  turbulentnim modelom. Dobljeni rezultati so bili kvalitativno primerjani z eksperimenti iz literature.

## 2 Vodilne enačbe mehanike fluidov

V konzervativni obliki se zakon o ohranitvi mase zapiše kot, [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0, \quad (1)$$

kjer je  $\rho$  gostota,  $t$  čas,  $x_i$  krajevna koordinata in  $v_i$  hitrostno polje. Ohranitev gibalne količine v konzervativni obliki je, [7]:

$$\frac{\partial (\rho v_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho v_j) v_i] - \frac{\partial (\tau_{ij})}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho f_j = 0, \quad (2)$$

kjer je  $p$  termodinamični tlak in  $\rho f_j$  volumske sile. V zgornji enačbi so strižne napetosti  $\tau_{ij}$  dane z enačbo, [7]:

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right], \quad (3)$$

kjer je  $\mu$  dinamična viskoznost in  $\delta_{ij}$  Kroneckerjev delta tenzor. V enačbi (3) je uporabljen Stokesov pogoj  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , ki zagotavlja enakost termodinamičnega in mehanskega tlaka pri stisljivih fluidih. Ravnotežna enačba za ohranitev energije v konzervativni obliki je, [7]:

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i H) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) - \rho f_i v_i - q_H = 0 \quad (4)$$

kjer je  $E = e + \frac{v_i v_i}{2}$  celotna energija,  $e$  notranja energija in  $H = E + \frac{p}{\rho}$  celotna entalpija, ki se pojavi v fluidu,  $k$  toplotna prevodnost,  $T$  temperatura,  $\rho f_i v_i$  gostota moči volumske sile in  $q_H$  sprememba toplote na časovno enoto.

Dodatni enačbi sta še enačba stanja idealnega plina  $p = \rho R T$ , kjer je  $R$  splošna plinska konstanta in enačba za notranjo energijo  $e = c_v T$ , kjer je  $c_v$  specifična izohorna toplota.

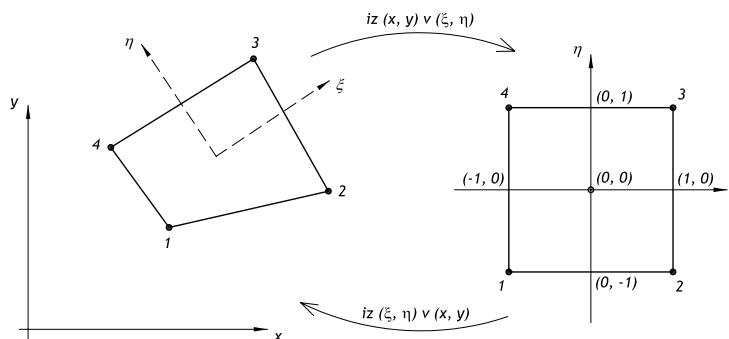
## 3 Gradientna metoda zgostitve mreže

Algoritem smo uporabili za dvodimenzionalen štiri vozliščni element. Fizikalni prostor  $(x, y)$  diskretiziramo s končnimi elementi. Računanje vozliščnih vrednosti elementa pa poteka v naravnem koordinatnem sistemu  $(\xi, \eta)$ , slika 1. Transformacijski enačbi, ki izražata odvode tokovnih spremenljivk v fizikalnem prostoru z odvodi tokovnih spremenljivk v naravnem koordinatnem sistemu sta, [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \right] \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right], \quad (5)$$

kjer je  $J$  Jacobijeva determinanta:

$$J \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \quad (6)$$



**Slika 1** : Prikaz transformacije končnega elementa; levo fizikalni in desno naravni koordinatni sistem

Algoritem za zgostitev mreže deluje tako, da izvedemo izračun na osnovni grobi mreži, nakar poiščemo vrednost gradienta izbrane tokovne spremenljivke v težišču vsakega elementa. Glede na izbrano mejo največjih gradientov tokovnih spremenljivk, izberemo tiste elemente na katerih se vrši lokalna zgostitev mreže. Nato se izračun ponovi na novi mreži.

Za lokalno zgostitev mreže je potrebno določiti gradient tokovne spremenljivke. Vrednost gradienta določimo za naravni koordinatni sistem  $(\xi, \eta)$  v težišču vsakega elementa. S transformacijskimi enačbami (5) transformiramo težiščno vrednost gradienta iz naravnega koordinatnega sistema, v težišče elementa v fizikalnem koordinatnem sistemu  $(x, y)$ . Vozliščne vrednosti koordinat  $x$  in  $y$ , ter tokovne spremenljivke  $f$  za vsak element, določimo iz oblikovne funkcije za bilinearen dvodimenzionalen štiri vozliščni končni element, [2]:

$$N = \frac{1}{4} \left[ f_1(1 - \xi)(1 - \eta) + f_2(1 + \xi)(1 - \eta) + f_3(1 + \xi)(1 + \eta) + f_4(1 - \xi)(1 + \eta) \right], \quad (7)$$

kjer so  $f_1, f_2, f_3$  in  $f_4$  vozliščne vrednosti tokovne spremenljivke. Odvode, ki nastopajo v transformacijskih enačbah, dobimo z odvajanjem, po obeh naravnih koordinatah  $\xi$  in  $\eta$ , za funkcije koordinat  $x$  in  $y$ , ter tokovne spremenljivke  $f$ . Željene funkcije zapišemo s pomočjo enačbe (7). Potrebni parcialni odvodi v težišču za koordinato  $x$  so,

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \quad \text{in} \quad \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4), \quad (8)$$

za koordinato  $y$ ,

$$\left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4) \quad \text{in} \quad \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4), \quad (9)$$

ter za tokovno spremenljivko  $f$ :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = \frac{1}{4}(-f_1 + f_2 + f_3 - f_4) \quad \text{in} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{4}(-f_1 - f_2 + f_3 + f_4). \quad (10)$$



Jacobijan, ki nastopa v transformacijskih enačbah, je v težišču elementa za  $\xi = 0$  in  $\eta = 0$ :

$$J(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{8}[x_1(y_2 - y_4) - x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_1 - y_3)]. \quad (11)$$

Dobljene vrednosti parcialnih odvodov v težišču elementa vstavimo v transformacijske enačbe in dobimo izraz gradienta tokovne spremenljivke za  $x$  in  $y$  smer v težišču elementa zapisan z vozliščnimi vrednostmi elementa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_1(y_2 - y_4) - f_2(y_1 - y_3) - f_3(y_2 - y_4) + f_4(y_1 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) - x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_1 - y_3)}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-f_1(x_2 - x_4) + f_2(x_1 - x_3) + f_3(x_2 - x_4) - f_4(x_1 - x_3)}{x_1(y_2 - y_4) - x_2(y_1 - y_3) - x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_1 - y_3)}. \quad (13)$$

Gradient tokovne spremenljivke v težišču elementa v fizikalnem dvodimenzionalnem prostoru je tako:

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \quad (14)$$

Velikost elementa ima vpliv na natančnost izračuna gradienta tokovnih spremenljivk. Kot merilo velikosti elementa definiramo karakteristično dolžino, ki je enaka  $\sqrt{A_{(e)}}$ , kjer je  $A_{(e)}$  površina elementa. Cenilka, ki nam predstavlja merilo za izbor elementov z največjim gradientom, je sestavljena iz absolutne vrednosti gradienta tokovne spremenljivke in karakteristične dolžine. Dana je z enačbo:

$$M_{gr} = |\text{grad } f| \sqrt{A_{(e)}}, \quad (15)$$

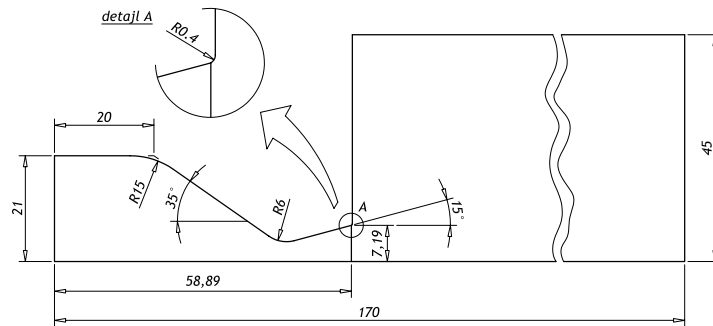
kjer je  $|\text{grad } f|$  absolutna vrednost gradienta tokovne spremenljivke. Za izbor elementov na katerih se vrši zgostitev mreže upoštevamo določeno mejo največje vrednosti gradienta tokovne spremenljivke. Na tako izbranih elementih izvedemo zgostitev mreže, kar je prikazano v naslednjem poglavju.

#### 4 Numerična simulacija

Opisan postopek je bil testiran na modelu raketnega motorja z izooktanom, kot gorivom, in dušikovim oksidulom, kot oksidantom. Temperatura zgorevanja je  $T_1 = 2893 \text{ K}$  in maksimalna teoretična potisna sila  $F = 100 \text{ N}$ , [3]. Geometrija modela je prikazana na sliki 2. Zaradi simetrije obravnavamo polovico modela.

Notranji konturi raketnega motorja dodamo tudi prostor in tako omogočimo ekspanzijo plinov v prostor, da tako zmanjšamo vpliv robnih pogojev na rešitev. Robni pogoji so naslednji: na vstopu šobe tlak zgorevanja  $p_1$ , na stenah šobe je hitrost  $v_x = 0$  in  $v_y = 0$ , na simetriji je hitrost  $v_y = 0$ , znan pa je tudi tlak okolice  $p_a$ .

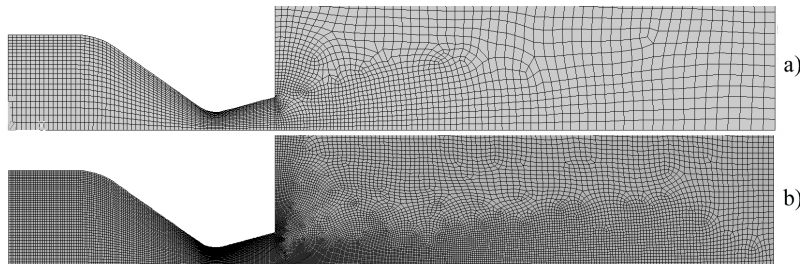
Na celotnem modelu je uporabljena mreža s štiri vozliščnimi dvodimenzionalnimi elementi. Notranjost raketnega motorja je zmrežena s strukturirano mrežo, medtem ko je prostor zmrežen z nestrukturirano mrežo, slika 3. Osnovna groba mreža, slika 3a, na kateri se vrši lokalna zgostitev ima  $N_{e1} = 3054$  elementov. Za lokalno zgostitev mreže uporabimo 10% elementov z



Slika 2 : Geometrija modela.

največjim gradientom tlaka. Za primerjavo smo izvedli izračun tudi na mreži z globalno zgostitvijo, ki ima  $N_{eG} = 16228$  elementov, slika 3b.

Simulirali smo tok stisljivega adiabatnega turbulentnega fluida. Uporabljen je bil nestacionaren model fluida s standardnim  $k - \epsilon$  turbulentnim modelom. Izračun smo ustavili, ko je bila časovna sprememba hitrosti razreda velikosti  $10^{-6}$ .



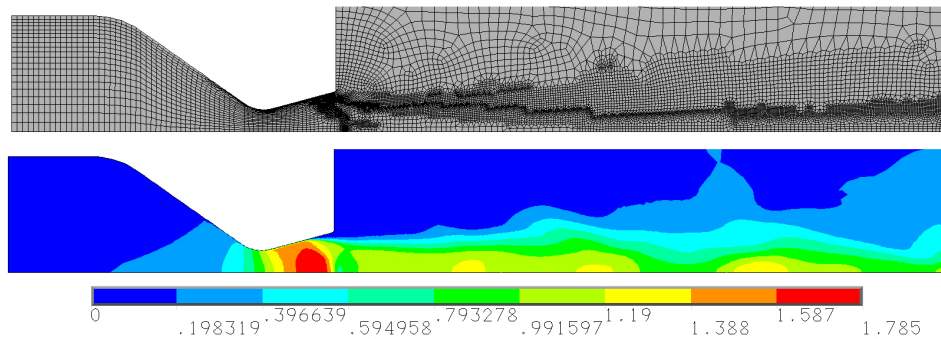
Slika 3 : a) osnovna groba mreža,  $N_{e1} = 3054$  in b) mreža z globalno zgostitvijo,  $N_{eG} = 16288$ .

#### 4.1 Zgostitev mreže za tlak $p_1 = 4 \text{ bar}$ :

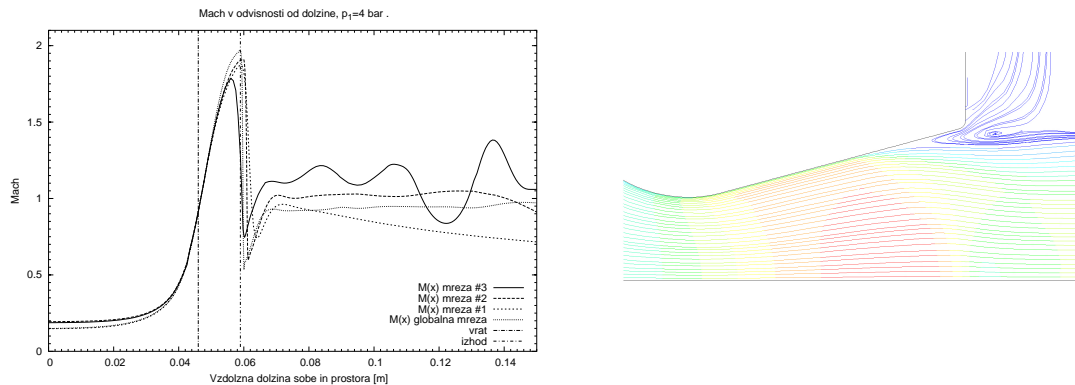
Na sliki 4 je prikazano polje porazdelitve Machovega števila toka fluida in pripadajoča zadnja mreža #3 po dveh lokalnih zgostitvah za tlak  $p_1 = 4 \text{ bar}$ . V notranjosti šobe lahko opazimo odcepitev toka v mejni plasti, ker je tlak okolice večji od tlaka na izhodu šobe. Velika lokalna zgostitev mreže na izhodu šobe je posledica pojava tlačnega skoka. Neurejenost toka povsem na desni strani je posledica premajhnega ekspanzijskega prostora.

Na sliki 5 levo, je prikazan diagram za Machovo število vzdolž šobe za vse štiri različne mreže, ki so bile uporabljene pri izračunu. Mreža #1 ima število elementov  $N_{e1} = 3054$ , mreža #2  $N_{e2} = 6473$  in mreža #3  $N_{e3} = 16057$ . Pri vsaki zgostitvi se je upoštevalo 10% elementov z največjim gradientom tlaka. Vsak izbrani element se je delil na četrtino, pri čemer so bili novonastali elementi vedno štiri vzdolžni. Čas računanja pri novi mreži se glede na prejšnjo mrežo poveča za približno dva-krat. Globalna mreža ima  $N_{eG} = 16228$  elementov. Čas računanja pri globalni mreži, se je glede na mrežo #3 povečal za približno dvajset-krat.

Iz diagrama na sliki 5 lahko opazimo pojav normalnega tlačnega skoka na izhodu šobe, ki pa



Slika 4 : Machovo tokovno polje in pripadajoča mreža #3,  $p_1 = 4$  bar.

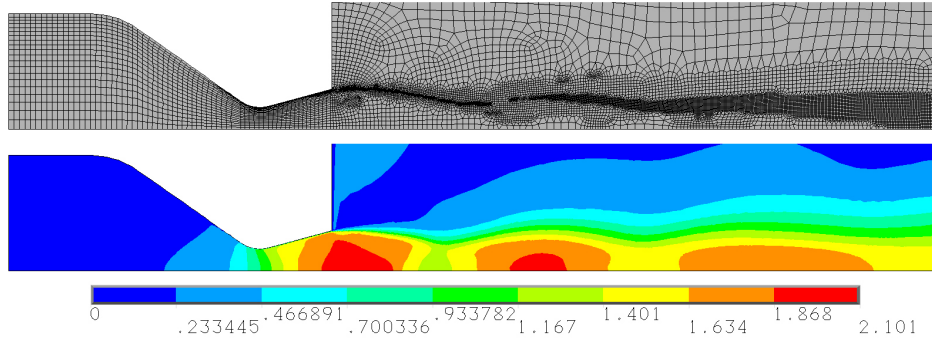


Slika 5 : Machovo število vzdolž šobe in tokovnice na izhodu šobe,  $p_1 = 4$  bar.

se z lokalno zgostitvijo mreže premika v notranjost šobe. Odcepitev toka je posledica normalnega tlačnega skoka v notranjosti šobe, slika 5 desno. Pri mreži z globalno zgostitvijo se normalni tlačni skok pojavi na izhodu šobe in je posledica roba šobe. S kvalitativno primerjavo iz [5], lahko opazimo boljše ujemanje rezultatov na mreži #3 z realnimi. Mreža #3 bolj natančno popiše tokovne razmere, vendar pa se hkrati kažejo tendence nestabilnosti, ki jih lahko zmanjšamo z večjim ekspanzijskim prostorom.

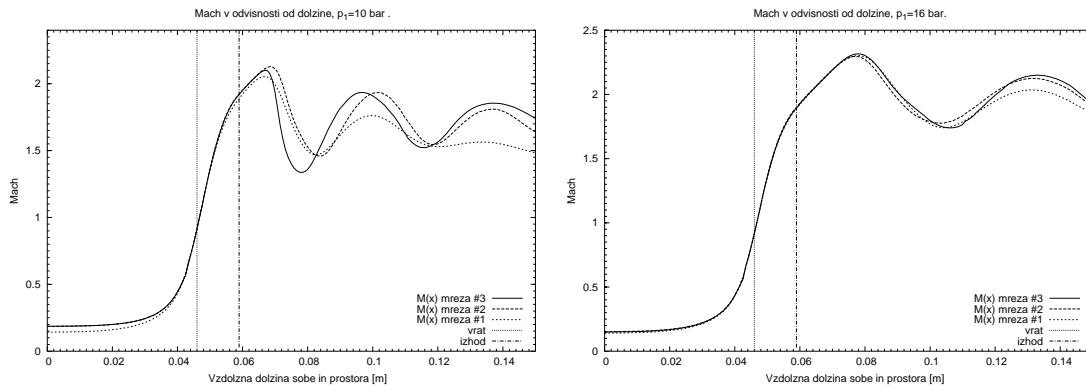
#### 4.2 Zgostitev mreže za tlak $p_1 = 10$ bar:

Na sliki 6 je prikazano polje porazdelitve Machovega števila toka fluida in pripadajoča zadnja mreža #3 za tlak  $p_1 = 10$  bar. Poleg Machovega stožca na izhodu šobe se pojavita še dve tvorbi udarnih valov, ki se v literaturi strokovno imenujejo diamanti. Ti diamanti predstavljajo dodatne šibke tlačne skoke v toku fluida. Na izhodu šobe opazimo izrazito zgostitev mreže, ki sledi poševnemu tlačnemu skoku. To je v skladu s kvalitativno primerjavo z eksperimentalnimi rezultati v [5] za nadekspanzijsko šobo.



Slika 6 : Machovo tokovno polje in pripadajoča mreža #3,  $p_1 = 10 \text{ bar}$ .

Na sliki 7 levo je prikazan diagram za Machovo število vzdolž dolžine šobe za vse tri mreže. Mreža #1 ima  $N_{e1} = 3054$ , mreža #2  $N_{e2} = 6284$  in mreža #3  $N_{e3} = 14399$ . Iz diagramov vidimo, da je ta tok bolj stabilen, kot v prejšnjem primeru zaradi večje tlačne razlike, hkrati pa opazimo večjo izrazitost tlačnih skokov pri gostejši mreži.

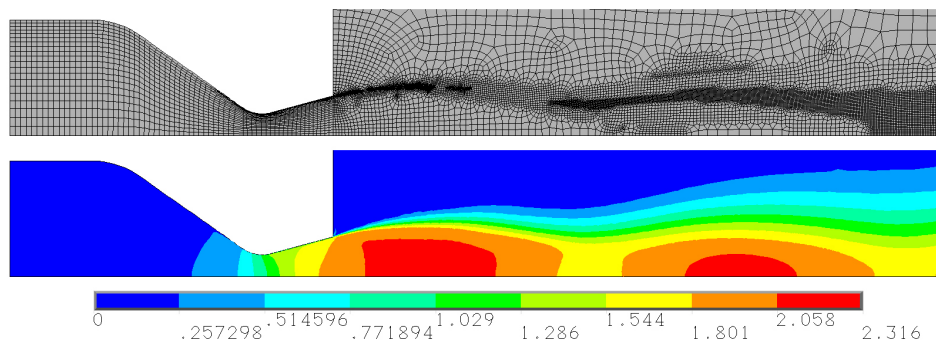


Slika 7 : Machovo število vzdolž šobe, levo  $p_1 = 10 \text{ bar}$  in desno  $p_1 = 16 \text{ bar}$

### 4.3 Zgostitev mreže za tlak $p_1 = 16 \text{ bar}$ :

Na sliki 8 je prikazano polje porazdelitve Machovega števila toka fluida in pripadajoča zadnja mreža #3 za tlak  $p_1 = 16 \text{ bar}$ . Zgostitev mreže zopet sledi tlačnim skokom, [5]. Zgostitev mreže povsem na desnem robu je posledica vpliva robnega pogoja na rešitev. V Machovem tokovnem polju lahko opazimo razvoj t.i. diamantov.

Na sliki 7 desno je prikazan diagram za Machovo število vzdolž dolžine šobe za vse tri različne mreže, ki so bile uporabljene pri izračunu. Mreža #1 ima  $N_{e1} = 3054$ , mreža #2  $N_{e2} = 6351$  in mreža #3  $N_{e3} = 14265$ . Lokalne največje in najmanjše vrednosti Machovega števila nihajo levo in desno glede na medsebojno lego, kar kaže na nihanje rešitve okoli srednje vrednosti.



Slika 8 : Machovo tokovno polje in pripadajoča mreža #3,  $p_1 = 16 \text{ bar}$ .

## 5 Sklep

V prispevku smo predstavili gradientno metodo zgostitve mreže. Gradientno metodo nad tlakom, kot tokovno spremenljivko smo uporabili pri simulaciji stisljivega adiabatnega toka turbulentnega fluida skozi De Lavalovo šobo. Rezultat je dober glede na število elementov, saj so ti porazdeljeni glede na lokalne potrebe velikosti elementov. Gradientna metoda temelji na vrednosti največjih gradientov tokovnih spremenljivk v težišču elementa in se razlikuje od drugih metod zgostitve mreže, ki bazirajo na velikosti tokovne spremenljivke, [6]. Rezultati so kvalitativno primerljivi s tistimi v [5] in [7]. Opisana metoda je splošno uporabna za lokalno zgostitev mreže, tako v mehaniki fluidov, kot v mehaniki deformabilnih teles, saj lahko za merilo gradienta upoštevamo katerokoli neodvisno spremenljivko.

## Literatura

- [1] John D. Anderson, Jr.: *Computational Fluid Dynamics, The Basics with Applications*, McGraw–hill, Inc., New York, 1995.
- [2] Charles Hirsch: *Numerical Computation of INTERNAL AND EXTERNAL FLOWS, Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester, 1988.
- [3] Dejan Nožak: *Termodinamični izračun in konstrukcija pogonskega dela majhnega raketnega motorja*, Diplomaska naloga Visokošolskega strokovnega študija, December 2001.
- [4] Dejan Nožak: *Analiza toka fluida v De Lavalovi šobi*, Diplomaska naloga univezitetnega študija, September 2003.
- [5] The Japan Society of Mechanical Engineers: *Visualized Flow*, Pergamon Press, Oxford, 1988.
- [6] Viktor Šajin: *Simulation of External 2D Flow Around a NACA 0012 Airfoil*, research report, Stuttgart, Februar 1994.
- [7] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor: *The Finite Element Method, Vol.3, Fluid Dynamics*, 5th ed., Butterworth–Heinemann, Oxford, 2000.



## *Turbulent flow of inelastic generalized Newtonian fluid in a channel : Comparison of turbulent models*

P. Ternik<sup>1</sup> and J. Marn<sup>2</sup> and Z. Žunič<sup>3</sup>

## *Turbulentni tok neelastične posplošene newtonske tekočine v kanalu: Primerjava turbulentnih modelov*

**Abstract.** In this paper the turbulent flow of inelastic non-Newtonian fluid is studied by means of numerical modelling for value of the Reynolds number  $Re = 13750$ . Two turbulent models were considered with a focus on their capability of capturing the predictions reported by other authors. Power law rheological model was used to account for non-Newtonian rheology of shear-thinning and shear-thickening fluid. Numerical results for turbulent flow in a channel favor the turbulent model as proposed in this work over a modified Nagano-Hishida turbulent model.

**Povzetek.** V pričujočem prispevku je obravnavan turbulentni tok neelastične nenevtonske tekočine z uporabo numeričnih metod za vrednost Reynoldsovega števila  $Re = 13750$ . Uporabljena sta dva turbulentna modela z namenom ugotoviti ali dajeta rezultate kot jih poročajo drugi avtorji. Nenevtonsko reološko obnašanje psevdoplastične in dilatantne tekočine smo opisali s Potenčnim zakonom. Rezultati numeričnega modeliranja turbulentnega toka v kanalu govorijo v prid turbulentnemu modelu, kot je predlagan v pričujočem delu.

---

<sup>1</sup> University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

<sup>2</sup> University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

<sup>3</sup> University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

## 1 Introduction

The flow of non-Newtonian fluids and slurries in pipes occurs in a wide range of practical applications in the process industries. In some cases the flow of non-Newtonian fluids can be turbulent and there are advantages in operating pipe flows in a transitional flow regime due to lowest specific energy consumption. Although some experimental work has appeared on the turbulent flow of non-Newtonian fluids little fundamental understanding exists.

There has been some examples of numerical modelling of inelastic Power law (Malin [1]) and Herschel-Bulkley (Malin [2]) fluids flow in pipes where standard RANS were solved. The non-Newtonian rheology was accounted for with variable viscous function (according to rheological model) and with modified damping function of Lam-Bremhorst turbulent model.

Recently Cruz and Pinho [3] modified the Nagano-Hishida turbulent model in terms of damping function and time-averaged viscous function. Unfortunately the damping function seems to exhibit unsatisfying asymptotic behavior in a inertial sublayer and turbulent core, where turbulent forces are predominant.

The results of DNS for turbulent pipe flow of shear-thinning fluids (Rudman et al. [4]) show that as the Power law index ( $n$ ) decreases the reduction in turbulent kinetic energy and Reynolds stresses is observable (in comparison to Newtonian fluid). Using these conclusions the present work tries to examine whether the Nagano-Hishida turbulent model as proposed by Cruz and Pinho [3] is capable of capturing these conclusions for turbulent flow of shear-thinning and shear-thickening Power law fluid.

## 2 Nagano-Hishida turbulence model by Cruz and Pinho [3]

The original Nagano-Hishida low Reynolds number  $k - \epsilon$  turbulence model was developed in the year 1987, Nagano and Hishida [5]. For the model it was established that the performance is far better than for the existing models (Lam-Bremhorst and Jones-Launder, for details see Wilcox [6]) for a wide range of wall-turbulent shear flows encountered in practice.

For the turbulent flow of visco-elastic fluids which exhibit shear-thinning viscous behavior the modification of Nagano-Hishida turbulent model was proposed (Cruz and Pinho [3]) in terms of damping function  $f_\mu$ :

$$f_\mu = f_{\mu v} f_{\mu e}. \quad (1)$$

For purely viscous non-Newtonian fluid described with the Power law model:

$$\bar{\eta}_L = K |\bar{\dot{\gamma}}|^{n-1}, \quad |\bar{\dot{\gamma}}| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \bar{\dot{\gamma}}_{ij} \sum_j \bar{\dot{\gamma}}_{ji}}, \quad \bar{\dot{\gamma}}_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

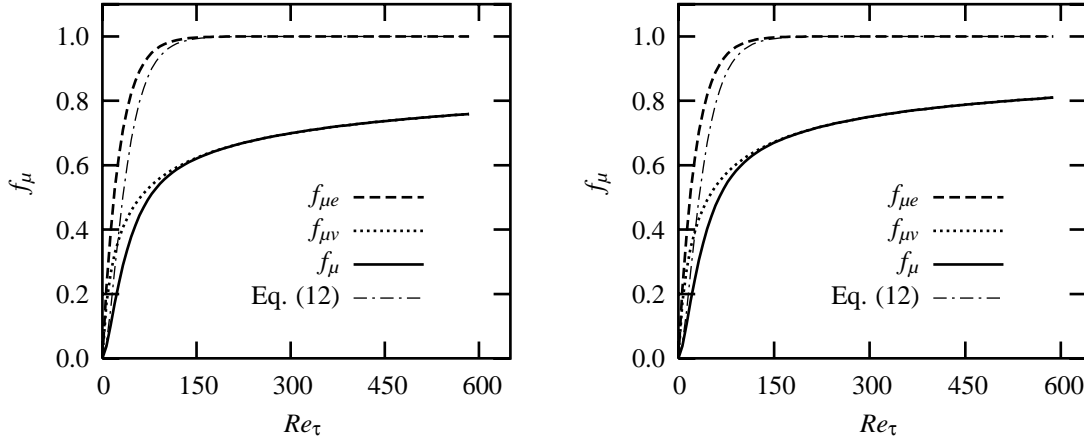
the viscometric damping function was derived on the basis of Stokes' second problem as:

$$f_{\mu v} = 1 - \left[ 1 + \left| \frac{1-n}{1+n} \right| Re_\tau \right]^{-|(1+n)/(1-n)|/26.5} \quad (3)$$

where  $K$  is consistency parameter,  $n$  is the flow index,  $\bar{\eta}_L$  is time-average laminar viscous function and  $|\dot{\gamma}|$  is the II. invariant of rate of deformation tensor. Similar procedure was used to derive the damping function for purely elastic fluid as:

$$f_{\mu e} = 1 - \left[ 1 + \left| \frac{p-1}{3-p} \right| Re_{\tau} C^{(1-p)/(2-p)} \right]^{-|(3-p)/(p-1)|/26.5}, \quad (4)$$

where parameters  $C$  and  $p$  account for elastic rheological behavior.



**Figure 1** : Comparison of damping functions for inelastic fluid;  $n = 0.80$  (left),  $n = 1.20$  (right).

Exploring of Equation (1), (3) and (4) yields a few drawbacks of proposed damping function:

- For inelastic fluid flow one should use the value of parameter  $p = 1$  which leads to numerical errors since division with 0 occurs in Equation (4). This problem can be solved taking the value  $p \simeq 1$  (for example  $p = 1.00000001$  or  $p = 0.99999999$ ). Similar values for  $n$  ( $n = 1.00000001$  or  $n = 0.99999999$ ) should be used in Equation (3) for inelastic Newtonian fluid flow.
- Damping function should exhibit the following asymptotic behavior  $y^{\dagger} \geq 50 \Rightarrow f_{\mu} \mapsto 1$ , which is not satisfied for the non-Newtonian fluids (regardless to the value of  $n$ ) as shown on Figure (1).

Similar as for the damping function, the Power law model was accounted for in deriving the time-average molecular viscosity for flow non-Newtonian fluids at high Reynolds number, Pinho [7], in terms of  $k$  and  $\tilde{\epsilon}$ :

$$\bar{\eta}_{HR} = \frac{(C_{\mu} \rho)^{3m(m-1)A_2/[8+3m(m-1)A_2]} 2^{4m(m-1)A_2/[8+3m(m-1)A_2]} k^{6m(m-1)A_2/[8+3m(m-1)A_2]}}{\tilde{\epsilon}^{[8-3(m-1)A_2]m/[8+3m(m-1)A_2]} B^{8/[8+3m(m-1)A_2]}} \quad (5)$$

with constants:

$$m = \frac{n-1}{n+1}, \quad B = \rho^m K^{1-m}, \quad A_2 = 0.45. \quad (6)$$



Cruz and Pinho [3] used the expression for  $\bar{\eta}_{HR}$  and  $\bar{\eta}_L$  to define the true average molecular viscosity as:

$$\bar{\eta} = f_\mu \bar{\eta}_{HR} + (1 - f_\mu) \bar{\eta}_L. \quad (7)$$

Finally, the constants and damping functions appearing in a Nagano-Hishida model of Cruz and Pinho [3], written for variable viscous function, can be summarized as:

$$D = 2 \frac{\bar{\eta}}{\rho} \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2, \quad E = \frac{\bar{\eta}}{\rho} v_T (1 - f_\mu) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right)^2, \quad (8)$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Re_T^2), \quad f_\mu = f_{\mu\nu} f_{\mu\epsilon}, \quad (9)$$

$$Re_T = \frac{\rho k^2}{\bar{\eta} \bar{\epsilon}}, \quad Re_\tau = \frac{\rho v_\tau}{\bar{\eta}_W} y, \quad v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}, \quad v_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\bar{\epsilon}}, \quad (10)$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.45, \quad C_{\epsilon 2} = 1.90, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.00, \quad \sigma_\epsilon = 1.30. \quad (11)$$

Due to unsatisfying asymptotic behavior of dumping function as it is proposed by Cruz and Pinho [3], Equation (1), we propose the use of dumping function as it was proposed by Nagano and Hishida [5]:

$$f_\mu = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Re_\tau}{26.5}\right) \right]^2 \quad (12)$$

which exhibits correct asymptotic behavior as shown on Figure (1).

The damping and viscous functions as used in the present work are listed in Table (1).

**Table 1** : Dumping and viscous functions.

Case	$f_\mu$	$\bar{\eta}$
NH-CP	Equation (1)	Equation (7)
NH-MOD	Equation (12)	Equation (7)

### 3 Numerical modelling

#### 3.1 Governing equations

The time-averaged governing equations for stationary flow of an incompressible generalized Newtonian fluid (Pinho [7], Ternik and Marn [8]) can be summarized and written in the convection-diffusion form as follows:

- Mass conservation

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (13)$$

- Momentum conservation

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\bar{\eta} + \rho \nu_T) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\bar{\eta} + \rho \nu_T) \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right] \quad (14)$$

Here  $p'$  is so called modified pressure, which for the flow of incompressible fluid reduces to  $p' = \bar{p} + \frac{2}{3}\rho k$ .

- Turbulent kinetic energy conservation

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\bar{\eta} + \rho \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \rho P_k - \rho \tilde{\epsilon} - \rho D \quad (15)$$

- Rate of dissipation of turbulent kinetic energy conservation

$$\begin{aligned} \rho \bar{v}_j \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\bar{\eta} + \rho \nu_T) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} \right] = & \rho E - \rho f_1 C_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P_k - \rho f_2 C_{\epsilon 2} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + \\ & \rho C_{\epsilon 4} \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon \bar{\eta}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (16)$$

For turbulent flow of non-Newtonian fluid the value of constant  $C_{\epsilon 4} = 1$  is proposed, Cruz and Pinho [3].

The Reynolds (turbulent) stresses were modelled using the first-order closure (Boussinesq approximation):

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (17)$$

and the turbulent viscosity with the Prandtl-Kolmogorov equation, Wilcox [6]:

$$\nu_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}}. \quad (18)$$

### 3.2 Geometry and boundary conditions

Dirichlet boundary conditions for velocity, turbulent kinetic energy and rate of dissipation of turbulent kinetic energy were used at the inlet, while Dirichlet (for pressure) and Neumann (zero normal gradients) boundary conditions were used at the outlet, Figure (2).

For all numerical examples the value of Reynolds number  $Re = 13750$  was considered, where definition of the Power law Reynolds number was used:

$$Re = \frac{6\rho \bar{v}^{2-n} H^2}{K \left( \frac{4n+2}{n} \right)^n}. \quad (19)$$

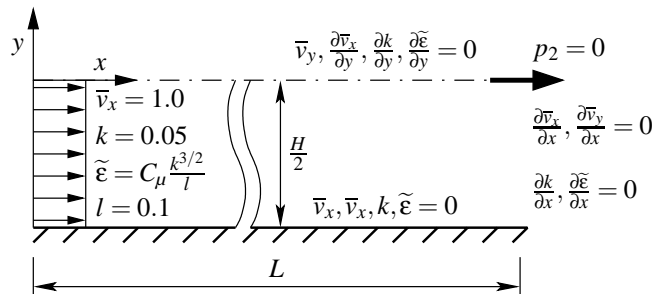


Figure 2 : Turbulent flow in a channel;  $H = 2, L = 75 H$ .

### 3.3 Numerical procedure

The governing equations were solved using CFX-4.4 computer code which employs the standard finite volume method. Each equation is integrated over each control volume to obtain a discrete equation which connects the variable at the centre of the volume with its neighbors. The physical space gradients were computed using the second order accurate central differences scheme. The Higher-Order Upwind discretization scheme (Thompson and Wilkes [9]) was used for the convective terms in  $\bar{v}_x, \bar{v}_y, k$  and  $\tilde{\epsilon}$  equation. An updated velocity and pressure fields satisfying exact mass continuity and approximately satisfying the discrete momentum equations were obtained by the SIMPLEC algorithm.

Physical space gradients in source terms in transport equations for  $k$  and  $\tilde{\epsilon}$  were computed with a second-order finite differences scheme, Ternik and Marn [10]. Source terms in transport equation for  $k$  and  $\tilde{\epsilon}$  were modelled with the USRSRC user subroutines while the effective viscosity in momentum equation and effective diffusivity in transport equation for  $k$  and  $\tilde{\epsilon}$  modelled with USRDIF user subroutine (Ansys [11]).

## 4 Results

### 4.1 Nodalization analysis and validation of numerical procedure

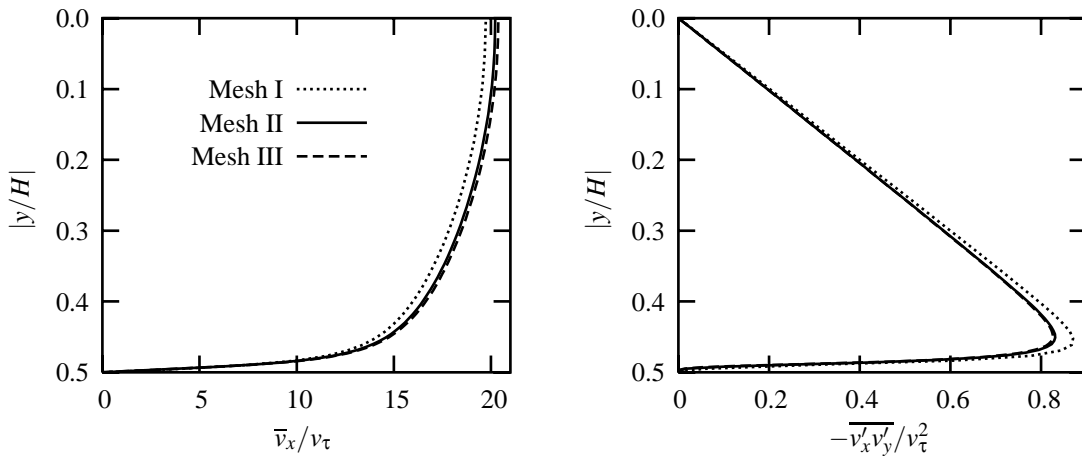
Table 2 : Nodalization analysis results; Newtonian fluid, NH-CP turbulent model.

Mesh	Num. el.	$\nu_\tau [m/s]$	$y^+$	$\bar{v}_x(y=0)/\nu_\tau$
Mesh I	$1200 \times 25$	$5.735E - 02$	$1.984E + 00$	19.732
Mesh II	$1200 \times 50$	$5.587E - 02$	$9.746E - 01$	20.220
Mesh III	$1200 \times 75$	$5.541E - 02$	$6.463E - 01$	20.378

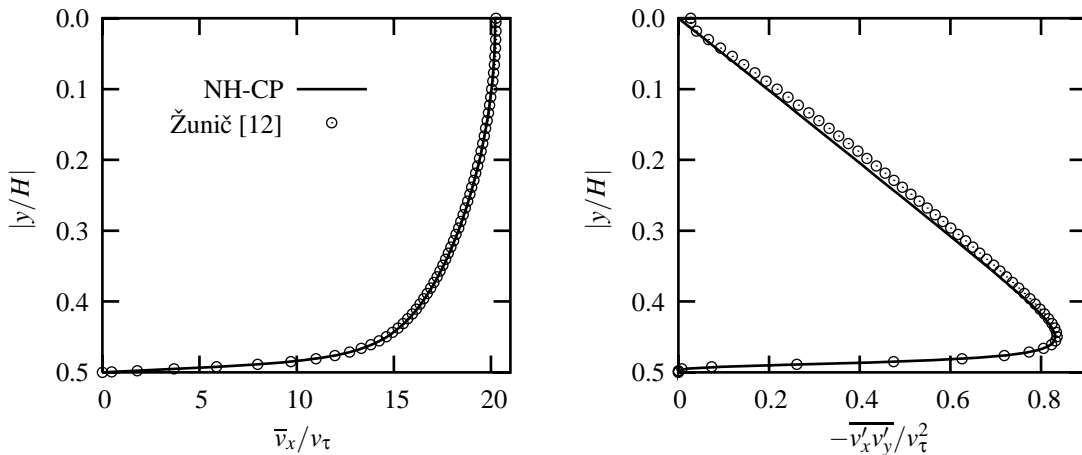
The influence of computational grid refinement on the numerical accuracy was studied through the nodalization analysis. For this the turbulent flow of Newtonian fluid with NH-CP turbulent model, Cruz and Pinho [3], was considered using three different computational meshes. Each

mesh was populated with uniformly distributed elements in  $x$ -direction and non-uniformly distributed elements in  $y$ -direction, Table (2). In addition, each mesh was refined in a near wall region due to resolving the viscous sublayer. The ratio of longest (near channel centreline) and shortest (near solid wall) element length was 10.

As the number of elements increases the numerical results converge to the value independent of the mesh density, Figure (4). Accounting for numerical accuracy, number of elements for particular mesh and condition  $y^+ \leq 1$  for first computational node the Mesh II was found to be a good compromise, as shown in Table (2).



**Figure 3** : Nodalization analysis results; Newtonian fluid,  $x = 150$ . Normalized velocity (left), normalized Reynolds stresses (right).



**Figure 4** : Validation of present study; Newtonian fluid,  $x = 150$ . Normalized velocity (left), normalized Reynolds stresses (right).

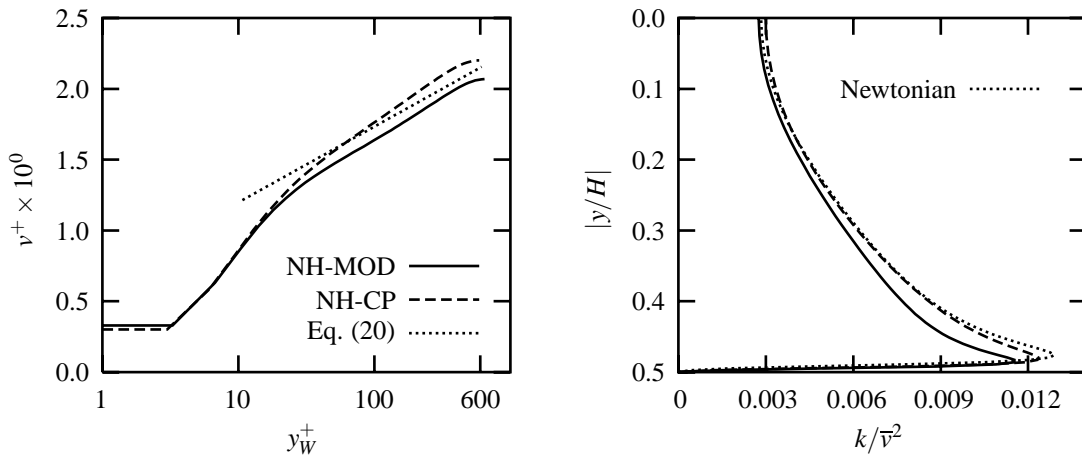
Comparison of present results for Newtonian fluid with results of method of characteristics (Žunič [12]) validates the present numerical procedure, since the modified Nagano-Hishida model (NH-CP) should reduce to the original Nagano-Hishida turbulent model as reported by Cruz and Pinho [3].

#### 4.2 Inelastic shear-thinning fluid ( $n = 0.80$ )

The predicted normalized (with friction velocity  $v_\tau$ ) velocity profiles of both models are slightly above the theoretical correlation of Skelland (Cruz and Pinho [3]):

$$v^+ = 5.657n^{0.25} \log y_W^+ - \frac{0.566}{n^{1.20}} + \frac{3.475}{n^{0.75}} \left[ 1.96 + 0.816n - 1.628n \log \left( 3 + \frac{1}{n} \right) \right], \quad (20)$$

but the NH-MOD turbulent model seems to be in a better agreement with the correlation as NH-CP turbulent model, left hand side of Figure (5).

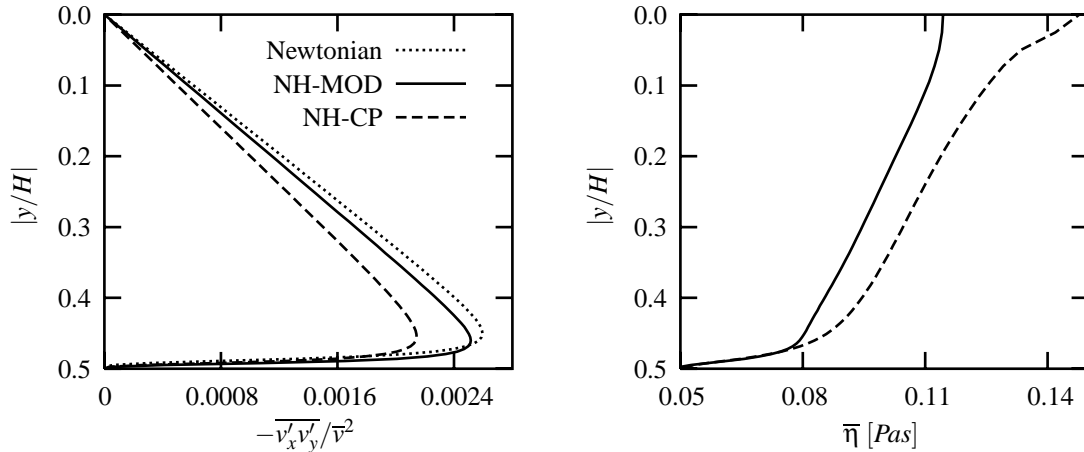


**Figure 5** : Non-Newtonian fluid;  $n = 0.80$ ,  $x = 150$ . Normalized velocity (left), normalized turbulent kinetic energy (right).

In comparison to a Newtonian fluid (results obtained with NH-CP turbulent model) the turbulent kinetic energy profiles for shear-thinning non-Newtonian fluid are lower, right hand side of Figure (5). In a viscous sublayer results for  $k$  of both models do not differ appreciably, observable difference occurs in a inertial sublayer and turbulent core region. The reason is in different damping of turbulent effects (more pronounced damping for NH-CP model) due to different asymptotic behavior of  $f_\mu$  as shown by Figure (1). In a inertial sublayer and turbulent core region the viscous forces are greater for NH-CP turbulent model due to greater values of viscous function, right hand side of Figure (6), which, for the same inertial forces, result in a lower value of  $Re$  number. Finally, DNS results for turbulent Newtonian fluid flow (Moser et al. [13]) show that turbulent kinetic energy profile is greater for lower value of  $Re$  number.

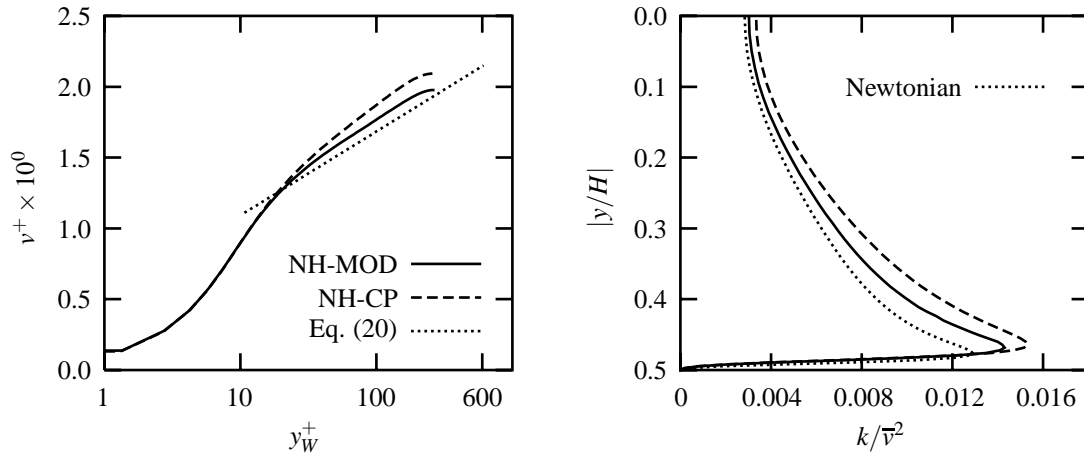
In spite of greater values of  $k$  the Reynolds (turbulent) stresses for NH-CP turbulent model are lower in comparison to NH-MOD turbulent model, left hand side of Figure (6). This is the result

of lower values of NH-CP model damping function  $f_\mu$  upon which the turbulent viscosity  $\nu_T$  is calculated, Equation (18), and then used in Boussinesq approximation for Reynolds stresses, Equation (17).



**Figure 6** : Non-Newtonian fluid;  $n = 0.80$ ,  $x = 150$ . Normalized Reynolds stresses (left), viscous function (right).

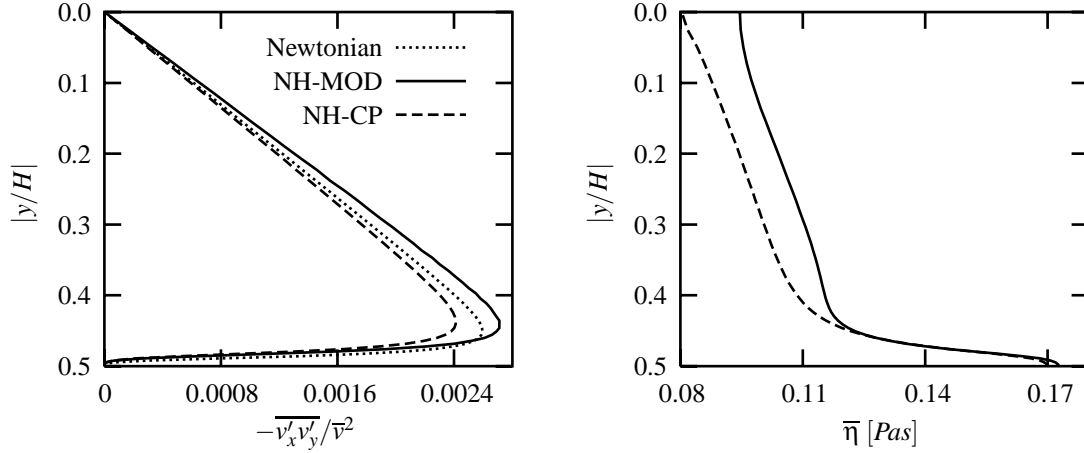
### 4.3 Inelastic shear-thickening fluid ( $n = 1.20$ )



**Figure 7** : Non-Newtonian fluid;  $n = 1.20$ ,  $x = 150$ . Normalized velocity (left), normalized turbulent kinetic energy (right).

Similar as for the shear-thickening fluid both models result in a slightly greater values of normalized (with friction velocity  $v_\tau$ ) velocity profiles in comparison to theoretical expression of

Skelland, Equation (20). Again, the NH-MOD turbulent model seems to predict results that are in better agreement with the theoretical expression.



**Figure 8** : Non-Newtonian fluid;  $n = 1.20$ ,  $x = 150$ . Normalized Reynolds stresses (left), viscous function (right).

Distribution of viscous function  $\overline{\eta}$  of NH-CP turbulent model yields greater viscous forces in the inertial sublayer and turbulent core region (when compared with the NH-MOD model) and lowers the value of  $Re$  number. Thus, the distribution of turbulent kinetic energy, right hand side of Figure (7), is in agreement with DNS results for turbulent Newtonian fluid flow where higher values of  $k$  are reported for lower  $Re$  number turbulent flow (Moser et al. [13]).

In comparison to Newtonian fluid the NH-CP model fails to predict the correct distribution of Reynolds stresses since higher values, as predicted with NH-MOD turbulent model, should occur for the shear-thickening fluid (Malin [2]).

## 5 Conclusions

Numerical modelling of turbulent inelastic non-Newtonian fluid flow was presented. Two  $k - \epsilon$  low Reynolds number turbulent models were considered. First model, as proposed by Cruz and Pinho [3], is a modification of existing Nagano-Hishida model and introduces new damping function  $f_\mu$  and time-averaged viscous function  $\overline{\eta}$ . The second model, as proposed in the present work, uses the damping function  $f_\mu$  of Nagano-Hishida turbulent model and time-averaged viscous function as derived in a work of Cruz and Pinho [3].

Turbulent flow of shear-thinning and shear-thickening non-Newtonian fluid in a channel was studied by numerical means. Nodalization analysis was performed in order to obtain results that are independent of computational mesh used. Results for Newtonian fluid were compared with results of method of characteristics to validate the present numerical procedure.

For both, shear-thinning and shear-thickening fluid, it was determined that turbulent model as proposed by Cruz and Pinho [3] and its damping function fail to capture (qualitatively) the

basic characteristics of such a flow as reported by other authors. In addition, the turbulent model proposed in the present work seems to do predict the advantageous results that are in better agreement with other authors.

## References

- [1] M. R. Malin, Turbulent pipe flow of Power-law fluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 24 (1997) 977–988.
- [2] M. R. Malin, Turbulent pipe flow of Herschel-Bulkey fluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 25 (1998) 321–330.
- [3] D. O. A. Cruz, F. T. Pinho, Turbulent pipe flow predictions with a low Reynolds number  $k - \epsilon$  model for drag reducing fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 114 (2003) 109–148.
- [4] M. Rudman, H. M. Blackburn, L. J. W. Graham, L. Pullum, Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 118 (2004) 33–48.
- [5] Y. Nagano, M. Hishida, Improved Form of the  $k - \epsilon$  Model for Wall Turbulent Shear Flows, *Journal of Fluids Engineering, Transactions of ASME* 109 (1987) 156–160.
- [6] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, USA, 1998.
- [7] F. T. Pinho, A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a  $k - \epsilon$  type closure, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 114 (2003) 149–184.
- [8] P. Ternik, J. Marn, Time averaged governing equations of turbulent generalized Newtonian fluids flow, in: J. Korelc, D. Zupan (Eds.), *Kuhljevi dnevi*, Slovensko Društvo za mehaniko, Otočec, 2004, pp. 309–323.
- [9] C. P. Thompson, N. S. Wilkes, Numerical experiments with higher-order finite difference formulae, *AERE Harwell Report R.10493* (1982).
- [10] P. Ternik, J. Marn, Modelling of non-Newtonian fluid flow using USRBF user subroutine, in: *CFX Conference 2003*, Garmisch-Partenkirchen, 2003.
- [11] Ansys, *CFX-4.4 Solver manual*, 2003.
- [12] Z. Žunič, Numerična obravnava problema aerodinamike vozil, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo (1997).
- [13] R. D. Moser, J. Kim, N. N. Mansour, Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ , *Physics of Fluids* 11 (1999) 943–945.







## *Vpliv tlaka v zaprtih porah na makroskopske lastnosti celičnega materiala*

*M. Vesenjak<sup>1</sup>, Z. Ren<sup>1</sup> in A. Öchsner<sup>2</sup>*

### *Influence of closed cell pressure on the macroscopic properties of the cellular material*

**Povzetek.** V prispevku je predstavljena računalniška simulacija obnašanja materiala z urejeno zaprto celično strukturo pod vplivom udarne dinamične obremenitve. Analiziran je vpliv plina v pori na makroskopske lastnosti materiala s celično strukturo. Simulacije so izvedene z eksplicitnim nelinearnim programskim paketom LS-DYNA v okviru metode končnih elementov. Računalniške simulacije so pokazale znaten vpliv tlaka v porah na makroskopske lastnosti celične strukture. Pri tlačnih obremenitvah se zaradi visokega povišanja tlaka v porah poveča plastična deformacija materiala s čimer se posledično poveča tudi sposobnost absorpcije energije.

**Abstract.** In this paper a computational simulation of regular closed-cell cellular structure behavior under impact loading is presented. The influence of the pore gas on the macroscopic properties of the cellular structure is analyzed. The analyses were carried out with the explicit nonlinear software LS-DYNA, in the framework of finite element method. Computational simulations have shown strong effect of the pore pressure on the macroscopic properties of the cellular structure. Because of the high increase of the pore pressure by compressive loading, the plastic deformation of the base material is increased which results in higher energy absorption.

## **1 Uvod**

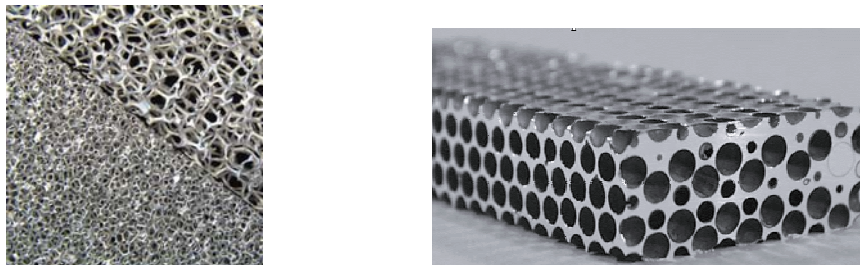
Celično strukturo sestavlja povezana mreža volumskih opornikov ali plošč, ki oblikujejo robove in ploskve celic. Znani sta dve tipični strukturi (sl. 1): odprte celične strukture in zaprte celične strukture. Eden najpomembnejših parametrov celičnih gradiv je njihova specifična gostota. Z naraščanjem le-te se celične stene debelijo, velikost samih celic se zmanjšuje in posledično se povišuje togost. Lastnosti celičnih gradiv sta proučila Gibson in Ashby [10]. Stanje na področju razvoja proizvodnje, značilnosti in uporabnosti kovinskih

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> University of Aviero, Campus Univ. de Santiago, Portugal

pen je opisal Banhart [6]. Splošne mehanske lastnosti celičnih gradiv, njihova izdelava ter uporabnost pa so podrobno razčlenjene v [12].



**Slika 1:** Odprta (DUOCEL<sup>®</sup> - levo) in zaprta celična struktura (Körner et. al - desno).

Med umetnimi celičnimi gradivi so glede na širok obseg uporabnosti trenutno najpomembnejše pene iz polimerov. Pomembne lastnosti pen so: nizka gostota (zelo lahke strukture), visoka akustična izolacija in dušenje, hidrofobnost (nizka absorpcija vode), velika stopnja deformacije, visoka sposobnost absorpcije energije, vzdržljivost pri dinamičnih obremenitvah, velika odpornost na utrujanje, nevenljivost, možnost recikliranja in vedno dostopnejše cene. Izboljšave v proizvodnji pen pa se kažejo v možnosti ponovljivosti celičnih struktur in v vedno bolj urejenih – homogenih strukturah [4].

Zelo pomemben je razvoj kovinskih pen in celičnih gradiv, ki prinaša še dodatne prednosti, saj pene iz kovin in njenih zlitin združujejo dobre lastnosti splošnih (zgoraj opisanih) celičnih struktur in značilno obnašanje kovin (npr. višja nosilnost, toplotna obstojnost do 950°C) [6]. Zelo pomembna je tudi izbira kovine oziroma zlitine iz katere bo celična struktura izdelana. Kovine in zlitine morajo biti lahke, saj v nasprotnem primeru nimajo bistvenih prednosti pred konvencionalnim masivnim gradivom. Zaradi tega so najpogosteje uporabljene zlitine na bazi aluminija, magnezija in titana.

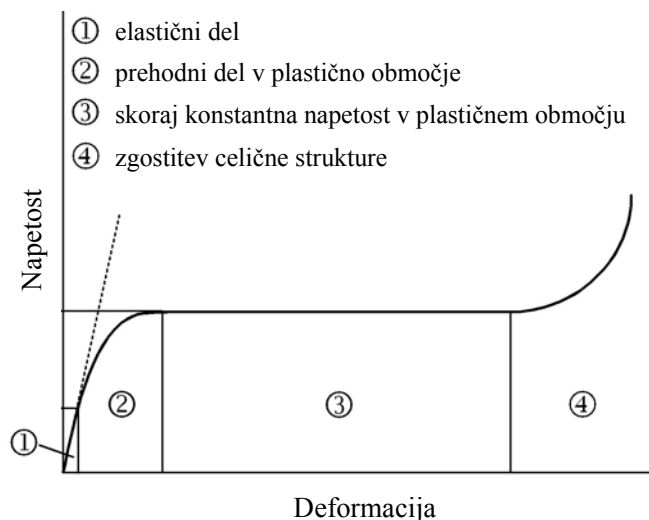
Mikro- in makroskopske lastnosti kovinskih celičnih gradiv omogočajo uporabo v številnih industrijskih disciplinah: avtomobilski, vesoljski, ladjedelski, železniški industriji, kot izmenjevalci toplote, filtri, ležaji, dušilci zvoka, bio-medicinski vsadki in elementi za absorpcijo energije. Eno izmed najpomembnejših področij bodoče uporabe celičnih gradiv je v avtomobilski industriji, kjer je sposobnost absorpcije deformacijske energije iz stališča varnosti izrednega pomena.

V preteklih letih je bilo izvedenih mnogo raziskav na področju obnašanja celičnih gradiv in izpeljavi konstitutivnih modelov. Kljub temu pa omenjeni modeli ne vključujejo vpliva plina v zaprtih celičnih strukturah. Prispevek opisuje računalniške simulacije za analizo vpliva plina v porah na makroskopske lastnosti strukture pri dinamičnih obremenitvah.

## 2 Deformacijske lastnosti celičnih struktur

Pene in celična gradiva imajo pri tlačnih obremenitvah značilno napetostno-deformacijsko krivuljo (sl. 2). Potek krivulje je možno razdeliti na štiri glavna območja:

- (i) elastičen del: osnovno gradivo celične strukture se deformira elastično in se po obremenitvi vrne v začetno nedeformirano obliko;
- (ii) prehodni del v plastično območje: napetost v določenih točkah gradiva celične strukture dosežejo mejo plastičnosti. Posledično nastanejo na medceličnih stenah oziroma povezavah lokalna območja tečenja in prehod v plastično območje;
- (iii) približno konstantna napetost v plastičnem območju: po določeni deformaciji doseže celično gradivo nivo napetosti, ki je v zelo širokem območju deformacij skoraj konstantna. V tem območju se pojavi uklon oziroma izrazita plastifikacija medceličnih sten. Celični prostori se zmanjšujejo, specifična gostota pa posledično raste;
- (iv) povečana togost zaradi zgostitve celične strukture: po določeni stopnji deformacije, ko se medcelične stene popolnoma sesedejo - zgostitev gradiva. Togost oziroma napetost v tem območju zelo hitro narašča, dokler deformirana celična struktura ne doseže togosti osnovnega gradiva.



Slika 2: Značilen potek napetosti celičnih gradiv pri tlačnih obremenitvah.

Deformacijsko energijo, ki jo je gradivo sposobno akumulirati, predstavlja območje pod krivuljo v diagramu napetost-deformacija. Večje kot je to območje pod krivuljo, več energije gradivo akumulira. Za absorpcijo energije je najpomembnejša plastična, nepovratna deformacija gradiva, ki je pri kovinskih penah ugodnejša kot pri penah iz polimerov. Absorpcija energije je prav tako odvisna od deformacijske hitrosti. Večja kot je hitrost deformiranja konstrukcije, večja je sposobnost absorpcije deformacijske energije.

Bolj kontrolirano deformacijo in enakomernejši potek togosti celičnih gradiv je možno doseči z uporabo polnil. Do sedaj vpliv različnih polnil in posledično sprememba nastalega tlaka pri velikih deformacijah na globalno togost celičnega gradiva še nista bila raziskana, kljub temu da se pri nekaterih izdelovalnih postopkih pojavi pri zaprtih celičnih strukturah povišan tlak kot posledica ali mehanskih ali termičnih vplivov. Elzey in Wadley [5] navajata začetni tlak v porah od 3 do 5 barov, pri čemer raziskujeta vpliv temperature na tlak v porah. Če tlak naraste do meje tečenja, se lahko pojavi lezenje osnovnega gradiva ali celo porušitev medceličnih sten in s tem večanje poroznosti gradiva [5].

Do sedaj so bile narejene raziskave na področju ugotavljanja in določevanja tlaka v porah celičnih gradivih, ki so izpostavljena le kvazi-statičnim obremenitvam z zelo nizko stopnjo deformacije. Raziskave vpliva pritiska v porah pri velikih dinamičnih deformacijah (tudi do 50%) pa do sedaj še niso bile izvedene. Po drugi strani pa je bilo narejenih mnogo raziskav, ki so proučevale deformacijo in absorbiranje energije celičnih gradiv pri dinamičnih udarnih obremenitvah, vendar pri teh analizah ni bil upoštevan vpliv nastalega tlaka v porah. Potrebo po analiziranju tlaka plina v celičnih gradivih so pokazale prve raziskave, ki z upoštevanjem konstantnega tlaka v porah dosegajo boljše ujemanje računalniških analiz z eksperimentalnimi podatki [3].

Vpliv zraka v celični strukturi v obliki satovja in posledični potek napetosti v gradivu je opisal Shkolnikov [11]. Rezultati kažejo, da se napetosti ob upoštevanju zakonitosti idealnega plina povečajo za 10%. Upoštevanje plina v celičnih strukturah v obliki satovja pa je smiselno le pri visoko dinamičnih obremenitvah, saj v tem primeru zrak zaradi velike hitrosti deformiranja ne more tako hitro zapustiti satovja, in se tako večina plina stisne.

Dokazano pa je bilo, da tlak plina v zaprtih celičnih strukturah zviša mejo tečenja gradiva pri tlačnih obremenitvah. Ti zaključki se skladajo z ugotovitvami, ki so jih opisali Öchsner et al. [3], vendar so bile njihove trditve zasnovane le na teoriji malih deformacij.

Ohrndorf et al. ugotavljajo, da s povečanjem hitrosti deformiranja celično gradivo izgublja svoj značilen potek v diagramu napetost – deformacija [4]. Napetostna ravnina se z višanjem deformacijske hitrosti hitreje povečuje (večja absorpcija deformacijske energije).

Spremembo temperature zaradi povišanega tlaka v porah opisujeta Lankfor in Dannemann. Povišanje temperature povzroči povečanje tlaka v porah in posledično tudi povišanje napetosti.

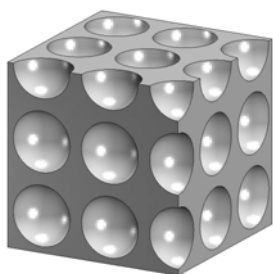
Preprostejše in hitrejša računalniško modeliranje celičnih struktur z enostavnimi volumskimi končnimi elementi omogočajo homogenizirani konstitutivni modeli. V ta namen je bilo izvedenih nekaj procesov homogenizacije kovinskih pen oziroma celičnih gradiv ter razvitih konstitutivnih modelov, ki opisujejo tovrstna gradiva [13]. Rezultati numeričnih analiz, ki uporabljajo takšne konstitutivne modele, se zelo približajo rezultatom eksperimentov. Dobro ujemanje je možno simulirati tudi pri večjih hitrosti deformiranja (npr. trku oz. udarnih obremenitvah). Kljub temu pa v nobenem od teh modelov ni upoštevan tlak v porah.

Glede na zgoraj zapisano je smiselno ugotoviti vpliv plina na lokalno plastifikacijo osnovnega gradiva in na makroskopsko obnašanje celične strukture. V ta namen so bile izvedene nelinearne dinamične simulacije urejene zaprte celične strukture z upoštevanjem različnih začetnih tlakov v pori.

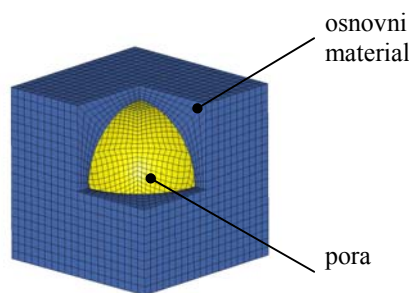
### 3 Računalniški model

Pri numeričnem modeliranju celičnih struktur je najpogostejša omejitev računalniška moč. Zaradi tega se računalniške simulacije izvajajo z uporabo t.i. enotskega volumskega elementa celičnega materiala, na osnovi katerega se določijo zakonitosti obnašanja celičnega materiala pod obremenitvijo. Matematični opis izvedenih konstitutivnih zakonitosti pa se lahko kasneje uporabi za računalniške simulacije celotne konstrukcije iz celičnega gradiva, ki je diskretizirana s polnimi končnimi elementi, saj je vpliv celične strukture zajet v izvedenem konstitutivnem modelu [2].

V računalniških simulacijah je bila uporabljena urejena (homogena) zaprta celična struktura (sl. 3). Enotski volumski element (sl. 4) v obliki kocke ima dolžino roba 1.8 mm. Polmer okrogle pore v sredini volumskega elementa znaša 0.75 mm. Omenjene geometrija določa relativno gostoto celične strukture 0.7. Osnovno gradivo je zamreženo z 8-vozljišnimi volumskimi končnimi elementi.



Slika 3: Urejena celična struktura.



Slika 4: Enotski volumski element.

Vpliva plina v porah je bil simuliran z modelom zračne blazine (Airbag; [8]), ki je na voljo v LS-DYNI [7, 8]. Z uporabo omenjenega modela je mogoče določiti spremembo tlaka, prostornine in temperature v zaprtem prostoru. Predpostavljeno je bilo, da ima plin v pori lastnosti idealnega plina ( $pV/T = \text{konst.}$ ). Deformacija celične strukture, ki posledično zmanjša prostornino pore, vpliva na povišanje tlaka in temperature plina v pori.

Osnovno gradivo celične strukture je aluminijeva zlitina (AlCuMg1). Predpisano je bilo elasto-plastično obnašanje osnovnega gradiva z naslednjimi materialnimi lastnostmi:  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 72.7 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$  in  $R_e = 0.3 \text{ GPa}$ . Zaradi analizirane udarne dinamične obremenitve, je bilo potrebno upoštevati tudi vpliv deformacijske hitrosti na materialne lastnosti. V ta namen je bil uporabljen Cowper-Symondsov konstitutivni zakon [7,8,13].

Plin v pori je zrak, z naslednjimi lastnostmi:  $\rho = 1.189 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 717 \text{ kJ/kg K}$  in  $c_v = 1005 \text{ kJ/kg K}$ . Začetna temperatura je znašala 293 K. Upoštevani so bili različni začetni tlaki 5, 50, 500 in 1000 barov v pori, kar je povzročilo začetno napetost v osnovnem gradivu celične strukture (Tabela 1).

Tabela 1: Začetna napetost v osnovnem gradivu zaradi tlaka v pori.

Začetni tlak v pori	bar	5	50	500	1000
Von Mises napetost	MPa	1.4	14	155	230

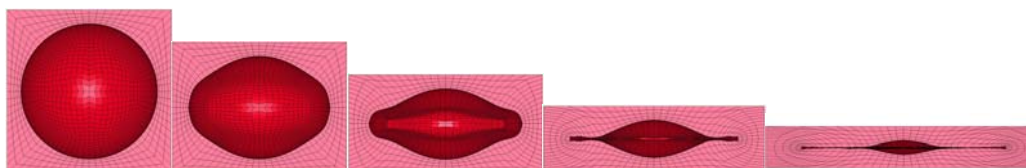
Udarne obremenitve je bila predpisana s pomikom tako, da je bila dosežena konstantna deformacijska hitrost  $100 \text{ s}^{-1}$ . Upoštevana sta bila dva obremenitvena primera: tlačni in natezni. Spodnja ploskev je bila podprta v navpični smeri. Na stranskih ploskvah celične strukture pa so bili predpisani periodični robni pogoji [2, 3].

Za izvedbo simulacij zgoraj opisanega računalniškega modela je bil uporabljen programski paket LS-DYNA. Opazovani časovni interval deformacije celične strukture je znašal 10 ms, pri čemer je bila v prvi milisekundi vpeljana le obremenitev zaradi tlaka v pori. Časovni korak eksplisitne analize je znašal  $0.1 \mu\text{s}$ . Povprečna velikost elementov je bila 0.05 mm in celoten model je bil diskretiziran s približno 14400 elementi.

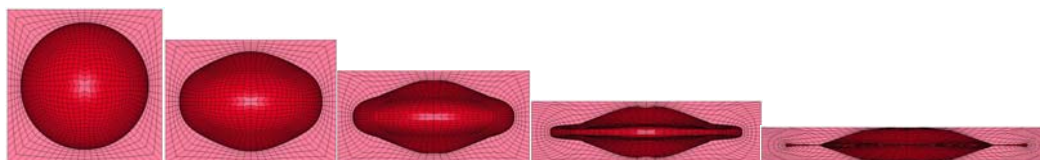
#### 4 Rezultati računalniških simulacij

Slike od 5 do 9 prikazujejo rezultate računalniških simulacij. Pri računalniških modelih z začetnim tlakom 50 in 100 MPa je bila dosežena 70 % globalna deformacija, pri modelih s tlakom 0.5 in 5 MPa pa se je numerična analiza ustavila pri 55 % globalne deformacije zaradi negativnega volumna v končnih elementih.

Potek deformacije celične strukture pri začetnem tlaku 5 in 1000 barov je prikazan na slikah 5 in 6. Razvidno je, da se v primeru, ko je začetni tlak nižji, plin v pori bolj stisne kakor v primeru, ko je začetni tlak zelo visok. V slednjem primeru, se zaradi nastalega zelo visokega tlaka v pori lokalna deformacija osnovnega gradiva poveča, s čimer se poveča tudi absorpcija deformacijske energije.



Slika 5: Deformacija celice pri tlačni obremenitvi in začetnem tlaku v pori 5 bar.



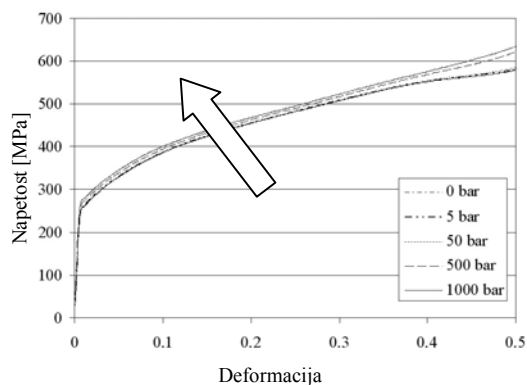
Slika 6: Deformacija celice pri tlačni obremenitvi in začetnem tlaku v pori 1000 bar.

Na slikah 7 in 8 je prikazano makroskopsko obnašanje celične strukture v obliki diagrama napetost-deformacija, ob upoštevanju različnih začetnih tlakov v pori. Na sliki 7 je prikazan tlačni obremenitveni primer, kjer je razvidno, da z višanjem začetnega tlaka v pori, globalna togost strukture raste. Zviša se tudi makroskopska meja tečenja in sicer do 10 %.

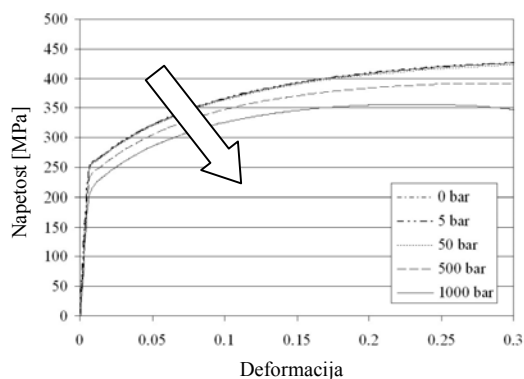
Nasproten odziv vidimo na sliki 8, kjer je prikazano natezno obremenjevanje, kjer z višanjem začetnega tlaka v pori meja tečenja pada. Tečenje osnovnega gradiva v primeru začetnega tlaka 1000 barov se začne 22 % hitreje kot pri začetnem tlaku 1 bar.

Sprememba tlaka v celični pori pri tlačni obremenitvi je prikazana na sliki 9. Razvidno je, da tlak narašča do določene meje. To mejo pa predstavlja trenutna hidrostatska napetost v

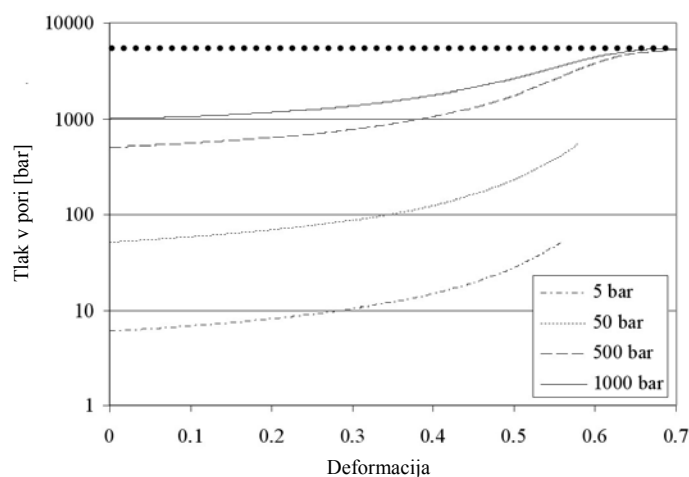
končnih elementih. Ko tlak v pori doseže napetost v elementih, se plastična deformacija osnovnega gradiva povečuje. Višji kot je tlak v pori, večja je plastična deformacija osnovnega gradiva in njegova absorpcija energije.



Slika 7: Tlačna obremenitev.



Slika 8: Natezna obremenitev.



Slika 9: Tlak v pori celice pri tlačni obremenitvi.

Glede na idealno plinsko enačbo ( $pV/T = \text{konst.}$ ) se s spremembo prostornine in tlaka v pori spreminja tudi temperatura. Simulacije so pokazale povečanje temperature do 570 K. Pri večjih deformacijah, kjer se temperatura še bolj poveča, lahko le-ta vpliva na materialne lastnosti osnovnega gradiva. Zaradi tega je v bodoče smiselno izvesti tudi vezano toplotno-strukturno simulacijo.



## 5 Zaključek

Gradiva z visoko stopnjo poroznosti (npr. celična gradiva) imajo privlačno kombinacijo fizikalnih in mehanskih lastnosti, kot so visoka togost glede na zelo nizko specifično težo ali visoka prepustnost plinov v kombinaciji z visoko termično prevodnostjo. Zaradi tega se v naravi pogosto uporabljajo za konstrukcijske ali funkcionalne namene.

Začetni rezultati računalniških simulacij so pokazali, da upoštevanje plina v porah zaprtoceličnih struktur ni zanemarljiv. Tlak plina v zaprti pori se pri zelo velikih tlačni deformaciji poveča, kar povzroči povečanje makroskopske togosti strukture in večje absorpcije deformacijske energije.

S pomočjo predstavljenega numeričnega modela bodo izpeljani novi konstitutivni modeli, ki bodo upoštevali različne relativne gostote, osnovna gradiva, vrste plina in deformacijske hitrosti celične strukture. Le-ti bodo omogočali enostavnejšo in bolj ekonomično uporabo v poljubnem numeričnem programskem paketu.

Prihodnje delo bo usmerjeno na izvedbo eksperimentov in primerjavo z numeričnimi rezultati ter natančno študijo vpliva polnil in deformacijskih hitrosti pri odprtih celičnih strukturah na njihove makroskopske mehanske lastnosti, s ciljem doseči optimalno absorpcijo energije.

## Literatura

- [1] A. Altenhof, W. Ames, Strain rate effects for aluminum and magnesium alloys in finite element simulations of steering wheel impact test, *Fatigue Fract. Engng.* 25, Blackwell Sci. Ltd., 2002.
- [2] A. Öchsner, Experimentelle und numerische Untersuchung des elasto-plastischen Verhaltens zellulärer Modellwerkstoffe, Düsseldorf, VDI Verlag GmbH, 2003.
- [3] A. Öchsner, G. Mishuris, J. Gracio, Modelling of the multiaxial elasto-plastic behaviour of porous metals with internal gas pressure, Elsevier Science Ltd., 2004.
- [4] A. Ohrndorf, Schmidt, U. Krupp, H.J. Christ, Mechanische Untersuchung eines geschlossenporigen Aluminiumschaums, Deutscher Verband für Materialforschung und –prüfung e.V., Bad Nauheim, 2000.
- [5] D.M. Elzey, H.N.G. Wadley, The Limits of Solid State Foaming, *Acta Materialia* 94, Elsevier Science Ltd., 2001.
- [6] J. Banhart, Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metallic foams, *Progress in Materials Science* 46, Elsevier Science Ltd., 2001
- [7] J. Hallquist, Keyword manual, Livermore Software Technology Corporation, 2003.
- [8] J. Hallquist, Theoretical manual, Livermore Software Technology Corporation, 1998.
- [9] J. Lankford, K.A. Dannemann, Strain Rate Effects in Porous Materials”, *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* Vol. 521, 1998.
- [10] L.J. Gibson, M.F. Ashby, Cellular solids: structure and properties, Cambridge Uni. Press, 1997.
- [11] M.B. Sholnikov, Honeycomb Modelling for Side Impact Moving Deformable Barrier, 7<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference, Dearborn, 2002.
- [12] M.F. Ashby, A.G. Evans, N.A. Fleck, L.S. Gibson, J.W. Hutchinson, H.N.G. Wadley, *Metal foams: a design rule*, Boston, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [13] S.R. Bodener, P.S. Symonds, Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beam subjected to impulse loading, *J. Appl. Mech.* 29, 1962.
- [14] V.S. Deshpande, N.A. Fleck, Isotropic constitutive models for metallic foams, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48, Elsevier Science Ltd., 2000.



## *Snovno nelinearna mehanika in ovirana povračljivost pri gradivih z oblikovnim spominom*

*T. Videnič<sup>1</sup> in F. Kosel<sup>2</sup>*

### *Generalized plasticity and constrained recovery in shape memory alloys*

**Povzetek.** Z uporabo teorije snovno nelinearne mehanike, ki sta jo razvila J. Lubliner in F. Auricchio, je obravnavana enoosna ovirana povračljivost. Kot zunanja ovira, ki onemogoči prosto povračljivost v žici iz materiala z oblikovnim spominom, je uporabljena vzmet iz običajnega materiala. V matematičnem modelu sta uporabljena dva zakona tečenja: linearni in eksponentni.

**Abstract.** In this article uniaxial constrained recovery is modelled using the theory of generalized plasticity, which was developed by J. Lubliner and F. Auricchio. As a mechanical obstacle that delays free recovery in a shape memory material wire, a bias spring made of an ordinary material is used. Two flow rules are used in the modelling: linear and exponential.

#### **1 Uvod**

Materiali z oblikovnim spominom (shape memory alloys – SMA) spadajo med tako imenovane *inteligentne materiale* zaradi njihove lastnosti pomnjenja oblike, saj se jim lahko povrne v preteklosti definirana oblika s pomočjo spremembe temperature. Če element iz takšnega materiala deformiramo v nizko temperaturni fazi (martenzit), se mu povrne osnovna nedeformirana oblika ob segretju nad temperaturo  $A_f$ , ko se v elementu dovrši obratna transformacija iz martenzita v avstenit. Matematična obravnava mehanskega obnašanja SMA je specifična in jo je mogoče izvesti v okviru teorije snovno nelinearne mehanike [3].

V prispevku je predstavljen matematični model enoosne ovirane povračljivosti SMA žice z uporabo teorije snovno nelinearne mehanike. Kot zunanja mehanska ovira, ki ovira prosto povračljivost SMA žice, je uporabljena vzmet iz običajnega materiala. Celoten proces ovirane povračljivosti je razdeljen na tri temperaturna območja, v matematičnem modelu pa sta uporabljena dva zakona tečenja: linearni in eksponentni. Izrazi dobljeni z uporabo linearnega zakona tečenja so zapisani v zaključeni obliki, medtem ko dobimo v primeru eksponentnega zakona transcendentne enačbe in je potrebno uporabiti numerične metode.

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, E-mail: [tomaz.videnic@fs.uni-lj.si](mailto:tomaz.videnic@fs.uni-lj.si)

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, E-mail: [franc.kosel@fs.uni-lj.si](mailto:franc.kosel@fs.uni-lj.si)

Poleg tega eksponentni zakon tečenja vsebuje skalarno konstanto  $b$ , ki je merilo za hitrost transformacije iz martenzita v avstenit in obratno, način njene določitve pa še ni povsem znan, zato je v prispevku prikazan njen vpliv na rezultate ovirane povračljivosti. V računskem primeru so uporabljeni podatki za Ni-Ti-6%Cu SMA žico ter za jekleno vzmet.

## 2 Snovno nelinearna mehanika in SMA

Snovno nelinearna mehanika je bila razvita za popis napetostno-deformacijskih stanj v trdninah, pri katerih po začetnem plastičnem obremenjevanju in elastičnem razbremenjevanju ponovno obremenjevanje ni nujno elastično do stanja pri katerem se je začelo razbremenjevanje. Med takšne trdnine spadajo tudi materiali z oblikovnim spominom. V dvofaznem sistemu (martenzit in avstenit) je edina notranja spremenljivka masni delež ene od faz. Običajno je to masni delež martenzita  $x$ . Če je  $x = 0$  to pomeni, da je struktura SMA elementa avstenitna, če pa je  $x = 1$  je struktura popolnoma martenzitna. Zaradi pomanjkanja prostora bosta na tem mestu navedena le končna izraza, ki povezujeta normalno napetost  $s$ , masni delež martenzita  $x$  ter temperaturo  $T$  SMA žice v primeru linearnega in eksponentnega zakona tečenja. Zainteresirani bralec lahko najde ustrezne izpeljave v literaturi [1].

Linearni zakon tečenja:

$$s = C \left[ T - A_f + x(A_f - A_s) \right] \quad (1)$$

kjer je  $C$  napetostno razmerje, ki je običajno poznano za ustrezen SMA material,  $A_s$  pa je temperatura pri kateri se začne obratna transformacija iz martenzita v avstenit.

Eksponentni zakon tečenja:

$$s = C(T - A_f) + \frac{bC(A_f - A_s)}{b - C(A_f - A_s) \ln x} \quad (2)$$

Definiramo lahko še neelastično oziroma povračljivo deformacijo  $e_{SR}$ , ki je proporcionalna masnemu deležu martenzita  $x$ :

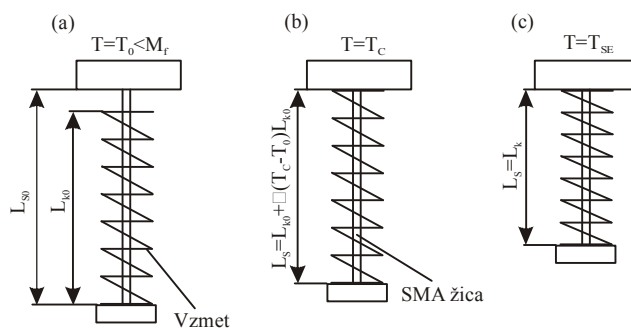
$$e_{SR} = e_{s0} x \quad (3)$$

kjer je  $e_{s0}$  največja povračljiva deformacija, povzročena v popolnoma martenzitnem stanju, ki popolnoma izgine, ko SMA element segrejemo do temperature  $A_f$ .

## 3 Proces enoosne ovirane povračljivosti

Precejšnje napetosti se ustvarijo v SMA elementih, če je med segrevanjem povrnitev avstenitne strukture ovirana z zunanjo oviro. Proces se imenuje ovirana povračljivost. Enoosna ovirana povračljivost pa pomeni, da je SMA element enoosen.

SMA žico ohladimo iz avstenitnega stanja ( $T > A_f$ ) do temperature  $T = T_0 < M_f$ , torej do martenzitne faze. Stanje SMA žice v tem trenutku naj bo referenčno, kar pomeni, da izražamo vse deformacije glede na dolžino žice v tem trenutku ( $L_0$ ), oziroma, da je celotna deformacija žice v tem trenutku enaka nič. Nadalje, pri temperaturi  $T_0$  SMA žico natežno obremenimo in razbremenimo, tako da je celotna deformacija po ciklu enaka  $e_{S0}$ . Tako se ob segrevanju med temperaturama  $A_S$  in  $A_f$ , torej med obratno transformacijo iz martenzita v avstenit, SMA žica krči. Če med segrevanjem med temperaturama  $A_S$  in  $A_f$  dopustimo, da se SMA žica krči neovirano, potem imenujemo proces neovirana povračljivost, če pa jo na kakršenkoli način oviramo pri krčenju, pa ovirana povračljivost, slika 1.



**Slika 1:** Proces enoosne ovirane povračljivosti

Na sliki 1 je  $L_{k0}$  dolžina vzmeti pri temperaturi  $T_0$ ,  $L_k$  trenutna dolžina vzmeti pri temperaturi  $T$ ,  $L_S$  trenutna dolžina SMA žice pri temperaturi  $T$ ,  $T_C$  kontaktna temperatura pri kateri se SMA žica in vzmet dotakneta in  $a$  linearni temperaturni razteznostni koeficient vzmeti.

### 3.1 Modeliranje enoosne ovirane povračljivosti

Izraz za celotno deformacijo SMA žice  $e_S$  lahko zapišemo na naslednja načina:

$$e_S = (L_S - L_0) / L_0 \quad (4)$$

$$e_S = e_{SR} + e_{SA} + e_{SE} = e_{SR} + a_s (T - T_0) + s / E_S \quad (5)$$

kjer je  $e_{SA}$  temperaturna deformacija,  $e_{SE}$  elastična deformacija,  $a_s$  linearni temperaturni razteznostni koeficient SMA žice in  $E_S$  modul elastičnosti SMA žice. Izraz za celotno deformacijo vzmeti  $e_k$  pa lahko zapišemo na naslednji način:

$$e_k = (L_k - L_{k0}) / L_{k0} \quad (6)$$

Celoten proces ovirane povračljivosti razdelimo na tri temperaturna območja:

**a)** SMA žica ima martenzitno strukturo med temperaturama  $T_0$  in  $A_S$  in se obnaša kot običajen material. **b)** Pri temperaturi  $A_S$  se prične obratna martenzitna transformacija, zato se SMA žica krči, vzmet pa se razteguje, pri temperaturi  $T_C$  pa se oba elementa dotakneta. **c)** Nad temperaturo  $T_C$  je obratna transformacija v SMA žici zaradi vzmeti ovirana in poteka do temperature  $T_{SE}$  pri kateri se retransformacija v SMA žici konča. Napetost v SMA žici  $s$

narašča, zato je temperatura  $T_{SE}$  precej višja od temperature  $A_f$ , pri kateri se obratna transformacija konča ob odsotnosti napetosti. Izraza (4) in (6) veljata v vseh treh območjih.

### 3.1.1 Prvo temperaturno območje $T_0 \leq T \leq A_s$

V tem območju je SMA žica vseskozi v martenzitni fazi, tako da se obratna transformacija še ni pričela in velja:  $e_{SR} = e_{S0} = \text{konst.}$  Za celotno deformacijo SMA žice  $e_s$  lahko tako zapišemo:

$$e_s = e_{S0} + a_s(T - T_0) \quad (7)$$

Podobno lahko zapišemo za deformacijo vzmeti:

$$e_k = a(T - T_0) \quad (8)$$

Napetostno stanje je v obeh elementih nično, saj se še nista dotaknila.

### 3.1.2 Drugo temperaturno območje $A_s \leq T \leq T_C$

Pri temperaturi  $A_s$  se začne obratna transformacija v avstenit. Povračljivi delež deformacije SMA žice  $e_{SR}$  se zdaj s temperaturo zmanjšuje, zato lahko zapišemo:

$$e_s = e_{SR} + a_s(T - T_0) \quad (9)$$

Povračljivi delež deformacije  $e_{SR}$  lahko določimo z uporabo linearnega (1) oziroma eksponentnega (2) zakona tečenja, ob upoštevanju  $s = 0$ :

$$e_{SR} = e_{S0} (A_f - T) / (A_f - A_s) \quad (10)$$

$$e_{SR} = e_{S0} \exp \left[ - \frac{b(T - A_s)}{C(A_f - A_s)(A_f - T)} \right] \quad (11)$$

Kontaktno deformacijo  $e_C$  SMA žice lahko določimo iz pogoja enakosti dolžin SMA žice in vzmeti pri kontaktni temperaturi  $T_C$ :

$$L_0 [1 + e_C + a_s(T_C - T_0)] = L_{k0} [1 + a(T_C - T_0)] \quad (12)$$

V primeru linearnega zakona tečenja (10) je kontaktna temperatura  $T_C$ :

$$T_C = A_f - e_C(A_f - A_s) / e_{S0} \quad (13)$$

in v primeru eksponentnega zakona (11):

$$T_C = \frac{C(A_f - A_s)A_f \ln(e_C / e_{S0}) - bA_s}{C(A_f - A_s) \ln(e_C / e_{S0}) - b} \quad (14)$$

### 3.1.3 Tretje temperaturno območje $T_C \leq T \leq T_{SE}$

V tem območju je izpeljava bolj zapletena, saj se vse tri veličine  $s$ ,  $x$  in  $T$  spreminjajo. Ker sta edini sili v sistemu SMA žica – vzmet notranji sili v obeh elementih ( $F_S$  in  $F_k$ ), morata biti po velikosti enaki in nasprotno usmerjeni. Za silo v vzmeti  $F_k$  lahko zapišemo:

$$F_k = k [L_{k0}(1 + a(T - T_0)) - L_k] \quad ; \quad F_k > 0 \quad (15)$$

kjer je  $k$  vzmetna konstanta. Z upoštevanjem ravnotežne enačbe, izrazov (4) in (15) ter enakosti dolžin SMA žice in vzmeti lahko zapišemo celotno deformacijo SMA žice:

$$e_s = C_1 + C_2 T + C_3 s \quad (16)$$

kjer so  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_3$  konstante:

$$C_1 = (L_{k0} - L_0 - aT_0 L_{k0}) / L_0 \quad C_2 = aL_{k0} / L_0 \quad C_3 = -Q / (kL_0) \quad (17)$$

$Q$  pa je prečni prerez SMA žice. Iz Izraza (5) lahko zapišemo:

$$de_s = de_{SR} + de_{SA} + de_{SE} = de_{SR} + a_s dT + ds_R / E_s \quad (18)$$

kjer je  $ds_R$  elastični del prirastka napetosti  $ds$  v SMA žici. Iz literature [4] je znano, da velja zveza  $C = ds_R / dT$ , zato lahko po izenačitvi izrazov (16) in (18) ter ustrezni integraciji dobimo:

$$e_{SR} = e_c + (C_2 - a_s - C / E_s)(T - T_C) + C_3 s \quad (19)$$

V izrazu (19) sta dve neznanki  $s$  in  $e_{SR}$ , zato moramo uporabiti še linearni oziroma eksponentni zakon tečenja.

Linearni zakon tečenja

Izraz (1) odvajamo po temperaturi  $T$ , upoštevamo (3), ter integriramo v ustreznih mejah:

$$e_{SR} = e_c + \frac{e_{s0}}{C(A_f - A_s)} s - \frac{T - T_C}{A_f - A_s} e_{s0} \quad (20)$$

Izraza (19) in (20) izenačimo in končno lahko izrazimo napetost v SMA žici  $s$ :

$$s = \frac{C(A_f - A_s)}{e_{s0} - CC_3(A_f - A_s)} \left( C_2 - a_s - \frac{C}{E_s} + \frac{e_{s0}}{A_f - A_s} \right) (T - T_C) \quad (21)$$

Temperaturo  $T_{SE}$  pri kateri se konča obratna transformacija iz martenzita v avstenit med ovirano povračljivostjo določimo iz (19) in (20) ob upoštevanju pogoja  $e_{SR}(T_{SE}) = 0$ :

$$T_{SE} = A_f + \frac{e_c}{e_{s0}} \frac{e_{s0} E_s + [E_s(C_2 - a_s) - C](A_f - A_s)}{C(1 - E_s C_3) - E_s(C_2 - a_s)} \quad (22)$$

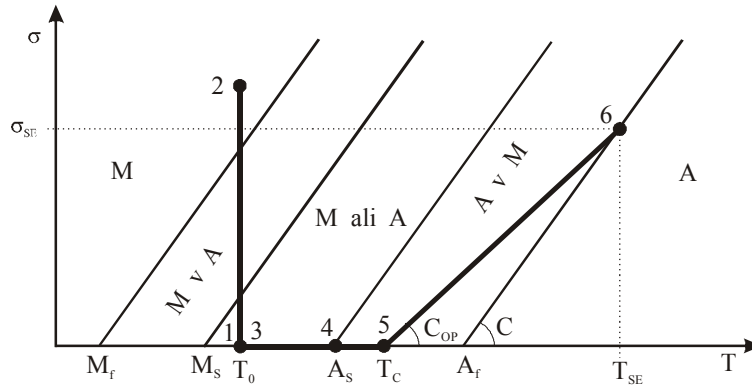
Podobno lahko določimo tudi napetost  $s_{SE} = s(T_{SE})$  pri kateri se konča ovirana povračljivost:

$$s_{SE} = \frac{e_c}{e_{s0}} C \frac{e_{s0} E_s + [E_s (C_2 - a_s) - C] (A_f - A_s)}{C(1 - E_s C_3) - E_s (C_2 - a_s)} \quad (23)$$

Iz izraza (21) lahko določimo še konstanto  $C_{OP} = ds/dT$ , ki predstavlja napetostno razmerje med procesom ovirane povračljivosti in je vedno manjša od napetostnega razmerja  $C$ :

$$C_{OP} = \frac{C(A_f - A_s)}{e_{s0} - CC_3(A_f - A_s)} \left( C_2 - a_s - \frac{C}{E_s} + \frac{e_{s0}}{A_f - A_s} \right) = C \frac{T_{SE} - A_f}{T_{SE} - T_C} = konst. \quad (24)$$

Za boljšo predstavo je na sliki 2 shematsko predstavljen celoten proces ovirane povračljivosti ob upoštevanju linearnega zakona tečenja.



**Slika 2:** Napetostno – temperaturni potek ovirane povračljivosti

Eksponentni zakon tečenja

Izraz (2) odvajamo po temperaturi  $T$ , upoštevamo (3), ter integriramo v ustreznih mejah:

$$\begin{aligned} e_{SR} - e_c - \frac{bC_3C(A_f - A_s)}{b - C(A_f - A_s) \ln(e_{SR}/e_{s0})} + \frac{bC_3C(A_f - A_s)}{b - C(A_f - A_s) \ln(e_c/e_{s0})} = \\ = [C(E_s C_3 - 1)/E_s + C_2 - a_s](T - T_C) \quad (25) \end{aligned}$$

Ker je enačba (25) transcendentna, ne moremo izraziti povračljive deformacije SMA žice  $e_{SR}$  v zaključeni obliki in moramo uporabiti numerične metode. Ko je  $e_{SR}$  znana, lahko izračunamo napetost v SMA žici  $s$  pri temperaturi  $T$  iz enačbe (19).

Kljub temu, da  $e_{SR}$  in  $s$  ne moremo zapisati v zaključeni obliki, pa to lahko storimo za temperaturo  $T_{SE}$  in napetost  $s_{SE}$ , ob upoštevanju  $e_{SR}(T_{SE})=0$ ,  $s_{SE}=s(T_{SE})$  in enačb (25), (19):

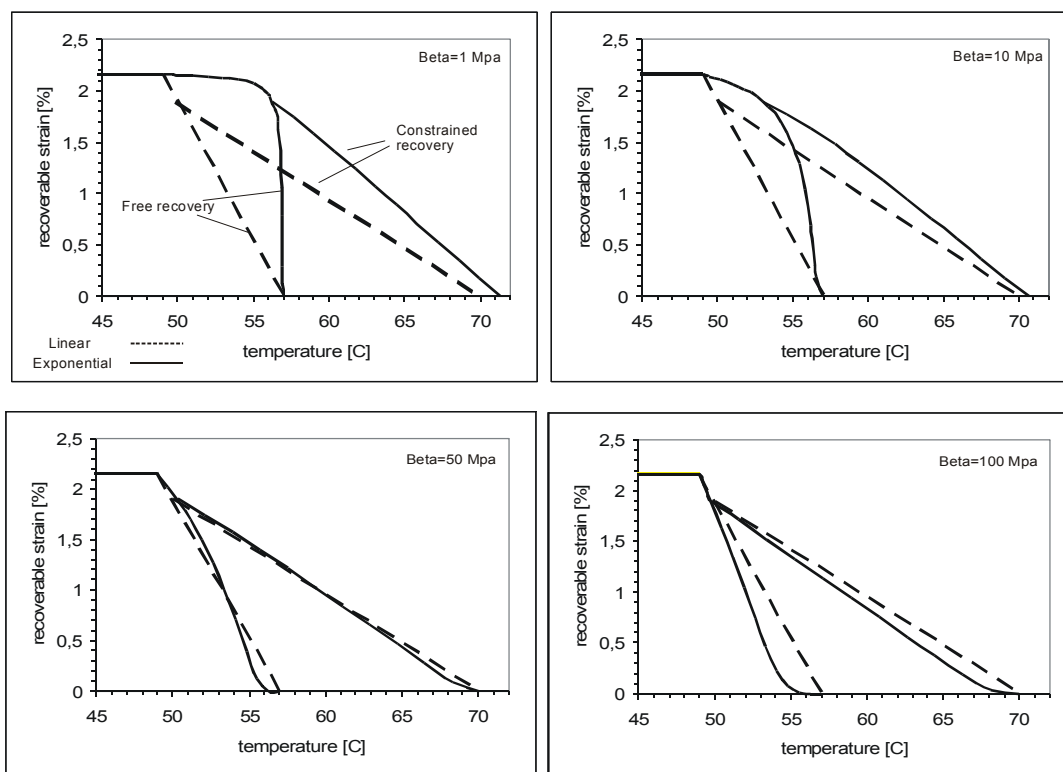
$$T_{SE} = T_C + \frac{E_S}{C(E_S C_3 - 1) + E_S(C_2 - a_S)} \left[ \frac{b C_3 C (A_f - A_S)}{b - C(A_f - A_S) \ln(e_C / e_{S0})} - e_C \right] \quad (26)$$

$$s_{SE} = -\frac{1}{C_3} \left[ e_C + \frac{E_S(C_2 - a_S) - C}{C(E_S C_3 - 1) + E_S(C_2 - a_S)} \left( \frac{b C_3 C (A_f - A_S)}{b - C(A_f - A_S) \ln(e_C / e_{S0})} - e_C \right) \right] \quad (27)$$

#### 4 Numerični primeri

Številčne vrednosti za materialne parametre veljajo za Ni-Ti-6%Cu SMA žico premera 1.15 mm ter za jekleno vzmet:

$$\begin{array}{llll} A_S = 49 \text{ }^\circ\text{C} & A_f = 57 \text{ }^\circ\text{C} & T_0 = 30 \text{ }^\circ\text{C} & E_S = 27000 \text{ MPa} \\ e_{S0} = 2.155 \% & e_C = 1.9 \% & Q = 1.0387 \text{ mm}^2 & L_{S0} = 100 \text{ mm} \\ C = 9.83 \text{ MPa/K} & a_S = 6.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} & a = 1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1} & k = 100 \text{ N/mm} \end{array}$$



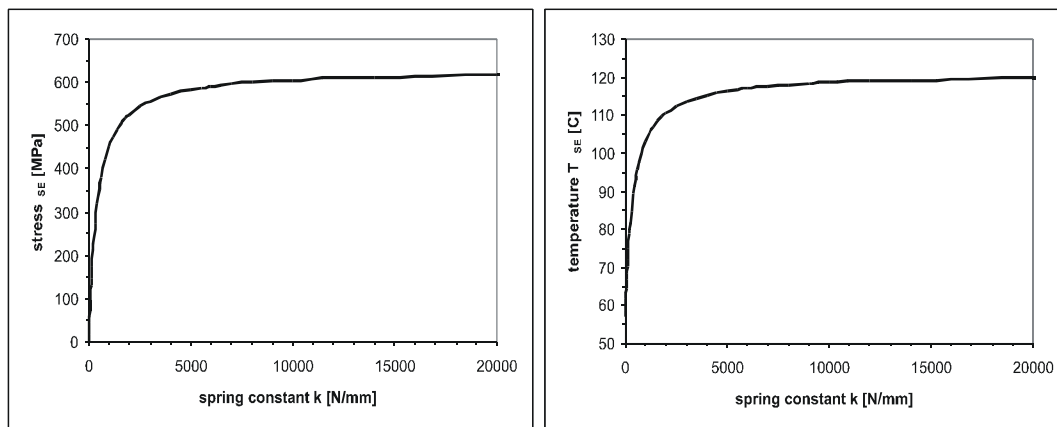
**Slika 3:** Zveza med  $T$  in  $e_{SR}$  za štiri vrednosti konstante  $b = 1, 10, 50$  in  $100 \text{ MPa}$

Na sliki 3 je predstavljena zveza med temperaturo  $T$  in povračljivo deformacijo SMA žice  $e_{SR}$  pri štirih vrednostih konstante  $b$ . Uporabljena sta tako linearni kot tudi eksponentni



zakon tečenja in lepo je videti, da se rezultati dobro ujemajo, če upoštevamo vrednost neznane konstante  $b = 50$  MPa. Vendar pa kljub temu ne moremo z zanesljivostjo trditi, da je vrednost konstante  $b$  za uporabljeno SMA žico 50 MPa.

Slika 4 je prikazana zveza med vzmetno konstanto  $k$  in napetostjo  $s_{SE}$  ob koncu procesa ovirane povračljivosti v SMA žici in med vzmetno konstanto  $k$  ter temperaturo  $T_{SE}$  ob koncu ovirane povračljivosti. Uporabljen je eksponentni zakon tečenja  $b = 50$  MPa.



**Slika 4:** Zveza med vzmetno konstanto  $k$  in napetostjo  $s_{SE}$  ter vzmetno konstanto  $k$  ter temperaturo  $T_{SE}$  ob upoštevanju  $b = 50$  MPa

Jasno je videti, da napetost  $s_{SE}$  in temperatura  $T_{SE}$  limitirata proti določeni vrednosti, ko vrednost vzmetne konstante  $k$  narašča. Ko je  $k = \infty$  sta  $s_{SE} = 628.77$  MPa in  $T_{SE} = 120.96$  °C. Kljub razmeroma majhnemu modulu elastičnosti SMA žice  $E_s$ , žica lahko generira ogromne napetosti. To je ena od mnogih posebnih lastnosti materialov z oblikovnim spominom.

Zanimivo je tudi, da so rezultati dobljeni z linearnim zakonom tečenja identični rezultatom, ki so izpeljani na bolj intuitiven način [2].

## Literatura

- [1] F. Auricchio, *Shape-memory alloys: applications, micromechanics, macromodelling and numerical simulations*, PhD dissertation, University of California at Berkeley, 1995.
- [2] F. Kosel and T. Videnic, "Generation of recovery stresses: an extension of Stalmans-Delaey-Van Humbeeck's theory", *The Fourth Pacific Rim International Conference on Advanced Materials and Processing (PRICM4)*, Sendai: Japan Institute of Metals, Vol. 2, 2571-2574, 2001.
- [3] J. Lubliner and F. Auricchio, "Generalized plasticity and shape-memory alloys", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No. 7, 1996, 991-1003, 1996.
- [4] R. Stalmans, L. Delaey and J. Van Humbeeck, "Generation of recovery stresses: thermodynamic modelling and experimental verification", *J. de Phys.*, IV, 7, C5, 47-52, 1997.



## *Primerjava turbulentnih modelov pri numeričnem preračunu mešalne posode z Rushtonovim mešalom*

Zadravec, M.<sup>1</sup>, Hriberšek, M.<sup>2</sup>

### *Turbulent model comparison in a mixing vessel with Rushton impeller*

**Povzetek.** Prispevek obravnava numerično modeliranje mešanja newtonske tekočine v mešalni posodi, v kateri je nameščeno turbinsko Rushton mešalo. Obravnavan je stacionarni turbulentni tokovni režim, opisan z časovno povprečenim Navier-Stokes sistemom enačb. Numerično reševanje temelji na uporabi algebrskega, dvoenačbenega  $k - \epsilon$  in  $SST$  modela turbulence ter metode končnih volumnov.

**Abstract.** This article presents numerical modelling of mixing Newtonian fluid in stirring vessel with Rushton impeller. Stationary turbulent flow is governed on time average Navier-Stokes equations. For numerical approach is used algebraic, two equations  $k - \epsilon$  and  $SST$  turbulence model with finite volume method.

## 1 Vodilne enačbe

Izhodišče modeliranja  $RDT$  je sistem ohranitvenih zakonov mase, gibalne količine, toplote in snovi v diferencialni obliki, ki velja za obravnavo zveznih teles (mehanika kontinuuma). Najuniverzalnejša oblika ohranitvenih zakonov so enačbe Navier-Stokes, ki jih lahko uporabimo za opis laminarnega in turbulentnega toka, stisljive in nestisljive ter newtonske in nenewtonske tekočine. Omejimo se na mešanje newtonske nestisljive tekočine, za katero se sistem ohranitvenih zakonov v mirujočem koordinatnem sistemu glasi:

- ohranitev mase:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

<sup>2</sup>University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

- ohranitev gibalne količine:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \Delta v_i + g_i \quad (2)$$

V primeru mešalne posode oz. naprav z rotirajočimi deli najpogosteje uporabimo kombinacijo zapisa gibanja tekočine glede na mirujoči koordinatni sistem in glede na rotirajoči koordinatni sistem. Rotirajoči koordinatni sistem se vrti s kotno hitrostjo mešala, uporabimo pa ga za opis gibanja tekočine v neposredni okolici mešala. Glede na to, da se koordinatni sistem vrti lahko rešujemo ohranitvene enačbe za relativno gibanje tekočine glede na gibanje koordinatnega sistema, enačba ohranitve mase je torej sedaj:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

kjer je  $\vec{u}$  relativna hitrost delca tekočine.

Tudi enačbo ohranitve gibalne količine zapišemo za relativno gibanje tekočine, vendar pa moramo sile, ki delujejo na delec tekočine zaradi gibajočega koordinatnega sistema, ustrezno modelirati, z dodatnimi izvori gibalne količine  $F_i$ :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + v \Delta u_i + g_i + F_i \quad (4)$$

Dodatni izvori gibalne količine  $F_i$  zajemajo Coriolis-ovo ( $F_{cor}$ ) in centrifugalno ( $F_{cfg}$ ) silo:

$$F_{cor} = -2 \cdot \omega \times \vec{u} \quad \text{in} \quad F_{cfg} = -\omega \times (\omega \times \vec{r}) \quad (5)$$

Povezavo vrednosti hitrosti med območjem, opisanim v rotirajočem koordinatnem sistemu, in območjem, opisanim v nepremičnem koordinatnem sistemu, opravimo na meji med obema območjema, kjer upoštevamo  $\vec{u} = \vec{v} - \omega \vec{r}$ , kjer je  $\vec{u}$  hitrost tekočine v rotirajočem se koordinatnem sistemu,  $\vec{v}$  je hitrost tekočine v mirujočem koordinatnem sistemu,  $\omega$  je kotna hitrost vrtenja mešala in  $\vec{r}$  je položajni vektor. Člen  $\omega \cdot \vec{r}$  predstavlja hitrost kontrolnega volumna.

## 2 Modeliranje turbulentnega toka v mešalni posodi

Kakšen bo tok v napravi je odvisno od več dejavnikov, predvsem od snovskih lastnosti, hitrosti vrtenja mešala oziroma hitrosti toka tekočine ter dimenzij naprave. Pogosto se dogaja, da je v bližini mešala tok turbulenten, ob stenah mešalne posode laminaren, vmes pa obstaja še območje tranzicije med laminarnim in turbulentnim tokom.

Najpogostejši način obravnave turbulence je vpeljava predpostavke o izotropnosti in homogenosti turbulentnih veličin. V primeru homogenosti turbulence vpeljemo predpostavko, da se v vseh točkah območja pojavljajo enaka časovno povprečena odstopanja oziroma enake lastnosti turbulentnega tokovnega polja. Predpostavka o izotropnosti turbulence v neki točki pomeni enak potek odstopanj v vseh smereh okoli izbrane točke.

Najintenzivnejše je turbulentno tokovno polje v neposredni bližini mešala. V tem področju lahko uporabimo predpostavko o homogenosti in izotropnosti turbulentnega polja, torej je uporaba

modelov na osnovi turbulentne viskoznosti primerna. Z razdelitvijo spremenljivk toka na časovno povprečne vrednosti in odstopanje od teh vrednosti (fluktiranje), lahko enačbo ohranitve gibalne količine zapišemo v obliki za časovno povprečne vrednosti  $\bar{v}_i$ :

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i \bar{v}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{v}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{v'_i v'_j}) + g_i + F_i \quad (6)$$

Enačba ohranitve gibalne količine turbulentnega toka (6) se razlikuje od enačbe ohranitve gibalne količine laminarnega toka (2) za člen  $\overline{\rho v'_i v'_j}$ , ki se imenuje člen Reynolds-ovih oziroma turbulentnih napetosti in opisuje medsebojni vpliv fluktuacij hitrosti:

$$\overline{\rho v'_i v'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} + (\rho \nu_T [\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}]) \quad (7)$$

V zgornji enačbi smo vpeljali turbulentno viskoznost  $\nu_T$ , ki s kinematično viskoznostjo v predstavlja efektivno viskoznost:

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_T \quad (8)$$

Vpeljava turbulentne viskoznosti oz. gradientnega modela opisa Reynoldsovih napetosti je ugodna z računskega vidika, saj moramo določiti le vrednost turbulentne viskoznosti.

## 2.1 Algebrajski turbulentni model

Pri uporabi algebrajskih turbulentnih modelov se turbulentna viskoznost izračuna s pomočjo empiričnih formul. Izračunana turbulentna viskoznost je konstantna vrednost po celotnem območju preračuna. Osnova zapisa empiričnih enačb je teorija Prandtla in Kolmogorova, kjer je turbulentna viskoznost produkt karakteristične hitrosti  $\nu_t$ , ki je enaka največji hitrosti v računskem območju, in mešalne dolžine  $l_t$  podane z izrazom:

$$l_T = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{7}, \quad (9)$$

kjer je  $V$  volumen območja reševanja. Turbulentna viskoznost je tako enaka:

$$\nu_T = f_\nu \nu_T l_T, \quad (10)$$

kjer je  $f_\nu$  empirična konstanta. Tak turbulentni model ni najbolj primeren za preračune turbulentnih tokov, saj je fizikalni opis pomanjkljiv.

## 2.2 Dvoenačbni $k - \epsilon$ model

Najpreprostejši diferencialni model na osnovi turbulentne viskoznosti, ki upošteva prenos turbulentnih veličin v toku, je  $k - \epsilon$  model in njegove izvedenke. Osnova modela  $k - \epsilon$  je izračun dveh veličin turbulentnega polja, turbulentne kinetične energije  $k$  in njene disipacije  $\epsilon$ , ki ju določimo z rešitvijo dveh prenosnih enačb:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} [(v + \frac{\nu_T}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_i}] + P_k - \epsilon \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (12)$$

Števila  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $\sigma_k = 1$  in  $\sigma_\varepsilon = 1.3$  so empirične konstante, določene za primer popolnoma razvitega turbulentnega toka, medtem ko je člen  $P_k$  produkcija turbulentne kinetične energije. Modeliranje turbulentnega toka ob trdnih stenah je bila izvedena s pomočjo zidnih funkcij [1].

Na podlagi izračuna teh veličin izračunamo vrednost turbulentne viskoznosti:

$$v_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (13)$$

kjer je  $C_\mu = 0.09$ . Iz izraza (13) je razvidno, da predpostavlja model  $k - \varepsilon$  homogenost, saj uporabimo enak izraz povsod v računskem območju, in izotropnost, saj je turbulentna viskoznost skalar in torej ni odvisna od smeri opazovanja.

### 2.3 Dvoenačbni $k - \omega$ model

Osnova tega turbulentnega modela sta turbulentna kinetična energija  $k$  in frekvenca disipacije turbulentne kinetične energije  $\omega$ . Vrednost  $\frac{1}{\omega}$  pa nam poda časovno skalo, na kateri se dogaja disipacija turbulentne kinetične energije. Ta model je bolj natančen od  $k - \varepsilon$  modela, saj ne zahteva uporabe zidnih funkcij. Pri uporabi  $k - \omega$  modela se turbulentna viskoznost izračuna kot:

$$v_T = \frac{k}{\omega}. \quad (14)$$

Prenosni enačbi za  $k$  in  $\omega$  se po Wilcoxu [1] zapišeta v obliki:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_{k1}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \beta' k \omega \quad (15)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i \omega) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( v + \frac{v_T}{\sigma_{\omega 1}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \alpha_1 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_1 \omega^2 \quad (16)$$

kjer so števila  $\beta' = 0.09$ ,  $\alpha = \frac{5}{9}$ ,  $\beta = 0.075$ ,  $\sigma_k = 2$  in  $\sigma_\omega = 2$  empirične konstante, medtem ko je člen  $P_k$  produkcija turbulentne kinetične energije enaka kot pri  $k - \varepsilon$  modelu. Wilcoxov  $k - \omega$  model je primeren za preračun tokovnih razmer v mejnih plasteh.

### 2.4 SST (Shear Stress Transport) model

SST model temelji na  $k - \omega$  modelu v povezavi z  $k - \varepsilon$  modelom. Pri povezavi Wilcoxovega  $k - \omega$  modela (enačba 15 in 16) in transformiranega  $k - \varepsilon$  modela [1] je potrebno upoštevati naslednje pravilo povezave enačb:

$$\Phi_3 = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2 \quad (17)$$

kjer je  $\Phi$  poljuben koeficient v enačbah (indeks 1 je za  $k - \omega$  model, indeks 2 je za transformirani  $k - \varepsilon$  model in indeks 3 je sestavljen  $k - \varepsilon$  in  $k - \omega$  oz. *SST* model) in  $F_1$  je funkcija porazdelitve koeficientov. Pravilo narekuje, da se  $k - \omega$  model pomnoži s porazdelitveno funkcijo  $F_1$ , medtem ko se  $k - \varepsilon$  model pomnoži s porazdelitveno funkcijo  $1 - F_1$ . Vrednost porazdelitvene funkcije  $F_1$  je v bližini stene enaka 1 in se z oddaljevanjem od stene proti površini mejne plasti približuje vrednosti 0. Z uporabo tega pravila (enačba 17) pri povezavi  $k - \varepsilon$  in transformiranega  $k - \omega$  modela dobimo zapis dveh parcialno diferencialni enačb za  $k$  in  $\omega$ , ki sta odvisni od vrednosti porazdelitvene funkcije. Tak zapis enačb omogoči, da se za preračun tokovnega polja v bližini sten uporabi  $k - \omega$  turbulentni model in v ostalem delu računskega območja  $k - \varepsilon$  turbulentni modelom. Rezultati takega preračuna dajejo prevelike vrednosti turbulentne viskoznosti in je potrebno z dodatnimi funkcijami te enačbe omejiti [1].

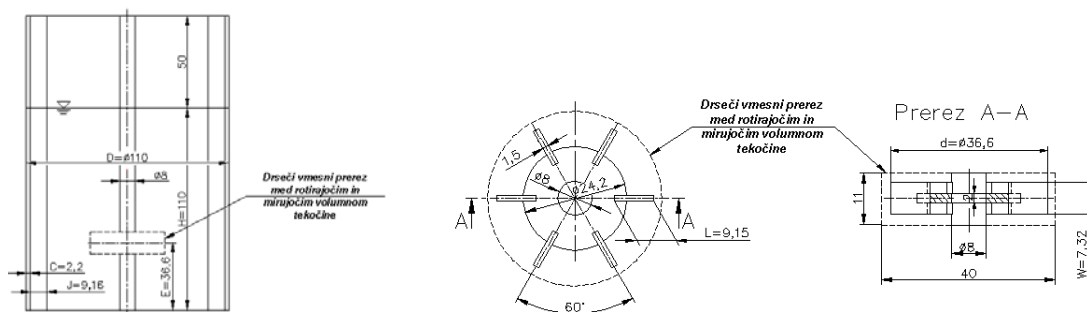
### 3 Numerični model

Mešalna posoda je sestavljena iz mirujočih delov in rotirajočega se rotorja, ter gredi. Uporaba rotirajočih in mirujočih delov je v *RDT* znana kot *MFR* (Multiple Frames of Reference) metoda. Prav s pomočjo uporabe te metode je možno preučevati tokovna dogajanja v mešalnih posodah oziroma v vseh napravah, ki so sestavljene iz rotorja in statorja, ki jih je znotraj te metode možno preračunavati na več načinov. Uporabljen je bil sklopljen izračun toka v rotirajočih in mirujočih območjih (stacionaren izračun), kjer se tok skozi poljubno število rotirajočih in mirujočih območij preračuna skupaj. Rotirajoča območja se preračunavajo v rotirajočem koordinatnem sistemu, medtem ko se mirujoča območja preračunavajo v mirujočem koordinatnem sistemu. Ploskev na meji med rotirajočim in mirujočim delom imenujemo drseči vmesni prerez. Če tok prihaja iz mirujočega območja v rotirajoče, na tem prerezu preračunamo absolutne hitrosti v relativne, če pa je smer toka iz rotirajočega območja v mirujoče, pa relativne hitrosti v absolutne. Na drsečem vmesnem prerezu je bil predpisan pogoj zamrznjeni rotor (frozen rotor [1]). Pri uporabi tega pogoja na drsečem vmesnem prerezu se računa tako, kot, da je položaj rotirajočih delov glede na mirujoče vesa čas enak (zamrznjen). V tem primeru vse količine zvezno prehajajo iz mirujočega v rotirajoče območje in obratno. Rezultati izračuna so za nek medsebojni položaj med rotirajočim in mirujočim območjem. Če se izračun ponovi za več različnih medsebojnih položajev rotirajočega in mirujočega območja in iz več stacionarnih rešitev je možno videti kako se tok spreminja zaradi spreminjajočega se medsebojnega položaja. Z nobenim od opisanih pogojev ni mogoče izračunati časovnega spreminjanja toka zaradi spreminjajočega se položaja rotirajočega se območja glede na mirujoče območje.

Za modeliranje geometrije modela mešalne posode je bil uporabljen programski paket ANSYS Workbench 8.1, ki združuje orodja za modeliranje in mreženje geometrije modela. Modeliranje geometrije mešalne posode se je izvajalo s pomočjo mer laboratorijskega modela mešalne posode, izdelanega z namenom eksperimentalne analize tokovnih razmer v mešalni posodi (slika 1).

Zaradi osno simetrične geometrije mešalne posode je bilo potrebno modelirati le polovico mešalne posode.

Mreži mirujočega in rotirajočega volumna tekočine sta bili nestrukturirani in sestavljeni iz vsaj 157.341 oziroma 757.845 elementov.



**Slika 1** : Geometrija modela mešalne posode z uporabljenimi merami za mirujoči volumen tekočine (levo) in za rotirajoči volumen tekočine (desno) - mere v [mm]

Simulacijo procesa mešanja smo izvedli kot časovno odvisno, celoten čas simulacije pa je znašal 4s. Vrtilna hitrost rotorja in gredi je bila  $1200 \text{ vrt}/\text{min}$ . Preračun ohranitvenih enačb se je izvajal v časovnih korakih 0,005 sekunde, kjer se pri predpisani vrtilni hitrosti rotorja, rotor zavrti za  $36^\circ$ .

Model mešalne posode je vključeval tudi preračun proste gladine, kar je zahtevalo podatke začetnih pogojev za volumski delež vode, volumski delež zraka in tlak glede na višino posode. Podani konvergenčni kriterij je bil za oba primera preračuna  $10^{-6}$ , kar daje zadostno natančnost rezultatov. Medij, ki je bil uporabljen pri procesu mešanja v mešalni posodi, je bila voda. Snovske lastnosti vode so bile vzete pri temperaturi  $20^\circ\text{C}$  ( $\rho = 998 \text{ kg}/\text{m}^3$ ;  $\nu = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ).

#### 4 Rezultati

Prikazani so rezultati treh numeričnih modelov, v katerem so bili uporabljeni trije različni turbulentni modeli. Reynoldsovo število pri predpisani vrtilni hitrosti  $1200 \text{ vrt}/\text{min}$  znaša 26526.

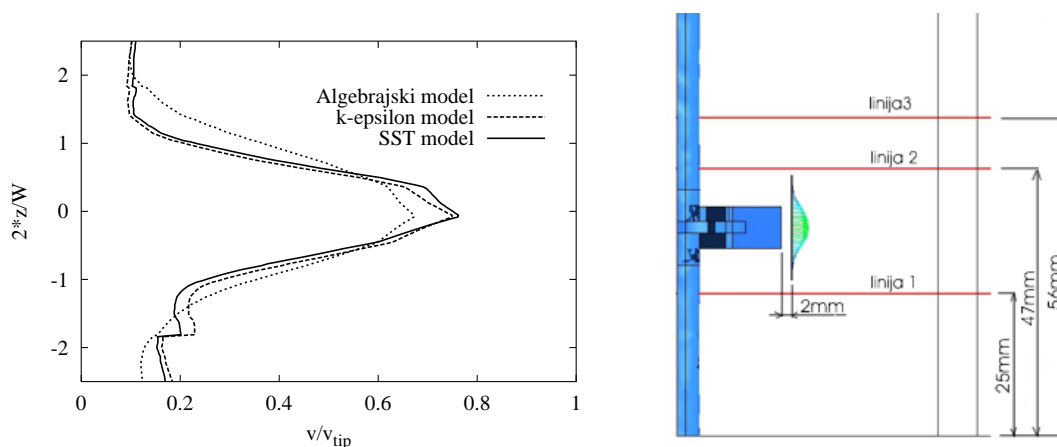
Mešanje v mešalni posodi zahteva minimalno moč za pogon mešala  $P_p$ . Moč  $P_p$  dobimo na osnovi seštevanja mehanske moči za vrtenje mešala  $P$  in moči  $P_{izg}$ , potrebne za premagovanje izgub pri prenosu moči med pogonskim strojem in mešalom. Moč za mešanje je produkt navora in vrtilne hitrosti. S pomočjo izračunanih moči za mešanje izračunamo brezdimenzijska števila moči oz. Newtonova števila, ki so podana v tabeli 1.

Varianta	$Ne = P/(\rho \cdot n^3 \cdot d^5)$	$N_Q = Q/(n \cdot d^3)$
Algebrajski turb. model	4.89	0.60
k - $\epsilon$ turb. model	5.25	0.63
SST turb. model	5.32	0.62

**Tabela 1** : Newtonova števila in pretočna števila za različne turbulentne modele.

Prav tako kot število moči  $Ne$  je pomembno tudi pretočno število  $N_Q$ .  $Q$  je pretok tekočine, ki ga ustvarja le mešalo. Ujemanje  $k - \epsilon$  in SST modela v obeh dveh primerih brezdimenzijskih števil je dokaj blizu enako, medtem ko so odstopanja pri uporabi algebrskega modela nekoliko višja.

Pri analizi tokovnih razmer v mešalni posodi z Rushton-ovim mešalom je znano, da je njegovo tokovno polje radialno. V tokovnem polju je možno zaslediti dva globalna vrtinca, enega nad in enega pod ravnino rotorja. Največje hitrosti tekočine nastopijo na izstopnem robu lopatice Rushtonovega mešala. Primerjava hitrostnih profilov na izstopnem robu lopatice je prikazana na sliki 2. Hitrostni profil na izstopnem robu lopatice Rushtonovega mešala ima obliko parabole, kar so potrdili izračuni z vsemi tremi turbulentnimi modeli, le da se  $k - \epsilon$  in SST modela dokaj dobro ujemata tako po obliki kot po maksimalni hitrosti. Hitrostni profil na izstopnem robu lopatice pri uporabi algebrskega modela pa nekoliko odstopa po obliki parabole, bolj pa odstopa maksimalna hitrost tekočine na izstopnem robu lopatice.



**Slika 2** : Primerjava hitrostnih profilov na izstopnem robu iz lopatice Rushtonovega mešala (levo) in linije na katerih so prikazani rezultati na slikah (desno).

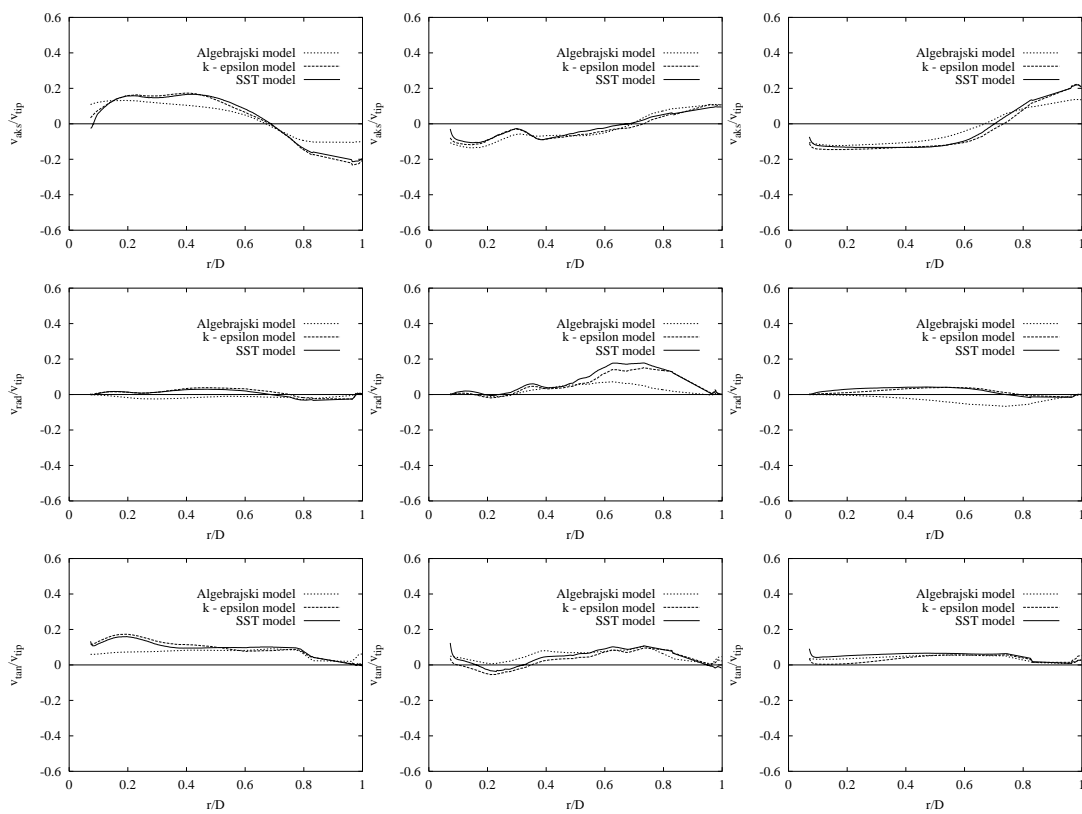
Prav tako kot so prikazani hitrostni profili na izstopu iz lopatice rotorja so na sliki (3) prikazani poteki aksialnih, radialnih in tangencialnih hitrosti na različnih položajih v mešalni posodi (slika 2 - desno).

Primerjava hitrosti na treh različnih lokacijah v mešalni posodi prikaže veliko odstopanje algebrskega modela od ostalih dveh modelov, v nekaterih primerih je tok tekočine pri uporabi algebrskega modela v nasprotni smeri kot pri uporabi ostalih dveh modelov.

## 5 Zaključek

Za preračune turbulentnih tokov se je uporaba turbulentnega algebrskega modela izkazal za dokaj nenatančen model saj so odstopanja rezultatov napram  $k - \epsilon$  in SST modelu dokaj velika. Oba dvoenačbna modela pa iskazujeta medsebojno ujemanje. Tako bi bilo potrebno še rezultate primerjati z eksperimentalno dobljenimi rezultati in tako odlučiti o primernejši izbiri med  $k - \epsilon$  in SST turbulentnim modelom.





**Slika 3** : Normalizirane aksialne, radialne in tangencialne komponente hitrosti v mešalni posodi. (Levi stolpec - linija 1; sredinski stolpec - linija 2, desni stolpec - linija 3)

## Literatura

- [1] ANSYS-CFX-5.7, AEA Technology (2004).
- [2] Bašič, S.; Hriberšek, M.; Škerget, L.: *CFD based determination of mixing power of beet sugar molasses - water mixture*. CHISA 2002, Praga, (2002).
- [3] Hriberšek, M.: *Procesna tehnika*. Fakulteta za strojništvo, Maribor (2005).
- [4] Hriberšek, M.; Bašič, S.; Maučec, J.: *CFD analysis of effects of geometrical and process parameters on power and kinetics of mixing operations*. ICheaP 6, 8.-11. June, Pisa, Italy, (2003).
- [5] Batchelor, G. K.: *Fluid dynamics*. Cambridge University Press, United Kingdom (2002).



## *Določevanje parametrov mehanike loma v Williamsovi enačbi*

*B. Zafošnik<sup>1</sup>, Z. Ren<sup>1</sup>, J. Flašker<sup>1</sup> in G. Mishuris<sup>2</sup>*

### *Determination of fracture mechanics parameters in Williams equation*

**Povzetek.** V članku je predstavljeno določevanje faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$ ,  $K_{II}$  in  $T$ -napetosti z metodo najmanjših kvadratov, v kateri je upoštevano polje pomikov izračunanih z metodo končnih elementov in polje pomikov opisano z Williamsovo enačbo. Natančnost metode zavisi od uporabljenega števila členov  $N$  v Williamsovi enačbi, pri čemer je potrebno uporabiti  $N+1$  členov za natančnejšo določitev  $N$  členov.

**Abstract.** The paper presents determination of the stress intensity factors  $K_I$ ,  $K_{II}$  and  $T$ -stress by the least square method in which both displacements field evaluated with finite element method and displacement field described with Williams equation are considered. The accuracy of method depends on number of considered terms  $N$  in Williams equation. It is shown that  $N+1$  terms must be considered to evaluate accurate  $N$  terms.

#### **1 Uvod**

Razumevanje osnovnih procesov, ki povzročajo lom v materialih je glavno teoretično področje mehanike loma. Z inženirskega stališča je zelo pomembno določevanje parametrov s katerimi lahko ocenimo začetek širjenja razpok in začetek njihovega nestabilnega širjenje. Faktor intenzivnosti napetosti  $K$  je najpogosteje uporabljen parameter za definiranje širjenja razpoke v linearno elastični mehaniki loma. Primerjava faktorja intenzivnosti napetosti z materialnim parametrom praga širjenja razpoke  $K_{th}$  in lomno žilavostjo materiala  $K_{Ic}$  poda področje začetka in konca stabilnega širjenja razpoke. V zadnjih letih je predmet poglobljenih raziskav vpliv  $T$ -napetosti na lomnomehanske procese v okolici vrha razpoke in razvoj metod za njihovo čim natančnejše določevanje za poljubno geometrijo elementov z razpokami. Neupoštevanje vpliva  $T$ -napetosti lahko vodi k napačnemu določevanju smeri širjenja razpoke in velikosti plastične zone okoli vrha razpoke.

Poznamo mnogo učinkovitih metod za določevanje faktorjev intenzivnosti napetosti in nekaj metod za določevanje  $T$ -napetosti. Kadar določujemo napetostno – deformacijsko polje v

---

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

<sup>2</sup> Univerza za tehnologijo v Rzeszowu, Rzeszow, Poljska

okolici vrha razpoke s pomočjo numeričnih metod (npr. metode končnih elementov ali metode robnih elementov), lahko faktorje intenzivnosti napetosti določimo s pomočjo substitucijskih metod (metoda odpiranja razpoke, uporaba napetostnega polja in polja pomikov v okolici vrha razpoke itd.) in energijskih metod (virtualni podaljšek razpoke, odpiranje in zapiranje razpoke,  $J$ -integral itd.). Substitucijske metode za določevanje  $T$ -napetosti temeljijo na upoštevanju pomikov na površini razpoke in na ekstrapolaciji napetosti v vrh razpoke, energijske pa na uporabi  $I$ -integrala [1]. Metoda za hkratno določevanje faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $K_{II}$  ter  $T$ -napetosti, predstavljena v članku, temelji na metodi najmanjših kvadratov, v kateri so upoštevani polje pomikov določeno z metodo končnih elementov (MKE) in polje pomikov opisano z Williamsovo enačbo [4].

## 2 Določevanje $K_I$ , $K_{II}$ in $T$ iz polja pomikov z metodo najmanjših kvadratov

Elastično polje pomikov v okolici vrha razpoke lahko zapišemo v polarnem koordinatnem sistemu z izhodiščem v vrhu razpoke kot [4]:

$$u_r = \frac{r}{4\mu} \sum_{n=1}^N \frac{A_m}{n} (2\pi r)^{\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{2\kappa - n}{2+n} (1 - (-1)^n (1+n)) \cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta + ((-1)^n (1-n) - 1) \cos\left(1 + \frac{n}{2}\right)\theta \right] + \frac{r}{4\mu} \sum_{n=1}^N \frac{A_{lm}}{n} (2\pi r)^{\frac{n-1}{2}} \left[ \left(1 - (-1)^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)\right) \sin\left(1 + \frac{n}{2}\right)\theta + ((-1)^n - 1) \left(\kappa - \frac{n}{2}\right) \sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta \right] \quad (1)$$

in

$$u_\theta = -\frac{r}{4\mu} \sum_{n=1}^N \frac{A_m}{n} (2\pi r)^{\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{2\kappa + n}{2+n} (1 - (-1)^n (1+n)) \sin\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta + ((-1)^n (1-n) - 1) \sin\left(1 + \frac{n}{2}\right)\theta \right] + \frac{r}{4\mu} \sum_{n=1}^N \frac{A_{lm}}{n} (2\pi r)^{\frac{n-1}{2}} \left[ \left(1 - (-1)^n \left(1 + \frac{n}{2}\right)\right) \cos\left(1 + \frac{n}{2}\right)\theta + ((-1)^n - 1) \left(\kappa + \frac{n}{2}\right) \cos\left(1 - \frac{n}{2}\right)\theta \right], \quad (2)$$

kjer število uporabljenih členov končne vrste  $N$  zavisi od pričakovane natančnosti.

Z upoštevanjem prvih treh členov ( $N = 3$ ) v enačbah (1) in (2) lahko pomike  $u_x$  in  $u_y$  točke  $i$  (glej sliko 1) izrazimo v Kartezijevem koordinatnem sistemu z izhodiščem v vrhu razpoke kot:

$$u_{xi} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r_i}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \left(\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta_i}{2}\right) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r_i}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \left(\kappa + 1 + 2\cos^2\frac{\theta_i}{2}\right) + \frac{C_I \sqrt{\pi} r_i^{3/2} \left( (2\kappa + 1) \cos\left(\frac{3\theta_i}{2}\right) - 3 \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)}{\sqrt{72}\mu} + \frac{T}{4\mu(\lambda + \mu)} r_i \cos(\theta_i) + b r_i \sin(\theta_i) + \frac{C_{II} \sqrt{\pi} r_i^{3/2} \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) (\kappa + 4 + (2\kappa + 5) \cos(\theta_i))}{\sqrt{18}\mu} \quad (3)$$

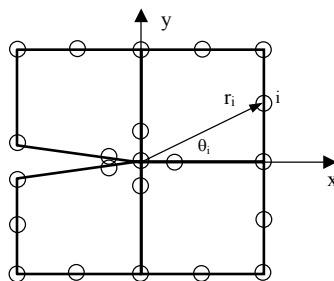
in

$$u_{yi} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r_i}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \left( \kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta_i}{2} \right) - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r_i}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \left( \kappa - 1 - 2\sin^2\frac{\theta_i}{2} \right) -$$

$$T \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} r_i \sin(\theta_i) - br_i \cos(\theta_i) - \frac{C_I \sqrt{\pi} r_i^{3/2}}{\sqrt{18\mu}} \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \left( \kappa - 2 + (1 - 2\kappa)\cos(\theta_i) \right) +$$

$$\frac{C_{II} \sqrt{\pi} r_i^{3/2} \left( (2\kappa - 5)\cos\left(\frac{3\theta_i}{2}\right) + 3\cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)}{\sqrt{72\mu}} \quad (4)$$

V enačbah (3) in (4) pomenita  $K_I$  in  $K_{II}$  faktorja intenzivnosti napetosti za prvi člen ( $N = 1$ ),  $T$  predstavlja  $T$ -napetost,  $C_I$  in  $C_{II}$  sta faktorja intenzivnosti napetosti za tretji člen ( $N = 3$ ),  $\mu$  je strižni modul in  $\lambda$  je Lamejeva konstanta. Parameter  $\kappa$  je definiran kot  $\kappa = 3 - 4\nu$  za ravninsko deformacijsko stanje in  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  za ravninsko napetostno stanje.



**Slika 1:** Položaj vozlišča  $i$  v modelu končnih elementov.

V enačbah (3) in (4) sta

$$u_{xi}^T = T \frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} r_i \cos(\theta_i) + br_i \sin(\theta_i)$$

$$u_{yi}^T = T \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} r_i \sin(\theta_i) - br_i \cos(\theta_i) \quad (5)$$

pomika v smereh  $x$  in  $y$ , ki opisujeta vpliv konstantne  $T$ -napetosti, zapisana glede na linearno porazdelitev pomikov in robni pogoj, da površina razpoke ni dodatno obremenjena. Neznano konstanto  $b$  v enačbi (5) je potrebno določiti iz pomikov (npr. analize MKE).

Enačbi (3) in (4) imata šest neznanih parametrov:  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$ ,  $C_I$ ,  $C_{II}$  in  $b$ , ki jih lahko določimo iz polja pomikov z metodo najmanjših kvadratov.

Pomika  $u_{xi}^F$  in  $u_{yi}^F$  določena v vsakem vozlišču  $i$  ( $i = 1, m$ ) diskretiziranega modela lahko opišemo z enačbama (3) in (4) kot:

$$u_{xi}^F = u_{xi}(r_i, \theta_i)$$

$$u_{yi}^F = u_{yi}(r_i, \theta_i) \quad (6)$$

pri čemer pa ni upoštevanih dovolj členov v enačbah (3) in (4), da bi lahko natančno zadostili enačbi (6).

Z metodo najmanjših kvadratov lahko določimo polje pomikov  $u_x$  in  $u_y$  z lastnostjo, da je vsota kvadratov odstopanj med vrednostmi pomikov določenih z numeričnimi postopki (npr. MKE) in vrednostmi pomikov določenih z Williamsovo enačbo v točkah  $i$  ( $i = 1, m$  v enačbi 7) minimalna.

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= d_{x1}^2 + d_{x2}^2 + \dots d_{x(m-1)}^2 + d_{xm}^2 = \sum_{i=1}^m d_{xi}^2 = \sum_{i=1}^m (u_{xi}^F - u_{xi})^2 \\ \Pi_2 &= d_{y1}^2 + d_{y2}^2 + \dots d_{y(m-1)}^2 + d_{ym}^2 = \sum_{i=1}^m d_{yi}^2 = \sum_{i=1}^m (u_{yi}^F - u_{yi})^2\end{aligned}\quad (7)$$

V članku je predpostavljena funkcija  $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ , iz katere lahko določimo parametre  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$ ,  $C_I$ ,  $C_{II}$  in  $b$  tako, da funkcija  $\Pi$  zavzame minimum. Potreben pogoj, da funkcija  $\Pi$  zavzame minimum je

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K_I} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial K_{II}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial T} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial C_I} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial C_{II}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0, \quad (8)$$

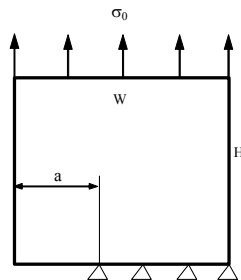
Enačbe (8) zapišemo kot sistem linearnih enačb, katerih rešitev so parametri  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$ ,  $C_I$ ,  $C_{II}$  in  $b$ .

### 3 Uporaba metode najmanjših kvadratov na praktičnem primeru

Faktorje intenzivnosti napetosti  $K_I$ ,  $K_{II}$  in  $T$ -napetosti smo določili z metodo najmanjših kvadratov, opisano v prejšnjem poglavju, za primer plošče z razpoko obremenjene na robu po načinu I (angl. Mode I) ter z različnimi deleži natezne in strižne obremenitve (angl. Mixed Mode), pri čemer smo pomike izračunali z MKE. Rezultate smo primerjali z numeričnimi rezultati, izračunanimi s programskim paketom ABAQUS, v katerega je implementirana zelo učinkovita metoda  $I$ -integrala [1] za določevanje faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$ ,  $K_{II}$  in  $T$ -napetosti. Metoda  $I$ -integrala daje primerljive rezultate z analitičnimi rešitvami za pol neskončno ploščo z razpoko na robu obremenjeno po načinu I [3].

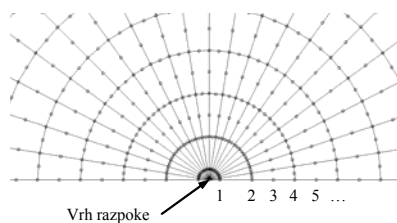
#### 3.1 Obremenitev razpoke po načinu I

Analizirali smo kratko razpoko v plošči obremenjeno na nateg. V modelu smo upoštevali razmerje  $a/W = 0.01$ , pri čemer je  $a$  dolžina razpoke in  $W$  širina plošče ter razmerje med polovično višino  $H$  in širino plošče  $H/W = 1$  (glej sliko 2). Zaradi simetrije smo obravnavali le polovico plošče. Model smo diskretizirali z osem vozliščnimi končnimi elementi, s katerimi lahko simuliramo ravninsko deformacijsko stanje. Okoli vrha razpoke smo uporabili deset in vzdolž razpoke petnajst končnih elementov. Singularnost napetostno-deformacijskega polja tipa  $r^{-1/2}$  v vrhu razpoke smo simulirali v elementih okoli vrha razpoke s premikom vmesnega vozlišča proti vrhu razpoke na četrtno dolžine stranice. V numerični analizi smo upoštevali modul elastičnosti  $E = 210$  GPa, Poissonovo število  $\nu = 0,3$  in natezno obremenitev plošče  $\sigma_0 = 6$  MPa.



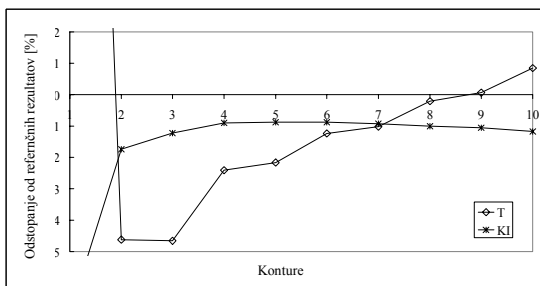
**Slika 2:** Numerični model plošče z razpoko na robu obremenjeno po načinu I.

Faktor intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $T$ -napetost smo določili z rešitvijo sistema linearnih enačb, ki sledijo iz enačb (8), pri čemer smo upoštevali pomike v točkah na različnih konturah okoli vrha razpoke (slika 3).



**Slika 3:** Konture s točkami okoli vrha razpoke.

Slika 4 prikazuje odstopanje faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $T$ -napetosti od referenčnih rezultatov izračunanih z ABAQUSOM.



**Slika 4:** Odstopanje faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $T$ -napetosti od referenčnih rezultatov.

Iz rezultatov na sliki 4 je razvidno, da je faktor intenzivnosti napetosti  $K_I$  natančneje določen z metodo najmanjših kvadratov kot  $T$ -napetost. S povečevanjem števila točk uporabljenih za določitev  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $T$ ,  $C_I$ ,  $C_{II}$  in  $b$  se natančnost izračunane  $T$ -napetosti povečuje in je večja od 98% za točke na konturah 1 do 6 ali več.

Rezultati v tabeli 1 prikazujejo vpliv različnih parametrov (a:  $T = b = C_I = C_{II} = 0$ , b:  $T = C_I = C_{II} = 0$ , c:  $b = C_I = C_{II} = 0$ , d:  $C_I = C_{II} = 0$ ) v metodi najmanjših kvadratov za uporabljene točke na konturah 1 do 6.

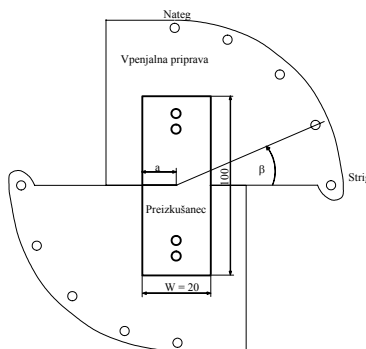
**Tabela 1:** Vpliv različnih parametrov na  $K_I$  in  $T$ .

$\Delta K_I$ [%]				$\Delta T$ [%]			
a	b	c	d	a	b	c	d
-0.3	-0.3	-2.2	-2.2	-	-	-11.0	-11.0

Iz odstopanja faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $T$ -napetosti, določenih z različnimi parametri, od faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $T$ -napetosti določenih za  $N = 3$  (enačbi 3 in 4) v tabeli 1 je razvidno, da parametri  $T$ ,  $b$ ,  $C_I$  in  $C_{II}$  ne vplivajo na faktor intenzivnosti napetosti  $K_I$ , medtem, ko je pri določevanju  $T$ -napetosti potrebno upoštevati tretji člen v enačbah (3) in (4).

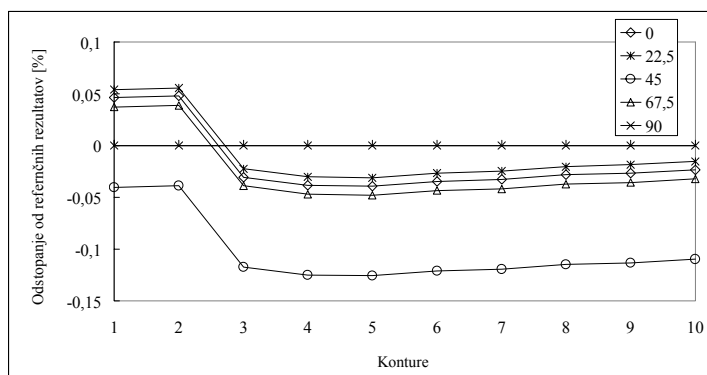
### 3.1 Različni načini obremenitve razpoke

Primernost metode najmanjših kvadratov pri različnih načinih obremenjevanja za izračun faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $K_{II}$  ter  $T$ -napetosti smo analizirali za preizkušane na sliki 5, ki ga lahko obremenjujemo z različnimi deleži natezne in strižne obremenitve [2]. Položaj izvrtin, preko katerih obremenjujemo preizkušane z razpoko na robu, je takšen, da omogoča različne načine obremenjevanja od načina obremenitve I ( $\beta = 90^\circ$ ) do načina obremenitve II ( $\beta = 0^\circ$ ).

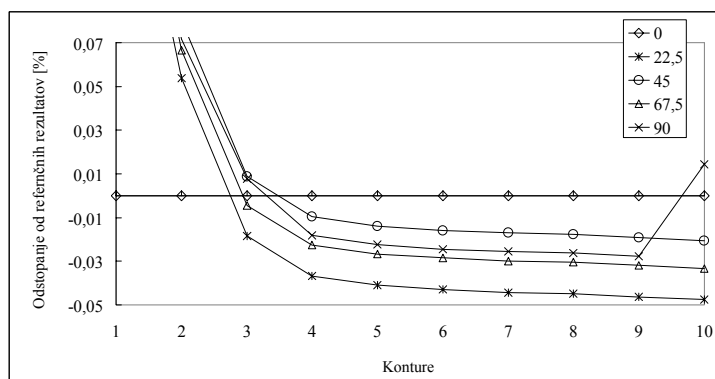


**Slika 5:** Preizkušane z vpenjalno pripravo za različne načine obremenjevanja.

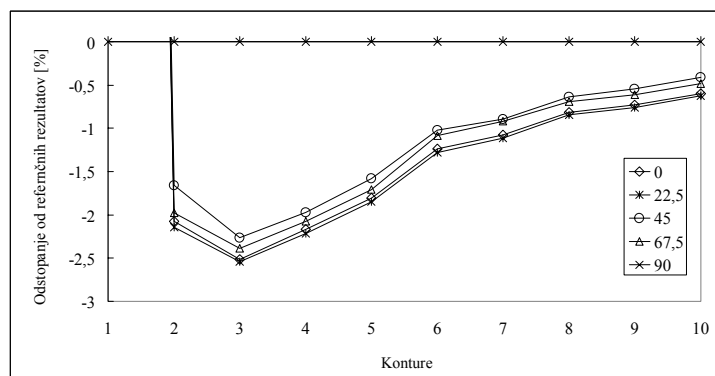
V modelu smo upoštevali razmerje  $a/W = 0,5$ , pri čemer je  $a$  dolžina razpoke in  $W$  širina preizkušance (glej sliko 5). Model smo diskretizirali z osem vozliščnimi končnimi elementi, s katerimi lahko simuliramo ravninsko deformacijsko stanje. Okoli vrha razpoke smo uporabili dvajset in vzdolž razpoke triintrideset končnih elementov. Singularnost napetostno-deformacijskega polja tipa  $r^{-1/2}$  v vrhu razpoke smo simulirali v elementih okoli vrha razpoke s premikom vmesnega vozlišča proti vrhu razpoke na četrtno dolžine stranice. V numerični analizi smo upoštevali modul elastičnosti  $E = 210$  GPa, Poissonovo število  $\nu = 0,3$ . Silo 60 kN na vpenjalni pripravi smo upoštevali pri kotih  $\beta = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$  in  $90^\circ$ .



Slika 6: Odstopanje faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  od referenčnih rezultatov.



Slika 7: Odstopanje faktorja intenzivnosti napetosti  $K_{II}$  od referenčnih rezultatov.



Slika 8: Odstopanje  $T$ -napetosti od referenčnih rezultatov.

Iz rezultatov na slikah 6 in 7 je razvidno, da sta faktorja intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $K_{II}$  zelo natančno izračunana z metodo najmanjših kvadratov za vsa področja obremenjevanja.



Odstopanje  $T$ -napetosti od referenčnih rezultatov kaže, da se natančnost povečuje z povečevanjem števila točk in je večja od 98% če upoštevamo pomike v točkah na konturah 1 do 4 ali več.

Rezultati v tabeli 1 prikazujejo vpliv različnih parametrov (a:  $T = b = C_I = C_{II} = 0$ , b:  $T = C_I = C_{II} = 0$ , c:  $b = C_I = C_{II} = 0$ , d:  $C_I = C_{II} = 0$ ) v metodi najmanjših kvadratov za uporabljene točke na konturah 1 do 6.

**Tabela 2:** Vpliv različnih parametrov na  $K_I$ ,  $K_{II}$  in  $T$ .

$\Delta K_I$ [%]				$\Delta K_{II}$ [%]				$\Delta T$ [%]			
a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
0.2	0.2	0.1	0.1	56.3	0.02	56.3	0.02	–	–	11.5	11.5

Iz odstopanja faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $K_{II}$  ter  $T$ -napetosti, določenih z različnimi parametri, od faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $K_{II}$  ter  $T$ -napetosti določenih za  $N = 3$  (enačbi 3 in 4) v tabeli 2 je razvidno, da parametri  $T$ ,  $b$ ,  $C_I$  in  $C_{II}$  ne vplivajo na faktor intenzivnosti napetosti  $K_I$ , medtem ko faktor  $b$  vpliva na faktor intenzivnosti napetosti  $K_{II}$ . Iz rezultatov je razvidno, da je potrebno pri določevanju  $T$ -napetosti upoštevati tretji člen v enačbi 3 in 4.

#### 4 Zaključek

Predstavili smo uporabo metode najmanjših kvadratov za določevanje faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$ ,  $K_{II}$  ter  $T$ -napetosti. Metoda temelji na ideji, da je napaka pri opisu polja pomikov s členi od prvega do tretjega reda v Williamsovi enačbi minimalna. Pri določevanju minimalne napake sta upoštevana polje pomikov izračunano z MKE in polje pomikov določeno z Williamsovo enačbo. Prednost te metode je, da ni omejena le na določevanje faktorjev intenzivnosti napetosti  $K_I$  in  $K_{II}$  ter  $T$ -napetosti, ampak so lahko določeni tudi višji členi v Williamsovi enačbi, ki lahko imajo pomemben vpliv pri širjenju kratkih razpokah. Natančnost določitve parametrov mehanike loma je odvisna od števila uporabljenih točk (vozlšč), števila uporabljenih členov v enačbah (3) in (4), ter od diskretizacije modela.

#### Literatura

- [1] ABAQUS, *User's manual*, Version 6.5, 2005.
- [2] J. C. Davenport in D. J. Smith, *A study of superimposed fracture modes I, II and III on PMMA*, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 16, 1125-1133, 1993.
- [3] G. M. Seed, *Strength of materials (An undergraduate text)*, Saxe-Coburg Publications, 2000.
- [4] J. G. Williams in P. D. Ewing, *Fracture under complex stress – the angled crack problem*, *Int. J. of Fracture* 8(4), 416-441, 1972.



## *Nelinearna statična analiza vodnih toboganov*

D. Zupan in M. Saje <sup>1</sup>

### *Non-linear static analysis of water slides*

**Povzetek.** V članku predstavljamo nelinearno numerično analizo vodnih toboganov ob delovanju statične obtežbe. Analiziramo vodne tobogane, narejene iz nelinearnih polimernih materialov. Predstavljeni materialni model temelji na enoosnem napetostnem preskusu. Za račun uporabimo geometrijsko točne linijske končne elemente, ki znajo upoštevati začetno ukrivljeno obliko konstrukcije.

**Abstract.** In the paper a numerical analysis of water slides under the static loading is presented. The water slides made of polymer materials are analyzed. The non-linearity of material is considered through the uniaxial stress-strain relation obtained experimentally. The finite-element analysis is based on the geometrically exact beam theory with proper consideration of the initially curved and twisted geometry of the structure.

## 1 Uvod

Gradnja visokih vodnih toboganov zahteva računsko ali eksperimentalno analizo ob predpisanih projektnih obtežbah [4]. V tem članku se omejimo na računsko statično analizo. Uporabljena je nelinearna statična analiza po metodi končnih elementov, kot sta jo razvila Zupan in Saje [6]. Uporabljeni končni element temelji na geometrijsko točni teoriji nosilcev (Reissner [2] in Simo [3]), pri čemer upošteva poljubno začetno geometrijo osi nosilcev in zasukanost prerezov.

Materiali, iz katerih so izdelani tobogani, so po standardu [4] povsem poljubni, le da zadoščajo zahtevam standarda. V tem besedilu se omejimo na polimerne materiale, ki so pogosto uporabljeni za takšne konstrukcije. Materialni modeli so za take materiale redki, natančna analiza pa mora upoštevati nelinearno obnašanje materiala. Tako smo predpostavili svoj računski model materiala na osnovi enoosnih nateznih preskusov. Predpostavljeni enoosni materialni model smo vključili v formulacijo [6].

---

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

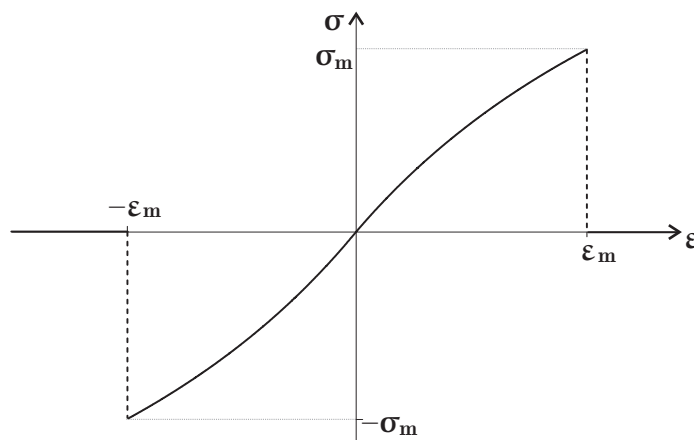
Računske rezultate predstavljamo za dva segmenta toboganskih kompleksov. Prvi je preprost raven segment, nagnjen glede na vodoravno ravnino. Drugi primer je bolj zanimiv in računsko precej zahtevnejši: tobogan je v obliki vijačnice razmeroma velikega polmera. Oba segmenta analiziramo za odprti in za zaprti prečni prerez.

## 2 Materialni model

Osnova za opis materialnega modela je enoosni natezni preskus. Uporabili smo rezultate, ki so jih izmerili na napravi Zwick/Roell na Fakulteti za gradbeništvo v Mariboru [5]. Rezultate meritev smo numerično aproksimirali z odsekoma gladko krivuljo, določeno z dvema parametroma. Za tlak zaenkrat (zaradi pomanjkanja eksperimentalnih podatkov) predvidevamo enak odziv kot v nateznem območju. Model predvideva naslednjo zvezo med napetostmi in deformacijami:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < -\varepsilon_m \\ -\sigma_m \frac{3\varepsilon}{\varepsilon - 2\varepsilon_m} & -\varepsilon_m \leq \varepsilon < 0 \\ \sigma_m \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_m} & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \\ 0 & \varepsilon_m < \varepsilon \end{cases} \quad (1)$$

Pri tem je  $\sigma_m$  največja natezna trdnost materiala in  $\varepsilon_m$  največja natezna deformacija. Graf (1) za tipične vrednosti parametrov je predstavljen na sliki 1.

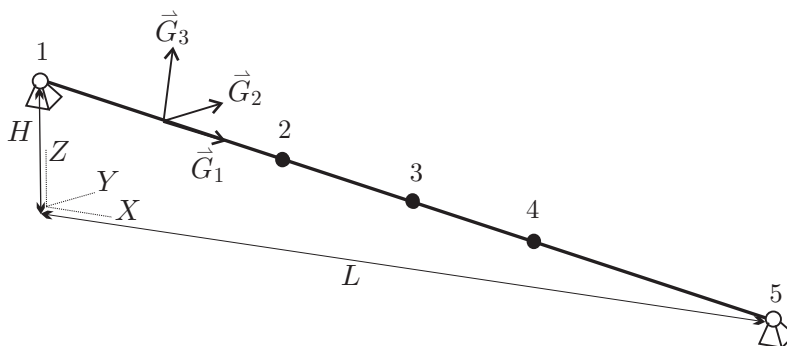


Slika 1 : Konstitucijski model materiala za enoosno napetostno stanje.

## 3 Raven tobogan

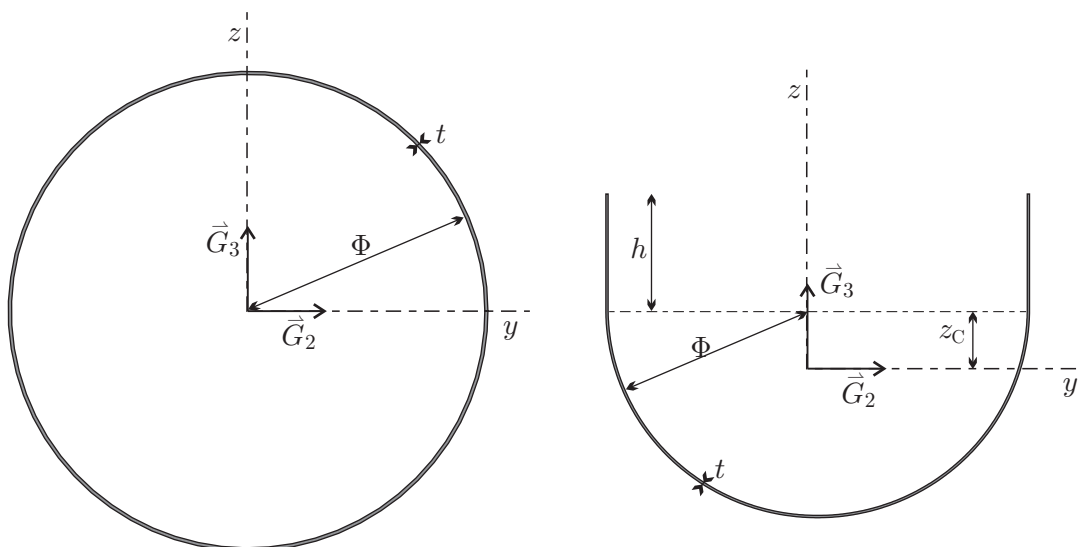
Najprej obravnavamo sorazmerno preprost računski primer. Tobogan je sestavljen iz treh ravnih segmentov z naklonom 15% glede na vodoravno ravnino. Segmenti so med sabo toga povezani, na obeh koncih pa sta postavljeni nepomični členkasti podpori. Podpori sta izvedeni tako, da

preprečujeta torzijski zasuk. Horizontalna razdalja med podporama znaša  $L = 600$  cm, vertikalna razdalja pa  $H = 90$  cm. Računski model je predstavljen na sliki 2. Uporabljeni so štirje končni elementi visokega reda. Privzamemo, da so na začetku prečni prerezi pravokotni na težiščno os.



**Slika 2** : Računski model ravnega tobogana.

Analizirali smo dva tipa prečnih prerezov, predstavljeni na sliki 3. Zaprti prerez ima obliko krožnega kolobarja z notranjim polmerom  $\Phi = 60$  cm. Odprti prerez sestavljajo polkrožni del z notranjim premerom  $\Phi = 45$  cm in dve navpični stranici višine  $h = 25$  cm. Pri odprtem prerezu se težišče prečnega prereza ne ujema s središčem krožnega dela. Za dane dimenzije prereza velja  $z_C = -18$  cm (glej sliko 3b). Debelina stene prereza je konstantna. Za oba obravnavana prereza smo uporabili realistično debelino  $t = 0.5$  cm.

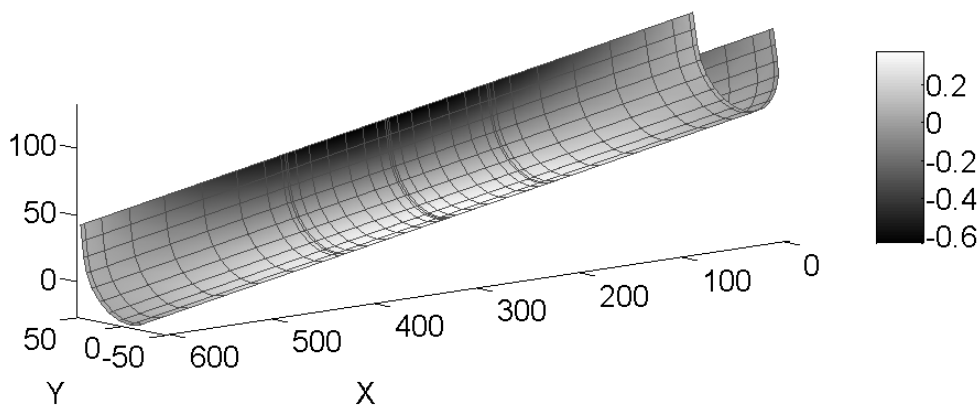


**Slika 3** : Prečna prereza: a) zaprti okrogli prerez, b) odprti prerez.

Za parametra računskega modela materiala smo privzeli realistični vrednosti mejnih deformacij  $\epsilon_m = 0.023$  in mejnih napetosti  $\sigma_m = 13 \text{ kN/cm}^2$ .

Obtežbo smo pripravili v skladu s pravilnikom. Obtežbo sestavljajo naslednje projektne obtežbe.

- i) *Lastna teža tobogana*, ki znaša  $0.005 \text{ kN/cm}$ .
- ii) *Voda na toboganu*: po standardu moramo vzeti vsaj dvakratno količino vode, ki teče po toboganu. Za obravnavana prereza je tako obtežba vode  $0.002 \text{ kN/cm}$ .
- iii) *Obtežba (teža) uporabnikov tobogana*. Za dani obliki prerezov in naklon konstrukcije je predpisana obtežba  $0.015 \text{ kN/cm}$ . Standard [4] predvideva delovanje obtežbe uporabnika na dolžini  $100 \text{ cm}$ . Za račun smo privzeli konzervativnejšo obtežbo, pri kateri smo predpostavili delovanje obtežbe uporabnika po celotni dolžini težiščne osi.
- iv) *Obtežbo z vetrom* predpostavimo v skladu z EC1 [1], saj s standardom [4] ni posebej predpisana. Obtežbo z vetrom predpostavimo v smereh lokalnih koordinatnih osi. Za račun smo privzeli obtežbo z vetrom velikosti  $0.06 \text{ kN/cm}$  v smeri lokalne osi, določene z vektorjem  $\vec{G}_2$ , in obtežbo z vetrom velikosti  $-0.06 \text{ kN/cm}$  v smeri lokalne osi, določene z vektorjem  $\vec{G}_3$  (glej sliko 2).
- v) *Obtežbo snega* standard [4] prav tako posebej ne določa, zato velikost določimo po standardu [1]. Uporabili smo podatke za cono C in nadmorsko višino  $300$  do  $400 \text{ m}$ . Po redukciji ploskovne obtežbe na težiščno os nosilca dobimo linijsko obtežbo snega, ki znaša  $0.022 \text{ kN/cm}$ .

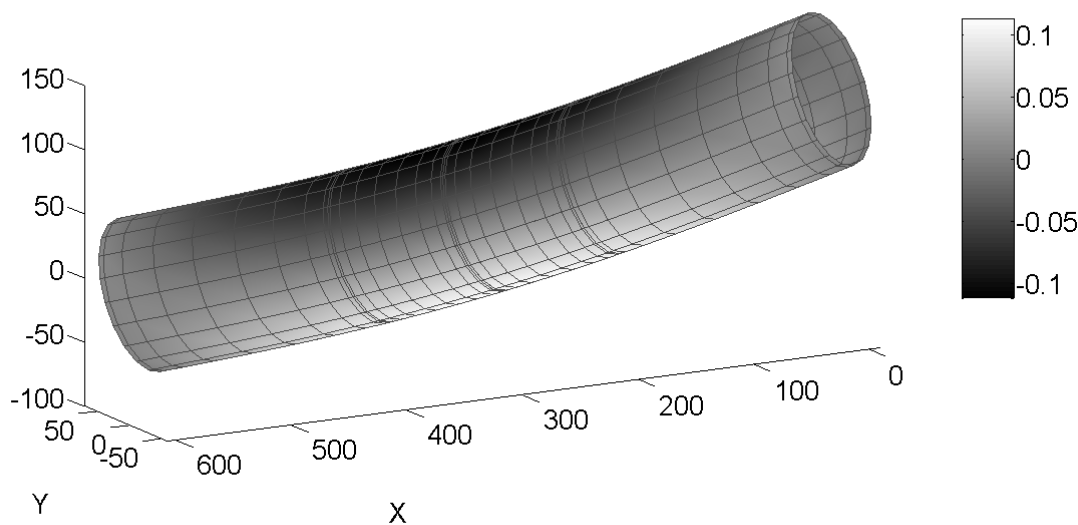


**Slika 4** : Deformacije ravnega odprtega tobogana.

Na sliki 4 prikazujemo potek deformacij odprtega ravnega tobogana. Z belo in svetlo sivo barvo so prikazane največje natezne deformacije, s črno pa največje tlačne deformacije. Sivine

označujejo območje zmernih deformacij. Iz slike 4 je razvidno, da se deformacije po prerezu in vzdolž osi spreminjajo. Prerezi so na spodnji strani obremenjeni natezno, zgoraj pa tlačno. Vmes (na prehodu iz polkrožnega v navpični del) so deformacije majhne. Prav tako so deformacije majhne na obeh vpetiščih, saj smo tja postavili vrtljive podpore. Največje deformacije so približno na sredini tobogana. Največja absolutna deformacija v konstrukciji je 0.64%, kar predstavlja le malo več kot četrtino mejne deformacije materiala. Pomiki na sredini (vozlišče 3) v vertikalni smeri so 5.00 cm.

Na sliki 5 prikazujemo potek deformacij in deformirano obliko cevastega ravnega tobogana. Pomiki konstrukcije so pomnoženi s faktorjem 30. Tako je iz slike 5 razviden potek pomikov vzdolž konstrukcije. Največji pomiki so približno na sredini, tam so tudi največje deformacije. Potek deformacij je podoben kot pri odprtem prerezu. Spodaj so deformacije natezne (belo polje), zgoraj pa imamo tlačne deformacije (črno polje). Velikosti deformacij in pomikov pa so bistveno manjše kot pri odprtem prerezu. Največja absolutna vrednost deformacij je le 0.11%, pomik na sredi pa 0.66 cm.



**Slika 5** : Potek deformacij na deformirani legi cevastega tobogana. Pomiki konstrukcije so pomnoženi s faktorjem 30.

Za oba računski primera smo določili še faktor kritične obtežbe. Vso obtežbo razen lastne teže smo večali vse do pojava prve singularnosti konstrukcije. Faktor, pri katerem se pojavi singularnost, imenujemo faktor kritične obtežbe. V obeh računskih primerih se singularnost pojavi zaradi porušitve po materialu. To pomeni, da je materialna tangenta matrika prečnega prereza postala singularna. V tabeli 1 primerjamo faktorja kritične obtežbe in vertikalna pomika

na sredini za odprti in zaprti tobogan. Faktor kritične obtežbe za cevasti tobogan znaša kar 14.7, za odprti prerez pa 3.8. Faktor kritične obtežbe je tudi za odprti prerez visok, saj lahko odprti ravni tobogan obremenimo s skoraj štirikratno projektno obtežbo, šele nato pride do porušitve. "Rezerve" pri cevastem prerezu pa so skoraj štirikrat večje. Vertikalni pomiki na sredini pri kritični obtežbi so sorazmerno veliki in znašajo 11.9 cm za zaprti prerez in 18.5 cm za odprti prerez.

**Tabela 1** : Primerjava rezultatov za raven tobogan.

	največja deformacija [%]	vertikalni pomik [cm]	faktor kritične obtežbe	vertikalni pomik pri kritični obtežbi
odprti prerez	0.64	5.00	3.8	18.45
zaprti prerez	0.11	0.66	14.7	11.93

#### 4 Tobogan v obliki vijačnice

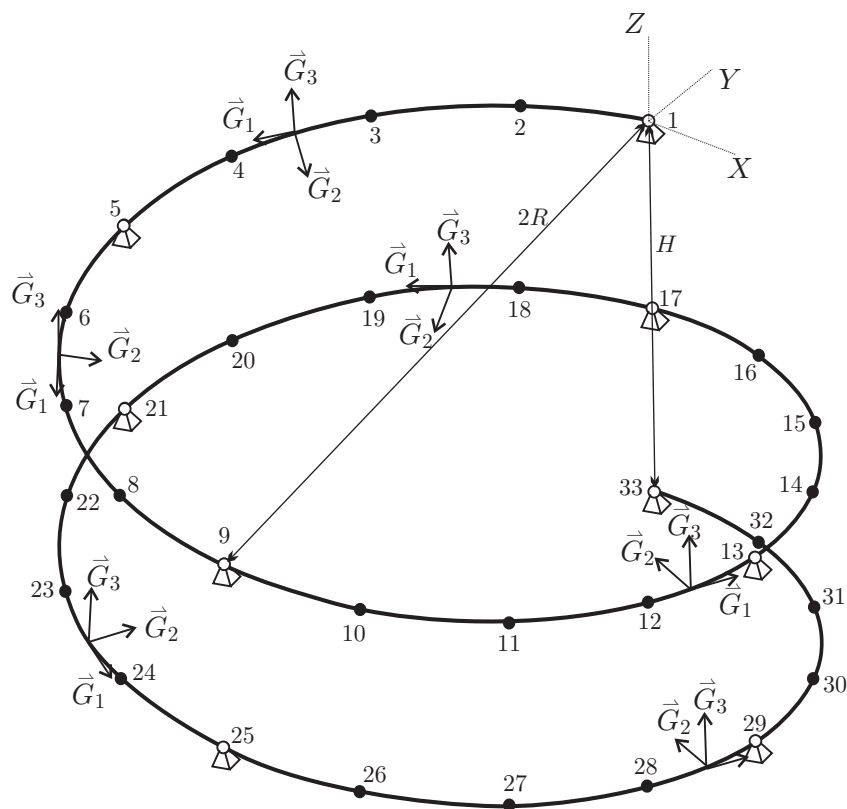
Ravni tobogani kažejo dobre rezultate, vendar pa je privlačnost toboganskih kompleksov v ukrivljenih oblikah toboganov. Tako je pri računu potrebno ustrezno upoštevati začetno ukrivljeno obliko konstrukcije. V tem poglavju obravnavamo tobogan s težiščno osjo v obliki vijačnice (slika 6). Obravnavali smo vijačno konstrukcijo s polmerom  $R = 600$  cm in višino  $H = 600$  cm. Uporabili smo mrežo 32 končnih elementov, kot kaže slika 6.

Obravnavali smo enaka prečna prereza kot v prejšnjem primeru (slika 3), zaprtega s polmerom  $\Phi = 60$  cm in odprtega s polmerom loka  $\Phi = 45$  cm in stranicama višine  $h = 25$  cm. Enake smo vzeli tudi vrednosti mejnih deformacij  $\epsilon_m = 0.023$  in mejnih napetosti  $\sigma_m = 13$  kN/cm<sup>2</sup>.

Uporabili smo različno podpiranje glede na obravnavana tipa prečnih prerezov. Podpiranje konstrukcije z zaprtim prerezom je razvidno iz slike 6. Nepomične členkaste podpore smo postavili na 1/4 kroga. Pri toboganu z odprtim prerezom smo postavili več podpor. Nepomične členkaste podpore smo postavili na 1/8 kroga. Vse podpore so izvedene tako, da onemogočajo torzijski zasuk.

Konstrukcijo smo obremenili z obtežbo, opisano v prejšnjem poglavju. V skladu s standardi moramo obtežbam pri ukrivljenih toboganih dodati še *centrifugalno silo*. Po standardu [4] je centrifugalna sila sorazmerna kvadratu hitrosti uporabnika in krivinskemu polmeru težiščne osi tobogana. Za vijačnico s polmerom  $R = 6$  m znaša po standardu [4] izračunana centrifugalna sila 0.0037 kN/cm. Centrifugalna sila deluje v horizontalni smeri 35 cm nad spodnjim robom prereza. Po redukciji sile na težiščno os nosilca predstavljata vpliv centrifugalne sile linijska prečna sila velikosti 0.0037 kN/cm v smeri lokalnega baznega vektorja  $\vec{G}_2$  in linijski torzijski moment velikosti 0.917 kNcm/cm okrog smeri lokalnega baznega vektorja  $\vec{G}_1$ .

Potek deformacij odprtega tobogana s težiščno osjo v obliki vijačnice predstavljamo na sliki 7. Obnašanje vijačnega tobogana se precej razlikuje od ravnega. Poglavitni razlog je v začetni ukrivljeni obliki, ki pomembno prispeva k poteku deformacij. Iz slike 7 razberemo, da so

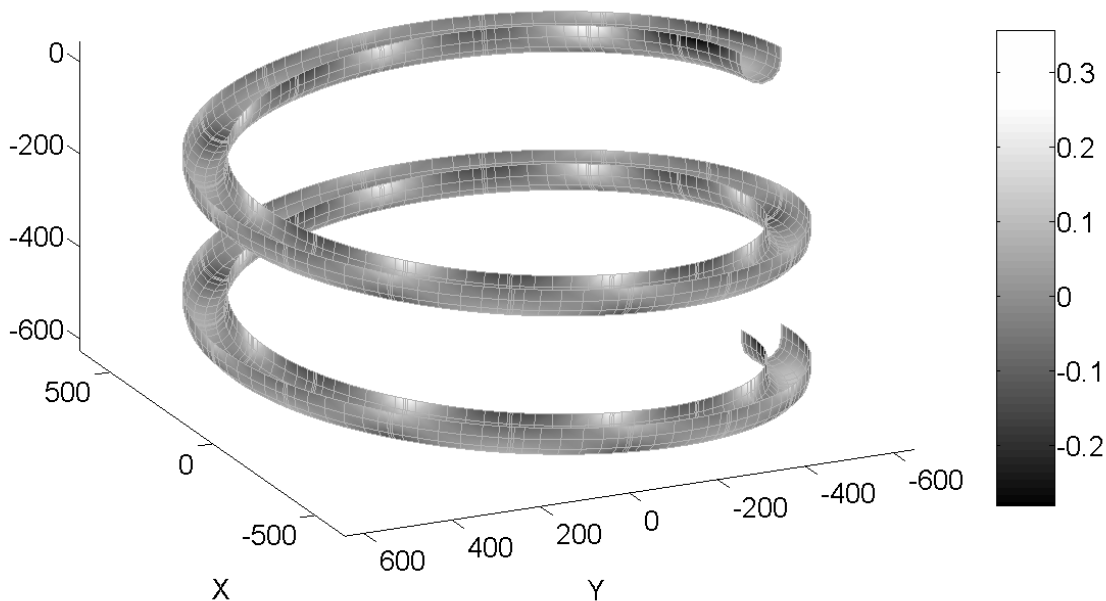


**Slika 6 :** Računski model tobogana v obliki vijačnice.

največje natezne deformacije (bela polja) ravno na mestih, kjer je konstrukcija podprta. Pri tem so največje deformacije na notranji strani na vrhu prereza. Na zunanji strani so deformacije precej manjše. Tlačne deformacije (črna območja) večinoma niso velike, razen na sredini prvega in zadnjega segmenta tobogana (med prvim in zadnjim parom podpor), kjer se na vrhu na notranji strani prereza pojavijo sorazmerno velike tlačne deformacije. Opozorimo še na izrazito lokalizacijo največjih nateznih deformacij v bližini podpor. Kljub lokalizaciji deformacij velikosti največjih deformacij ne presegajo 0.36%.

Deformacije cevastega tobogana v obliki vijačnice prikazujemo na sliki 8. Zaradi boljših lastnosti cevastega prereza smo tokrat uporabili manj podpor ob enaki obtežbi. Iz slike 8 so razvidne izrazite lokalne natezne deformacije (bela polja) na vrhu prerezov v okolici podpor. Tlačne deformacije so precejšnje pri podporah na spodnji strani prerezov, največje pa so na vrhu prerezov na prvi in zadnji osmini vijačnice. Največja absolutna deformacija v konstrukciji znaša 0.29%. V primerjavi z ravno cevjo iz prejšnjega poglavja so deformacije pri vijačnem toboganu precej večje. Večje deformacije so posledica prispevka centrifugalnih sil, večjih razponov in bolj komplicirane začetne oblike konstrukcije. Sorazmerno majhne razlike v največjih deformacijah v primerjavi z odprtim vijačnim toboganom so posledica večjega števila podpor pri odprtem toboganu.





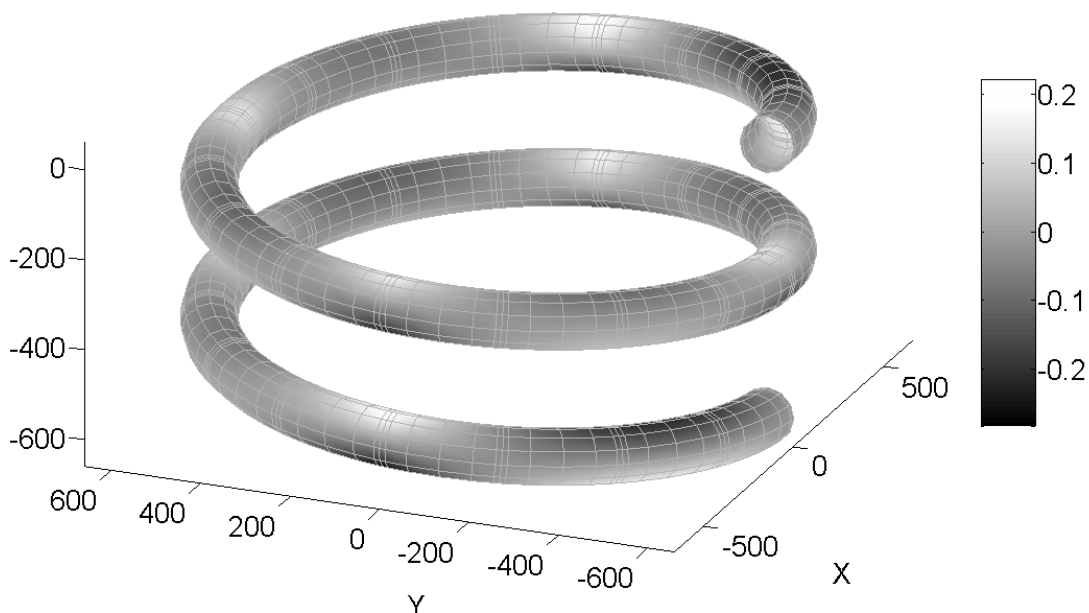
**Slika 7 :** Deformacije odprtega tobogana v obliki vijačnice.

Pomiki so sorazmerno majhni. Izmed vseh vozlišč, ki smo jih spremljali, so največji pomiki v vozlišču 31 (slika 6). Pomiki v vertikalni smeri vozlišča 31 znaša 2.93 cm, pomik v smeri osi  $Y$  pa 0.43 cm.

**Tabela 2 :** Primerjava rezultatov za tobogan v obliki vijačnice.

	največja deformacija [%]	faktor kritične obtežbe	največji vertikalni pomik pri kritični obtežbi [cm]
odprti prerez	0.35	5.5	6.16
zaprti prerez	0.28	6.2	23.83

Za odprti in zaprti vijačni tobogan smo določili tudi kritično obtežbo. Vso obstoječo obtežbo razen lastne teže smo večali vse do porušitve. Do porušitve konstrukcije je prišlo zaradi porušitve po materialu. V tabeli 2 prikazujemo faktorja kritične obtežbe za odprti in za zaprti tip vijačnega tobogana. Faktor, za katerega lahko povečamo projektno obtežbo, znaša pri odprtem prerezu 5.5, pri zaprtem pa 6.2. Zanimivi so tudi največji vertikalni pomiki pri kritični obtežbi. Vertikalni pomik v vozlišču 31 pri kritični obtežbi znaša za cevasto vijačnico 23.83 cm. Pomiki so zaradi večjega števila podpor precej manjši pri odprtem prerezu; vertikalni pomik v vozlišču



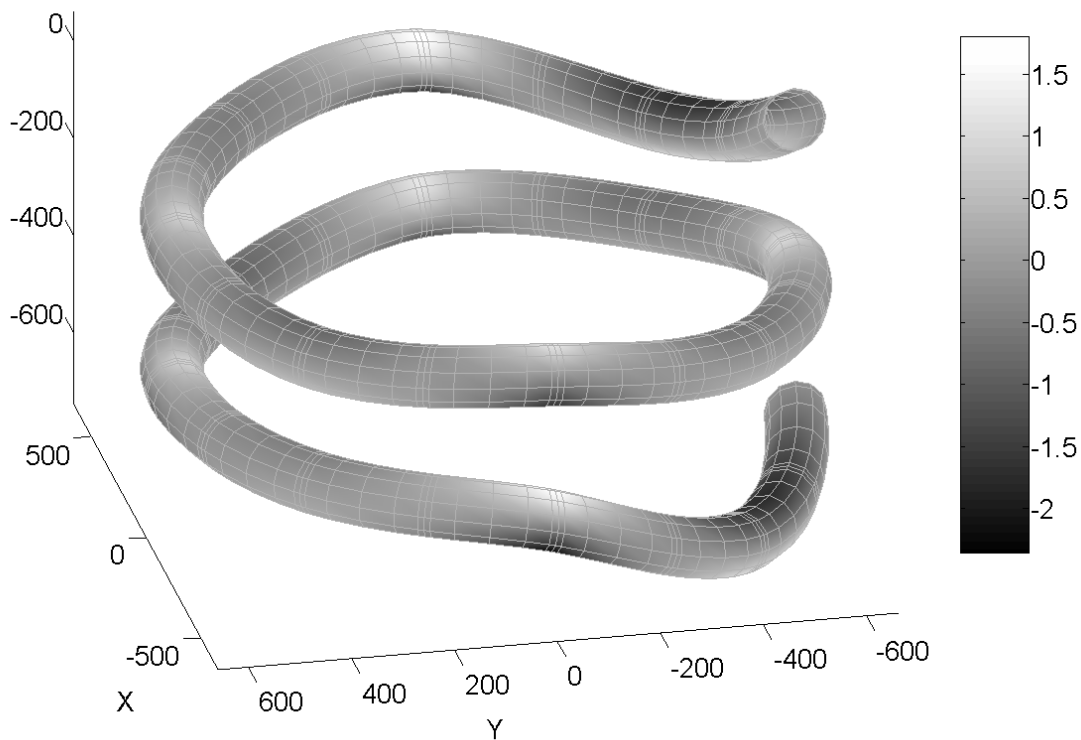
**Slika 8** : Deformacije cevastega tobogana v obliki vijačnice.

32 znaša 6.15 cm. Kljub precejšnji velikosti pomikov cevastega vijačnega tobogana je razmerje med pomikom pri kritični obtežbi in razponom med dvema zaporednima podporama le  $2.5/100$ . Ilustracija pomikov pri kritični obtežbi na sliki 9 je zato prikazana za pomike, pomnožene za faktor 5.

## 5 Sklep

Predstavili smo geometrijsko in materialno nelinearno analizo dveh značilnih segmentov vodnih toboganov. Upoštevali smo evropske standarde za visoke vodne tobogane in analizirali deformacije, pomike in kritične obtežbe pri predpisanih obtežbah. Bistvene ugotovitve statične analize so:

- i) Deformacije so pri projektni obtežbi precej manjše od mejnih deformacij kompozitnega materiala.
- ii) Varnost konstrukcij je velika, saj do porušitev pride šele pri nekajkratnem povečanju projektne obtežbe.
- iii) Precejšnje “rezerve” v nosilnosti in deformacijah omogočajo razvoj in izdelavo optimalnejših prerezov toboganov.
- iv) Pri optimizaciji moramo biti pozorni tudi na lokalizacije deformacij, ki se pojavljajo v bližini podpor.



**Slika 9** : Deformacije cevastega tobogana v obliki vijačnice pri kritični obtežbi. Pomiki so pomnoženi s faktorjem 5.

## Literatura

- [1] EUROCODE 1, *Basic of Design and Actions on Structures*, ENV 1991, 1995.
- [2] E. Reissner, *On finite deformation of space-curved beams*, J. Appl. Math. Phys. 32, 734–744, 1981.
- [3] J. C. Simo, *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 49, 55–70, 1985.
- [4] SIST EN 1069-1: 2002, *Vodni tobogani, visoki 2 m in več - 1. del: Varnostne zahteve in preskusne metode (Water slides of 2 m height and more - Part 1: Safety requirements and test methods)*, Slovenski inštitut za standardizacijo, 2002.
- [5] U. Vedenik, *Optimizacija proizvodnje elementov vodnih toboganov v družbi Veplas d.d.*, diplomsko delo, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 2005.
- [6] D. Zupan, M. Saje, *Finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192, 5209–5248, 2003.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

531/533(063)(082)

KUHLJEVI dnevi (2005 ; Podčetrtek)

Zbornik del / Kuhljevi dnevi 2005, Podčetrtek, 22.–23. september  
2005; [organizator] Slovensko društvo za mehaniko; uredila Jože  
Korelc, Dejan Zupan. - Ljubljana : Slovensko društvo za mehaniko,  
2005

ISBN 961-91659-0-X

1. Korelc, Jože 2. Slovensko društvo za mehaniko  
222115840

:Kuhljevi dnevi 2005

:zbornik del

