

:Kuhljevi dnevi 2004

:zbornik del

20

04

:KUHLJEVI DNEVI

:zbornik del

:uredila Jože Korelc in Dejan Zupan

:izdalo Slovensko društvo za mehaniko

:Otočec, 30. september-1. oktober 2004

:Slovensko društvo za mehaniko

:september 2004

Zbornik del

Kuhljevi dnevi 2004

Otočec, 30. september - 1. oktober 2004

Uredila:

Jože Korelc
Dejan Zupan



Kuhljevi dnevi 2004

Otočec, 30. september - 1. oktober 2004

ZBORNİK DEL

Uredila:

Jože Korelc
Dejan Zupan

Recenzija:

Miha Boltežar
Boštjan Brank
Jože Korelc
Franc Kosel
Jure Marn
George Mejak
Miran Saje
Brane Širok
Leopold Škerget
Dejan Zupan

Izdalo in založilo:

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO

Jamova 2, Ljubljana
september, 2004

Grafično oblikovanje:

Veronika Saje

Tisk in vezava:

Studio Kreator, Ljubljana

Naklada:

100 izvodov

Kazalo

J. Avsec, M. Oblak <i>Uporaba statistične mehanike v strojništvu</i>	1 – 8
M. Batista <i>Kotaljenje diska po horizontalni ravnini</i>	9 – 16
M. Batista, F. Kosel <i>Termoelastične deformacije bimetalnih rotacijskih lupin</i>	17 – 24
B. Bezenšek, J.W. Hancock <i>Statistični model krhkega loma nehomogenih materialov</i>	25 – 33
G. Bobovnik, J. Kutin, I. Bajsić <i>Ocena vpliva Reynoldsovega števila na občutljivost lupinaste izvedbe Coriolisovega merilnika</i>	35 – 42
A. Bombač, A. Dernikovič, I. Žun <i>Eksperimentalna raziskava časov pomešanja modificiranih turbinskih mešal</i> ..	43 – 50
A. Bombač, S. Rodman Oprešnik, B. Širok, I. Žun <i>Hitrosti kapljevine pri mešanju s turbinskim mešalom v posodi kvadratastega preseka</i>	51 – 58
S. Bratina, M. Saje, I. Planinc <i>Analiza nosilnosti AB prečnih prerezov</i>	59 – 68
B. Brevec, F. Kosel <i>Optimizacija debeline glede na izbočitev v elastoplastičnem območju</i>	69 – 76
B. Čas, M. Saje, I. Planinc <i>Uklon sestavljenih lesenih nosilcev</i>	77 – 84
I. Emri, R. Cvelbar, A. Nikonov, B. von Bernstorff <i>Interkonverzija med dinamičnimi in statičnimi materialnimi funkcijami viskoelastičnih materialov</i>	85 – 92

M. Gams, G. Turk, S. Srpčič <i>O strižnem in torzijskem središču</i>	93 – 100
B. Harl, M. Kegl <i>Optimalno projektiranje oblike prostorskih paličnih konstrukcij</i>	101 – 108
T. Hozjan, S. Bratina, S. Srpčič <i>Nelinearna požarna analiza jeklenega nosilca</i>	109 – 116
N. Jakšič, M. Boltežar <i>Razprava o lastnih viskozno dušenih prečnih nihanjih osno premikajoče se strune</i>	117 – 124
R. Jecl <i>Primerjava med Forcheimerjevim in Brinkmanovim modelom konvektivnega toka v porozni kotanji</i>	125 – 132
D. Jošt, A. Lipej, V. Schweiger <i>Numerični izračun toka v odvodnem tunelu francisove turbine</i>	133 – 140
T. Katrašnik, F. Trenc <i>Izboljšana simetrična shema zmanjšanja totalne variacije</i>	141 – 148
M. Kegl, B. Brank, M. Jaklič <i>Optimiranje oblike lupinastih konstrukcij</i>	149 – 156
F. Kosel, S. Jevšnikar <i>Poševni elastoplastični upogib</i>	157 – 164
F. Kosel, T. Videnič <i>Določitev nekaterih materialnih lastnosti pri gradivih z oblikovnim spominom</i>	165 – 172
A. Kotar, P. Koc, B. Štok <i>Optimiranje procesa segrevanja valja</i>	173 – 180
J. Kramer, D. Korošak <i>Anomalna difuzija in dielektrični odziv izbranih vezljivih zemljin</i>	181 – 188
G. Mejak <i>Linearne elastične lastnosti materiala z naključno celično strukturo</i>	189 – 196

M. Oblak, R. Pušenjak <i>Lindstedt-Poincarejeva metoda za dinamične sisteme z velikimi nelinearnostmi</i>	197 – 204
M. Otrin, M. Boltežar <i>Prenos upogibnih nihanj preko jeklene pletenice</i>	205 – 212
R. Pušenjak, M. Oblak <i>Lindstedt-Poincarejeva metoda z več časovnimi skalami za dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi</i>	213 – 220
M. Ramšak <i>Večobmočna metoda robnih elementov za k-e turbulentne modele</i>	221 – 228
J. Ravnik, L. Škerget, M. Hriberšek <i>Diskretna valčna transformacija za metodo robnih elementov v mehaniki tekočin</i>	229 – 236
A. Rebec, P. Plešec, U. Bohinc, B. Brank <i>Toplotna analiza konstrukcije naftnega rezervoarja v primeru požara bližnjega rezervoarja</i>	237 – 244
T. Rojc <i>Integracija klasične hipoelastične konstitutivne zveze; 1.del: zvezna formulacija</i>	245 – 252
T. Rojc <i>Integracija klasične hipoelastične konstitutivne zveze; 2.del: numerični postopek</i>	253 – 260
M. Saje, D. Zupan <i>Ropot Eulerjevega diska</i>	261 – 268
S. Schnabl, I. Planinc, B. Čas, M. Saje, G. Turk <i>Točna analiza troslojnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa</i>	269 – 276
P. Skuber, D. Beg, J. Korelc <i>Nizkociklično utrujanje konstrukcijskega jekla</i>	277 – 284
J. Slavič, M. Boltežar <i>Dinamika diskretno definiranega sistema togih teles z enostranskimi kontakti</i>	285 – 292

V. Šajn, F. Kosel <i>Eksperimentalna in numerična analiza separacije toka na deformabilnem krilu</i>	293 – 300
L. Štrubelj, I. Tiselj, I. Bajsić <i>Simulacija Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti s programom CFX</i>	301 – 308
P. Ternik, J. Marn <i>Časovno povprečne vodilne enačbe turbulentnega toka posplošenih newtonskih tekočin</i>	309 – 323
P. Ternik, J. Marn <i>Vpliv nelinearne viskozne funkcije na dinamiko turbulentnega toka nenewtonske tekočine</i>	325 – 332
P. Ternik, M. Delić, Z. Žunič, J. Marn <i>Tok v kanalu z nenadno razširitvijo z metodo kontrolnih volumnov</i>	333 – 340
M. Vesenjaj, H. Müllerschön, A. Hummel, Z. Ren <i>Analiza metod za simuliranje vezanih problemov s programom LS-DYNA</i> ...	341 – 348
B. Vohar, K. Gotlih, Z. Ren <i>Vpliv zračnosti zobniškega para na natančnost gibanja enoročičnega manipulatorja</i>	349 – 358
D. Zupan, M. Saje <i>Analitična integracija napetosti po betonskih prečnih prerezih</i>	359 – 366
T. Žagar, J. Kutin, I. Bajsić <i>Vpliv povezovalnih cevk na dinamične lastnosti merjenja tlaka</i>	367 – 374
Z. Žunič, L. Škerget, M. Hriberšek <i>Mešana metoda BEM-FEM za tokove nestisljivih viskoznih tekočin</i>	375 – 382



Uporaba statistične mehanike v strojništvu

J. Avsec¹ in M. Oblak²

The application of statistical mechanics for mechanical engineering

Povzetek. Članek obravnava analizo matematičnega modela za izračunavanje hitrosti zvoka, viskoznosti in toplotne prevodnosti v kapljevitem in plinastem stanju s pomočjo ravnotežne in neravnotežne statistične mehanike. Analitični rezultati so primerjani z REFPROP in Solvay modelom in kažejo relativno dobro ujemanje.

Abstract. The paper features the mathematical model of computing speed of sound, viscosity, thermal conductivity and thermal diffusivity in the fluid domain with the application of equilibrium and nonequilibrium mechanics. We developed the mathematical model for the calculation of transport properties for binary mixtures. The analytical results obtained by statistical thermodynamics are compared with the REFPROP and Solvay model and show relatively good agreement

1 Uvod

Uporaba metod moderne mehanike se danes širi z nesluteno hitrostjo v mnoga področja tehnike. S pomočjo teorije kaosa, lahko danes razložimo večino nelinearnih problemov. Še vedno pa tudi s teorijo kaosa ne moremo določiti z veliko verjetnostjo trajektorij delcev v turbulentnem toku. Področje mikromehanike in nanomehanike je danes izjemnega gospodarskega pomena. Analiza tokov v mikrokanalih in nanokanalih je možno proučevati tudi s pomočjo znanih enačb klasične hidromehanike. Eulerjeva enačba daje slabe rezultate skoraj v celotnem področju, Navier-Stokesova enačba pri številu Knudsena 0.1, Burnettova enačba pa pri številu Knudsena 10. Če pa želimo analizirati prosti molekularni tok v mikro in nanokanalih se moramo poslužiti neravnotežne mehanike in originalne Boltzmannove enačbe. V tem primeru lahko izračunavamo hidromehanske probleme v celotnem območju Knudsena, temperatur in tlakov. Tudi predstavljen članek prikazuje uporabo Boltzmannove enačbe za izračun transportnih lastnosti. S pomočjo predstavljenega modela pa lahko v

¹ Doc. Dr., Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

² Red. Prof. Dr., Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

naslednjem koraku preidemo k modeliranju in uporabi Boltzmannove enačbe v hidromehaniki.

2 Ravnotežna mehanika

Osnova gibanja molekul, gibanja atomov v molekulah ter delovanja privlačnih sil so intermolekularne in intramolekularne interakcije med elektroni in jedri. Za natančen izračun bi bilo potrebno rešiti Schrödingerejevo enačbo za več delcev:

$$\left(-\sum \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right) \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1)$$

Vsota v enačbi (1) teče preko vseh jeder in elektronov z maso m_i in z nabojem q_i . Rešitev takšne diferencialne enačbe je izjemno težka naloga, vendar se dobijo zelo natančni rezultati tudi z nekaterimi poenostavitvami:

-medmolekularne sile so mnogo šibkejše kot intramolekularne sile, zato lahko zanemarimo vpliv medmolekularnih sil glede na intramolekularne sile,

-predpostavimo, da je vsaka od oblik gibanja neodvisna od ostalih, zato lahko energijo sistema molekul zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov:

a) Kinetične energije molekul ali gibalne energije sistema molekul. V to skupino spada translatorska energija molekul (trans) zaradi gibanja težišč molekul, rotacijska energija molekul (rot) zaradi gibanja molekul okoli svojih osi, vibracijska energija (vib) molekul zaradi relativnega gibanja atomov znotraj molekul. Pri kompleksnejših molekulah pa prihaja do zasuka celotnih skupin atomov v molekulah iz česar izhaja pojem energije notranje rotacije (ir).

b) Potencialne energije (pot) sistema molekul, ki nastopi zaradi privlačnih oz. odbojnih sil v sistemu molekul.

c) Energije elektronov (el), ki je skoncentrirana v elektronih oz. v elektronski lupini atoma oziroma molekule

Zapišimo energijo osnovnega stanja (0) kot vsoto posameznih prispevkov energij v osnovnem stanju:

$$E_0 = E_{\text{trans}_0} + E_{\text{vib}_0} + E_{\text{rot}_0} + E_{\text{ir}_0} + E_{\text{el}_0} + \dots \quad (2)$$

V tem primeru nam prispevki k celotni energiji pomenijo energijo potrebno pri vzbujanju sistema v višja energijska stanja.

$$E = E_0 + E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}} + E_{\text{el}} + E_{\text{ir}} + E_{\text{konf}} \quad (3)$$

-potencialna medmolekularna energija je odvisna od položaja jeder v prostoru

-zanemarimo tudi vpliv orientacije molekule v prostoru,

-predpostavimo, da je medmolekularna energija sistema molekul aditivna veličina,

-ker so v predstavljenem članku obravnavani pojavi pri višjih temperaturah, kjer imajo kvantni efekti zelo majhen vpliv, smo za izračun termodinamičnih veličin stanja dvo- ali večatomnih molekul uporabili klasično statistično mehaniko. V ta namen smo uporabili

kanonsko porazdelitev [1], ki obravnava sistem delcev s končnim številom delcev N , s temperaturo T in z volumnom V . Vpeljimo pojem porazdelitvene funkcije [1] Z ,

$$Z = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \quad (4)$$

kjer teče vsota preko vseh energijskih stanj z energijo E_i . Ob predpostavki zveznega energijskega spektra ter s pomočjo zgornjih predpostavk lahko nato še enostavneje zapišemo kanonsko porazdelitveno funkcijo:

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int \dots \int \exp\left(-\frac{E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{ir}} + E_{\text{vib}} + E_{\text{el}}}{kT}\right) d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N \cdot \int \dots \int \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}}{kT}\right) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \quad (5)$$

Drugi člen na desni strani v enačbi (5) imenujemo konfiguracioni integral.

Na osnovi vseh navedenih poenostavitev, lahko s pomočjo kanonske porazdelitve zapišemo porazdelitveno funkcijo Z kot produkt porazdelitvenih funkcij.

$$Z = Z_0 \cdot Z_{\text{trans}} \cdot Z_{\text{vib}} \cdot Z_{\text{rot}} \cdot Z_{\text{ir}} \cdot Z_{\text{el}} \cdot Z_{\text{nuc}} \cdot Z_{\text{konf}} \quad (6)$$

S pomočjo porazdelitvene funkcije nam kanonska teorija omogoča izračunati termodinamične veličine stanja :

$$p = k \cdot T \cdot \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V, U = k \cdot T^2 \cdot \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V, c_0 = \sqrt{-V^2 \frac{\frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \frac{1}{M}}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \frac{C_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}}, \quad (7)$$

kjer je p termodinamični tlak sistema, U notranja energija in c_0 izentropna hitrost zvoka. Konstante potrebne za izračun, kot so vztrajnostni momenti molekul, karakteristične temperature ali simetrična števila smo izračunali analitično [1,2].

3 Neravnotežna mehanika

S pomočjo statistične neravnotežne mehanike [2,3] lahko izrazimo toplotno prevodnost λ , viskoznost η in dilatacijsko viskoznost κ :

$$\lambda = \frac{2k^2T}{3m} [A, A], \quad \eta = \frac{1}{10} kT [B, B], \quad \kappa = kT [\Gamma, \Gamma], \quad (8)$$

kjer so A, B in Γ zapletene skalarne, vektorske in tenzorske funkcije. V predstavljenem članku je uvedena predpostavka da so pri ne zelo visokih temperaturah zasedena samo osnovna vibracijska stanja ter da trki med rotirajočimi molekulami izmenjajo le nekaj kvantov energije, torej je vpliv rotacije molekul okoli svojih glavnih osi majhen. Članek zajema sisteme več-atomnih molekul za izračun viskoznosti in toplotne prevodnosti. S pomočjo Boltzmannove enačbe lahko s pomočjo teorije, ki obravnava majhne temperaturne in hitrostne gradiente v sistemu molekul, lahko izračunamo viskoznost η_0 in toplotno prevodnost λ_0 za idealne pline:

$$\eta_0 = \frac{5kT}{8\Omega^{(2,2)}} \left(1 + \frac{3}{49} \left(\frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)^2 \right), \lambda_0 = \frac{25kTC_V}{16M\Omega^{(2,2)}} \left(1 + \frac{2}{21} \left(\frac{\Omega^{(2,3)}}{\Omega^{(2,2)}} - \frac{7}{2} \right)^2 \right), \quad (9)$$

v enačbi (9) predstavlja M molekulska masa snovi, $\Omega^{(l,s)}$ pa je transportni integral trka. Za primere zapletenih medmolekularnih potencialov ne obstajajo analitične rešitve integralov trka. V tem primeru se poslužimo numeričnih simulacij in interpolacij. V našem primeru smo uporabili interpolacijo za Lennard-Jonesov medmolekularni potencial [2]:

$$\Omega^{(l,s)*} = \frac{A}{T^{*B}} + \frac{C}{\exp(DT^*)} + \frac{E}{\exp(FT^*)} + \frac{G}{\exp(HT^*)} + RT^{*B} \sin(ST^{*W} - P). \quad (10)$$

Enačba (10) vsebuje 12 koeficientov ($A, B, C, D, E, F, G, H, R, S, W, P$) za 16 različnih integralov trka. V predstavljenem članku smo uporabili Chung-Lee-Starlingov model [3] za določevanje viskoznosti in toplotne prevodnosti. Predstavljene enačbe so dobljene s pomočjo kinetične teorije plinov in korelacij z izmerjenimi rezultati. V korelacijah uporabljamo acentrični faktor ω , reduciran dipolni moment μ_r in asociacijski parameter κ , ki je rezultat prisotnosti vodikove vezi med atomi v molekulah. Zapišimo viskoznost v razredčenih sistemih:

$$\eta_0(T) = 26.69579 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{MT}}{\Omega^{(2,2)*} \sigma^2} F_c. \quad (12)$$

Koeficient F_c je določen na osnovi primerjave med analitičnimi rezultati in izmerjenimi vrednostmi:

$$F_c = 1 - 0.2756\omega + 0.059035\mu_r^4 + \kappa, \quad (13)$$

Pri višjih tlakih se enačba (12) razširi, tako da upoštevamo tudi vplive temperaturnih in tlačnih polj na viskoznost:

$$\eta = \eta_k + \eta_p, \quad (14)$$

$$\eta_k = \eta_0 \left(\frac{1}{G_2} + A_6 Y \right), \quad (15)$$

$$\eta_p = \left[36.344 \cdot 10^{-6} - (MT_c)^5 / V_c^{2/3} \right] A_7 Y^2 G_2 \cdot \exp(A_8 + A_9 / T^* + A_{10} / T^{*2}), \quad (16)$$

$$Y = \rho V_c / 6, \quad G_1 = \frac{1.0 - 0.5Y}{(1.0 - Y)^3}, \quad T_c = \frac{1.2593\epsilon}{k}, \quad V_c = \left(\frac{\sigma(\text{\AA})}{0.809} \right)^3, \quad (17)$$

$$G_2 = \frac{\{A_1(1 - \exp(-A_4 Y)) + A_2 \cdot G_1 \exp(A_5 Y) + A_3 G_1\}}{(A_1 A_4 + A_2 + A_3)}. \quad (18)$$

Konstante A_1 - A_{10} so linearne funkcije faktorja acentričnosti, reduciranega dipolnega momenta in asociacijskega faktorja.

$$A_i = a_0(i) + a_1(i)\omega + a_2(i)\mu_r^4 + a_3(i)\kappa, \quad i=1 \dots 10. \quad (19)$$

Podoben postopek naredimo za toplotno prevodnost:

$$\lambda = \lambda_k + \lambda_p, \quad (20)$$

$$\lambda_k = \lambda_0 \left(\frac{1}{H_2} + B_6 Y \right). \quad (21)$$

Za področje nizkih tlakov lahko zapišemo toplotno prevodnost s pomočjo kinetične teorije plinov:

$$\lambda_0 = 3119.41 \left(\frac{\eta_0}{M} \right) \psi. \quad (22)$$

kjer ψ predstavlja vpliv prispevka energije zaradi večatomnih molekul. V našem primeru smo uporabili teorijo Taxmana [2].

$$\psi = 1 + C_{int}^* \left\{ \frac{0.2665 + \frac{(0.215 - 1.061\beta)}{Z_{coll}} + 0.28288 \frac{C_{int}^*}{Z_{coll}}}{\beta + \frac{0.6366}{Z_{coll}} + \frac{1.061\beta C_{int}^*}{Z_{coll}}} \right\}, \quad (23)$$

kjer je C_{int}^* je reducirana izohorna toplotna kapaciteta in Z_{coll} imenujemo število trkov, ki je definirano kot število, ki je potrebno za izmenjavo kvanta energije pri izmenjavi notranje energije z translacijsko energijo. Za število trkov smo uporabili naslednjo aproksimacijo:

$$Z_{coll} = 2.0 + 10.5 \frac{T}{T_c}. \quad (24)$$

Toplotne kapacitete smo izračunali s pomočjo ravnotežne statistične mehanike. Transportni faktor β lahko izračunamo analitično kot razmerje med viskoznostjo in produktom z difuzivnostjo in gostoto. V našem primeru smo uporabili korelacijsko funkcijo, ki je bila dobljena s pomočjo faktorja acentričnosti ω [16]:

$$\beta = 0.786231 - 0.710907\omega + 1.31583\omega^2, \quad (25)$$

Za višje tlake je potrebno upoštevati še:

$$\lambda_p = \left(0.1272 \left(\frac{T_c}{M} \right)^{1/2} \frac{1}{V_c^{2/3}} \right) B_7 Y^2 H_2 \left(\frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \quad (26)$$

kjer je λ_p v W/mK.

$$H_2 = \left\{ B_1 [1 - \exp(-B_4 Y)] \frac{1}{Y} + B_2 G_1 \exp(B_5 Y) + B_3 G_1 \right\} \frac{1}{B_1 B_4 + B_2 + B_3} \quad (27)$$

Konstante B_1 - B_7 so linearne funkcije faktorja acentričnosti, reduciranega dipolnega momenta in asociacijskega faktorja.

$$B_i = b_0(i) + b_1(i)\omega + b_2(i)\mu_r^4 + b_3(i)\kappa, \quad i=1, 10 \quad (28)$$

3.1 Neravnotežna mehanika za zmesi

Za določitev viskoznosti v zmesih smo uporabili analitični model za izračun N komponent

$$\eta = - \frac{\begin{vmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} & \psi_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ H_{N1} & & H_{NN} & \psi_N \\ \psi_1 & & \psi_N & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{N1} & \cdots & H_{NN} \end{vmatrix}} \quad (29)$$

$$H_{ii} = \frac{\psi_i^2}{\eta_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\psi_i \psi_j}{2\eta_{ij} A_{ij}^*} \frac{M_i M_j}{(M_i + M_j)^2} \left(\frac{20}{3} + \frac{4M_j}{M_i} A_{ij}^* \right) \quad (30)$$

$$H_{ij} (j \neq i) = - \frac{\psi_i \psi_j}{2\eta_{ij} A_{ij}^*} \frac{M_i M_j}{(M_i + M_j)^2} \left(\frac{20}{3} - 4A_{ij}^* \right) \quad (31)$$

kjer je ρ številčna gostota, ψ_i in ψ_j sta molska deleža komponent i in j , in M_i ter M_j njihovi molekularni masi. Tudi za določitev toplotne prevodnosti v zmesih smo uporabili analitični model:

$$\lambda = - \frac{\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1N} & \psi_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{N1} & & \Lambda_{NN} & \psi_N \\ \psi_1 & & \psi_N & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{N1} & \cdots & \Lambda_{NN} \end{vmatrix}} \quad (32)$$

$$\Lambda_{ii} = \frac{\psi_i^2}{\lambda_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\psi_i \psi_j}{2\lambda_{ij} A_{ij}^*} \frac{M_i M_j}{(M_i + M_j)^2} \left(\frac{15}{2} M_i^2 + \frac{25}{4} M_j^2 - 3M_j^2 B_{ij}^* + 4M_i M_j A_{ij}^* \right) \quad (34)$$

$$\Lambda_{ij} (j \neq i) = - \frac{\psi_i \psi_j}{2\lambda_{ij} A_{ij}^*} \frac{M_i M_j}{(M_i + M_j)^2} \left(\frac{55}{4} - 3B_{ij}^* - 4A_{ij}^* \right) \quad (35)$$

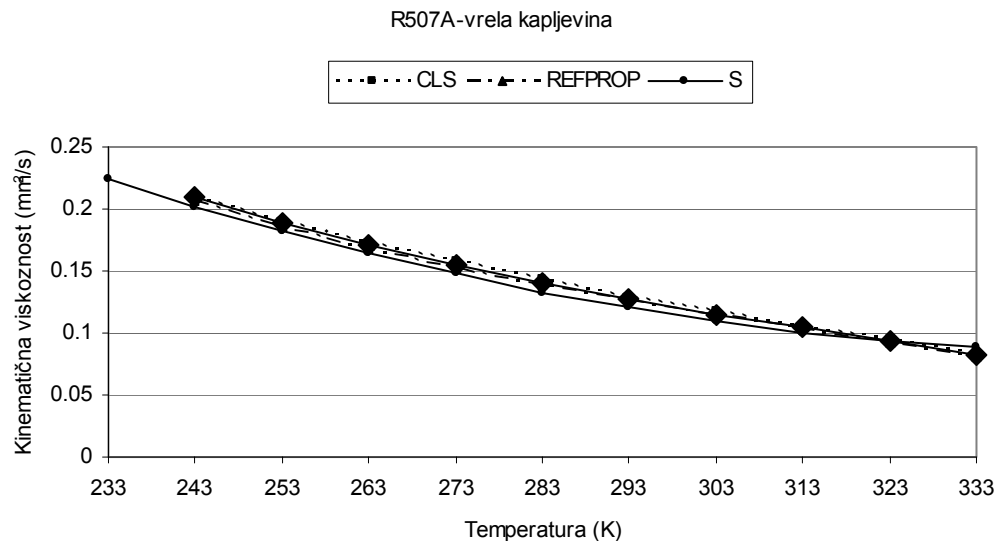
Koeficienta A_{ij}^* in B_{ij}^* sta izražena z naslednjima enačbama:

$$A_{ij}^* = \frac{\Omega_{ij}^{(2,2)*}}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}}, \quad B_{ij}^* = \frac{(5\Omega_{ij}^{(1,2)*} - 4\Omega_{ij}^{(1,3)*})}{\Omega_{ij}^{(1,1)*}} \quad (36)$$

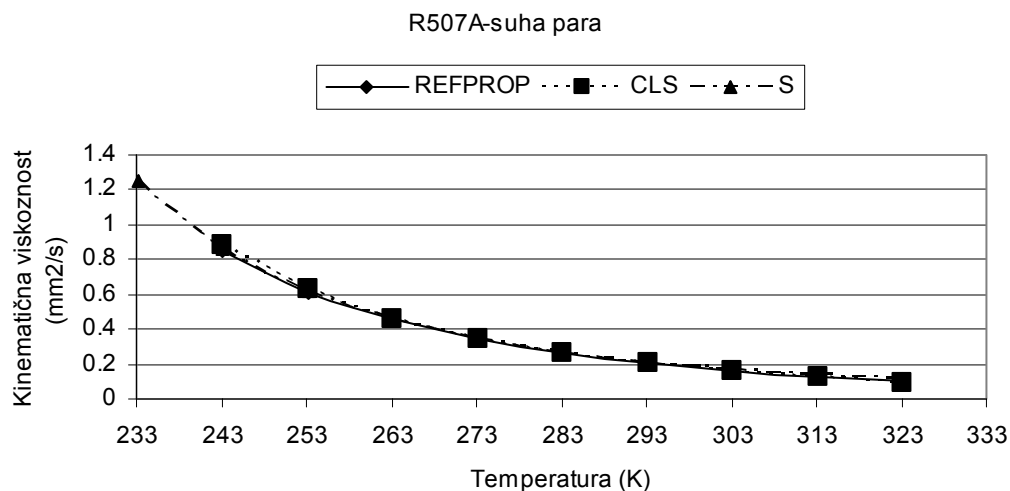
4. Rezultati ter diskusija

V predstavljenem članku so prikazani analitični rezultati, za snov R507, ki je binarna azeotropna zmes pentafluoroetana in trifluoroetana. Uporaba zmesi R 507 je zelo razširjena v hladilni tehniki, zaradi njenih izjemnih hladilnih lastnosti. V predstavljenem članku je prikazana primerjava za kinematično viskoznost, toplotno prevodnost in hitrost zvoka. Matematični model smo primerjali s programom REFPROP, ki je izdelan v NIST-u (National Institute of Standards and technology, ZDA) in s programom tovarne Solvay (S),

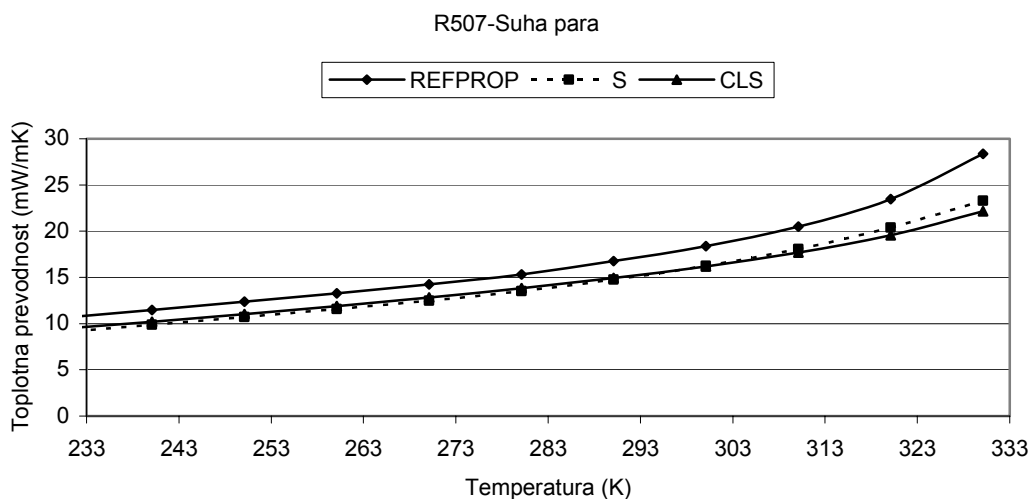
ki proizvaja omenjeno snov R507. Sliki 1 in 2 prikazujeta temperaturni potek odvisnosti kinematične viskoznosti v področju vrele kapljevine in suhe pare. Slika 3 prikazuje primerjavo toplotne prevodnosti v področju suhe pare. Tabela 1 pa prikazuje primerjavo za hitrost zvoka med modeli, ki so dobljeni s pomočjo klasične termomehanike (Tillner-Roth-Wagner-Watanabe (TRWW), Jacobsen-Lemmon (JL)) ter opisanim modelom, ki je izdelan na osnovi statistične mehanike. (JZG-LG). Vsi predstavljeni rezultati kažejo na zelo dobro ujemanje med modeli, ki so dobljeni na osnovi izmerjenih rezultatov ter modeli, ki so bili izdelani na osnovi statistične ravnotežne in neravnotežne mehanike.



Slika 1: Kinematična viskoznost v področju vrele kaljevine za R 507A



Slika 2: Kinematična viskoznost za R507A v področju suhe pare



Slika 3: Toplotna prevodnost za R 507A v področju suhe pare

Tabela 1: Hitrost zvoka za R 507A v področju suhe pare

T (K)	c_0 (m/s)		
	S	REFPROP	JZG-LG
315.1	121.9	122.5	124.3
317.1	120.3	121	122.5
319.1	118.7	119.5	120.6
321.1	117	117.9	118.5
323.1	115.1	116.2	116.2
325.1	113.3	114.5	113.8
327.1	111.3	112.6	111.2
329.1	109.3	110.7	108.4

Literatura

- [1] AVSEC, Jurij, MARČIČ, Milan, LEIPERTZ, Alfred, FRÖBA, Andreas Paul. Velocity of sound of binary mixture R507 and ternary mixture R404A. *J. thermophys. heat transf.*, Jul./Sept. 2003, vol. 17, no. 3, pp. 334-339.
- [2] AVSEC, Jurij. Calculation of equilibrium and nonequilibrium thermophysical properties by means of statistical mechanics. *J. Tech. Phys.*, 2003, vol. 44, no. 2, pp. 163-179.
- [3] AVSEC, Jurij. Calculation of transport coefficients of R-32 and R-125 with the methods of statistical thermodynamics and kinetic theories of gas, *Archives of thermodynamics*, 2003, vol. 24, no.3, pp. 69-82.



Kotaljenje diska po horizontalni ravnini

M. Batista¹

A Disk Rolling on a Horizontal Plane

Povzetek. V prispevku so podane enačbe, ki popisujejo kotaljenje togega diska po horizontalni ravnini. Posebej sta obdelana primera kotaljenja diska, ko ni podrsavanja, in, ko pride do podrsavanja. Prikazan je rezultat simulacije gibanja diska.

Abstract. In this paper the equations of the rolling of a rigid disk in a horizontal plane are given. Two cases are discussed in detail: the case without sliding and the case when sliding occurs. The results of motion simulations are also shown.

1 Uvod

Kotaljenje togega tankega diska (kovanca) in obroča sta za primer, ko je podlaga tako hrapava, da ne pride do podrsavanja že leta 1899 rešila Appel in Kortweg ([1],[5]). Problem je postal klasičen primer neholonomnega sistema in ga najdemo v različnih starejših in novejših učbenikih dinamike togega telesa ([1],[5],[7],[9],[11],[12],[13],[14]).

Proti koncu 80-tih let se je na tržišču pojavila igrača imenovana Eulerjev disk, katere avtor je J.Bendik ([2]), pravo majhno revolucijo pa je leta 2000 povzročil članek H.Moffatta ([8]), v katerem je avtor ustavljanje diska pripisal zračnemu uporu ([4],[6],[10]).

V tem prispevku bomo sledili obravnavi gibanja diska kot jo podajata P.Kessler in O. M. O'Reilly ([4]), saj je to, kot nam je znano, do sedaj edina obravnava, ki upošteva končno debelino diska. Razlika med njuno in obravnavo v tem članku je, da v enačbah upoštevamo zaokrožitev robov diska.

2 Osnovne enačbe

Obravnavamo homogen, tog, rotacijsko simetričen disk mase m , polmera R , z polmerom zaokrožitve ρ in višine $L = 2H$ (slika 1).

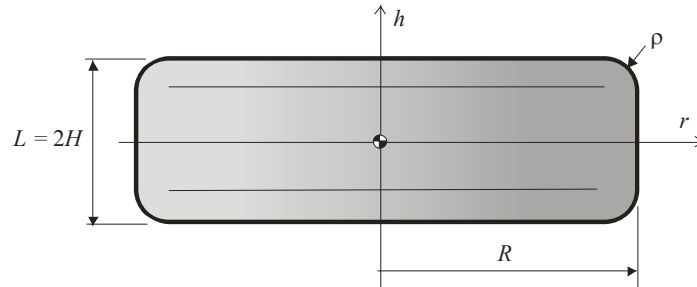
¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

Parametrični enačbi, ki popisujeta obliko profila diska sta

$$h = \hat{h}(\theta) = \begin{cases} -H + \rho(1 + \sin \theta) & -\pi/2 \leq \theta < 0 \\ H - \rho(1 - \sin \theta) & 0 < \theta \leq \pi/2 \end{cases} \quad (1)$$

$$r = \hat{r}(\theta) = \begin{cases} R - \rho(1 - \cos \theta) & -\pi/2 \leq \theta < 0 \\ R & \theta = 0 \\ R - \rho(1 - \cos \theta) & 0 < \theta \leq \pi/2 \end{cases} \quad (2)$$

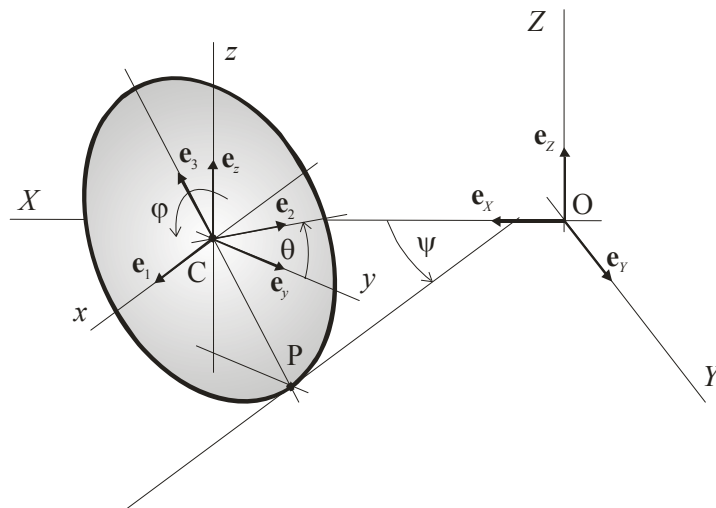
pri čemer je θ kot normale na profil ([11]).



Slika 1. Geometrija diska

2.1 Kinematika

Za opis gibanja diska uvedemo tri pravokotne desnosučne kartezične koordinate sisteme ([4],[5],[7]). Prvi je prostorski, nepremični sistem S_0 z izhodiščem v točki O, koordinatnimi osmi (X, Y, Z) in bazo $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, drugi je premični sistem S_1 z izhodiščem v masnem središču diska C, koordinatnimi osmi (x, y, z) in bazo $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, tretji pa premični sistem S_2 , z izhodiščem v masnem središču diska C, koordinatnimi osmi (x_1, x_2, x_3) in bazo $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ (slika 2).



Slika 2. Lega in orientacija diska. Zaradi nazornosti je prikazan tanek disk.

Ravnina po kateri se kotili disk naj bo ravnina (X, Y) , njena normala pa naj bo \hat{e}_z . Sistem S_1 se giblje vzporedno tej ravnini. Zveza med baznimi vektorji koordinatnega sistema S_0 in S_1 je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Zveza med med baznimi vektorji sistema S_2 in S_1 ter S_0 pa je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Vektor lege masnega središča izrazimo glede na prostorski sistem S_0

$$\mathbf{R}_C = X_C \hat{e}_X + Y_C \hat{e}_Y + Z_C \hat{e}_Z. \quad (5)$$

Hitrost masnega središča je glede na S_0 in S_1

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{R}_C}{dt} = \frac{dX_C}{dt} \hat{e}_X + \frac{dY_C}{dt} \hat{e}_Y + \frac{dZ_C}{dt} \hat{e}_Z = v_{Cx} \hat{e}_X + v_{Cy} \hat{e}_Y + v_{Cz} \hat{e}_Z. \quad (6)$$

Če v (6) upoštevamo zvezo (3) dobimo tri diferencialne enačbe za izračun koordinat lege masnega središča diska

$$\boxed{\frac{dX_C}{dt} = v_{Cx} \cos \psi - v_{Cy} \sin \psi \quad \frac{dY_C}{dt} = v_{Cx} \sin \psi + v_{Cy} \cos \psi \quad \frac{dZ_C}{dt} = v_{Cz}}. \quad (7)$$

Naj bo φ zasuk telesnega koordinatnega sistema glede na S_2 . Vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ lahko izrazimo na naslednji način (npr. [4])

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\psi}{dt} \hat{e}_Z + \frac{d\theta}{dt} \hat{e}_x + \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_2 = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3. \quad (8)$$

Če v (8) upoštevamo (4) dobimo tri enačbe za koordinate kotne hitrosti v sistemu S_2 . Iz teh enačb dobimo tri diferencialne enačbe za izračun kotov

$$\boxed{\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_3}{\cos \theta} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_1 \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_2 - \tan \theta \omega_3}. \quad (9)$$

Legi delca diska, ki se v danem trenutku nahaja v dotikališču diska in ravnine, je podana z vektorjem

$$\mathbf{R}_P = X_P \hat{e}_X + Y_P \hat{e}_Y + Z_P \hat{e}_Z = \mathbf{R}_C + \mathbf{r}_P. \quad (10)$$

pri čemer je \mathbf{r}_P vektor, ki podaja lego dotikališa glede na točko C. Iz slike 3 razberemo zvezo

$$\mathbf{r}_P = -h_P \hat{e}_2 - r_P \hat{e}_3 = y_P \hat{e}_y + z_P \hat{e}_z. \quad (11)$$

Z upoštevanjem (4) dobimo koordinate P izražene v sistemu S_2

$$y_P = -h_P \cos \theta + r_P \sin \theta \quad z_P = -h_P \sin \theta - r_P \cos \theta. \quad (12)$$

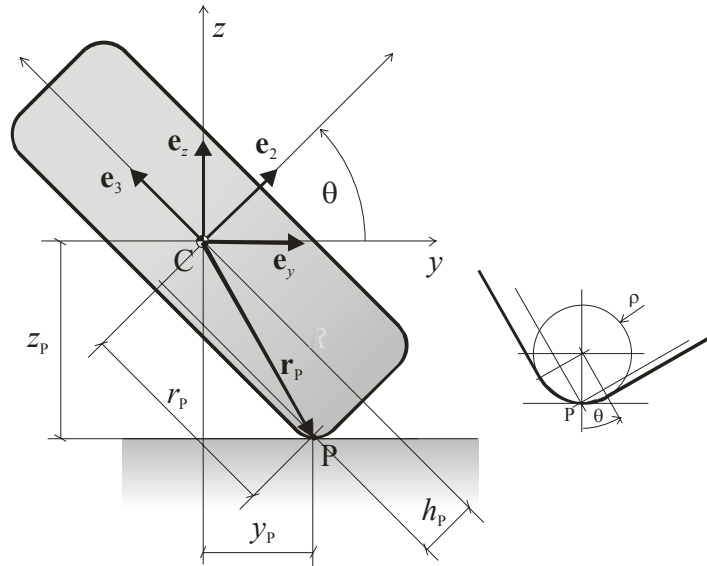


Figure 3. Lega dotikalne točke.

Če vstavimo (5) in (11) v (10), dobimo koordinate dotikališča izražene glede na prostorski sistem

$$X_P = X_C - y_P \sin \psi \quad Y_P = Y_C + y_P \cos \psi \quad \underline{\underline{Z_P = Z_C + z_P = 0}}. \quad (13)$$

Hitrost delca diska, ki je v dotiku z ravnino, je po Eulerjevi formuli

$$\mathbf{v}_P = v_{Px} \hat{\mathbf{e}}_x + v_{Py} \hat{\mathbf{e}}_y + v_{Pz} \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P. \quad (14)$$

Če upoštevamo (6), (8) in (11) dobimo koordinate te hitrosti izražene v sistemu S_1

$$v_{Px} = v_{Cx} - r_P \omega_2 + h_P \omega_3 \quad v_{Py} = v_{Cy} - \omega_1 z_P \quad \underline{\underline{v_{Pz} = v_{Cz} + \omega_1 y_P = 0}}. \quad (15)$$

Opomba. V primeru $\theta = 0$, sistema S_1 in S_2 sovpadata, dotik med diskom in ravnino po poteka po daljici na obodu diska. V tem stanju obstajajo tri možnosti. Kot prvo možnost navedimo čisto rotacijo diska okoli osi z . V tem primeru sta $\mathbf{v}_C = \mathbf{0}$ in $\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt} = 0$. Druga

možnost je kotaljenje diska, pri katerem je $\omega_3 = \frac{d\psi}{dt} = 0$. Kot tretja pa obstaja možnost, da je v primeru $\theta = 0$ disk v prehodnem stanju. V tem primeru opis gibanja diska poenostavimo tako, da vzamemo za stik med diskom in ravnino točko $\mathbf{r}_P = -R \hat{\mathbf{e}}_3$.

2.3 Gibalne enačbe

Eulerjevi enačbi, ki opisujeta dinamiko gibanja diska, sta (npr. [14])

$$m \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = -mg \mathbf{e}_z + \mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} + \mathbf{M}, \quad (16)$$

pri čemer so g gravitacijski pospešek, $\mathbf{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z$ sila podlage, \mathbf{M} moment podlage in \mathbf{L} vrtilna količina. Ta se glede na masno središče diska lahko izrazi kot

$$\mathbf{L} = mk_1^2 (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_3 \hat{e}_3) + mk_2^2 \omega_2 \hat{e}_2, \quad (17)$$

kjer sta k_1 in k_2 glavna vztrajnostna polmera diska.

Komponenta sile podlage $F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y$ leži na ravnini, po kateri se kotili disk. Omejena je s pogojem

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \leq \mu_s F_z, \quad (18)$$

pri čemer je μ_s statični koeficient trenja. Če je pogoj (18) izpolnjen, se disk kotili brez podrsavanja. Če pogoj ni izpolnjen, disk podrsava. V tem primeru sta komponenti reakcijske sile izraženi s Coulombovim zakonom

$$F_x = \mu_x F_z \quad F_y = \mu_y F_z, \quad (19)$$

pri čemer sta

$$\mu_x = -\mu_d \frac{v_{px}}{\sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2}} \quad \mu_y = -\mu_d \frac{v_{py}}{\sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2}}, \quad (20)$$

μ_d pa je dinamični koeficient trenja.

Moment podlage \mathbf{M} lahko razstavimo na vrtilni moment, ki je pravokoten na ravnino, in kotalni moment, ki je ravnini vzporeden. Po analogiji s Coulombovim zakonom drsnega trenja sta Kessler in O'Reilly ([4]) predpostavila, da so komponente momenta podlage v sistemu S_1

$$M_x = \kappa_x F_z \quad M_y = \kappa_y F_z \quad M_z = \kappa_z F_z, \quad (21)$$

pri čemer so

$$\kappa_x = -\mu_x \frac{\omega_x}{|\omega_x|} \quad \kappa_y = -\mu_y \frac{\omega_y}{|\omega_y|} \quad \kappa_z = -\mu_z \frac{\omega_z}{|\omega_z|}. \quad (22)$$

Prvo izmed enačb (16) izrazimo v sistemu S_1

$$\boxed{\frac{dv_{Cx}}{dt} = \frac{v_{Cy} \omega_3}{\cos \theta} + f_x \quad \frac{dv_{Cy}}{dt} = -\frac{v_{Cx} \omega_3}{\cos \theta} + f_y \quad \frac{dv_{Cz}}{dt} = -g + f_z} \quad (23)$$

pri čemer smo označili $f_x = F_x/m$, $f_y = F_y/m$ in $f_z = F_z/m$. Če v drugi enačbi (16) upoštevamo (21) in jo izrazimo v sistemu S_2 , dobimo

$$\boxed{\begin{aligned} k_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} &= (k_2^2 \omega_2 - k_1^2 \tan \theta \omega_3) \omega_3 - z_p f_y + (y_p + \kappa_1) f_z \\ k_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} &= -r_p f_x + \kappa_2 f_z \\ k_1^2 \frac{d\omega_3}{dt} &= (k_1^2 \tan \theta \omega_3 - k_2^2 \omega_2) \omega_1 + h_p f_x + \kappa_3 f_z, \end{aligned}} \quad (24)$$

pri čemer so $\kappa_1 = \kappa_x$ $\kappa_2 = \kappa_y \cos \theta + \kappa_z \sin \theta$ $\kappa_3 = -\kappa_y \sin \theta + \kappa_z \cos \theta$. (25)

3 Reševanje

Sistem enačb (7), (9), (23) in (24) je sistem 12 navadnih diferencialnih enačb prvega reda v katerem nastopa 15 neznanke

$$X_C, Y_C, Z_C, \psi, \theta, \varphi, v_{Cx}, v_{Cy}, v_{Cz}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, F_x, F_y, F_z.$$

Iz dodatnih pogojev dobimo še tri manjkajoče enačbe.

3.1 Kotaljenje brez podrsavanja

V primeru kotaljenja brez podrsavanja je hitrost točke diska, ki je v trenutnem dotiku z ravnino enaka nič. V tem primeru lahko iz (15) lahko izrazimo komponente hitrosti masnega središča

$$\boxed{v_{Cx} = r_p \omega_2 - h_p \omega_3 \quad v_{Cy} = \omega_1 z_p \quad v_{Cz} = -\omega_1 y_p.} \quad (26)$$

Če (26) vstavimo v (23) in upoštevamo (24), dobimo neznanne komponente reakcijske sile

$$\boxed{\begin{aligned} f_z &= \frac{-y_p A \omega_3 + y_p z_p b_2 + (k_1^2 + z_p^2) b_3}{k_1^2 + y_p^2 + z_p^2 + \kappa_1 y_p} \\ f_y &= \frac{k_1^2 b_2 + z_p [A \omega_3 + (y_p + \kappa_1)] f_z}{k_1^2 + z_p^2} \\ f_x &= \frac{k_2^2 (k_1^2 b_1 + h_p A \omega_1) + (r_p \kappa_2 k_1^2 - h_p \kappa_3 k_2^2) f_z}{k_1^2 (k_2^2 + r_p^2) + k_2^2 h_p^2} \end{aligned}} \quad (27)$$

kjer so

$$\begin{aligned} A &= k_2^2 \omega_2 - k_1^2 \tan \theta \omega_3, & b_1 &= \omega_1 \left[\omega_2 \frac{dr_p}{d\theta} - \omega_3 \left(\frac{dh_p}{d\theta} + \frac{z_p}{\cos \theta} \right) \right] \\ b_2 &= \omega_1^2 y_p + \frac{\omega_3 (r_p \omega_2 - h_p \omega_3)}{\cos \theta}, & b_3 &= g - \omega_1^2 \frac{dy_p}{d\theta} \end{aligned} \quad (28)$$

Pri numerični integraciji enačb moramo na koncu vsakega integracijskega koraka preveriti pogoj (18). Če ta pogoj ni izpolnjen, imamo prehod med kotaljenjem brez v kotaljenje s podrsavanjem. Z interpolacijo v tem primeru določimo čas v katerem je v katerem je $\sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \mu_s f_z$. Od tako izračunanega časa nadaljujemo z integracijo enačb, ki popisujejo kotaljenje s podrsavanjem.

3.2 Kotaljenje s podrsavanjem

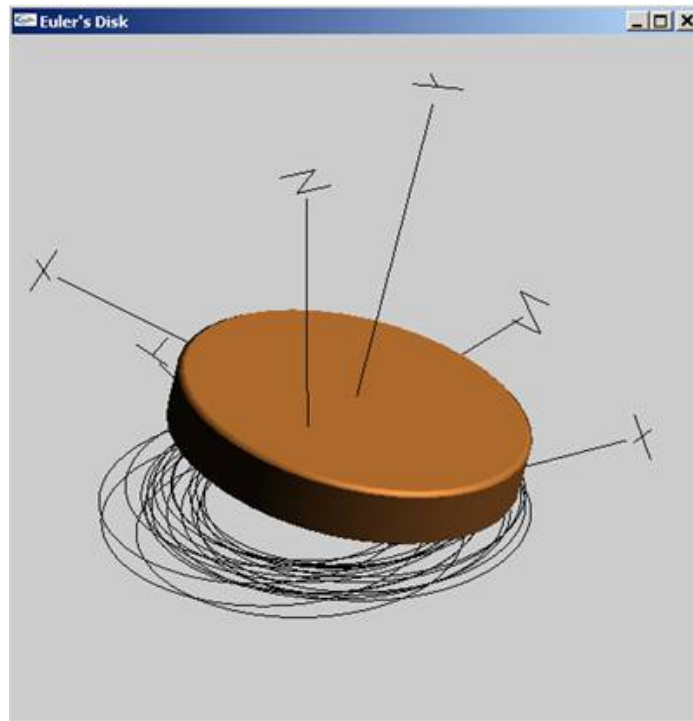
V primeru podrsavanja izhajamo iz pogoja, da je vertikalna komponenta hitrosti delca v dotikališču diska in ravnine enaka nič. Iz tretje izmed enačb (23) in prve izmed enačb (24) dobimo z upoštevanjem $v_{Cz} = -\omega_1 y_p$ in $f_y = -\mu_y f_z$ izraz za vertikalno komponento sile podlage

$$f_z = \frac{k_1^2 \left(g - \omega_1^2 \frac{dy_p}{d\theta} \right) - y_p \omega_3 (k_2^2 \omega_2 - k_1^2 \tan \theta \omega_3)}{k_1^2 + y_p (y_p + \kappa_1 - z_p \mu_y)} \quad (29)$$

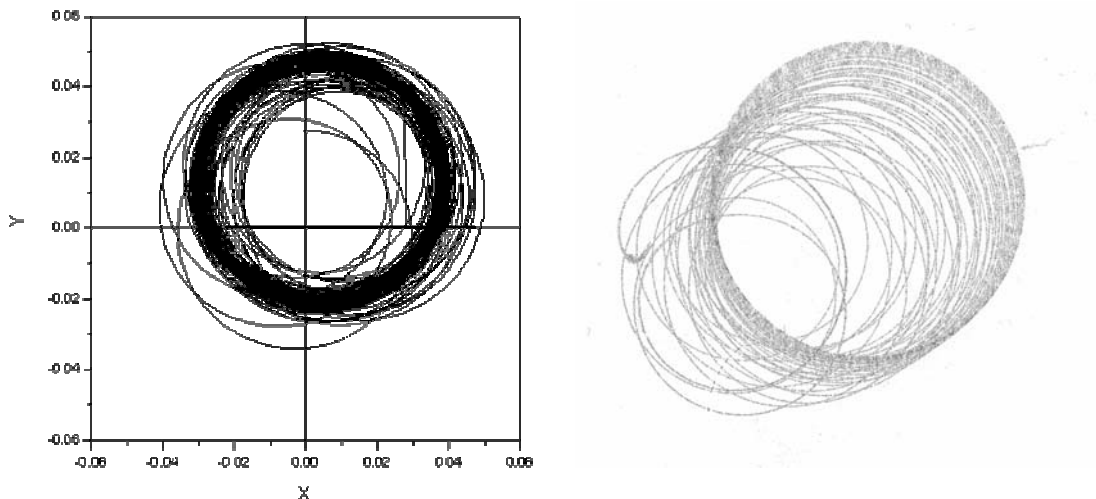
Ko izračunamo f_z , lahko iz (19) izračunamo ostali komponenti sile podlage. Na ta način je sila podlage v celoti določena. Ostale neznake dobimo z integracijo preostalih enačb (7), (9), (23) in (24).

3.3 Implementacija

Na osnovi podanih enačb smo izdelali računalniški program v programskih jezikih Fortran77 in Fortran90, ki izvede simulacijo kotaljenja diska po ravnini. Kot podprograma za integracijo enačb smo izbrali podprograma DOPRI5 and DOP853 ([3]). Za podatke, ki jih navajata Kessler in O'Reilly ([4]), je CPU čas integracije s podprogramom DOPRI5 in natančnostjo RelTol = AbsTol=1.0e-5 približno 1.6 sec na osebni računalniku z OS Windows 2000 in hitrostjo procesorja 1.6 GHz. Podprogram vključuje tabelarni izpis neznank kot tudi animacijo gibanja diska, ki je bila izdelana z uporabo OpenGL knjižnice (slika 4). Program je prosto dostopen na internetnem naslovu <http://www.fpp.edu/~milanb/euler/>.



Slika 4. Animacija gibanja diska po ravnini



Slika 5. Rezultati izračuna, ki prikazujejo pot gibanja dotikalne točke po ravnini (levo), in indigo odtis dejanskega gibanja diska (desno).

Zahvala

Posebno zahvalo za nastanek tega delo izrekam prof.dr.Miranu Sajetu, ki mi je problem pokazal, pri reševanju pa mi je pojasnil in razjasnil marsikateri pojem.

Literatura

- [1] P.Appel. *Traite de Mecanique Rationnelle, Tom II*, Gauthier-Villars,Paris,1931,250-255
- [2] www.eulersdisk.com/pubs.html
- [3] E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer-Verlag, 1993
- [4] P.Kessler, O.M.O'Reilly. *The Ringing of Euler's Disk*. Reg.Chaot.Dyn. 7(1), 2002, 49-60
- [5] W.D.MacMillan. *Dynamics of Rigid Bodies*, McGraw-Hill, 1936,pp 276-281
- [6] A.McDonald, K.McDonald. *The Rolling Motion of a Disk on a Horizontal Plane*, <http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/rollingdisk.pdf>
- [7] E.A.Milne. *Theoretical Merchanics*, Interscience Publisher, New York, 1948, 338-342
- [8] H.K.Moffatt. *Euler's disk and its finite-time singularity*. Nature 404, 2000, 833-834
- [9] L.A.Pars. *Treatise on Analytical Dynamics*, Ox Bow Press, Woodbridge, 1979 (1965) 120-122,214-215
- [10] A.Ruina. *Comment on Moffat's Disk*, <http://tam.cornell.edu/~ruina/>
- [11] E.J.Routh. *Advanced Part of a Trearise on theDynamics of a System of Rigid Bodies*, MacMillan, 1905, pp 186-207 (<http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/>)
- [12] M.Saje. *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini*. 1.del, www.km.fgg.uni-lj.si/Predmeti/KiD/KD.htm
- [13] J.L.Synge , B.A.Griffith. *Principles of Mechanics*, McGraw Hill, 1959,402-405
- [14] W.T.Thomson. *Introduction to Space Dynamics*, Dover, 1986 (1961), 149-154



Termoelastične deformacije bimetalnih rotacijskih lupin

M. Batista¹ in F. Kosel²

Thermoelastic Deformations of Bimetallic Shells of Revolution

Povzetek. V prispevku so podane osnovne enačbe za obravnavo termoelastičnih deformacij bimetalnih rotacijske lupine. Poleg osnovnih enačb, ki temeljijo na teoriji končnih deformacij je opisan postopek njihovega reševanja. Kot primer je obravnavana plitka krogelna lupina, za ketro je po analitični poti določena temperatura preskoka. Podana je primerjava izračunanih vrednosti sil po analitičnem in numeričnem postopku.

Abstract. In the paper the basic equations of the thermoelastic strain of a bimetallic rotating, axisymmetric shallow shells are expressed. Besides these basic equations, which take into account the theory of large displacements, the process of their solutions are also described. For the shallow bimetal ball shell the analytical solution is done for the critical temperature at which the snap thru appears. The comparison between the results of analytical and numerical solutions is made. The agreement of the results is very good.

1 Uvod

Prvi je formulo, ki povezuje spremembo ukrivljenosti bimetalnega traku z mehanskimi in termičnimi lastnostmi komponent sredi 19. stoletja izpeljal francoski astronom Y.Villarceau. Kasneje (1925) je problem stabilnosti bimetalnih trakov in bimetalnih plošč pri različnih zunanjih obremenitvah in vpetjih obravnaval S.Timošenko ([5],[11]). W.H.Wittrick (1953) je podal analitično rešitev problema stabilnost bimetalnega diska pri segrevanju ([12]). B:Aggarwala in E.Saibel (1968) sta obravnavala stabilnost plitke krogelne lupine. Ugotovila sta, da preskok lupine ni možen, če je rob lupine togo vpet ([1]). Liu Ren-Huai (1983) je obravnaval stabilnost odprtih plitkih bimetalnih lupin ([9]). F.Kosel in R.Drole (1988) sta analizirala lastnosti sferičnega bimetalnega elementa. Rezultate teoretičnih rešitev sta podprla s poskusi ([6],[7]).

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Namen tega prispevka je podati osnovne enačbe, ki popisujejo termoelastično deformacijo bimetalnih rotacijskih lupin in načine njihovega reševanja. Enačbe temeljijo na teoriji končnih deformacij, pri čemer strižne deformacije niso upoštevane. Končni cilj raziskave je razviti numerični postopek za določitev ravnotežnih oblik bimetalne lupine, prav tako pa postopek določanja kritične temperature pri kateri pride do preskoka lupine.

2 Oznake

D	$= \frac{h^3 E}{12(1-\mu^2)}$ upogibna togost lupine
F_r, F_z	komponenti meridialne sile v smeri koordinatnih osi r in z
h	debelina lupine
E	modul elastičnosti
K	$= \frac{hE}{1-\mu^2}$ membranska togost lupine
M_1, M_2	upogibna momenta v meridialni in cirkularni smeri
N_1	$= F_r \cos \psi^+ + F_z \sin \psi^+$ natezna sila v meridialni smeri
N_2	natezna sila v cirkularni smeri
Q	$= -F_r \sin \psi^+ + F_z \cos \psi^+$ strižna sila
(r, ϕ, z)	cilindrične koordinate nedeformirane ploskve
(r^+, ϕ, z^+)	cilindrične koordinate deformirane ploskve
R_1	polmer ukrivljenosti ploskve v meridialni smeri
α	$= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ srednja linearna temperaturna razteznost bimetalala
$\Delta\alpha$	$= \alpha_1 - \alpha_2$ razlika temperaturnih razteznosti bimetalala
ε_1	natezna deformacija v meridialni smeri
ε_2	$= \frac{r^+ - r}{r}$ natezna deformacija v cirkularni smer
κ_1	upogibna deformacija v meridialni smeri
κ_2	$= \frac{\sin \psi^+ - \sin \psi}{r}$ upogibna deformacija v cirkularni smeri
μ	Poissonovo število
\mathcal{G}	temperaturna razlika
ψ, ψ^+	kot med simetrijsko osjo in normalo nedeformirane in deformirane lupine

Vse sile in momenti so izraženi na enoto dolžine nedeformirane lupine.

3 Temeljne enačbe

Obravnavamo bimetalno rotacijsko lupino konstantne debeline, ki se nahaja v izotermnem stanju. Referenčna ploskev lupine naj se nahaja na sredini debeline lupine in naj nastane z rotacijo odsekoma gladke Jordanove krivulje

$$z = f(r), \quad r \in [r_1, r_2] \quad (1)$$

okoli koordinatne osi z . V tem primeru je kot normale na ploskev podan z enačbo

$$\tan \psi = \frac{dz}{dr} = f'(r) \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \quad \sin \psi = \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \quad (2)$$

glavni ukrivljenosti ploskve pa sta

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\psi}{ds} = \cos \psi \frac{d\psi}{dr} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \psi}{r} \quad (3)$$

Če zanemarimo strižne deformacije potem obliko deformirane lupine popisujejo naslednje enačbe ([2],[4]):

$$\frac{dz^+}{dr} = (1 + \varepsilon_1) \frac{\sin \psi^+}{\cos \psi} \quad \frac{dr^+}{dr} = (1 + \varepsilon_1) \frac{\cos \psi^+}{\cos \psi} \quad \frac{d\psi^+}{dr} = \left(\kappa_1 + \frac{1}{R_1} \right) \cos^{-1} \psi \quad (4)$$

Ravnotežne enačbe elementa lupine podajajo zvezo med notranjimi silami in momenti ter zunanjo obremenitvijo. V primeru, da na lupino ne delujejo zunanje sile, velja za celotno lupino $F_z = 0$, preostali ravnotežni enačbi pa sta ([2],[4])

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(rF_r)}{dr} - \frac{N_2}{\cos \psi} &= 0 \\ \frac{d(rM_1)}{dr} - M_2 \frac{\cos \psi^+}{\cos \psi} + (rQ)(1 + \varepsilon_1) \frac{\sin \psi^+}{\cos \psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

K navedenim enačbam je potrebno dodati še konstitutivne enačbe, ki povezujejo notranje sile in momente z deformacijami in temperaturo. V primeru elastičnega bimetala, ki se nahaja v homogenem temperaturnem polju in ga tvorita sloja enakih debelin, ki se razlikujeta le v temperaturni razteznosti so konstitutivne naslednje ([2],[4],[10])

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= K(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) - (1 + \mu)K\alpha\vartheta & N_2 &= K(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1) - (1 + \mu)K\alpha\vartheta \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \mu\kappa_2) + \frac{3}{2}D(1 + \mu)\frac{\Delta\alpha}{h}\vartheta & M_2 &= D(\kappa_2 + \mu\kappa_1) + \frac{3}{2}D(1 + \mu)\frac{\Delta\alpha}{h}\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

4 Reševanje

Iz (6) izrazimo deformaciji ε_1, κ_1 , silo N_2 in moment M_2 in dobljene izraze vstavimo v (4) in (5), ter upoštevamo definicije deformacij ε_2, κ_2 in zvezo med silo N_1 in F_r , dobimo sistem petih navadnih diferencialnih enačb prvega reda za pet neznanih funkcij $z^+, r^+, \psi^+, F_r, M_1$. Pri tem je potrebno pripomniti, da z^+ ne vpliva na deformacije, zato prva

enačba (4) ni notranje povezana z ostalimi štirimi. Ta enačba predstavlja dodatno enačbo, ki bi jo lahko reševali potem, ko bi izvedli integracijo preostalih štirih enačb.

Sistem enačb (4), (5) rešujemo skupaj z robnimi pogoji. V primeru enostavno povezane gladke osnosimetrične lupine morata biti v točki $r_1 = 0$ izpolnjena pogoja

$$N_1 = N_2 \quad M_1 = M_2 \quad (7)$$

Pogoji na zunanem robu lupine so odvisni od načina vpetja. Tako mora biti za

- prost rob $F_r(r_2) = M_1(r_2) = 0$
- vpet rob $r^+(r_2) - r_2 = 0 \quad \psi^+(r_2) - \psi(r_2) = 0$
- vrtljivo vpet rob $r^+(r_2) - r_2 = 0 \quad M_1(r_2) = 0$

V vseh primerih vpetja lahko izberemo pogoj $z^+(0) = 0$ za integracijo prve izmed enačb (4).

Matematično gledano predstavlja obravnavani problem dvotočkovni robni problem za sistem nelinearnih navadnih diferencialnih enačb prvega reda. Za reševanje se uporabljajo različne metode ([3]) kot so metoda streljanja, metoda končnih razlik, kolokacijska metoda in MKE. V nadaljevanju bomo za reševanje uporabili metodo streljanja. Po tej metodi so robne vrednosti iskanih funkcij na koncu integracijskega intervala funkcije začetnih vrednosti. Na ta način pa se reševanje dvotočkovnega robnega problema prevede na reševanje sistema nelinearnih enačb za neznane začetne vrednosti. Tako sta npr. za primer prostega roba robni vrednosti

$$F_r(r_2; F_{r,0}, M_{1,0}) = 0 \quad M_1(r_2; F_{r,0}, M_{1,0}) = 0 \quad (8)$$

funkciji neznanih začetnih vrednosti $F_r(0) = F_{r,0}$ in $M_1(0) = M_{1,0}$.

Dvotočkovni problem lahko rešimo za različne vrednosti temperature, temperaturo preskoka lupine pa lahko dobimo z zasledovanjem premika točk njenega roba. K temu dodajmo, da je rešitev enačb (4),(5) za primer $\mathcal{G} = 0$ ne glede na način vpetja roba $z^+ = z$, $r^+ = r$, $\psi^+ = \psi$ in $F_r = M_1 = 0$.

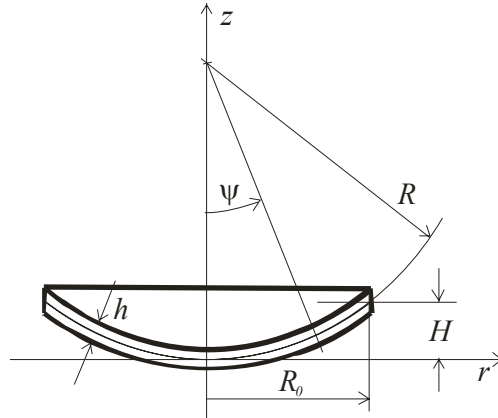
5 Primer krogelne lupine

Kot poseben primer vzamemo krogelno lupino (slika 1). Parametrične koordinate referenčne ploskve lupine so

$$r = R \sin \psi \quad z = R(1 - \cos \psi) \quad (9)$$

Polmer lupine R izračunamo iz tlorisnega polmera R_0 in višine H odseka krogle

$$R = \frac{R_0^2 + H^2}{2H} \quad (10)$$



Slika 1. Geometrija krogelne lupine

5.1 Analitična rešitev

Za testiranje numeričnih rešitev potrebujemo analitično rešitev. Zelo preprosto analitično rešitev dobimo tudi ob predpostavki, da se stanju lupina v celoti izravna. Tako stanje je labilno stanje lupine v katerem pride do preskoka. Za izravnano lupino velja

$$z^+(s) = \psi^+(s) = 0 \quad (11)$$

Na osnovi te predpostavke sta prečna sila in deformaciji

$$Q(s) = 0 \quad \kappa_1 = -\frac{1}{R} \quad \kappa_2 = \frac{-\sin \psi}{r} = -\frac{1}{R} \quad (12)$$

Iz konstitutivnih enačb(6) dobimo upogibna momenta

$$M_1 = M_2 = (1 + \mu)D \left(-\frac{1}{R} + \frac{3}{2} \frac{\Delta \alpha}{h} \mathcal{G} \right) \quad (13)$$

Če vzamemo, da je rob lupine prost ali pa vtrljivo vpet potem mora veljati $M_1 = 0$. Iz tega pogoja dobimo temperaturo pri kateri se lupina izravna

$$\mathcal{G}_* = \frac{2h}{3R\Delta\alpha} = \frac{4}{3\Delta\alpha} \frac{hH_0}{R_0^2 + H_0^2} \quad (14)$$

S pogoji (11), (12) in (13) sta izpolnjeni prva in tretja izmed enačb (4), in druga enačba (5). Preostali enačbi zapišem v obliki

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{1-\rho^2} \frac{d\rho^+}{d\rho} + \mu \frac{\rho^+}{\rho} &= \frac{\eta}{\rho} + (1+\mu)(1+\alpha\mathcal{G}) \\ \sqrt{1-\rho^2} \frac{d\eta}{d\rho} - \mu \frac{\eta}{\rho} &= (1-\mu^2) \frac{\rho^+}{\rho} - (1-\mu^2)(1+\alpha\mathcal{G}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

pri čemer so $\rho \equiv \frac{r}{R}$, $\rho^+ \equiv \frac{r^+}{R}$, $\eta \equiv \rho \frac{n_1}{K}$. Rešitev (15) poiščemo v obliki potenčnih vrst

$$\rho^+ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^{2k+1} \quad \eta = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \rho^{2k+1} \quad (16)$$

v kateri je upoštevan pogoj $\rho^+(0) = 0$. Če vstavimo (16) v (15) in izenačimo koeficiente pri enakih potencah ρ dobimo rekurzivni sistem linearnih algebrajčnih enačb iz katerih lahko zaporedoma izračunamo neznane koeficiente vrst (16). Rešitev tega sistema je

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= (1 + \mu)(a_0 - 1 - \alpha \mathcal{G}) \\ a_k &= - \frac{(2k + 1 - \mu) \sum_{n=0}^{k-1} (2n + 1) A_{k-n} a_n + \sum_{n=0}^{k-1} (2n + 1) A_{k-n} b_n}{4k(k + 1)} \\ b_k &= - \frac{(1 - \mu^2) \sum_{n=0}^{k-1} (2n + 1) A_{k-n} a_n + (2k + 1 + \mu) \sum_{n=0}^{k-1} (2n + 1) A_{k-n} b_n}{4k(k + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Neznano vrednost koeficienta a_0 določimo iz preostalega robnega pogoja. V primeru prostega roba je ta pogoj $\eta(\rho_0) = 0$, v primeru vpetega roba pa $\rho^+(\rho_0) = 0$, pri čemer je $\rho_0 = R_0/R$.

5.2 Numerična reševanje

Za numerično reševanje dvotočkovnega robnega problema smo uporabili prodprogram TWPBDV ([6]). Za generiranje kode, ki podaja Jacobijovo matriko sistema enačb in robnih pogojev smo uporabili program Maple. Vse izračune smo izvedli s toleranco $\text{tol} = 10^{-5}$, za vse neznanke. Zaradi numerične integracije smo robna pogoja (7) aproksimirali z izrazoma.

$$u(\varepsilon) - \frac{(rN_1)(\varepsilon)}{K(1 + \mu)} - \varepsilon \alpha \mathcal{G} = 0 \quad \sin \psi^+(\varepsilon) - \frac{(rM_1)(\varepsilon)}{D(1 + \mu)} - \sin \psi(\varepsilon) + \varepsilon \frac{3\Delta\alpha}{2h} \mathcal{G} = 0 \quad (18)$$

pri čemer je $u \equiv r^+ - r$. V izračunih smo vzeli vrednost $\varepsilon = 10 \times \text{epsilon}(1.0_8)$.

Podatki, ki smo jih uporabili pri izračunu so naslednji ([7])

$$R_0 = 8.475 \text{ mm}, \quad H = 0.37 \text{ mm}, \quad h = 0.25 \text{ mm}, \quad \Delta\alpha = 20.2667 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

S temi podatki dobimo $R = 97.247 \text{ mm}$, kritična sprememba temperature pa znaša $\mathcal{G}_* = 84.56507 \text{ C}^0$. Če primerjamo to vrednost z izmerjeno vrednostjo 82^0C ([7]) dobimo relativno napako 3.1%.

Za izračun notranjih sil in radialnega premika smo privzeli vrednosti $\mu = 0.3$ in $\alpha = 15.0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. V tabeli 1 je prikazana natančnost rešitve a_0 za prost in vrtljivo vpet rob

za različno število členov vrst. Iz tabele se vidi, da je bila natančnost na 9 decimalnih mest dosežena že z upoštevanjem 4 členov vrst (16).

Tabela 1. Natančnost a_0

Število členov	Prosti rob	Vrtljivo vpet rob
2	1.000 936 404	0.998 717 092
3	1.000 934 935	0.998 717 072
4	1.000 934 927	0.998 717 071
5	1.000 934 927	0.998 717 071

V tabeli 2 je prikazana primerjava rezultatov analitičnega in numeričnega izračuna notranjih sil v polu lupine in na njenem robu. V polu lupine je ujemanje rezultatov najmanj na 5 decimalnih mest, robni pogoj za N_1 se ujema na 7 decimalnih mest, slabše, le na 2 decimalni mesti, pa je ujemata analitični in numerični izračun N_2 .

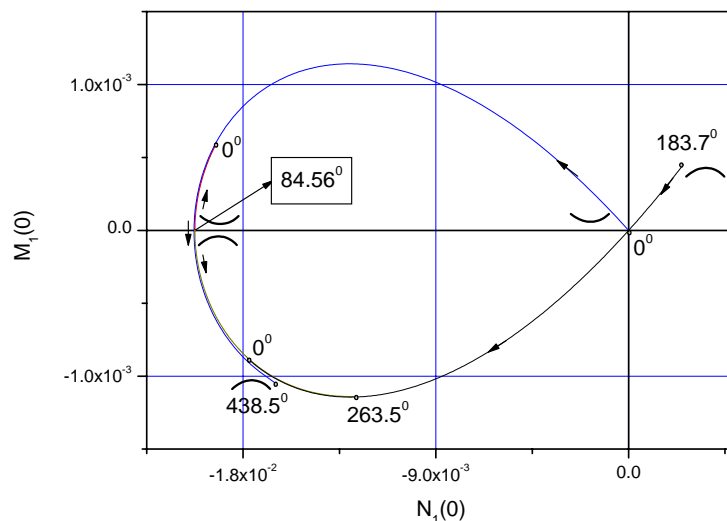
Tabela 2. Primerjava analitične in numerične rešitve

lega	sila	Prost rob		Vpet rob	
		analitično	numerično	analitično	numerično
središče	$N_1/K \times 10^{-3}$	-0.4336140	-0.4336152	-3.3168260	-3.3168258
	$N_2/K \times 10^{-3}$	-0.4336140	-0.4336152	-3.3168260	-3.3168258
rob	$N_1/K \times 10^{-3}$	0	0.0000000	-2.8887061	-2.8887061
	$N_2/K \times 10^{-3}$	0.8710968	0.8677810	-2.0286435	-2.0209250

6 Razprava

Numerični poskusi so pokazali, da dobimo hitro konvergenco rešitve pri različnih vrednostih \mathcal{G} . Pri tem se je izkazalo, da je ravnotežna oblika ali v celoti vbočena ali v celoti izbočena. Pri nobeni temperaturi v razponu od 0°C do 700°C nismo dobili lokalnega izbočenja središča lupine. Problem pa je nastal pri določanju temperature preskoka. To smo skušali določiti s počasnim višanjem temperature iz $\mathcal{G}=0$ pri tem smo zasledovali vrednosti z^+ na robu lupine ter odvisnost med izračunano vrednostjo $N_1(0)$ in $M_1(0)$. Izkazalo se je, da pride do preskoka lupine iz vbočene v izbočeno obliko pri temperaturi 438.5°C . Počasno 'segrevanje' torej 'zgrešili' preskok pri temperaturi 84.6°C . Nadaljni numerični poskusi so pokazali, da v diagramu $N_1(0)$ in $M_1(0)$ obstajajo vsaj 3 krivulje (slika 2). Poleg že omenjene obstaja še krivulja, ki jo dobimo z ohlajanjem oz. segrevanjem iz temperature 84.6°C in poteka skoraj vzporedno prvi krivulji.

Do prekinitve te krivulje pride pri temperaturi 263.5°C . Tretjo krivuljo dobim, če lupino ohlajamo iz temperature 183.7°C .



Slika 2. Graf odvisnosti vrednosti $N_1(0)$ in $M_1(0)$ za različne ϑ .

Literatura

- [1] B. D. Aggarwala, E. Saibel. *Thermal Stability of Bimetallic Shallow Spherical Shells*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol 5, 1, 49-62, 1970
- [2] S.S.Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer-Verlag. 343-370, 1995
- [3] U.M.Ascher, R.Mattheij, R.Russell. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. SIAM, 1995
- [4] V.L.Biderman, *Mehanika tonkostennih konstrukcij*, Mašinstrojenje, Moskva, 1977
- [5] B.Boley, J.Weiner. *Theory of Thermal Stresses*. Dover. 429-432, 1997
- [6] J.R.Cash, M.H.Wright. *Users's Guide for TWPBVP: A Code for Solving Two-Point Boundary Value Problems*. www.netlib.org
- [7] R.Drole. *Analiza stabilnosti plitkih dvoslojnih bimetalnih lupin, magistrski deli*, (Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, Magistrska dela, 705). Ljubljana, 1992
- [8] F.Kosel. R.Drole, *Analiza lastnosti sferičnega termobimetalnega elementa*. V: 18. jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike C - mehanika čvrstog deformabilnog tela : [zbornik radova]. Beograd: Jugoslovensko društvo za mehaniku, 1988, knj. C2, str. 45-48 (C2-12), 1988
- [9] Liu Ren-Huai, *Non-Linear Thermal Stability of Bimetallic Shallow Shells of Revolution*, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol 18, 5, 409-429,1983
- [10] W.Novacki. *Thermoelasticity*. Pergamon Press, Oxford, 1962
- [11]S.Timošeno. *Teorija elastične stabilnosti*. Naučna knjiga. Beograd, 193-195,1952
- [12]W.H.Wittrick. *Stability of Bimetalic Disk*. Quart. Mech. Appl. Math. Vol 6, 15-31, 1953



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2004

Statistični model krhkega loma nehomogenih materialov

B. Bezenšek¹, J. Flašker¹ in J.W. Hancock²

A statistical model for brittle fracture of functionally graded materials

Povzetek. V prispevku je predstavljen nov model za statistično vrednotenje krhkega loma v prisotnosti lokalno spremenljivih mehanskih lastnosti, kakršne se pojavijo v nehomogenih materialih. Poudarek modela je na določanju smeri širitve razpoke, ki je temeljnega pomena za ocenjevanje strukturne celovitosti realnih konstrukcij. Model temelji na Bereminovem lokalnem pristopu ter ga razširi s predpisom realnih fizikalnih vrednosti parametru σ_u v izrazu za kumulativno verjetnost. Prikazan je vpliv spremembe v lokalni trdnosti ali lomni žilavosti na najverjetnejšo smer širjenja razpoke v dvomaterialnem sistemu.

Abstract. A new model for statistical evaluation of brittle fracture in functionally graded materials is developed. The emphasis of the model is on the accurate determination of the crack propagation direction from a stationary pre-crack using the local approach framework. The approach stems from the weakest link description of fracture using the Beremin's "Weibull stress" model and correlates the constant σ_u in the expression for cumulative failure probability with measurable mechanical properties. Examples of the most likely crack propagation direction for a bi-material system containing strength or toughness gradients are discussed.

1 Uvod

Krhki lom predstavlja temeljni problem pri zagotovitvi strukturne celovitosti kovinskih konstrukcij. Problem je otežen s temperaturno odvisnostjo mehanskih lastnosti feritnih jekel, ki se izraža v žilavo-krhkem prehodnem področju in z naključno naravo krhkega loma. Temperaturna odvisnost mehanskih lastnosti vpliva na makroskopske parametre s katerimi se ovrednoti strukturna celovitost kot npr. K ali J-integral ob uporabi ustreznih predpisov (ASTM E813-88, ESIS P1-92). Težava pri uporabi makroskopskih parametrov je tudi njihova odvisnost od omejitve plastičnemu tečenju (ang. constraint), na katero vpliva materialna krivulja tečenja in vrsta ter velikost preizkušanca. V zmanjšanje težav povezanih z uporabo makroskopskega pristopa so se v minulih desetletjih razvili lokalni pristopi

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor

² University of Glasgow, Department of Mechanical Engineering, Glasgow, UK

(Beremin [1], Mudry [2]). Skupen cilj teh modelov je opis makroskopskega obnašanja konstrukcije na podlagi poznavanja lokalnih napetostnih polj in vrste lomnomehanskih procesov pred konico koncentradorja napetosti v materialu. Krhki lom je zaradi naključne porazdelitve najprimernejših delcev, ki služijo kot iniciatorji razpoke v napetostnem polju, neizbežno naključen. Pogosto se modelira z verjetnostnimi modeli, ki temeljijo na dveh predpostavkah:

- krhki lom je napetostno kontroliran proces, ki pa zahteva dovolj visok nivo lokalnih plastičnih deformacij, potrebnih za iniciacijo mikrorazpok;
- najšibkejši-člen-v-verigi pristop, kjer se celotno območje loma razdeli v karakteristična podobmočja in porušitev celotnega območja je predpostavljena v trenutku porušitve najšibkejšega podobmočja [3].

Nehomogeni materiali (ang. functionally graded materials) so zasnovani v zvezen prehod v lastnostih med posameznimi materiali v sistemu preko vmesnega območja. Delo na nehomogenih materialih se je predvsem osredotočalo na materiale z zveznimi prehodi v elastičnih mehanskih lastnostih, kakršne se pojavijo v keramičnih materialih in kovinskih kompozitih [4]. Statistično je največja populacija razpok v inženirskih strukturah v območju spoja, ki se pogosto ne ujema v mehanskih lastnostih z osnovnim materialom. Takšne razpoke pogosto vzorčijo širok razpon materialnih mikrostruktur s pripadajočimi mehanskimi lastnostmi. Osnovne značilnosti modeliranja krhkega loma v nehomogenih materialih so povezane z značilnostmi karakterističnimi za homogene materiale, vendar so dodatno otežene zaradi lokalne spremenljivosti v mehanskih lastnostih, ki vplivajo na vrednosti parametrov v lokalnih pristopih. Takšen primer je parameter σ_u v Bereminovem modelu. σ_u se lahko s precej zanesljivo določi na laboratorijskih preizkušnjah narejenih iz materiala z enotnimi mehanskimi lastnostmi [5], za določen material in pogoje obremenjevanja. Vendar pa ostaja poljubna konstantna za nehomogene materiale, saj so v letih vrednosti vrednotene preko območja spremenljivih mehanskih lastnosti, katerega velikost ostaja odvisna od obremenitve. Tako ostaja σ_u vrednosti odvisne od obremenitve in geometrije in posledično ni prenosljiva. Takšne pomanjkljivosti se lahko odstranijo s predpisom realnih materialnih lastnosti k parametru σ_u .

2 Bereminov “Weibull stress” model

V kontekstu statistične mehanike loma [6] se krhki lom modelira z uporabo metode najšibkejšega člena. Pri tem se celotno območje, v katerem lahko nastopi iniciacija razpoke (procesno območje), razdeli v podobmočja z volumnom V_0 dovoljšnje velikosti, da vsebujejo krhke delce, iz katerih lahko iniciira razpoka [7]. Za volumen V_0 , obremenjen z enakomerno napetostjo σ , lahko zapišemo kumulativno verjetnost P_0 , da se bo V_0 porušil pred napetostjo σ ali ob njej, z dvoparametrično Weibullovo porazdelitveno funkcijo:

$$P_0(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right] \quad (1)$$

kjer sta σ_u in m Weibullova parametra. Porušitev celotnega volumna V , sestavljenega iz V/V_0 segmentov in obremenjenega z napetostjo σ , je rezultat porušitve najšibkejšega V_0 znotraj V . Preživetje V zahteva preživetje vseh V/V_0 s kumulativno verjetnostjo:

$$P^{\text{survival}} = (1 - P_0)^{\frac{V}{V_0}} \quad (2)$$

iz česar sledi porušitev V ob napetosti σ ali pred njo kot:

$$P = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^m\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{\sigma_u}\right)^m\right] \quad (3)$$

ki se lahko zapiše tudi z Weibullovo napetostjo [1]:

$$\sigma_w = \int_V (\sigma_1)^m \frac{dV}{V_0} \quad (4)$$

izračunano preko procesnega območja; σ_1 predstavlja največjo glavno napetost.

V pogojih omejene plastifikacije v okolici konice razpoke (ang. contained yielding) so napetostna polja v homogenih materialih podobne oblike in sovpadajo na enotno krivuljo, kadar se napetosti normalizirajo z mejo plastičnosti ter oddaljenost od konice razpoke z deformacijskim parametrom J/σ_0 . Takšna napetostna polja je mogoče vrednotiti z brezdimenzijskim parametrom Ω , ki predstavlja normalizirano Weibullovo napetost [8]:

$$\sigma_w^m = J^2 \frac{B\sigma_0^{m-2}}{V_0} \int_0^{2\pi\bar{\rho}} \int_0^{\bar{\rho}} f^m \rho d\rho d\theta = J^2 \frac{B\sigma_0^{m-2}}{V_0} \Omega_{(n,m,\lambda,T/Q)} \quad (5)$$

kjer je σ_0 meja plastičnosti, J je J-integral in B debelina preizkušanca. ρ je brezdimenzijski radius procesnega območja ($\rho = r/(J/\sigma_0)$), f pa predstavlja funkcijo materialnih in mehanskih parametrov, ki opisujejo napetostno polje in povezuje glavne napetosti z mejo plastičnosti. Brezdimenzijski parameter Ω je odvisen od materiala (koeficienta deformacijskega utrjevanja n), geometrije (T/Q) in Weibullovih parametrov (λ, m) ter je neodvisen od deformacijskega parametra J/σ_0 , kar zagotavlja njegovo prenosljivost.

3 Lokalno spremenljiva trdnost in lomna žilavost v Bereminovem modelu

Bereminov "Weibull stress" model obravnava krhek lom v materialu z enotnimi mehanskimi lastnostmi in ne dopušča lokalnih sprememb v mehanskih lastnostih preko procesnega območja, kakršne nastopajo v nehomogenih materialih. Razširitev njihovega modela je predstavljena za primer povezave parametra σ_u s fizikalno relevantnimi lokalnimi spremenljivkami.

Povprečna trdnost volumna V_0 sledi iz:

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\infty} \sigma p_o(\sigma) d\sigma = \sigma_u \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (6)$$

kjer je

$$p_o(\sigma) = \frac{dP_o(\sigma)}{d\sigma} \quad (7)$$

in Γ je Gama funkcija. Fizikalna vrednost parametra σ_u se tako lahko poveže z merilom povprečne trdnostni volumna V_o :

$$\sigma_u = \frac{\bar{\sigma}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (8)$$

Enako lahko zapišemo za celoten volumen V , sestavljen iz V/V_o segmentov preko povezave enačb (5) in (8) v:

$$\sigma_u = \left[\frac{B}{V_o \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \int_V \sigma_{o(\xi,\zeta)}^{m-4} \bar{J}_{c(\xi,\zeta)}^2 E_{(\xi,\zeta)}^2 \Omega_{(\xi,\zeta)}^m dV \right]^{\frac{1}{m}} \quad (9)$$

kjer sta (ξ, ζ) splošni prostorski koordinati in V ponazarja volumen procesnega območja. Pri tem je uporabljena povezava med povprečno Weibullovo napetostjo $\bar{\sigma}_w$ in lomno žilavostjo, izraženo z J-integralom, \bar{J}_c , ki velja za trenutek porušitve. V enačbi (9) se lahko prostorsko spreminjajo trdnost, žilavost in togost, skupaj ali posamično. Parameter Ω postane prostorsko odvisen, kadar so spremembe mehanskih lastnosti preko procesnega območja pogojene s prostorsko spremembo v n , λ ali m .

V nehomogenih materialih σ_w ostaja obremenilni parameter. Vendar pa v nasprotju z homogenimi materiali je σ_u vzorčena preko procesnega območja in tako odvisna od obremenitve oz. J/σ_o . Kumulativna verjetnost loma nehomogenega materialnega sistema sledi z zamenjavo enačbe (9) v enačbo (3) kot:

$$P_f = 1 - \exp \left\{ - \int_V \left[\frac{\sigma_1^m}{\sigma_{o(\xi,\zeta)}^{m-4} \bar{J}_{c(\xi,\zeta)}^2 E_{(\xi,\zeta)}^2 \Omega_{(\xi,\zeta)}^m} dV \right] \frac{\Gamma^m\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{B} \right\} \quad (10)$$

Smeri širjena razpoke se določi po postopku, kjer se celotno procesno območje razdeli na podobmočja. Vsako podobmočje je določeno s kotom centralnosti θ , in kotnim obsegom $\Delta\theta$. Verjetnost, da je neko podobmočje vključeno v proces loma, je določeno s:

$$P_{\text{sect}} = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_w^{\text{sect}}(\theta, \Delta\theta)}{\sigma_u} \right)^m \right] \quad (11)$$

Verjetnostna porazdelitvena funkcija (pdf) $p(\theta)$ se lahko določi preko delitve P_{sect} s pripadajočim kotnim obsegom. Merilo povprečne smeri širjenja razpoke se določi preko izraza:

$$\bar{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta) d\theta \quad (12)$$

Za natezno obremenitev v homogenem materialu je povprečna smer širjenja razpoke neposredno naprej, torej pod kotom $\bar{\theta} = 0$.

3.1 Smer širjenja razpoke v prisotnosti lokalno spremenljive trdnost in lomne žilavosti

Dva izotropna telesa, označena z indeksoma 1 in 2, z enakimi elastičnimi lastnostmi in koeficientom deformacijskega utrjevanja izkazujeta lokalno spremenljivo trdnost ali lomno žilavost preko območja širine $2L$, kot prikazuje slika 1. Razpoka se nahaja v sredini območja z bokom vzporednim robu območja. Polarne in kartezijeve koordinate so centrirane v konici razpoke, kot prikazuje slika 1. Sprememba lokalne spremenljivke znotraj območja je opisana s splošno linearno funkcijo:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \psi^{(1)} & (y > L) \\ \psi(y) &= \left(\frac{\psi^{(1)} - \psi^{(2)}}{2L} \right) y + \left(\frac{\psi^{(1)} + \psi^{(2)}}{2} \right), & (-L \leq y \leq L) \\ \psi(y) &= \psi^{(2)}, & (y < -L) \end{aligned} \quad (13)$$

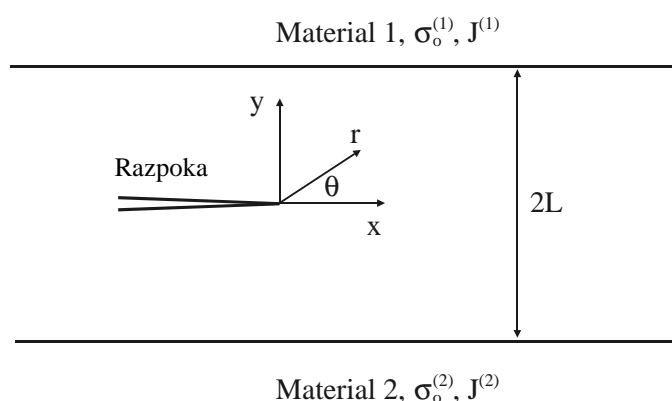
kjer $\{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}\}$ predstavljata vrednost lokalne spremenljivke (npr. trdnost ali lomna žilavost) za material (1) in (2).

Izračuni so bili izvedeni z uporabo "Boundary layer" formulacije, ki sta jo predstavila Rice in Tracey [9]. Metoda omogoča simuliranje napetostnih polj v okolici konice razpoke neodvisno od vpliva globalne geometrije, tako da se iz realne konstrukcije navidezno izreže domena z razpoko. Na rob domene se predpišejo robni pogoji v obliki kartezijevih pomikov oddaljenega elastičnega napetostnega polja, ki ustrezajo faktorju intenzitete napetosti izmerjenem na celotnem preizkušancu v pogojih omejenega plastičnega tečenja (ang. contained yielding). V okolici konice razpoke se razvije plastično območje, medtem ko glavnina modelirane domene ostaja elastična. Model je preprost za uporabo in pod pogoji omejenega plastičnega tečenja daje enake rezultate tistim, pridobljenim na realni geometriji obremenjeni do enakega faktorja intenzitete napetosti.

Material je linearno elastičen pod mejo plastičnosti σ_0 :

$$\sigma = Ee, \quad \sigma \leq \sigma_0 \quad (14a)$$

in opisan z eksponentno relacijo nad mejo plastičnosti:



Slika 1: Razpoka v območju spremenljivih mehanskih lastnosti

$$\frac{e}{e_o} = \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_o} \right)^n, \quad \sigma > \sigma_o \quad (14b)$$

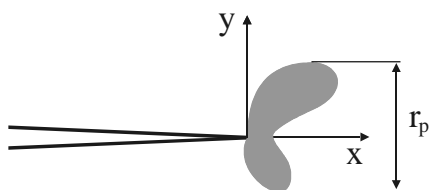
kjer je e_o deformacija, ki ustreza meji plastičnosti ($e_o = \sigma_o / E$) in α je materialna konstanta. Faktor deformacijskega utrjevanja n je bil v prikazanih izračunih 10. Lokalna sprememba v trdnosti je upoštevana v modelu preko navidezne spremenljivke - vozliščne temperature. Slednja omogoča fleksibilnost poljubne določitve lokalne meje plastičnosti in pripadajoče krivulje tečenja po celotni domeni modela. Izračuni so bili izvedeni z uporabo računskega programa ABAQUS v6.4-1.

4 Rezultati

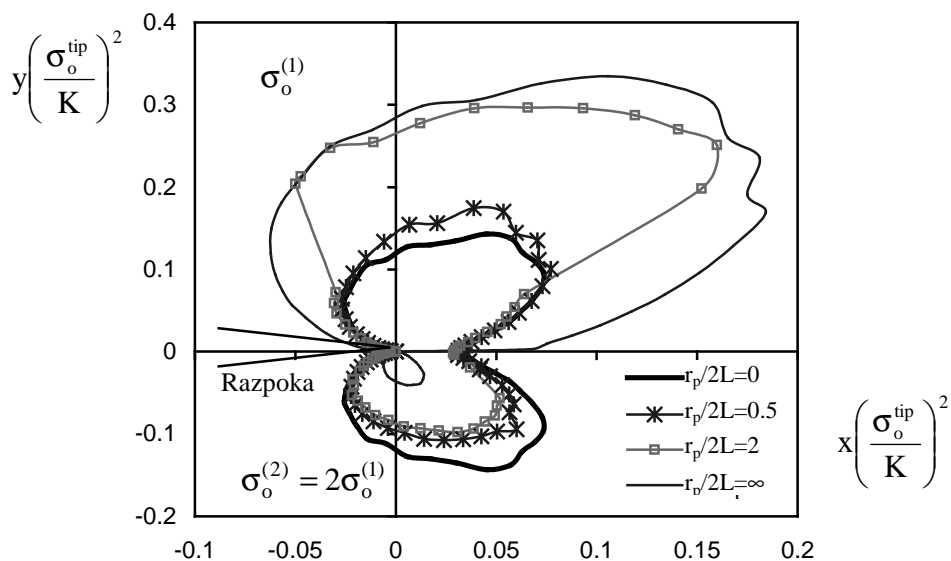
4.1 Oblike plastičnih območij

Oblike plastičnih območij so določene z uporabo numerične procedure, v kateri se je Von Misesova napetost primerjala z lokalno vrednostjo meje plastičnosti. Zaradi neenotnosti v mehanskih lastnostih je oblika plastičnega območja nesimetrična preko ravnine razpoke, navkljub globalni natezni obremenitvi. Koordinate plastičnega območja so normalizirane s parametrom obremenitve, $(K_I / \sigma_o^{tip})^2$, ki ima dimenzijo dolžine in σ_o^{tip} predstavlja mejo plastičnosti materiala, ki vsebuje konico razpoke. Oblike plastičnih območij za sistem z razliko v meji plastičnosti $\sigma_o^{(1)} / \sigma_o^{(2)} = 1/2$ so prikazane na sliki 3.

Če je obseg plastičnega območja majhen v primerjavi s širino območja spremenljivih mehanskih lastnosti ($r_p \ll 2L$), je sprememba v meji plastičnosti preko plastičnega območja zanemarljiva. Oblika plastičnega območja je podobna tisti v materialu enotnih mehanskih lastnosti pod enako obremenitvijo, kot prikazuje slika 3. Z večanjem razmerja $r_p / 2L$ postaja plastično območje nesimetrično in se širi v material nižje trdnosti. Ob znatno večji r_p v primerjavi z $2L$ postane plastično območje primerljivo tistemu v sistemu dveh materialov z ostrim prehodom v trdnosti med obema materialoma ($L=0$).



Slika 2: Prikaz definicije razsežnosti plastičnega območja, r_p .

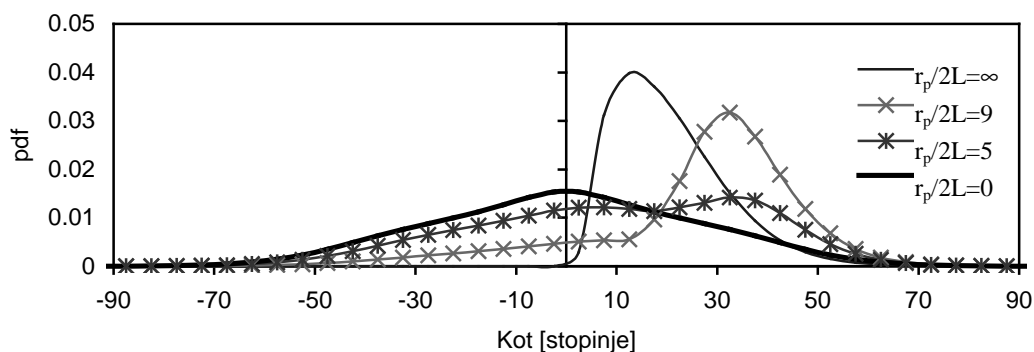


Slika 3: Prikaz oblik plastičnih območij za razpoko v območju spremenljive trdnosti.

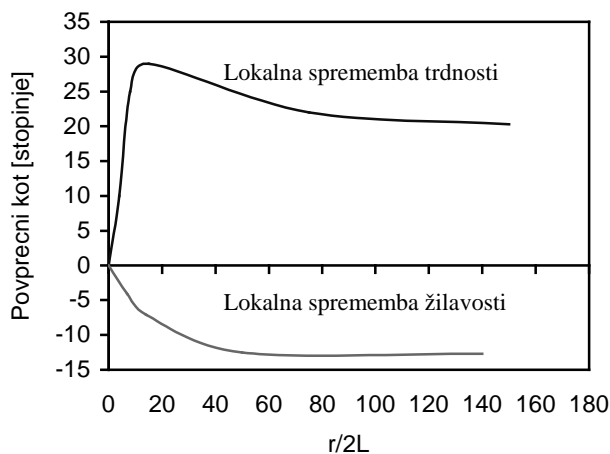
4.2 Pdf za lokalno spremembo v trdnosti in lomni žilavosti

Rezultati analiz sistemov z razliko v trdnosti $M=2$ ($\sigma_o^{(1)}/\sigma_o^{(2)}=1/2$) in enotne lomne žilavosti so prikazani na slikah 4 in 5. Funkcija pdf na sliki 4 prikazuje porazdelitev najverjetnejše smeri širjenja razpoke v odvisnosti od obremenitve. V primeru majhnih obremenitev oz. majhnih sprememb v mehanskih lastnostih preko območja spoja ($r_p/2L < 1$) je rezultat primerljiv z rezultatom za natezno obremenjen (Mode I) material enotnih mehanskih lastnosti. Z večanjem razmerja $r_p/2L$ postaja pdf nesimetrična z večjo verjetnostjo širjenja razpoke v material nižje trdnosti. Podobni izsledki so ponazorjeni tudi s povprečno vrednostjo kota širitve razpoke na sliki 5.

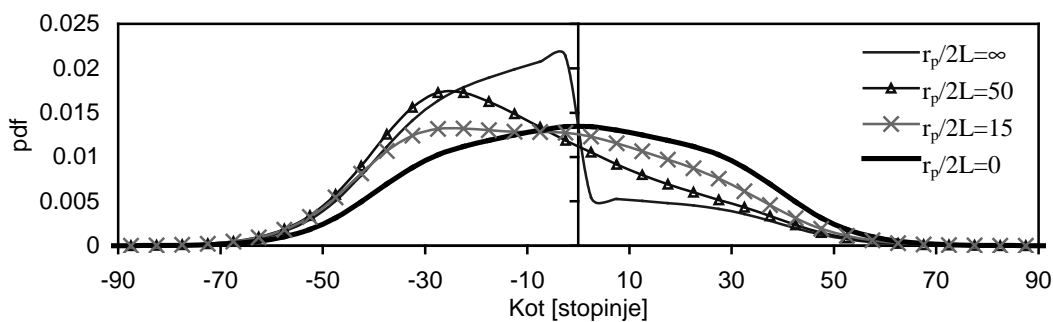
Rezultati za primer enotne trdnosti materiala in lokalne spremembe v lomni žilavosti so prikazani na slikah 5 in 6. Razlika v lokalni vrednosti lomne žilavosti $J^{(1)}/J^{(2)}=2$ in je zvezno spreminjana preko območja širine $2L$. Vrednosti lomne žilavosti so bile predpisane tako, da ima zgornji del domene večje vrednosti v primerjavi s spodnjim delom domene, kar se kvalitativno ujema s trendi v žilavosti in trdnosti v feritnih jeklih (predpisom lokalne trdnosti



Slika 4: Funkcija pdf za razpoko v materialu z lokalno spremembo v trdnosti in enotne lomne žilavosti. Weibullov modul je 20.



Slika 5: Povprečni kot širitve razpoke za primer lokalne spremembe v trdnosti ali lomni žilavosti preko območja širine $2L$.



Slika 6: Funkcija pdf za razpoko v materialu z lokalno spremenljivo lomno žilavostjo in enotne trdnosti. Weibullov modul je 20.

v prejšnjem primeru). Funkcija pdf na sliki 6 prikazuje najverjetnejšo širitev razpoke v material nižje žilavosti, tj. v nasprotni smeri od zgornjega primera. Povprečni kot širitve razpoke, prikazan na sliki 5, narašča z ožanjem območja zveznega prehoda $2L$ do vrednosti, karakteristični za ostri prehod v lomni žilavosti med obema materialoma.

5 Zaključek

V prispevku je predstavljen pristop, ki omogoča vključitev lokalnih mehanskih lastnosti materiala v statistične modele krhkega loma feritnih jekel. Pristop tako omogoča simulacijo in vrednotenje krhkega loma nehomogenih materialov ob uporabi metod lokalnega pristopa. Prednosti pristopa so v preprostosti uporabe, saj zahteva poznavanje makroskopskih materialnih lastnosti, kot so meja plastičnosti in lomna žilavost, ter v znatno manjšem obsegu težje določljive mikrostrukturne parametre (kritična razdalja do iniciatorja razpoke, vrsta in oblika kritičnih vključkov, itd). Model predstavlja podlago metodam enotenja lomnih lastnosti homogenih in nehomogenih materialov, saj je le-tem ključna pravilna napoved smeri širjenja razpoke. Za vrednotenje modela in analizo realnih primerov, kjer se hkrati spreminjata trdnost in lomna žilavost, se načrtujejo namenski preizkusi.

6. Zahvala

Avtor se zahvaljuje Hibbitu, Carlssonu in Sorrensenu za dostop do ABAQUS-a pod akademsko licenco na Univerzi v Mariboru ter Ministrstvu za šolstvo, znanost in šport za podporo projektu Št. Z2-6641-0795-04/2.11.

7. Literatura

- [1] Beremin FM, *A local criterion for cleavage fracture of nuclear pressure vessel steel*, Metall. Trans., 14(A), 2277-2287, 1983
- [2] Mudry F, *Local approach to cleavage failure*, Nuclear Eng Design, 105, 65-76, 1987
- [3] Wallin K, *The scatter in K_{IC} results*, Eng. Fract. Mech. 19, 1085, 1984
- [4] Becker TL, Cannon RM, Ritchie RO, *Statistical fracture modelling: crack path and fracture criteria with application to homogeneous and functionally graded materials*, Eng. Fract. Mech. 69, 1521-1555, 2002
- [5] Gao X, Ruggieri C, Dodds RH, *Calibration of Weibull stress parameters using fracture toughness data*, Int. J. Fracture, 92, 175-200, 1998
- [6] Freudenthal AM, *Statistical approach to brittle fracture*, In: "Fracture", Ed: Liebowitz H. Academic Press: New York. Vol.2, pp.591-619, 1968
- [7] Ritchie RO, Knott JF, Rice JR, *On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel*, J. Mech. Phys. Solids, 21, 395, 1973
- [8] Gao X, Dodds RH, *An engineering approach to assess constraint effects on cleavage fracture toughness*, Eng. Fract. Mech., 68, 263, 2001
- [9] Rice JR, Tracey DM, *Computational fracture mechanics*, In: "Numerical and computational methods in structural mechanics", Academic Press, New York, 1973



Ocena vpliva Reynoldsovega števila na občutljivost lupinaste izvedbe Coriolisovega merilnika

G. Bobovnik¹, J. Kutin¹ in I. Bajsić¹

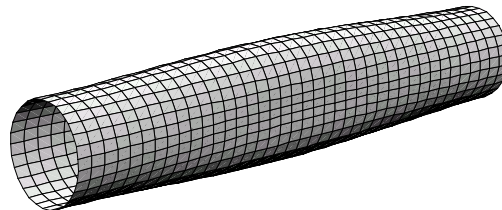
The estimation of the Reynolds-number effect on the sensitivity of the shell-type Coriolis flowmeter

Povzetek. Predstavljena je analiza vpliva Reynoldsovega števila na spremembo občutljivosti lupinaste izvedbe Coriolisovega merilnika. Ocena proučevanega vpliva je bila narejena na podlagi primerjave rezultatov numeričnih simulacij (ki temeljijo na metodi končnih volumnov) toka tekočine v nihajoči merilni cevi ter modela s potencialnim tokom tekočine. Pri simulacijah, kjer smo zasledovali spreminjanje tekočinskih sil na steno cevi, je bila predpostavljena fiksna nihajna oblika merilne cevi. Vpliv na delovanje merilnika smo opazovali za izoblikovan hitrostni profil tekočine v vstopnem ravnem delu cevi dolžine $30D$, rezultati pa so prikazani za dva različna modela turbulence pri dveh dolžinah merilne cevi.

Abstract. The analysis of the effect of different Reynolds numbers on the performance of the shell-type Coriolis flowmeter is presented. Estimation of the measuring effect was obtained upon the comparison of the results obtained with the numerical simulation (finite volume method based code) of the fluid flow in the vibrating measuring tube with the solution yielding from the potential fluid flow model. The fluid forces were observed with the simulations, which presumed the fixed mode shape of the tube. The effect of developed velocity profiles in the straight inlet tube of $30D$ was studied and the results are presented for two different turbulence models and two dimensions of the measuring tube.

1 Uvod

Coriolisov merilnik z lupinasto merilno cevjo izkorišča za merjenje pretoka tekočine spremembo druge obodne nihajne oblike merilne cevi (slika 1). Spremembo osnovne nihajne oblike merimo kot časovni zamik med izhodnimi signali zaznaval gibanja, ki so nameščena na izstopni in vstopni polovici



Slika 1: Druga obodna nihajna oblika merilne cevi

¹Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za meritve v procesnem strojništvu

merilne cevi, simetrično na njeno sredino. Kutin in Bajsić [1] sta s pomočjo modela Flüggejeve teorije lupin in potencialnega toka tekočine obravnavala osnovne značilnice lupinaste izvedbe merilnika, ki kažejo na večjo občutljivost v primerjavi z vitko izvedbo merilnika (pri istih tlačnih izgubah).

Vplivi tokovnih razmer na delovanje Coriolisovega merilnika so bili predmet raziskav že v preteklosti, vendar pa sistematične študije o morebitnih vplivih na značilnico lupinaste izvedbe merilnika ni bilo zaslediti. Vplive vstopnih tokovnih razmer za nekatere komercialne Coriolisove merilnike z vitko merilno cevjo so določali eksperimentalno v [2], Hemp [3] pa je s pomočjo teorije utežnih vektorjev ocenjeval vpliv različnih oblik hitrostnih profilov (vpliv Reynoldsovega števila) v merilni cevi.

Pristop k študiju vpliva različnih hitrostnih profilov za lupinasto izvedbo Coriolisovega merilnika v tem prispevku izhaja iz naše reference [4], kjer smo obravnavali vplive različnih tokovnih vplivov na merilnik z vitko merilno cevjo. Analiza vpliva je narejena s pomočjo numerične simulacije, ki zajema le simulacijo toka tekočine v merilni cevi. Za oceno občutljivosti merilnika smo izbrali razliko tekočinskih sil med izstopno in vstopno polovico merilne cevi, ki naj bi povzročala omenjeno deformacijo merilne cevi. Rezultate simulacij smo nato primerjali še z rezultati modela potencialnega toka tekočine ter na ta način ocenili morebiten odmik merilnika od idealne linearne značilnice, ki jo napoveduje ta model.

2 Nihajna oblika lupinaste merilne cevi

Opazovana lupinasta merilna cev niha pri svoji drugi obodni nihajni obliki (slika 1). Za popis njene nihajne oblike smo uporabili približno rešitev Flüggejevih enačb nihanja obojestransko togo vpete merilne cevi brez prisotnosti toka tekočine. Rešitev Flüggejevega modela, ki bi upoštevala vpliv toka tekočine na nihajno obliko, v našem primeru ni bila potrebna, saj je pri numeričnih simulacijah predpostavljena fiksna nihajna oblika merilne cevi (dinamika trdnine ni bila simulirana). Za popis nihanja merilne cevi dolžine L ($0 \leq x \leq L$) v času t , v odvisnosti od obodnega kota θ , smo uporabili naslednje izraze za aksialni (u), obodni (v) in radialni (w) pomik stene merilne cevi [5]:

$$u(x, \theta, t) = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 G_k \frac{i\lambda_k R}{L} e^{i\lambda_k \frac{x}{L}} \cos 2\theta e^{i\omega t}, \quad v(x, \theta, t) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 G_k e^{i\lambda_k \frac{x}{L}} \sin 2\theta e^{i\omega t},$$

$$w(x, \theta, t) = \sum_{k=1}^4 w_k = \sum_{k=1}^4 G_k e^{i\lambda_k \frac{x}{L}} \cos 2\theta e^{i\omega t},$$
(1)

kjer je $\omega = 2\pi f$ krožna frekvenca nihanja, $i = \sqrt{-1}$, konstante G_k in λ_k pa so enake:

$$G_1 = -\frac{C_1}{2}(1 + \sigma i), \quad G_2 = \frac{C_1}{2}(-1 + \sigma i), \quad G_3 = \frac{C_1}{2}(1 + \sigma), \quad G_4 = \frac{C_1}{2}(1 - \sigma)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\lambda, \quad \lambda_{3,4} = \pm\lambda i, \quad \lambda = 4,730,$$
(2)

kjer sta:

$$\sigma = \frac{\cosh \lambda - \cos \lambda}{\sinh \lambda - \sin \lambda} \text{ in } C_1 = \frac{A}{1,58815}, \quad (3)$$

A pa predstavlja amplitudo radialnega pomika na sredini merilne cevi ($x = L/2$).

3 Primerjalni model s potencialnim tokom tekočine

Na podlagi predpostavke o potencialnem toku tekočine s povprečno hitrostjo V in z gostoto ρ lahko na podlagi robnega pogoja, da tekočina ne more prehajati skozi stene merilne cevi, spreminjanje tlačnega polja na steni merilne cevi s polmerom R , v odvisnosti od radialnega pomika, zapišemo kot [1]:

$$p_s(x, \theta, t) = -\rho \sum_{k=1}^4 \frac{I_n(\lambda_k R)}{dI_n(\lambda_k r)/dr|_{r=R}} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 w_k}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \right). \quad (4)$$

V zgornji enačbi predstavlja $I_n(\lambda_k R)$ modificirano Besselovo funkcijo prve vrste n -tega reda, členi v oklepaju, od leve proti desni, pa predstavljajo translacijski vztrajnostni, Coriolisov vztrajnostni in relativni centrifugalni pospešek.

Silo tekočine na steno merilne cevi na določenem odseku cevi med L_1 in L_2 in na obodnem intervalu med θ_1 in θ_2 lahko zapišemo na podlagi poznane tlačnega polja:

$$f(t) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \Big|_{L_1}^{L_2} = \int_{L_1}^{L_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_s(x, \theta, t) R \, d\theta \, dx. \quad (5)$$

Kot primerjalni parameter za oceno občutljivosti merilnika smo izbrali določeno rezultanto sil r , ki naj bi ponazarjala merilni učinek, dobljen na podlagi štirih merilnih zaznaval gibanja. Določena je na podlagi ustrezne razlike komponent sil označenih na sliki 2, njena velikost pa podaja razliko sil med izstopno in vstopno polovico merilne cevi:

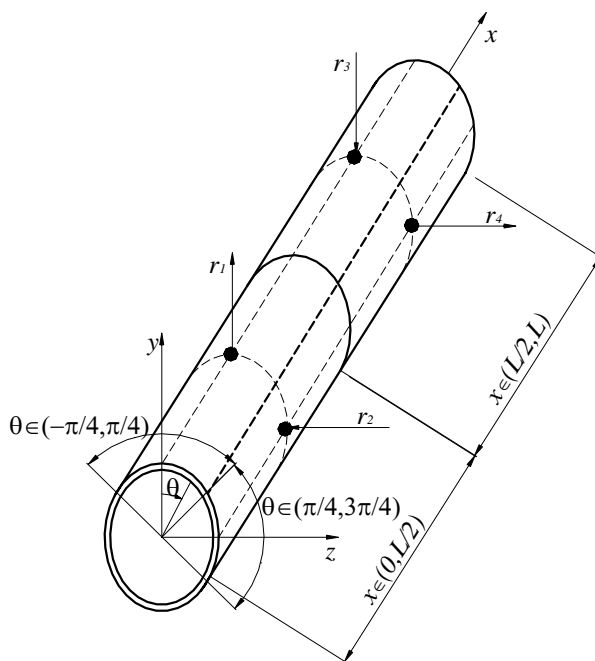
$$r(t) = r_1(t) - r_2(t) - (r_3(t) - r_4(t)). \quad (6)$$

Ta razlika sil kvantitativno popisuje asimetrično porazdelitev tekočinskih sil po dolžini merilne cevi, ki povzroča spremembo nihajne oblike merilnika, kar v primeru Coriolisovega merilnika izkoriščamo kot merilni učinek. Komponente sil r_i so radialne komponente rezultirajoče sile v smeri y oz. z na posameznem obodnem odseku, na izstopni oz. vstopni polovici merilne cevi.

Amplitudo razlike sil iz enačbe (6) lahko za primer potencialnega toka izrazimo kot:

$$R_a = \frac{8\sqrt{2}}{3} \cdot V \omega \rho R \sum_{k=1}^4 \frac{I_n(\lambda_k R)}{dI_n(\lambda_k r)/dr|_{r=R}} G_k \left(e^{i\frac{\lambda_k}{2}} - 1 \right)^2. \quad (7)$$

Amplituda R_a je linearno odvisna od masnega toka tekočine ($\pi R^2 \rho V$) v merilni cevi.



Slika 2: Shematski prikaz rezultant tekočinskih sil v določenem času.

4 Numerični model toka tekočine v lupinasti merilni cevi

4.1 Enačbe gibanja

V nadaljevanju so predstavljene temeljne enačbe za popis toka tekočine, ki so bile reševane s pomočjo uporabe programa Comet, ki temelji na metodi končnih volumnov [6]. Če predpostavimo izotermen in rahlo stisljiv tok tekočine z gostoto ρ , vektorjem hitrosti tekočine \mathbf{v} in vektorjem hitrosti površine stene končnega volumna \mathbf{v}_s , zapišemo kontinuitetno in gibalno enačbo sledeče:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\mathbf{T} + \mathbf{T}_t) \cdot d\mathbf{s} + \int_V \mathbf{f}_b dV, \quad (9)$$

kjer je V končni volumen, S je ploskev, ki obdaja končni volumen in \mathbf{f}_b je vektor sil na enoto volumna. \mathbf{T} je napetostni tenzor:

$$\mathbf{T} = \mu \left(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T \right) - \left(\frac{2}{3} \mu \text{div } \mathbf{v} + p \right) \mathbf{I}, \quad (10)$$

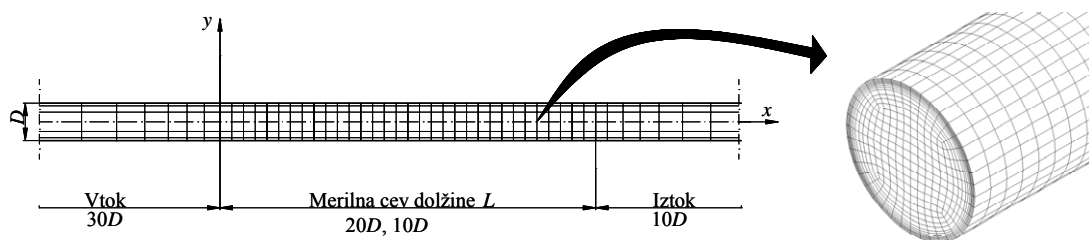
kjer predstavlja p tlak, \mathbf{I} enotski tenzor in μ dinamično viskoznost tekočine. Člen \mathbf{T}_t pa označuje tenzor Reynoldsovih napetosti in je posledica prisotnosti turbulence v toku tekočine.

Za izračun Reynoldsovih napetosti sta bila uporabljena dva modela turbulence, in sicer standardni k - ε model ter Speziale-Sarkar-Gatski model Reynoldsovih napetosti (SSG RSM) [7]. Prvi, torej k - ε model turbulence, je dvo-enačbeni model, ki opisuje stanje turbulence z eno samo hitrostno skalo (z njo so povezane Reynoldsove napetosti) ter predpostavlja izotropijo turbulence (turbulentna viskoznost, ki je uvedena s pomočjo vrtnično-viskoznostnega koncepta, je skalarna veličina), vrednosti k in ε pa sta določeni na podlagi dveh transportnih enačb. Nasprotno pa so z modelom SSG RSM posamezni členi tenzorja Reynoldsovih napetosti določeni na podlagi dodatnih šestih parcialnih diferencialnih enačb (izhajajo neposredno iz Navier-Stokesovih enačb toka tekočine). Dodatna diferencialna enačba v modelu je potrebna za izračun disipacije energije, ki je predpostavljena kot izotropna.

Pri numeričnem modelu so bili nestacionarni členi transportnih enačb aproksimirani s tritočkovno implicitno shemo drugega reda. Konvektivni in difuzijski členi so bili aproksimirani z metodo srednjih razlik (CDS). Za določanje tlačnega polja je bila uporabljena implicitna metoda korekcije tlaka (SIMPLE algoritem). Konvergenčni kriterij je bil izpolnjen, ko se je vsota absolutnih ostankov v vseh enačbah zmanjšala za pet velikostnih razredov.

4.2 Računsko območje

Opazovano tokovno polje je shematsko predstavljeno na sliki 3 in sestoji iz merilnega dela cevi ter dodanega vtočnega in iztočnega dela cevi. Simulacije so bile narejene za dve dolžini merilne cevi 0,3 m in 0,6 m. Velikost premera cevi je bila v obeh primerih konstantna, in sicer 0,03 m, kar pomeni, da se je spreminjalo razmerje L/D merilne cevi (10 in 20). Natočni ($30D$) in iztočni del ($10D$) sta bila dodana k nihajoči merilni cevi z namenom, da dobimo na vstopu v merilno cev relativno polnorazviti tok tekočine ter da bi čimbolj zmanjšali možne tokovne motnje na vstopu in izstopu merilne cevi. Računsko območje je bilo razdeljeno glede na izbrano dolžino merilne cevi, in sicer na 111360 oz. 157760 celic. Računska mreža je razdelila merilno cev na ekvidistantne odseke, medtem ko se je razdalja med središči celic na vtočnem (iztočnem) delu povečevala s faktorjem 1,03 v smeri proti vstopu (izstopu). Prerez cevi je bil razdeljen na 580 celic, z gostejšo razdelitvijo ob steni cevi (glej sliko 3).



Slika 3: Shema računskega območja

4.3 Lastnosti tekočine in robni pogoji

Gostota tekočine v merilni cevi se spreminja v skladu s formulo:

$$\rho = \rho_0 (1 + \chi \Delta p), \quad (11)$$

kjer je ρ_0 referenčna gostota tekočine pri referenčnem tlaku, χ je stisljivost tekočine in Δp je sprememba tlaka. Simulacije so bile izvedene za tekočino z naslednjimi lastnostmi: ρ_0 (1 bar) = 1000 kg/m³, $\chi = 5 \cdot 10^{-5}$ bar⁻¹, $\mu = 1,002 \cdot 10^{-3}$ Pa·s, pri čemer je referenčni tlak 1 bar predpostavljen na izstopu iz računskega območja.

Simulacije so bile izvedene za Reynoldsova števila od 3000 do $3 \cdot 10^5$, pri čemer je bil na vstopu v računsko območje predpostavljen raven hitrostni profil (na vstopu v merilno cev je tako predpisan hitrostni profil izoblikovan na dolžini $30D$). Amplituda radialnega pomika na sredini merilne cevi je bila enaka $D/600$.

Nihanje merilne cevi je bilo modelirano s pomočjo premikajoče računske mreže, kar pomeni, da je bila v vsakem časovnem koraku definirana nova pozicija merilne cevi, ki se je spreminjala v skladu z drugo lastno obodno nihajno obliko togo vpete cevi (2. poglavje). Amplituda radialnega pomika na sredini merilne cevi pa je bila enaka $D/600$, nihaj merilne cevi pa je bil modeliran s 64 časovnimi koraki. Simulacije so bile izvedene za 5 nihajev merilne cevi, s čimer smo v vseh primerih zagotovili periodično oz. stacionarno stanje.

5 Rezultati

Razlika sil med izstopno in vstopno polovico merilne cevi na ustreznih obodnih intervalih, ki smo jo uporabili za oceno merilnega učinka, je bila definirana z enačbo (6). Podobno kot v primeru potencialnega toka, smo tudi na podlagi numeričnih simulacij določili opazovano razliko sil v vsakem časovnem trenutku ter nato ocenili njeno amplitudo (R_n) preko izračuna RMS vrednosti. Pri primerjavi rezultatov simulacij in modela potencialnega toka tekočine smo uporabili naslednje razmerje:

$$u_R = \frac{R_n}{R_a}. \quad (12)$$

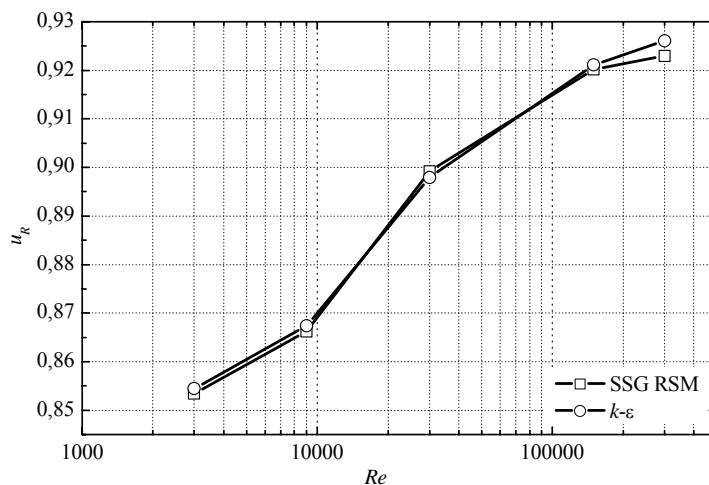
Zgornje razmerje nam podaja informacijo o kakovosti modela potencialnega toka tekočine, dodatno pa določa tudi morebitno odstopanje od idealne linearne značilnice merilnika (na opazovanem območju Reynoldsovih števil), ki je napovedana v primeru predpostavke o potencialnem toku tekočine.

Na sliki 4 je prikazano spreminjanje razmerja u_R za različna Reynoldsova števila za merilno cev dolžine $10D$, pri čemer smo pri numeričnem modelu uporabili dva različna modela turbulence (k - ϵ in SSG RSM). Vrednosti ujemanja se v obeh primerih gibljejo med 0,85 in 0,93, pri tem pa se nižje vrednosti ujemanja u_R predvidene pri manjših hitrostih oz. manjših Reynoldsovih številih tekočine v merilni cevi. Ugotovimo lahko, da ni opaziti večjih razlik med izbranimi modeloma turbulence. Največje odstopanje (0,003) je opazno pri $Re = 300.000$.

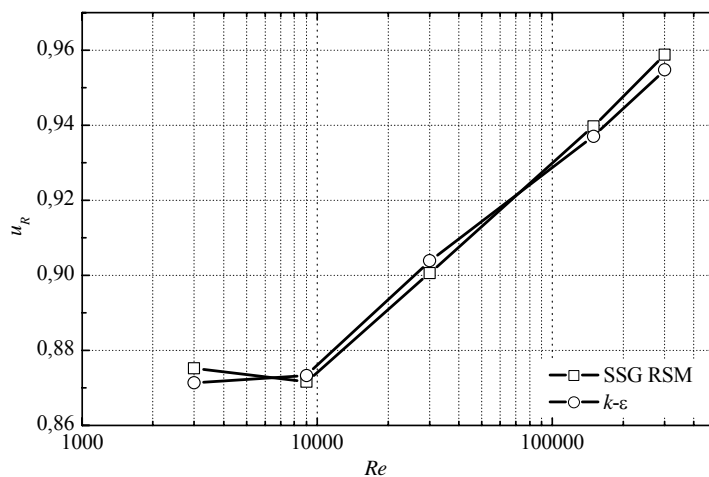
Podobno kot za primer na sliki 4, so na sliki 5 prikazane vrednosti razmerja u_R za merilno cev dolžine $20D$. Tudi v tem primeru razlika med rezultati dobljenimi na podlagi k - ϵ in SSG

RSM modela turbulence ni očitna. Velikost razmerja se tudi v slednjem primeru večja z večanjem Reynoldsovega števila, le pri najmanjšem simuliranem pretoku pa je opaziti določeno nezveznost karakteristike merilnika. Le-ta je lahko posledica prisotnosti precejšnjega "numeričnega šuma", ki bi lahko vodil do slabe ocene amplitude sil R_n . Večji šum je bil opažen pri simulacijah nihanja merilne cevi z visokimi frekvencami in majhnimi Reynoldsovimi števili.

Kot smo že omenili, je trend spreminjanja občutljivosti v primerjavi s potencialnim tokom tekočine podoben v obeh primerih. Pri najvišjih Re so pri daljši merilni cevi napovedana nekoliko manjša odstopanja od modela s potencialnim tokom, kar je verjetno posledica večjega razmerja L/D merilne cevi.



Slika 4: Razmerje u_R za različna Reynoldsova števila ter dva modela turbulence ($L/D = 10$).



Slika 5: Razmerje u_R za različna Reynoldsova števila ter dva modela turbulence ($L/D = 20$).

6 Sklepi

Prikazani so bili rezultati numeričnih simulacij toka tekočine v nihajoči merilni cevi Coriolisovega merilnika masnega toka z lupinasto merilno cevjo, ki niha pri svoji drugi obodni lastni nihajni obliki. S primerjavo rezultatov numeričnih simulacij z modelom potencialnega toka tekočine, ki napoveduje linearno značilnico lupinastega Coriolisovega merilnika, smo lahko ocenili odstopanje rezultatov simulacij od idealne linearne značilnice merilnika.

Relativno zmanjšanje občutljivosti (za približno 8 %) za obe dolžini merilne cevi je predvideno v območju nizkih Reynoldsovih števil, pri čemer pa je relativno zmanjšanje občutljivosti v vseh opazovanih primerih neprimerno večje kot v primeru merilnika z vitko cevjo, kjer znaša približno 0,15 % [4].

Na podlagi primerjave rezultatov simulacij, dobljenih s standardnim k - ε in SSG RSM modelom turbulence, je bilo prikazano, da izbira turbulentnega modela nima pomembnega vpliva na rezultate simulacij, vsaj ne v primeru razvoja hitrostnih profilov na dolžini $30D$ pred vstopom v merilno cev, kot je bilo predpostavljeno v tem prispevku.

Literatura

- [1] J. Kutin, I. Bajsić, *Characteristics of the shell-type Coriolis flowmeter*, Journal of Sound and Vibration, 228, 227 – 242, 1999.
- [2] R. Cheesewright, C. Clark, D. Bisset, *The identification of external factors which influence the calibration of Coriolis massflow meters*, Flow Measurement and Instrumentation, 11, 1 – 10, 2000.
- [3] J. Hemp, *Calculation of the sensitivity of a straight tube Coriolis mass flowmeter with free ends*, Flow Measurement and Instrumentation, 12, 411 – 420, 2002.
- [4] G. Bobovnik, J. Kutin, I. Bajsić, *The effect of flow conditions on the sensitivity of the Coriolis flowmeter*, Flow Measurement and Instrumentation, 15, 69 – 76, 2004.
- [5] R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger Publishing Company, 1995.
- [6] *Comet version 2.00 – User manual*, Institute of Computational Continuum Mechanics GmbH (ICCM), Hamburg, 2001.
- [7] S. B. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2000.



Eksperimentalna raziskava časov pomešanja modificiranih turbinskih mešal

A. Bombač, A. Dernikovič in I. Žun

Experimental Research of Mixing time of Modified Disk Type Impellers

Povzetek. Predstavljeni so časi pomešanja v posodi z modificiranimi mešali v eno- in dvofaznem sistemu. Časi pomešanja so določeni po dveh eksperimentalnih metodah temelječih na temperaturnem in pH odzivu in so primerjani z vrednostmi iz literature. Rezultati pri mešanju v enofaznem sistemu so pokazali, da so časi pomešanja modificiranih mešal krajši od časov pomešanja pri standardnem mešalu. Ugotovljeno je tudi, da se časi pomešanja krajšajo z večanjem vrtilne hitrosti mešala in so daljši pri mešanju v dvofaznem sistemu.

Abstract. Mixing times for different modified impellers are given for a single and two-phase system in a stirred vessel. Mixing time was measured using two different methods based on temperature and pH change and was compared with those from the literature. The results showed that shorter mixing time of modified impellers was achieved compared to that of standard impeller. It was found that mixing times were shorter at higher impeller speeds and longer when mixing in a two-phase system.

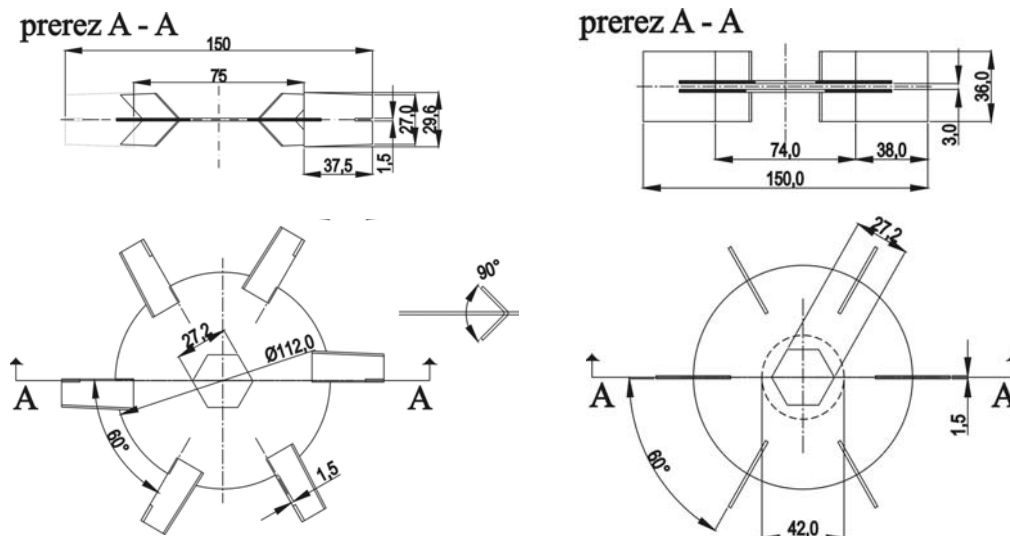
1 UVOD

Tehnološke postopke mešanja se uporablja v procesni industriji z namenom intenzivirati snovne in toplotne prenose med različnimi sistemi (mešanje tekoče-tekoče, disperzija plina v tekočini, suspenzije tekoče-trdo) in za izvajanje kemičnih reakcij (npr. polimerizacija). Poznavanje disipacije energije mešala in časa pomešanja je osnovnega pomena pri raziskavah mešanja v mešalnih sistemih. Ti karakteristiki namreč odločilno vplivata na učinkovitost mešalnega sistema, odločata pa tudi o stroških mešalnega procesa. Pogosto je čas pomešanja tudi osnova za primerjavo učinkovitosti posameznih mešal: pri enakem vnosu energije je najbolj učinkovito tisto mešalo, ki ima najkrajši čas pomešanja.

V tem delu so obravnavani časi pomešanja v enofaznem in dvofaznem sistemu, ki ga modificirani mešali dosežata ob predpisani stopnji pomešanja. Uporabljena so bila sledeča mešala: standardno Rushtonovo mešalo (RT), mešalo z dvema diskoma (DDT) in mešalo z zapognjenimi lopaticami z zarezo (SBT). Za delovno sredstvo sta bila uporabljena voda in zrak. Iz merjenih veličin izhaja, da so v enofaznem sistemu časi pomešanja modificiranih mešal krajši od časov pomešanja pri Rushtonovem mešalu. Časi pomešanja se krajšajo z večanjem vrtilne hitrosti mešala. V dvofaznem sistemu, pri dispergiranju zraka v vodo, pa so časi pomešanja daljši od tistih v enofaznem sistemu.

2 MERILNA LINIJA IN PREIZKUS

Mešanje v eno in dvofaznem sistemu je potekalo v cilindrični posodi premera 450 mm z različnimi turbinskimi mešali. Geometrijski parametri skupaj z merilno linijo so podrobneje opisani v delih [1,2,3]. Za delovno sredstvo sta bila uporabljena voda in zrak. Eksperiment je bil opravljen pri različnih vrtilnih frekvencah mešala in pri različnih pretokih dovedenega zraka. Kot osnova za primerjavo mešal je uporabljeno standardno Rushtonovo mešalo. Primerjani mešali, ki sta prikazani na sliki 1, sta izdelani v LFDT (načrt: A.Bombač).



Slika 2: Mešali z modificiranimi lopaticami: levo - SBT mešalo in desno - DDT mešalo

Meritve časov pomešanja so bile izvedene pri zahtevani 95% stopnji pomešanja pri mešanju kapljevine ter pri dispergiranju zraka v vodo. Časi pomešanja so bili merjeni z metodo motnja – odziv [7]. Tako je bila za motnjo uporabljena manjša količina voda višje ali nižje temperature od vode v posodi, temperaturni odziv pa je bil merjen s termočlenom. Za medsebojno primerjavo je bila uporabljena dodatno še metoda s spremembo kislosti, za motnjo je bila uporabljena manjša količina šibke kisline. Odziv je bil merjen s *pH*-metrom.

Po viru [4] se časi pomešanja, merjeni na treh različnih lokacijah, niso veliko razlikovali od povprečja časov pomešanja na različnih lokacijah. Čas pomešanja, merjen s sondo v bližini mešala, je bil za 10% krajši od povprečja treh lokacij medtem, ko je bil čas pomešanja merjen s sondo v bližini stene posode večji za 6% od povprečja. V našem primer je bila izbrana samo ena lokacija, saj je šlo predvsem za primerjavo treh različnih mešal pri enakih parametrih *n* in *q*.

Pri merjenju časov pomešanja s termočlenom sta bila v posodo dodana 2 litra vroče vode temperature med 95-99°C na gladino nad lokacijo termočlena, to je pri razdalji 50 mm od gredi mešala in 30 mm pod gladino (*r, z*) = (65, 420mm). S spremljanjem odziva termočlena je bil po kriterijih [4,5] določen čas pomešanja. Začetni čas odziva je bil določen pri pogoju:

$$\frac{T_{i+1} - T_i}{t_{i+1} - t_i} \geq 28,6 . \quad (1)$$

kjer pomenijo T_i temperatura in t_i čas pri i -tem koraku zapisa. Končni čas je bil določen pri stanju, od katerega so se vse naslednje temperature razlikovale za manj kot 5%.

$$T_i - \frac{T_{i+n}}{T_i} \leq 0,05 ; n = 1 \dots N \quad (2)$$

Povprečna odzivnost merilnika, dobljena po 10 ponovljenih meritvah, je znašala 294 °C/s.

Pri merjenju časov pomešanja s pH-sondo je bila v posodo dodana količina $2 \cdot 10^{-3}$ l HCl kisline koncentracije 35 (masni)%. Kislina je bila dodana na isti lokaciji kot pri meritvah s termoelementom. S spremljanjem odziva pH-sonde je bil po kriterijih [3,4] določen čas pomešanja:

Začetni čas odziva je bil določena po pogoju

$$\frac{pH_i - pH_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} \geq 0,9 . \quad (3)$$

Končni čas pa je bil določen pri pH vrednosti, od katere so se vse naslednje pH vrednosti razlikovale za manj kot 5%.

$$pH_i - \frac{pH_{i+n}}{pH_i} \leq 0,05 ; n = 1 \dots N \quad (4)$$

Narejenih je bilo 10 meritev odziva, povprečni odziv merilnika je znašal 0,67 pH/sekundo z omejitvijo zaznave nove vrednosti vsakih 0,5 s (2 Hz), ki ga je pH meter potreboval za lastno ovrednotenje signala posamične meritve.

3 REZULTATI IN RAZPRAVA

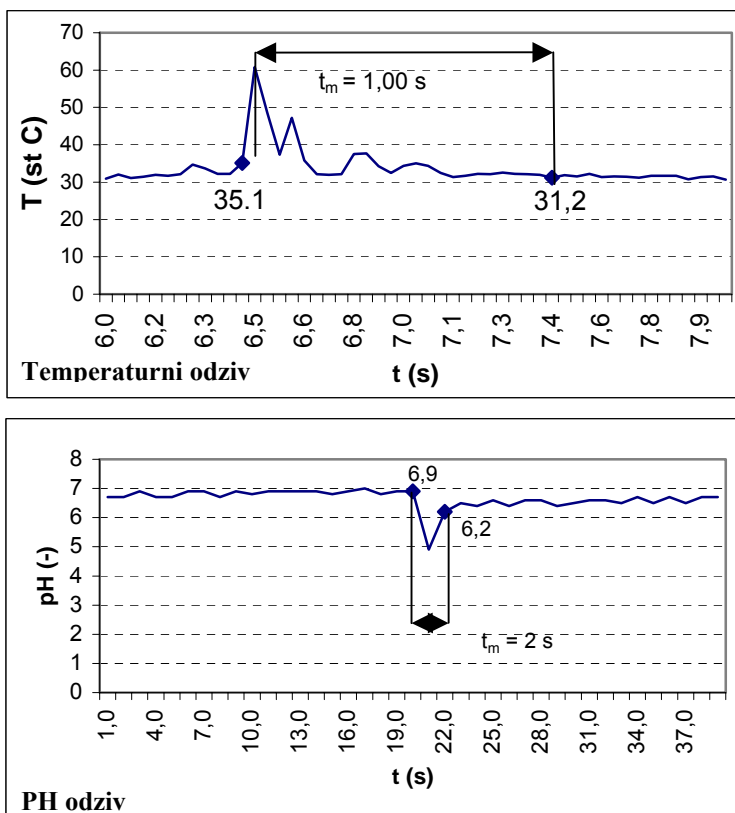
3.1 Čas pomešanja

Čas pomešanja lahko predstavlja kriterij za opis intenzitete mešanja. Časi pomešanja so bili merjeni pri dveh vrtilnih frekvencah mešala v enofaznem sistemu (zgolj mešanje kapljevine) ter pri enakih frekvencah pri mešanju v dvofaznem sistemu (z dovajanjem zraka pri dveh različnih pretokih), parametri so podani v tabeli 1. Na sliki 3 sta kot primer prikazana temperaturni in pH odziv v odvisnosti od časa pri mešanju z DDT mešalom v enofaznem sistemu pri vrtilni frekvenci mešala 266 vrt⁻¹ ter doseženima časoma pomešanja t_m . Meritve so bile opravljene še v dvofaznem sistemu pri parametrih podanih v tabeli 1, vsaka skupina meritev pa je bila izvedena trikrat.

Tabela 1: Časi pomešanja različnih mešal (s)

Fr (-)	n (min ⁻¹)	q (l/h)	Povprečne vrednosti časov pomešanja, T odziv			Povprečne vrednosti časov pomešanja, pH odziv		
			RT	DDT	SBT	RT	DDT	SBT
0,3	266	0	2,88	2,06	3,00	3	3	3
0,6	376	0	1,50	1,00	1,60	3	2	3
0,3	266	5000	2,76	1,94	2,18	6	4	6
0,6	376	20000	2,66	1,54	2,20	5	4	5

Temperaturni odziv. Povprečne vrednosti časov pomešanja različnih mešal v eno in dvofaznem sistemu, ki so bili izmerjeni po tej metodi, so predstavljeni v tabeli 1. Iz primerjave izmerjenih časov pomešanja je razvidno, da so časi pomešanja DDT mešala najkrajši pri vseh režimih. Časi pomešanja SBT mešala pa so daljši od časov RT mešala v enofaznem sistemu, medtem ko v dvofaznem sistemu dosega krajše čase od RT mešala.



Slika 3: Temperaturnim in pH odziv pri mešanju z DDT mešalom v enofaznem sistemu z izmerjenima časoma pomešanja pri $Fr = 0,3$

pH odziv. Časi pomešanja so potekali v enakih režimih kot pri poskusih s termočlenom, vsaka skupina meritev pa je bila izvedena trikrat. Zaradi že omenjenega zahtevanega časa za procesiranje signala s pH sonde, ki znaša 0,5 s, je ta čas tudi določal najkrajšo časovno spremembo možne zaznave pH. Pri tej metodi so časi pomešanja pri dispergiranju zraka v posodi pri vseh mešalih nedvomno daljši kot v enofaznem sistemu. Za oba sistema velja, da se z večanjem vrtilne frekvence mešala časi pomešanja krajšajo. Izmerjeni časi po pH metodi so daljši od tistih po metodi temperaturnega odziva.

3.2 Primerjava po virih iz literature

Časi pomešanja, ki so bili izmerjeni po temperaturni in pH metodi so smiselno primerljivi le ob doseganju enake disipirane moči mešala. Časi pomešanja so v odvisnosti od disipirane

moči mešala v eno in dvofaznem faznem sistemu so prikazani na sliki 4 za T odziv in na sliki 5 za pH odziv. Za ponazoritev odvisnosti so vrisane krivulje, ki so aproksimirane po enačbi:

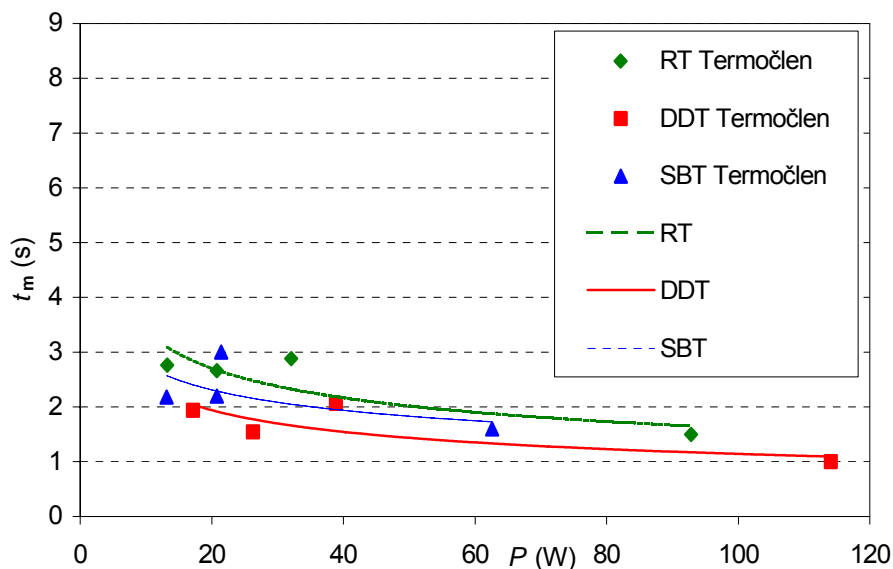
$$t_m = k_1 \cdot P^{k_2} \quad (5)$$

kjer sta koeficienta a in b ter R prikazani v tabeli 2.

Tabela 2: Parametri regresijske krivulje po en.(5).

Mešalo	Enofazni sistem			Enofazni sistem		
	k_1	k_2	R	k_1	k_2	R
RT	7,087	-0,321	0,872	15,652	-0,435	0,806
SBT	5,196	-0,329	0,815	15,593	-0,4583	0,823
SBT	4,954	-0,255	0,656	15,255	-0,434	0,818

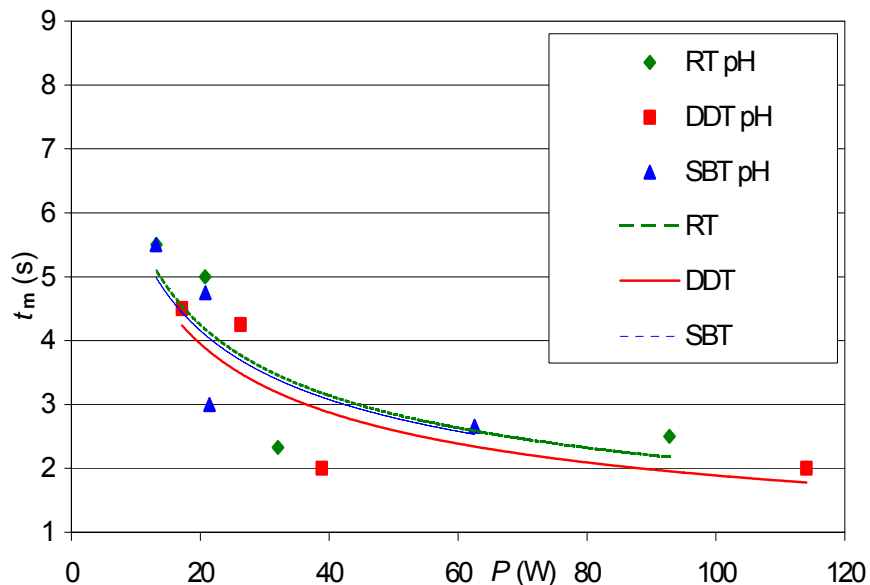
Tako je iz obeh slik razvidno, da se z večanjem moči mešala čas pomešanja krajša. Pri isti moči mešala imata SBT in DDT mešali krajše čase pomešanja kot RT mešalo. DDT mešalo ima tudi krajše čase pomešanja kot SBT mešalo. Enake ugotovitve je zaslediti tudi v literaturi [6]. Izmerjeni časi pomešanja za različna mešala so različni, po obeh metodah so najkrajši časi pomešanja DDT mešala krajši od časov RT mešala.



Slika 4: Odvisnost časov pomešanja od moči mešanja z različnimi mešali, merjeno po metodi temperaturnega odziva

Domnevati je, da so krajši časi pomešanja DDT mešala zaradi iztekajoče vode med diski mešala, ki tako dodatno izboljša pomešanja na lokalni skali. Iz posnetkov [8] pri mešanju v dvofaznem sistemu je razvidno, da so sledi dveh plinskih votlin za lopatico DDT mešala skoraj vzporedne z diskom, medtem, ko se pri RT mešalu na koncu stikata. Pri mešanju z SBT mešalom v dvofaznem sistemu je sklepati, da so časi pomešanja krajši od RT mešala zaradi višje moči SBT mešala, ki jo mešalo disipira v kapljevino, saj je razmerje P_g/P precej

večje kot pri RT mešalu [8]. Višja disperirana moč mešala posredno predstavlja boljšo črpalno zmogljivost mešala ter s tem povezano krajši čas pomešanja [6].



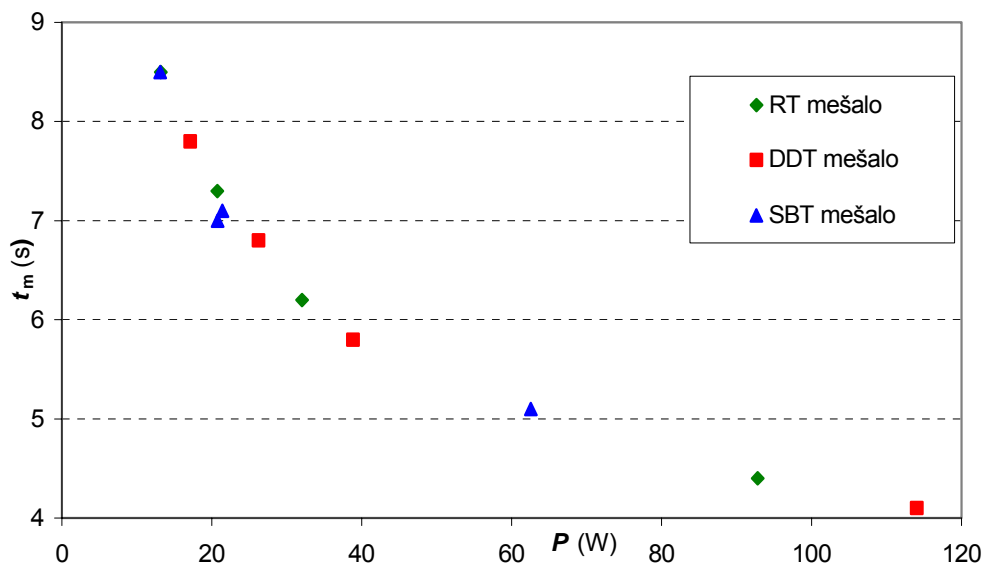
Slika 5: Odvisnost časov pomešanja od moči mešanja z različnimi mešali, merjeno po metodi pH odziva

Časi pomešanja po obeh metodah so bili primerjani še s splošnim kriterijem Ruszkowskega (1995) in Grenvilla (1994)^{cit.[5]}, ki velja za poljubno obliko mešala:

$$t_m = A \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{Ne \frac{1}{3}} \right) \left(\frac{T}{D} \right)^2 \quad (6)$$

kjer je konstanta $A = 5,3$. Kriterij velja pri razmerju $1/3 < D/T < 1/2$ in $H=T$ in velja v enofaznem ter večfaznem sistemu pri pogoju, da mešalo ni poplavljenno, vrednosti Ne se zamenja z vrednostjo v večfaznem sistemu Ne_g . Na sliki 6 so po zgornjem kriteriju iz izmerjenih vrednosti disperirane moči mešal izračunani ustrezni časi pomešanja za enofazni in dvofazni sistem. Razvidno je, da se z večanjem disperirane moči mešal časi pomešanja krajšajo, časi pomešanja so praktično neodvisni od oblike mešala. To pa ne pomeni, da dosegajo različna mešala enake rezultate procesa. Čas pomešanja predstavlja samo čas, pri katerem so nehomogenosti prisotne v posodi. Za dobre rezultate procesa pa je pomembno tudi kako velika so odstopanja homogenosti v posodi [5]. Iz povedanega sledi, da so časi pomešanja le grobi kriteriji mešalne učinkovitosti. Iz primerjave izmerjenih časov pomešanja po obeh metodah z izračunanimi po kriteriju (6) je razvidno, da so izmerjeni časi pomešanja krajši od izračunanih. Možno je, da so časi pomešanja izmerjeni po pH metodi krajši od izračunanih zaradi volumna pH sonde. Tako Thyn^{cit.[6]} pojasnjuje, da so izmerjeni časi pomešanja manjši, če je volumen sonde večji. Dimenzije pH-sonde iz našega preizkusa je $\varnothing 88\text{mm} \times 40\text{mm}$, žal pa dimenzije sonde po katerih je bil potrjen kriterij (6) niso bile navedene.

Prav tako so časi pomešanja izmerjeni po temperaturni metodi (precej) manjši od vrednosti po kriteriju (6). Vzrok je lahko v manjši totalni spremembi temperature po pomešanju ter prisotnosti močnega šuma v signalih. Tako verjetno niso bile zaznane vse cirkulacije, red velikosti zaznave cirkulacije je bil že na meji šuma v signalu. Voncken (1964)^{cit.[5]} ter Khang in Levenspiel (1976)^{cit.[5]} navajajo, da je sistem homogeniziran po približno 5 cirkulacijah. Pri merjenju po temperaturni metodi v našem primeru so bile zaznane 3 - 4 cirkulacije. Natančnost temperaturne metode lahko povečamo z nekoliko večjo količino vnesene vode kot motnje, s tem povezano pa tudi natančnejšo zaznavo spremembe temperature.



Slika 6: Časi pomešanja po kriteriju Ruzskowskega in Grenvilla (1994)^{cit.[5]}

Ob eventualni zamenjavi Rushtonovega mešala z SBT mešalom bi za ohranitev enakih velikosti parametrov $P - n - M$ povečali premer SBT mešala po odvisnosti $D \propto Ne^{1/5}$, to je iz 0,15m na 0,164m. Ta odvisnost izhaja iz relacije $P = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot M = Ne \cdot \rho \cdot n^3 D^5$. Po kriteriju (6) izračunan čas pomešanja SBT mešala se v primerjavi s časom pomešanja pri RT mešalu zmanjša za najmanj 3%.

5 Zaključki

Pri mešanju v posodi z mešalom v eno in dvofaznem sistemu so bile opravljene meritve časov pomešanja s standardnim Rushtonovim mešalom, z mešalo z dvema diskoma ter z mešalom z zapognjenimi lopaticami z zarezo. Uporabljena sta bila vodovodna voda in komprimiran zrak.

Časi pomešanja modificiranih mešal so krajši od Rushtonovega mešala pri enaki disipirani moči mešal. Najkrajši časi pomešanja so doseženi z DDT mešalom.

Ugotovljeno je, da se časi pomešanja na splošno manjšajo z večanjem vrtilne hitrosti mešala oziroma z večanjem disipirane moči mešala.

Pri dispergiranju zraka v vodo so časi pomešanja daljši kot v enofaznem sistemu, kar potrjujejo tudi drugi viri iz literature.

Zahvala

To delo je del večjega projekta J2-7517, ki ga financira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije.

Oznake

D - premer mešala (m)

g - zemeljski pospešek (m/s^2)

H - višina vode v posodi (m)

M - moment na gredi mešala (Nm)

n - vrtilna frekvenca mešala (s^{-1})

P - moč potrebna za mešanje (W)

T - premer posode (m)

t_m - čas pomešanja (s)

q - pretok zraka (m^3/s)

ν - kinematična viskoznost (m^2/s)

ρ - gostota (kg/m^3)

Newtonovo število: $Ne = P/(\rho n^3 D^5)$

Froudovo število: $Fr = (n^2 D)/g$

indeksi

g - pri dispergiranju zraka

m - pomešanje

Literatura

- [1] Bombač, A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, *Strojniški vestnik* (44) št. 3-4, **1998**, 105--116
- [2] Bombač, A., Žun, I., Filipič, B., Žumer, M., Gas-Filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Aerated Stirred Vessel, *AIChE J.*, **1997**, 2921--2931
- [3] Bombač, A., Žun, I. Gas-filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Vessel with Dual-Impellers, *ChemEngSci*, (55), **2000**, 2995--3001
- [4] Haucine, I., Plasari, E., David, R., Effects of the Stirred Tank's Design on Power Consumption and Mixing time in Liquid Phase, *Chem. Eng. Technol.* (23), **2001**, 7--15
- [5] Nienow, A.W., On impeller circulation and mixing effectiveness in the turbulent flow regime, *Chem. Eng. Science*, (52), **1997**, 2557 -- 2565
- [6] Bouaïfi, M., Roustan, M., Power consumption, Mixing time and homogenisation energy in dual-impeller agitated gas-liquid reactors, *Chem. Engng & Proc.* (40), **2001**
- [7] Levenspiel, O., Chemical Reaction Engineering, 3rd Ed., Wiley & Sons, **1999**
- [8] Bombač, A., Dernikovič, A., Žun, I., Poraba energije pri dispergiranju zraka z modificiranimi mešali, Slovenski kemijski dnevi 2004, Maribor, Slovensko kemijsko društvo, **2004**, v tisku



Hitrosti kapljevine pri mešanju s turbinskim mešalom v posodi kvadratastega preseka

A. Bombač¹, S. Rodman Oprešnik², B. Širok³ in I. Žun¹

Liquid velocities in a square tank stirred with Rushton impeller

Povzetek: V prispevku je obravnavno hitrostno polje kapljevine v eno- in dvofaznem sistemu pri mešanju s Rushtonovim mešalom v nestandardni posodi kvadratastega preseka. Za delovno sredstvo sta bila uporabljena voda in zrak. V obeh sistemih so bile z laserskim merilnikom opravljene meritve hitrosti kapljevine v 98 točkah (r,z) ravnine pravokotne na steno posode, ter na 11 lokacijah v področju iztekajočega toka iz mešala. Sledne so služile za robne parametre pri računalniškem izračunu s komercialno CFD kodo. Prikazani so rezultati meritev ter primerjava z rezultati CFD analize kot tudi po virih iz literature.

Abstract: The paper presents liquid mean velocities in single and two phase system in mixing with Rushton impeller using non-standard square vessel. Tap water and air were used as a working fluid. In both systems using LDA the liquid velocities were measured in 98 grid points of (r,z) plane perpendicular to the vessel wall as well as in 11 points at the impeller discharge flow area. The latter were used as input parameters for calculations with commercial CFD code. The measured results are given and compared with CFD results and literature data.

1 UVOD

Dispergiranje plina v kapljevino z mešali v posodah s pravokotnim presekom poteka pri številnih postopkih kot npr. aeracija v čistilnih bazenih, vzreja različnih biokultur [4,10], kljub temu pa je po virih iz literature najti zelo malo del z obravnavano tematiko. Mešanje v posodi s kvadratastim presekom je po nekaterih virih obravnavano z istimi kriteriji kot v cilindrični posodi [10], po drugih virih pa to ni priporočljivo [4,8].

V tem delu je potekal eksperiment na modelnem mešalniku z nestandardno posodo kvadratastega preseka, kjer sta bila uporabljena za delovno sredstvo voda in zrak. Mešanje je bilo izvedeno z Rushtonovim mešalom. Pri mešanju v enofaznem sistemu so bile z laserskim anemometrom (LDA) izmerjene lokalne hitrosti kapljevine izstopajočega toka iz mešala tik za lopatico mešala v 11 točkah. Pri mešanju v dvofaznem sistemu so bile izmerjene hitrosti kapljevine v 98 točkah na vertikalni presečni ravnini pravokotni na steno posode. Dobljene vrednosti so podane v grafični obliki in potrjujejo podobnost z mešanjem v cilindrični posodi [1,2,3,12,14].

2 EKSPERIMENT

Eksperiment je bil izveden v pokončni posodi s kvadratastim prerezom dimenzij 150x150mm, višina vode v posodi je bila $H=150$ mm. Posoda je narejena iz stekla debeline 4 mm z ravnim dnom brez zaokroženih robov in je brez motilnikov toka, sicer značilnih za

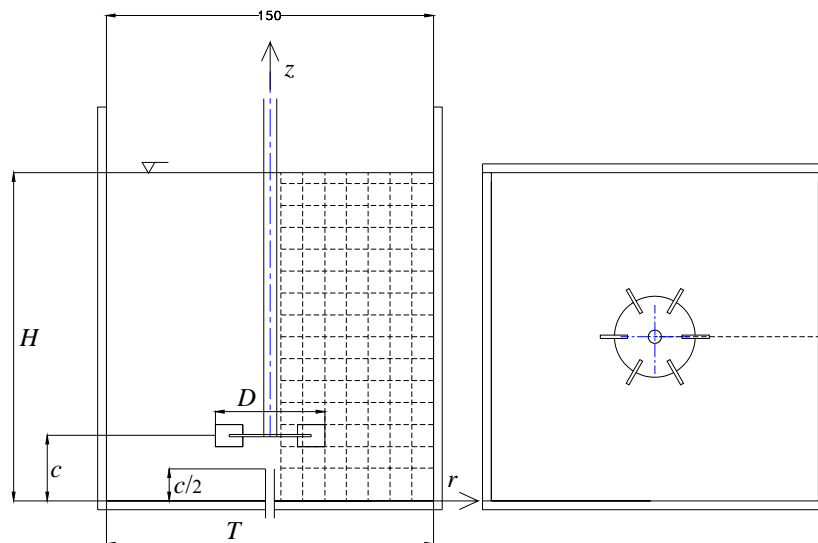
¹ Laboratorij za dinamiko fluidov in termodinamiko

² Laboratorij za toplotne stroje

³ Laboratorij za turbinske stroje

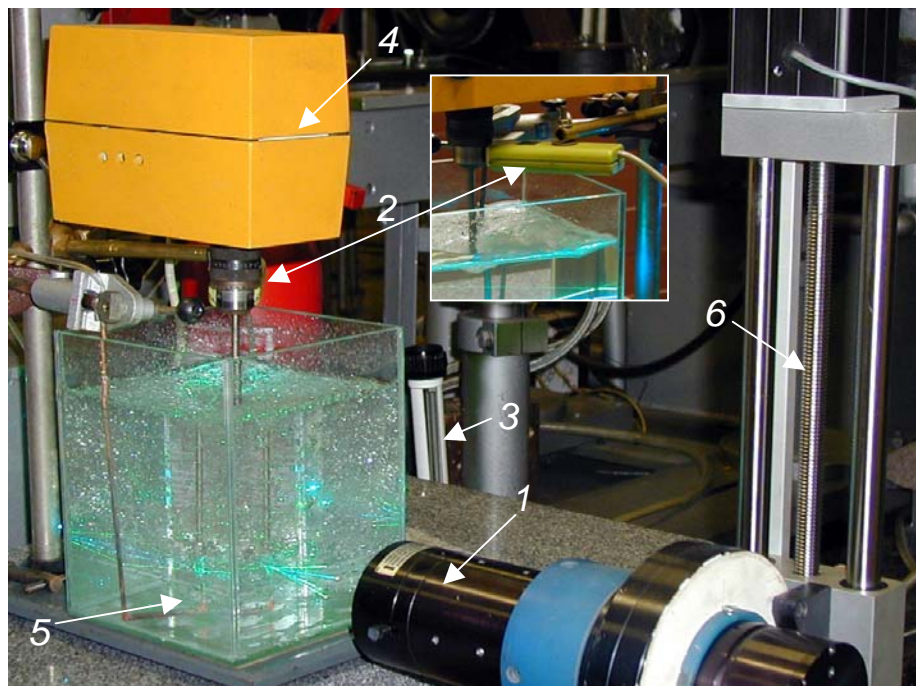
vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000-SI Ljubljana

cilindrične posode. Za mešanje je bilo uporabljeno standardno Rushtonovo mešala s šestimi lopaticami in enakih razmerij $T/D=3$, $H/T=1$ in $c/D=1$ kot pri cilindričnih posodah.



Slika 1: Geometrijski parametri mešalnika in merilna ravnina

Zrak je bil doveden s šobo notranjega premera 4 mm centralno pod osjo mešala na višini $c/2$ od dna posode. Shematski prikaz kvadrataste posode je podan na sliki 1. Pri preizkusu sta bila uporabljena vodovodna voda in zrak iz pnevmatskega voda, oboje pri temperaturi



Slika 2: Preizkusna naprava

okolice $\approx 23^{\circ}\text{C}$. Merilna sekcijska je prikazana na sliki 2, kjer posamezne pozicije pomenijo: (1) Optični del LDA anemometra nameščenega na podajalnem mehanizmu, (2) merilnik vrtilne frekvence mešala, (3) merilnik pretoka zraka (rotameter), (4) pogonski elektromotor z lastno elektronsko regulacijo nastavljenih vrtilnih frekvenc, (5) razpršilna

šoba zraka in (6) koračni podajalni mehanizem. Vrtilna frekvenca mešala je bila merjena z števnikom impulzov, ki deluje na principu odboja lastnega signala z razredom točnosti 0,1. Volumski pretok zraka je bil merjen z rotametrom razreda točnosti 2. Meritve hitrosti so potekale pri eni sami vrtilni frekvenci mešala, 600 vrt/min, pretok zraka pri dispergiranju zraka je bil 80 l/h. Merjenje hitrosti gibanja kapljevine je bilo izvedeno z dvo-komponentnim LDA anemometrom proizvajalca TSI. Sistem ima Ar-Ionski laserski izvor in za meritev uporablja žarka z valovno dolžino 488nm (modra) in 514,5nm (zeleni). V vodo so bili dodani Al_2O_3 sledilni delci s povprečnim premerom 1 μ m. Sistem omogoča meritve hitrosti z maksimalno relativno napako 1%. V vsaki merilni točki sta bili izmerjeni dve komponenti hitrosti 10000-im delcem, upoštevan je bil statistični kriterij o zavrtnitvi izmerjenih podatkov iz vzorca [5]. Če je bila po tem kriteriju zavrtnjena ena komponenta hitrosti, je bila zavrtnjena tudi druga. Natančnost podajalnega mehanizma LDA sonde je $\pm 0,025$ mm, mehanizem s koračnimi motorji je bil voden s PC-jem. Pri tem je osebni računalnik služil tudi za zbiranje izmerkov in kasnejšo obdelavo podatkov.

Hitrosti kapljevine so bile merjene v vertikalni ravnini r - z v 98 točkah pri ekvidistančnem razmiku med posameznimi točkami v radialni in vertikalni smeri 10 mm, prikazano na sliki 1. Matrika izmerjenih vrednosti obsega 7x14 izmerkov. Pri mešanju v enofaznem sistemu so bile izmerjene tudi hitrosti kapljevine izstopajočega toka iz mešala v 11 točkah pri radiju $r=26$ mm. Vsi zapisi predstavljajo najmanj 90 sekundni zajem podatkov na posamezni lokaciji v razvitem toku, rezultati so podani kot časovno povprečna vrednost. Merilna negotovost je podrobneje opisana v delu [13] in se dobro ujema po drugih virih [15].

3. ANALIZA REZULTATOV IN RAZPRAVA

Iz zapisov časovnih vrst je bila za vsako merilno lokacijo izračunane po času povprečna hitrost kapljevine [9,11,12,14,17]:

$$U_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_{k,i} \quad (1)$$

in njena fluktuacija:

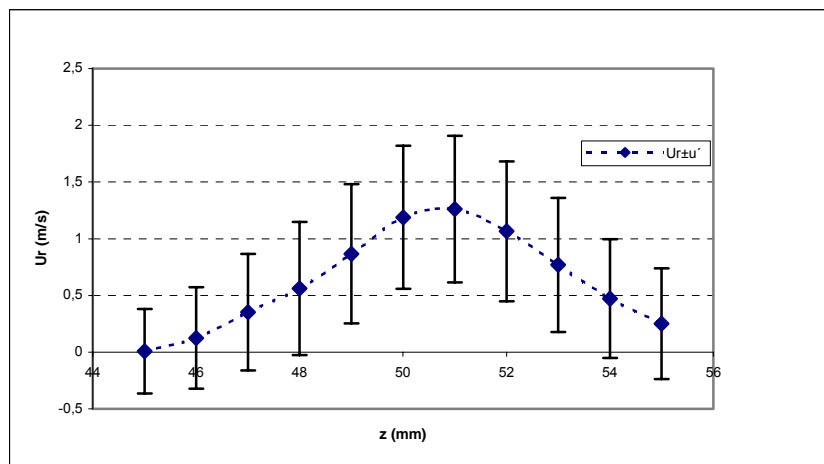
$$u'_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_{k,i} - U_k)^2} \quad (2)$$

kjer pomenijo k – komponenti hitrosti r in z , n – število izmerkov in $u_{k,i}$ – trenutna hitrost i -te meritve [11,12]. Iz izmerjenih komponent hitrosti je bila izračunane tudi kinetična energija turbulence:

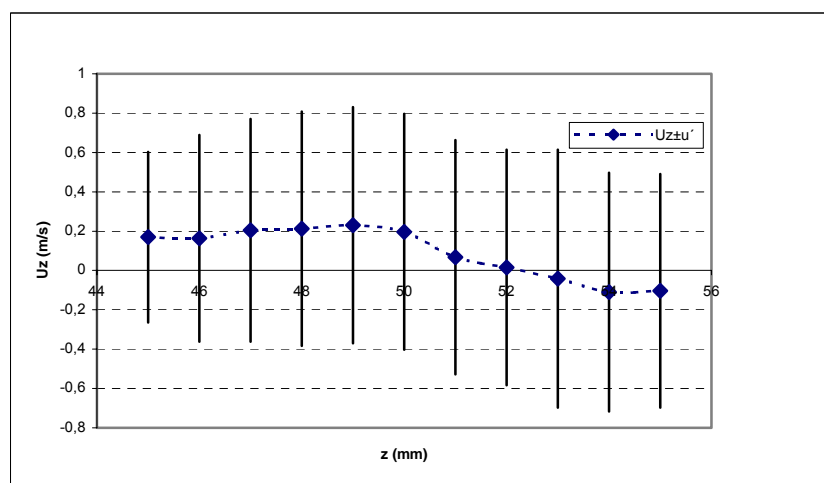
$$k = \frac{(u_r'^2 + u_z'^2)}{2} \quad (3)$$

Pri mešanju v enofaznem sistemu so bile za namene robnih parametrov v okviru CFD analize izmerjene hitrosti kapljevine izstopajočega toka iz mešala. Profila radialne komponente hitrosti v_r in aksialne komponente hitrosti v_z z njunima fluktuacijama sta prikazani na slikah 3 in 4. Radialna komponenta hitrosti dosega maksimalne vrednosti na zgornji polovici lopatice, kar se ujema z podatki za mešanje v cilindričnih posodah tudi po drugih virih [7,14,17]. Razvidno je, da sta v področju iztekajočega toka iz mešala razreda velikosti fluktuacije in hitrosti približno enaka. Vsak posamičen prehod lopatice merilne lokacije povzroči lokalni izstopajoč radialni tok kapljevine. Gre za periodičen pojav, pulzirajoč tok s frekvenco, ki je enaka frekvenci prehajanja lopatic. Vrednosti se dobro ujemajo s primerljivimi po virih iz literature[14].

V točkah vertikalne r - z ravnine s slike 1, so bile izmerjene hitrosti kapljevine tako v enofaznem kot tudi v dvofaznem sistemu. Pri slednjem je bila porazdelitev plinaste faze po kapljevini dokaj homogena, lokalni delež plinaste faze na merjenih lokacijah pa še dovolj majhen, da je še bilo možno izmeriti hitrosti kapljevine na vseh merilnih lokacijah.



Slika 3: Profil radialne komponente hitrosti in njene fluktuacije izstopajočega toka iz mešala v enofaznem sistemu pri $r=26$ mm

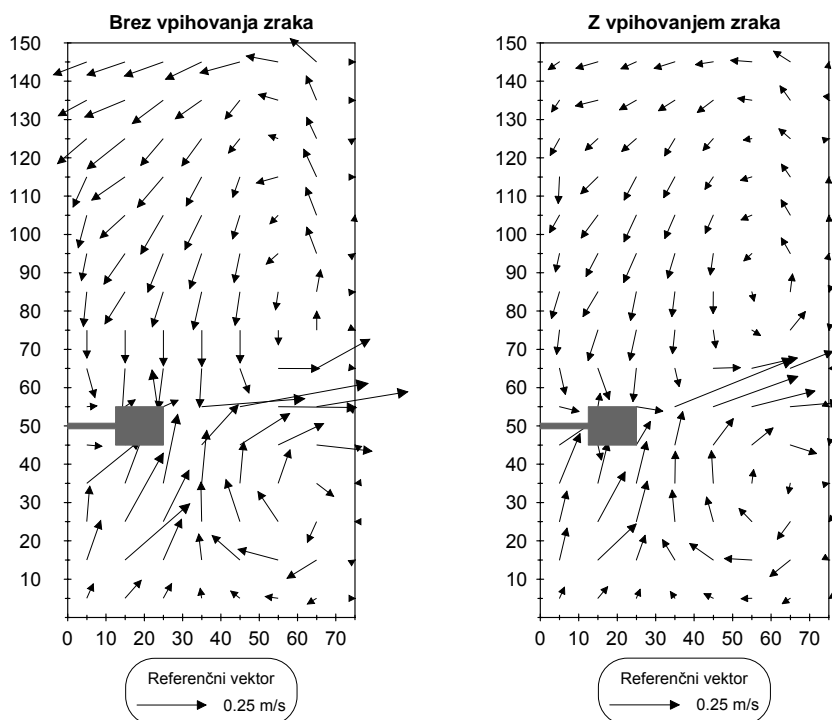


Slika 4: Profil aksialne komponente hitrosti in njene fluktuacije izstopajočega toka iz mešala v enofaznem sistemu pri $r=46$ mm

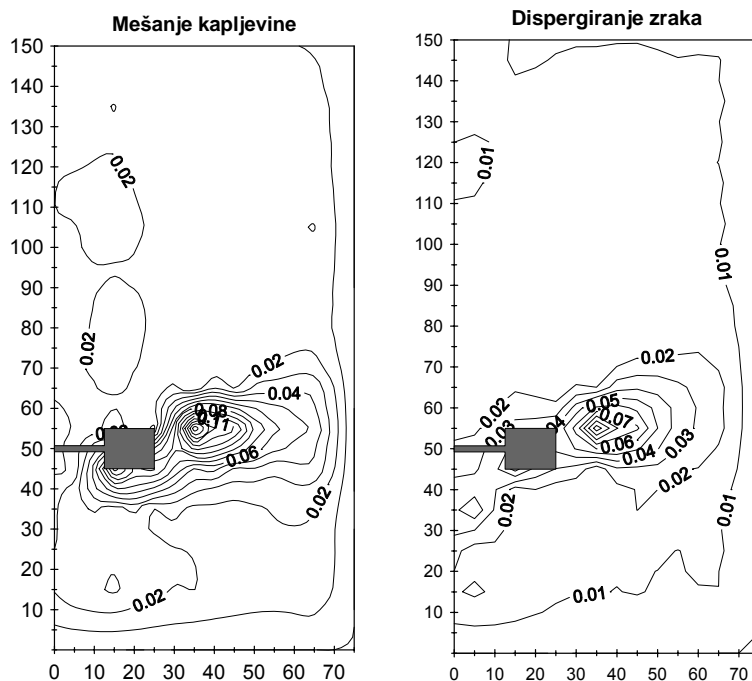
Izmerjene hitrosti so za oba sistema prikazane na sliki 5. Razvidno je, da so hitrosti kapljevine največje v področju izstopajočega toka približno na sredini med mešalom in steno posode. Hitrosti kapljevine so pri mešanju v enofaznem sistemu večje kot pri dispergiranju, razlika v hitrostih je predvsem očitnejša v področju pod ravnino mešala. V dvofaznem sistemu je opazen tudi vpliv vzgona mehurčkov na izstopajoč dvofazni tok saj izstopajoči dvofazni tok iz mešala nekoliko spremeni smer proti gladini. V obeh primerih je razvidna tudi cirkulacija nad in pod mešalom. Pri dispergiranju zraka hitrosti kapljevine izstopajočega dvofaznega toka ni bilo moč meriti v neposredni okolici mešala. Razlog je v prevelikem odklonu žarkov na stični površini kapljevina/plin, kot tudi raztros žarkov, ki so ga povzročali posamezni mehurčki, na poti do merilne lokacije.

Turbulentna kinetična energija računane po en.3 je prikazana na sliki 6. Najvišje vrednosti dosega v področju izstopajočega toka iz mešala, z večanjem radija se manjša in dosega

najmanjše vrednosti v področju nad mešalom ter pod mešalom, kjer prevladuje dokaj konstanten tok kapljevine. Na splošno dosega turbulentna kinetična energija v dvofaznem toku nižje vrednosti kot v enofaznem, s porazdelitvijo ki je podobna kot v enofaznem sistemu.

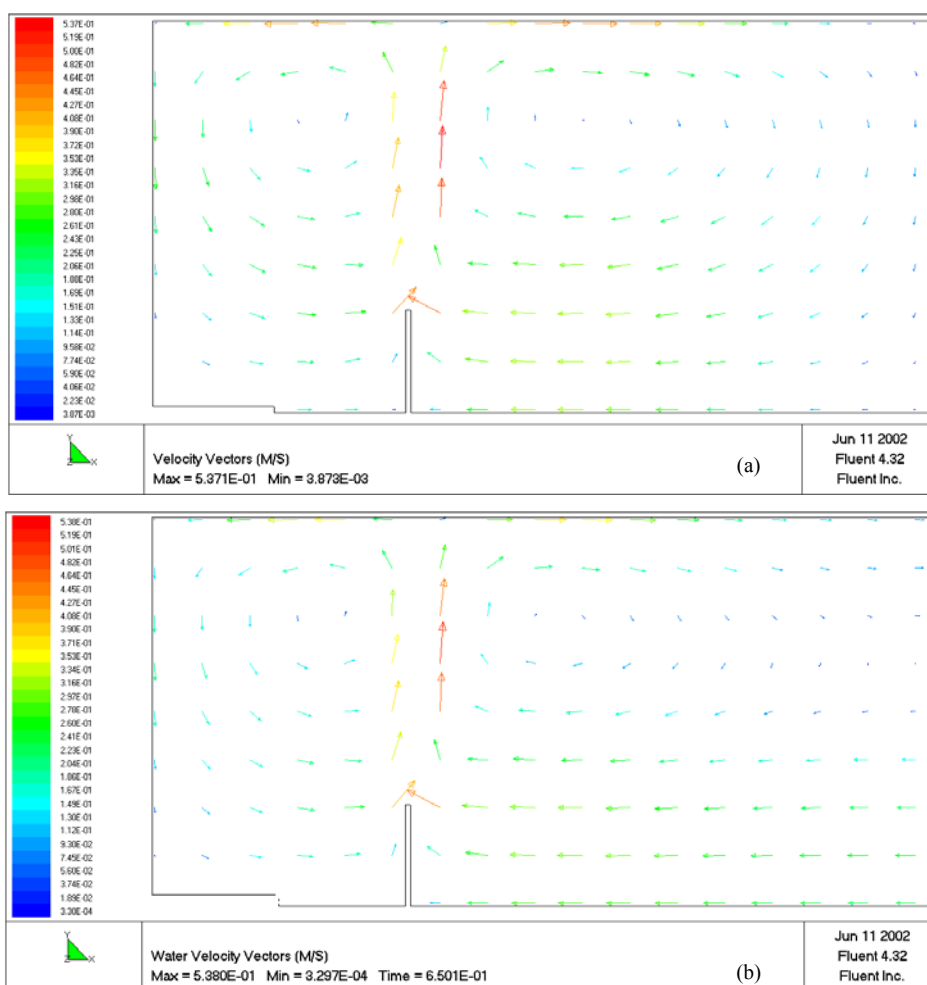


Slika 5: Vektorji hitrosti vode pri mešanju kapljevine in dispergiranju zraka



Slika 6: Profili turbulentne kinetične energije (m^2/s^2) v pri mešanju kapljevine in pri dispergiranju zraka

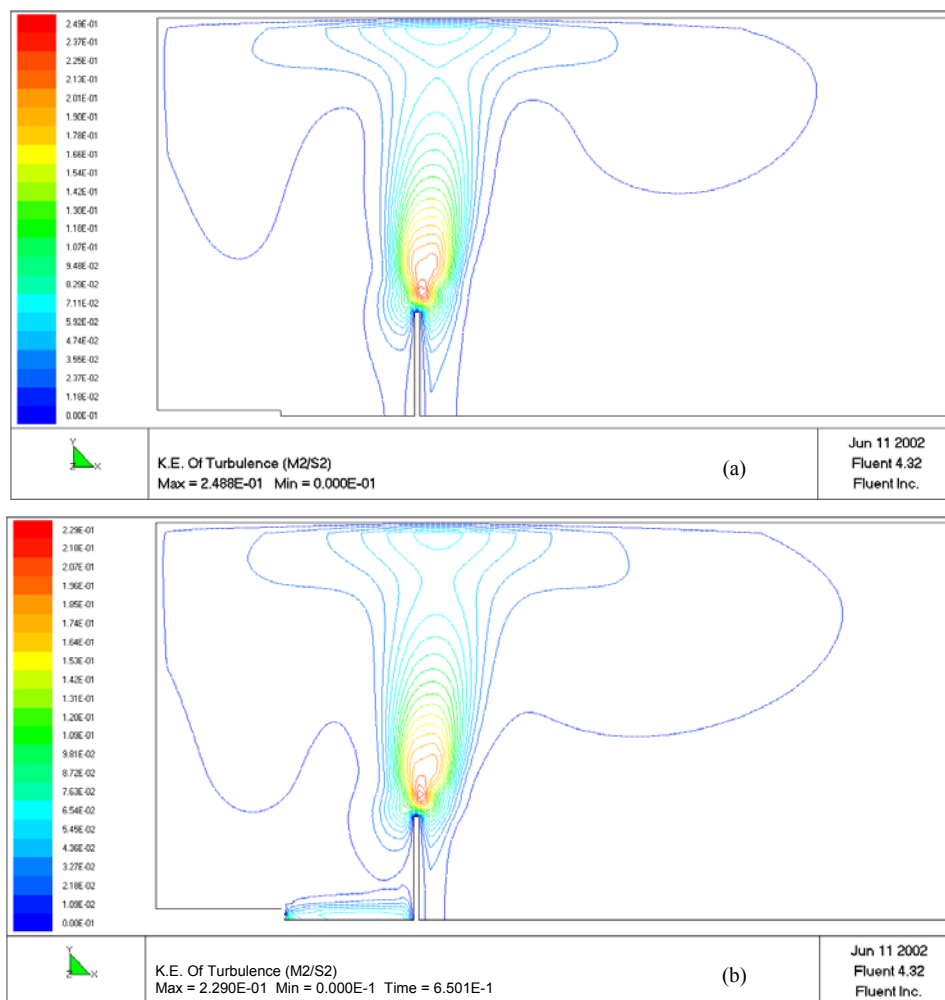
Računalniški izračun [6] Izračun je bil narejen z komercialnim računalniškim paketom FLUENT, ki temelji na metodi končnih volumnov. Za računsko mrežo ($r, z = 75 \times 150$ celic) je bil uporabljen strukturiran sistem celic. Za obravnavo turbulence je bil po priporočilu [7] uporabljen standardni modela $k-\varepsilon$ ter standardna zidna funkcija. Naš primer je bil obravnavan kot osno simetričen problem, za delovno tekočino sta bila uporabljena voda in zrak ustreznih transportnih lastnosti. Za robne pogoje pri mešanju enofaznega in dvofaznega sistema so bile vnesene izmerjene hitrosti kapljevine (v_r, v_z) izstopajočega toka iz mešala v enofaznem sistemu na ustreznih lokacijah računske mreže. Pri izračunu tokovnega polja v dvofaznem sistemu so bile vnesene izmerjene hitrosti kapljevine (v_r, v_z) izstopajočega toka iz mešala na ustreznih lokacijah računske mreže. Konvergenca je bil dosežena z normaliziranim ostankom manjšim kot $1 \cdot 10^{-4}$. Za dvofazni sistem je potekal izračun kot časovno odvisen problem s korakom $1 \cdot 10^{-4}$ s.



Slika 7: Izračunane hitrosti vode pri mešanju a) v enofaznem sistemu in b) v dvofaznem sistemu

Na sliki 7 so prikazani vektorji hitrosti kapljevine na lokacijah računske mreže, ki ustrezajo merilnim. Izračunana maksimalna hitrost kapljevine pri mešanju brez dodajanja zraka je 0,53 m/s in ustreza izmerjenim vrednostim, izstopajoč tok iz mešala je rahlo usmerjen proti gladini. Občutne pa so razlike v velikosti in smeri hitrosti v sredinskem delu posode, kjer so izmerjene vrednosti večje od izračunanih.

Turbulentna kinetična energija dosega v eno in dvo faznem sistemu maksimalne vrednosti v področju izstopajočega toka iz mešal ter se z večanjem radija manjša. Vrednosti so v dvofaznem sistemu manjše kot v eno faznem. Primerjava z izmerjenimi vrednostni kaže, da so izračunane vendarle nekoliko manjše, sicer porazdelitev sovпада z izmerjenimi vrednostmi.



Slika 8: Turbulentna kinetična energija pri mešanju v a) enofaznem sistemu in b) v dvofaznem sistemu

Po viru [7] so bile z LDA izvedene meritve hitrosti in CFD analizo za mešalnik s cilindrično posodo enake velikosti kot v tem delu. Ugotovitev, da so merjene hitrosti nekoliko večje od izračunanih (Fluent, $k-\varepsilon$ in RND $k-\varepsilon$ model), se ujema tudi z našimi izsledki.

4. ZAKLJUČEK

Mešanje kapljevine in dispergiranje plina v kapljevino je bilo izvedeno z Rushtonovim mešalom v posodi kvadratastega preseka. Kot delovno sredstvo sta bila uporabljena voda in zrak.

Hitrosti kapljevine so bile izmerjene v 98 točkah $r-z$ ravnine pravokotne na steno posode, ter v 11 točkah tik za lopatico mešala v področju iztekanja iz mešala v enofaznem sistemu.

Velikost merjenih komponent hitrosti je odvisna od lokacije meritve in kažejo značilno področje izstopajočega toka iz mešala z največjimi vrednostmi tako hitrosti kot tudi turbulentne kinetične energije. Vrednosti hitrosti in turbulentne kinetične energije so v dvofaznem toku nižje kot v enofaznem.

S komercialnim računalniškim paketom je bil izdelan izračun za obravnavo mešanja v cilindrični posodi v enofaznem in dvofaznem sistemu. Glede na razliko v posodah se izmerjene hitrosti kapljevine v točkah mreže presenetljivo dobro ujemajo z rezultati CFD analize, kot tudi z izmerjenimi vrednostmi po virih iz literature.

Zahvala

To delo je del večjega projekta J2-7517, ki ga financira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije.

LITERATURA

- [1] Bombač, A., Vpliv geometrijskih parametrov na Newtonovo število pri aeraciji v posodi z mešali, *Strojniški vestnik* (44) št. 3-4, **1998**, 105--116
- [2] Bombač, A., Žun, I., Filipič, B., Žumer, M., Gas-Filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Aerated Stirred Vessel, *AIChE J.*, **1997**, 2921--2931
- [3] Bombač, A., Žun, I. Gas-filled Cavity Structures and Local Void Fraction Distribution in Vessel with Dual-Impellers, *ChemEngSci*, (55), **2000**, 2995--3001
- [4] Burley, R., Klapsis, A. Flow distribution studies in fish rearing tanks. Part 2. Analysis of hydraulic performance of 1m square tanks, *Aquacult.Eng.*, Vol.4 (2), **1985**, 113--134
- [5] Coleman, H.W., Steele, W.G. Jr., Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers, Wiley, New York, **1989**
- [6] FLUENT, User's Guide Volume 1, Fluent Inc., Lebanon, **1997**
- [7] Jaworski, Z., Dyster, K.N., Moore, I.P.T., Nienow, A.W., Wyszynski, M.L. The use of angle resolved LDA data to compare two differential turbulence models applied to sliding mesh CFD flow simulation in a stirred tank. *Mixing 97 Multiphase Systems*, Cachan cedex: Technique et Documentation-Lavoisier, **1997**, 187--194
- [8] Koloini, T., Plazl, I., Žumer, M. Power-consumption, gas hold-up and interfacial area in aerated non-newtonian suspensions in stirred tanks of square cross-section. *Chem.Eng.Res.Des.*, Vol.67 (5), **1989**, 526--536
- [9] Kresta, S.M., Wood, P.E. The flow field produced by a pitched blade turbine - characterization of the turbulence and estimation of the dissipation rate, *Chem.Eng.Sci.*, Vol.48 (10), **1993**, 1761--1774
- [10] Leentvaar, J., Ywema, T.S.J. Some dimensionless parameters of impeller power in coagulation-flocculation processes, *Water.Res.*, Vol.14 (2), **1980**, 135--140
- [11] Mavros, P., Xuereb, C., Fort, I., Bertrand, J. Investigation by laser Doppler velocimetry of the effects of liquid flow rates and feed positions on the flow patterns induced in a stirred tank by an axial-flow impeller, *Chem.Eng.Sci.*, Vol.57 (18), **2002**, 3939--3952
- [12] Morud, K.E., Hjertager, B.H. LDA measurements and CFD modelling of gas-liquid flow in a stirred vessel, *Chem.Eng.Sci.*, Vol.51(2), **1996**, 233--249
- [13] Rodman Oprešnik, S. Raziskave turbulentnih struktur radialnega vtoka olja v ozek vodoravni kanal, Doktorsko delo, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, **2002**
- [14] Schafer, M., Hofken, M., Durst, F. Detailed LDV measurements for visualization of the flow field within a stirred-tank reactor equipped with a Rushton turbine, *Chem.Eng.Res.Des.*, Vol.75 (A8), **1997**, 729--736
- [15] Vassallo, P.F., Kumar, R. Liquid and gas velocity measurements using LDV in air-water duct flow, *Exp.Therm.Fluid.Sci.*, Vol.19 (2), **1999**, 85--92
- [16] Stephens, R., Imberger, J. Reservoir destratification via meh mechanical mixers. *J.Hydraul.Eng-ASCE*, Vol.119 (4), **1993**, 438--457
- [17] Wernersson, E.S., Tragardh, C. Turbulence characteristics in turbine-agitated tanks of different sizes and geometries, *Chem.Eng.J.*, Vol.72 (2), **1999**, 97--107



Analiza nosilnosti AB prečnih prerezov

S. Bratina , M. Saje in I. Planinc¹

Bearing capacity of RC cross-sections

Povzetek. V članku analiziramo nosilnost armiranobetonskih prečnih prerezov pri centrični in enojno ekscentrični obremenitvi. Izkaže se, da je nosilnost prečnega prereza izčrpana, ko postane determinanta tangentne konstitucijske matrike prečnega prereza enaka nič. Nabor pripadajočih mejnih deformacij se skorajda v popolnosti ujema z mejnimi deformacijami, ki jih za dimenzioniranje armiranobetonskih prečnih prerezov priporočajo evropski standardi Eurocode 2. Ugotovili smo tudi, da konstitutivna osna sila in konstitutivni upogibni moment dosežeta svoji stacionarni vrednosti takrat, ko je izčrpana nosilnost prečnega prereza.

Abstract. The analysis of the ultimate bearing capacity of the centrally and eccentrically loaded reinforced concrete cross-sections is presented. The cross-section reaches its ultimate bearing capacity when the determinant of the tangent constitutive matrix of the cross-section becomes zero. The corresponding strains are called the limit strains and appear to be identical to the strains at the ultimate limit state of the cross-section according to the european standard Eurocode 2. We show, that the constitutive axial force and bending moment of the cross-section reach their own peak values when the tangent constitutive matrix of the cross-section loses its definiteness.

1 Uvod

Pri nelinearni analizi armiranobetonskih konstrukcij nas poleg mejne nosilnosti celotne konstrukcije zanima tudi mejna nosilnost posameznih prečnih prerezov konstrukcije. Znano je, da konstrukcija doseže svojo mejno nosilnost takrat, ko determinanta tangentne togostne matrike konstrukcije postane enaka nič ($\det \mathbf{K}_T = 0$). Vsako nadaljnje povečevanje obtežbe ima za posledico porušitev konstrukcije. V kolikor se omejimo na nivo prečnega prereza konstrukcije pravimo, da smo pri dovolj veliki obremenitvi dosegli mejno nosilnost obravnavanega prečnega prereza oziroma da je prišlo do materialne oziroma lokalne nestabilnosti prečnega prereza. Mejna nosilnost prečnega prereza konstrukcije pa nujno ne pomeni tudi porušitve konstrukcije. Glede na zasnovo je konstrukcija zmožna del obremenitev iz najbolj obremenjenih

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo

območij, pri katerih je že prekoračena mejna nosilnost prereza, prenesti na manj obremenjena območja. Pri tem pa se lahko njena nosilnost celo poveča [2]. Preden konstrukcija doseže svojo mejno nosilnost se lahko zgodi, da je že prišlo do prekoračitve mejne nosilnosti večjega števila prečnih prerezov.

V evropskih standardih Eurocode 2 [5] je mejna nosilnost prereza določena z mejnimi deformacijami. Za primer osno-upogibne obremenitve prečnega prereza je predpisana mejna deformacija v betonu $D_{cu} = -3.5 ‰$, v armaturi pa ni omejena oziroma, če dopustimo utrjevanje armature ($E_p > 0$) je $D_{yu} = 10 ‰$. Poleg tega pa zaradi enostavnosti računa upoštevamo za konstitutivne modele betona in armature poenostavljene modele, ki jih pogosto imenujemo delovni diagrami.

V tem članku bomo izpeljali pogoje, ki določajo mejno nosilnost armiranobetonskega prečnega prereza. Dodatno bomo predstavili postopek za določitev obtežno-deformacijske krivulje prečnega prereza. Ustreznost pogojev in primernost postopka bomo predstavili s pomočjo enostavnega računskega primera.

Članek je poleg Uvoda razdeljen še na tri kratka poglavja. V drugem poglavju na kratko obravnavamo materialno stabilnost in nosilnost prereza. V tretjem poglavju na primeru enostavnega armiranobetonskega prečnega prereza določimo mejno nosilnost prečnega prereza. Na koncu podamo zaključke.

2 Materialna stabilnost in nosilnost prečnega prereza

2.1 Materialna stabilnost

Skladno z Druckerjevim stabilnostnim pogojem govorimo o stabilnih materialih takrat, ko je za poljuben del konstrukcije delo prirastkov zunanje obtežbe ($\Delta p_x, \Delta p_z, \Delta m_y$ in ΔS_i) na poljubnih prirastkih posplošenih pomikov ($\delta u, \delta w, \delta \varphi$ in δu_i) pozitivno [3], tj.

$$\delta W_z = \int_{L_1}^{L_2} \Delta p_x \delta u dx + \int_{L_1}^{L_2} \Delta p_z \delta w dx + \int_{L_1}^{L_2} \Delta m_y \delta \varphi dx + \sum_{i=1}^6 \Delta S_i \delta u_i > 0. \quad (1)$$

S pomočjo izreka o virtualnem delu, po katerem je delo notranjih sil enako delu zunanjih sil, za stabilne materiale tudi velja

$$\delta W_z = \delta W_n = \int_{L_1}^{L_2} \Delta \mathcal{N}_c \delta \varepsilon dx + \int_{L_1}^{L_2} \Delta Q_c \delta \gamma dx + \int_{L_1}^{L_2} \Delta \mathcal{M}_c \delta \kappa dx > 0, \quad (2)$$

pri tem so $\Delta \mathcal{N}_c, \Delta Q_c$ in $\Delta \mathcal{M}_c$ prirastki konstitutivne osne in prečne sile ter upogibnega momenta prečnega prereza nosilca, $\delta \varepsilon, \delta \gamma$ in $\delta \kappa$ pa prirastkom posplošenih pomikov pripadajoči prirastki osne, strižne in upogibne deformacije. Ko zahtevo (2) priredimo na nivo prečnega prereza nosilca, dobimo t.i. lokalne stabilnostne pogoje [3]. Če zanemarimo strižne deformacije, mora biti za stabilne materiale v vsaki točki referenčne osi nosilca izpolnjena zahteva

$$\Delta \mathcal{N}_c \delta \varepsilon + \Delta \mathcal{M}_c \delta \kappa > 0. \quad (3)$$

Prirastke konstitutivnih količin izpeljemo z linearizacijo konstitutivnih enačb $\mathcal{N}_c = \int_A \sigma_c dA$ in $\mathcal{M}_c = \int_A z \sigma_c dA$, torej

$$\Delta \mathcal{N}_c = \left(\int_A \frac{\partial \sigma_c}{\partial D} dA \right) \Delta \varepsilon + \left(\int_A z \frac{\partial \sigma_c}{\partial D} dA \right) \Delta \kappa = C_{11} \Delta \varepsilon + C_{12} \Delta \kappa \quad (4)$$

$$\Delta \mathcal{M}_c = \left(\int_A z \frac{\partial \sigma_c}{\partial D} dA \right) \Delta \varepsilon + \left(\int_A z^2 \frac{\partial \sigma_c}{\partial D} dA \right) \Delta \kappa = C_{21} \Delta \varepsilon + C_{22} \Delta \kappa. \quad (5)$$

Funkcije $C_{11}(x)$, $C_{12}(x) = C_{21}(x)$ in $C_{22}(x)$ predstavljajo komponente *tangentne konstitutivne matrike prečnega prereza* nosilca $\mathbf{C}(x)$. Komponente C_{11} , C_{12} , C_{22} so funkcije trenutne razporeditve *tangentnega materialnega modula* $E_t = \partial \sigma / \partial D$ in geometrije prereza.

Če izraza (4) in (5) upoštevamo v izrazu (3), lahko lokalni stabilnostni pogoj zapišemo v obliki

$$\{\Delta \varepsilon \quad \Delta \kappa\} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon \\ \delta \kappa \end{Bmatrix} > 0. \quad (6)$$

Ker sta prirastka deformacijskih količin $(\Delta \varepsilon, \Delta \kappa)$ oziroma $(\delta \varepsilon, \delta \kappa)$ poljubna, sledi, da mora biti za stabilne materiale tangentna konstitutivna matrika prečnega prereza \mathbf{C} pozitivno definitna. To pa pomeni, da morajo biti njeni vodilni glavni minorji pozitivni [6]

$$C_{11} > 0, \quad \det \mathbf{C} = C_{11} C_{22} - C_{12}^2 > 0. \quad (7)$$

2.2 Mejna nosilnost prečnega prereza

Nosilnost prečnega prereza je izčrpana, ko tangentna konstitutivna matrika prečnega prereza \mathbf{C} ni več pozitivno definitna, torej ko postane vsaj eden izmed izrazov C_{11} ali $\det \mathbf{C}$ enak nič. Možni kriteriji, da prečni prerez doseže mejno nosilnost, torej so:

$$C_{11} = 0 \quad \text{in} \quad \det \mathbf{C} \geq 0 \quad \text{ali} \quad \det \mathbf{C} = 0 \quad \text{in} \quad C_{11} \geq 0. \quad (8)$$

V nadaljevanju pokažemo povezavo med pogojema (8). Izhajamo iz začetnega neobremenjenega stanja, ko je material stabilen. Pri tem je specifična sprememba dolžine poljubnega materialnega vlakna enaka nič ($D = \varepsilon + z \kappa = 0$ oziroma $\varepsilon = 0$ in $\kappa = 0$) in konstitutivna matrika prečnega prereza \mathbf{C} je pozitivno definitna, torej velja:

$$\text{začetno stanje:} \quad C_{11}(D=0) > 0, \quad \det \mathbf{C}(D=0) > 0. \quad (9)$$

Ko obremenitev prečnega prereza dovolj povečamo, pri realnih materialih prav gotovo dosežemo mejno nosilnost prečnega prereza. Enostavno lahko pokažemo, da so zahteve v pogojih (8) v primeru, ko so C_{11} , C_{22} , C_{12} , C_{21} in $\det \mathbf{C}$ zvezne funkcije, identične. Če zahtevamo $C_{11} = 0$ (prvi pogoj iz (8)), potem z enačbo (7) ugotovimo $\det \mathbf{C} = -C_{12}^2$. Če je $C_{12} > 0$ ali $C_{12} < 0$, je $\det \mathbf{C} < 0$, če pa je $C_{12} = 0$, je tudi $\det \mathbf{C} = 0$, torej velja $C_{11} = 0 \rightarrow \det \mathbf{C} \leq 0$. Torej, da zado- stimo pogojju $C_{11} = 0$, mora pri tem biti determinanta tangentne konstitutivne matrike prečnega

prereza nič ali negativna. To pa pomeni, da smo že v območju mehčanja prečnega prereza oziroma smo prekoračili mejno nosilnost prečnega prereza. Glede na pogoj $\det \mathbf{C} \geq 0$ in glede na izpeljano dejstvo, da pri pogoju $C_{11} = 0$ sledi $\det \mathbf{C} \leq 0$, lahko prvi pogoj iz (8) zapišemo v naslednji obliki:

$$C_{11} = 0 \quad \text{in} \quad \det \mathbf{C} = 0. \quad (10)$$

Glede na drugo zahtevo iz (8) doseže prečni prerez mejno nosilnost tudi pri pogojih $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} \geq 0$. Sedaj iz enačbe $\det \mathbf{C} = 0$ sledi $C_{11} C_{22} = C_{12}^2$. Ker $C_{12} \in \mathfrak{R}$, velja $C_{12} = \pm \sqrt{C_{11} C_{22}}$. Pri tem sta lahko oba parametra C_{11} in C_{22} bodisi pozitivna ali negativna. Ker pri računu mejne nosilnosti prereza izhajamo iz deviškega stanja, ko je prerez še neobremenjen ($C_{11}(D=0) > 0$), lahko drugi pogoj iz (8) zapišemo v obliki

$$\det \mathbf{C} = 0 \quad \text{in} \quad C_{11} > 0. \quad (11)$$

Iz povedanega zaključimo, da je edini pogoj za določitev mejne nosilnosti prečnega prereza: $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} \geq 0$. Mejno nosilnost prečnega prereza in pripadajoče mejne deformacije prečnega prereza torej določimo z iskanjem stacionarne vrednosti funkcionala nosilnosti prečnega prereza $F(\varepsilon, \kappa) = C_{11} C_{22} - C_{12}^2$.

Pri analizi nosilnosti je tudi pomembno, da konstitutivna osna sila $\mathcal{N}_c(\varepsilon, \kappa)$ in konstitutivni upogibni moment $\mathcal{M}_c(\varepsilon, \kappa)$ dosežeta svoji stacionarni vrednosti takrat, ko je izčrpana nosilnost prečnega prereza ($\det \mathbf{C} = 0$) (dokaz v [2]). Spreminjanje nosilnosti prereza v odvisnosti od deformacij opišemo z obtežno–deformacijskimi krivuljami. Te prikazujejo zvezo med konstitutivnim upogibnim momentom prečnega prereza \mathcal{M}_c in ukrivljenostjo referenčne osi nosilca κ pri izbrani konstitutivni osni sili \mathcal{N}_c . Bolj neobičajna je zveza med osno silo \mathcal{N}_c in specifično spremembo dolžine referenčne osi nosilca ε pri izbranem \mathcal{M}_c .

2.3 Obtežno–deformacijska krivulja prečnega prereza

Za določitev obtežno–deformacijske krivulje prečnega prereza $\mathcal{M}_c - \kappa$ pri izbrani osni sili $\mathcal{N}_c = \mathcal{N}_{c, \text{zbr}}$ je potrebno rešiti konstitutivno enačbo

$$f_1(\kappa, \mathcal{M}) = \mathcal{M}_c(\varepsilon(\kappa), \kappa) - \mathcal{M} = 0. \quad (12)$$

Enačbo (12) rešujemo z metodo ločne dolžine, pri kateri obtežno–deformacijsko krivuljo reparametriziramo z naravnim parametrom s . V j -tem inkrementu za dani inkrement ločne dolžine Δs^j izračunamo začetni inkrement ukrivljenosti $\Delta \kappa_1^j$ in začetni inkrement upogibnega momenta $\Delta \mathcal{M}_1^j$ s pomočjo Eulerjevega prediktorja in vezne enačbe g_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \kappa} \Delta \kappa_1^j + \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{M}} \Delta \mathcal{M}_1^j = 0, \quad (13)$$

$$g_1 = \left(W \Delta \kappa_1^j \right)^2 + \left(\beta \Delta \mathcal{M}_1^j \right)^2 - (\Delta s^j)^2 = 0. \quad (14)$$

V nadaljevanju začetne inkremente s pomočjo Newtonovega korektorja in vezi g_1 z iteriranjem ($i = 1, 2, \dots$) popravimo do željene natančnosti:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \kappa} \delta \kappa_{i+1}^j + \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{M}} \delta \mathcal{M}_{i+1}^j = -f_1, \quad (15)$$

$$g_1 = \left(W \Delta \kappa_{i+1}^j \right)^2 + \left(\beta \Delta \mathcal{M}_{i+1}^j \right)^2 - (\Delta s^j)^2 = 0. \quad (16)$$

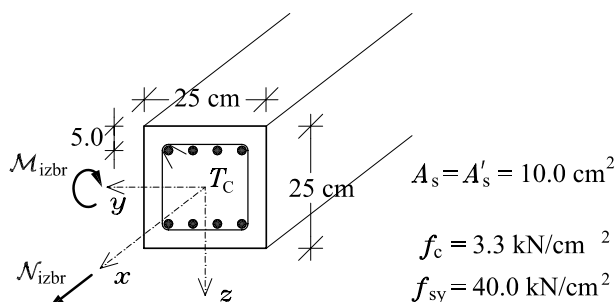
Popravljenе vrednosti inkrementa ukrivljenosti in inkrementa upogibnega momenta izračunamo z enačbama: $\Delta \kappa_{i+1}^j = \Delta \kappa_i^j + \delta \kappa_{i+1}^j$ in $\Delta \mathcal{M}_{i+1}^j = \Delta \mathcal{M}_i^j + \delta \mathcal{M}_{i+1}^j$.

Vrednost specifične spremembe dolžine referenčne osi nosilca $\varepsilon(\kappa)$ pri $\kappa_{i+1}^j = \kappa^{j-1} + \Delta \kappa_{i+1}^j$ določimo z rešitvijo konstitutivne enačbe $f_2(\kappa) = \mathcal{N}_c(\varepsilon(\kappa_{i+1}^j), \kappa) - \mathcal{N}_{izbr} = 0$. Pri tem kot rešitev izberemo tisto vrednost, ki na naraščajočem delu krivulje $\mathcal{M}_c - \kappa$ zadošča pogoju $\det \mathbf{C} > 0$, na padajočem delu pa pogoju $\det \mathbf{C} < 0$.

Podobno izračunamo tudi obtežno–deformacijsko krivuljo prečnega prereza $\mathcal{N}_c - \varepsilon$ pri izbranem upogibnem momentu $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}_{izbr}$.

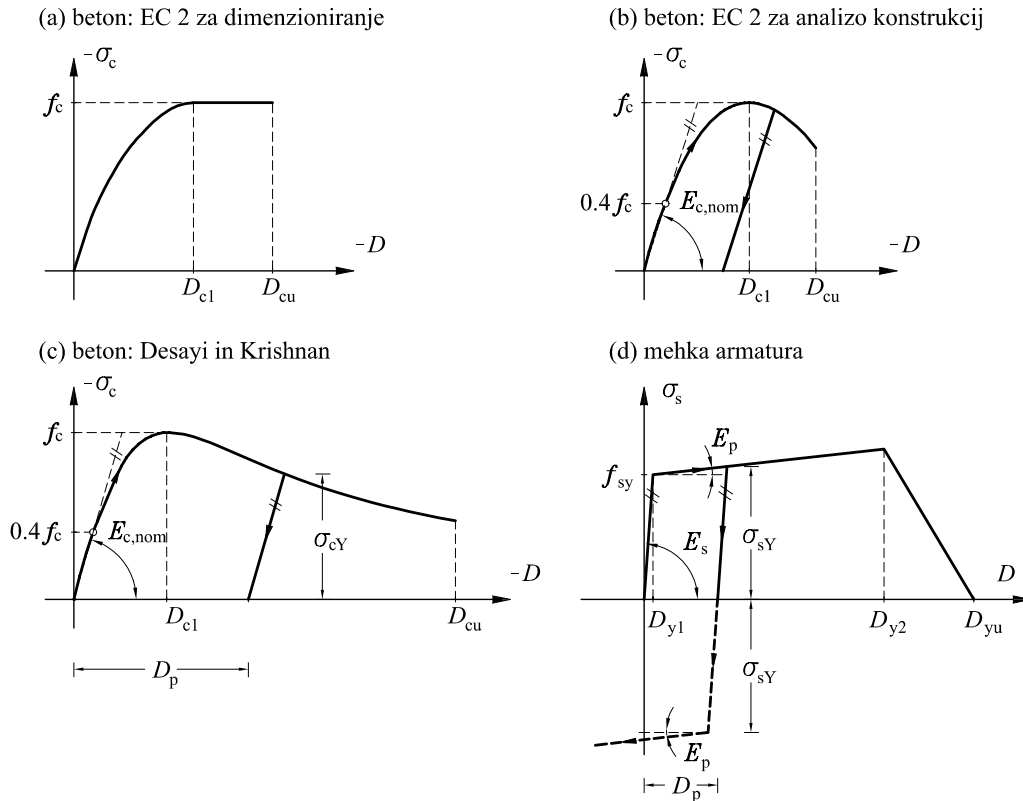
3 Računski primer

Za kvadratni armiranobetonski prečni prerez, ki je prikazan na sliki 1, bomo najprej izračunali obtežno–deformacijski krivulji $\mathcal{N}_c - \varepsilon$ in $\mathcal{M}_c - \kappa$. Nato bomo določili mejno nosilnost prečnega prereza in jo predstavili v obliki interakcijskega diagrama nosilnosti ter ugotovili, kako izbira konstitutivnega modela betona vpliva na mejno nosilnost prečnega prereza.



Slika 1 : Armiranobetonski prečni prerez. Geometrijski in materialni podatki.

Na sliki 1 so prikazani osnovni geometrijski in materialni podatki o obravnavanem armiranobetonskem prečnem prerezu. Glede na izbrano tlačno trdnost betona in armature v nadaljevanju določimo s pomočjo napotkov iz literature [1, 4, 5] še preostale materialne parametre betona oziroma armature in sicer: $E_{cm} = 3150 \text{ kN/cm}^2$, $E_{c,nom} = 2875 \text{ kN/cm}^2$, $D_{c1} = -2.2 \text{ ‰}$, $D_{cu} = -3.5 \text{ ‰}$ [5] oziroma -8 ‰ [4], $D_{cr}' = 0.055 \text{ ‰}$, $D_{max} = 0.7 \text{ ‰}$, $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$, $E_p = 0 \text{ kN/cm}^2$, $D_{y2} = 40 \text{ ‰}$ in $D_{yu} = 200 \text{ ‰}$ (glej sliko 2).



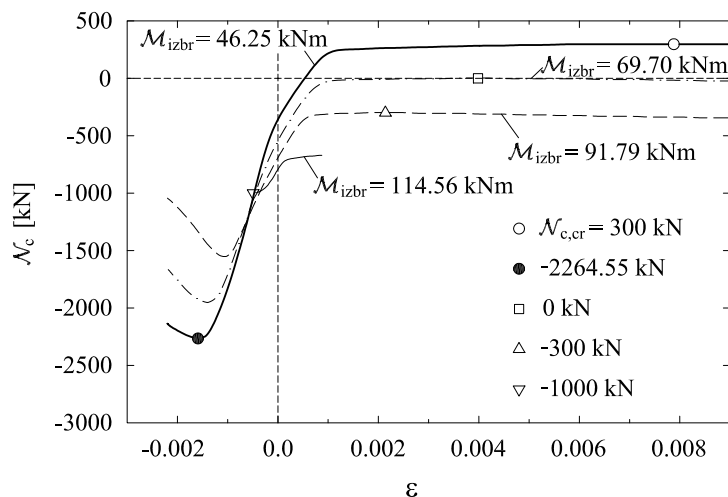
Slika 2 : Uporabljeni konstitutivni modeli betona in armature.

3.1 Obtežno–deformacijske krivulje prečnega prereza

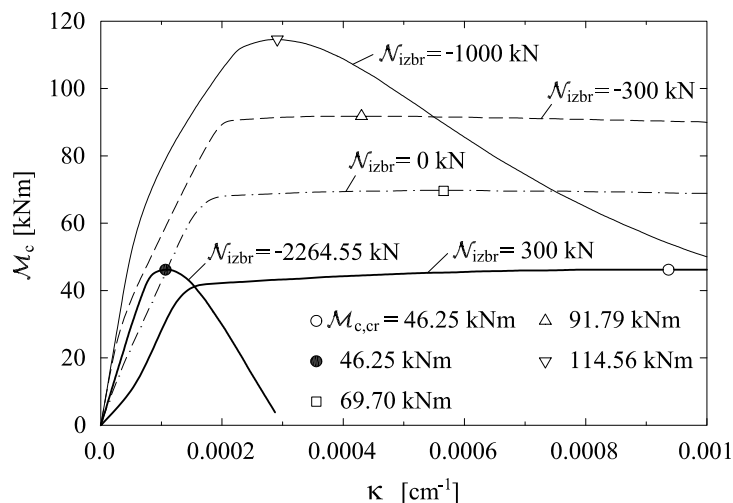
Za določitev obtežno–deformacijskih krivulj prečnega prereza uporabimo konstantno lineari-zirano Crisfieldovo metodo ločne dolžine. Zaradi velike razlike v vrednostih med \mathcal{M}_c in κ izbe-remo za utežni koeficient W vrednost 10^9 , parametru za kontroliranje konsistentnosti obtežnega faktorja β pa predpišemo vrednost 0 (enačbi (14) in (16)). Obnašanje betonskih vlaken določa konstitutivni model, ki sta ga predlagala raziskovalca Desayi in Krishnan [4] (glej sliko 2(c)), armaturnih palic pa trilinearni konstitutivni model (slika 2(d)).

Kot primer si oglejmo obtežno–deformacijsko krivuljo prečnega prereza $\mathcal{N}_c - \epsilon$ pri $\mathcal{M}_{izbr} = 46.25$ kNm (odebeljena krivulja na sliki 3). Krivulja ima dve stacionarni vrednosti in sicer pri konstitutivni osni sili $\mathcal{N}_c = -2264.55$ kN oziroma 300 kN. Ustrezni krivulji $\mathcal{M}_c - \kappa$ pri teh omenjenih osnih silah pa imata svoji stacionarni vrednosti ravno takrat, ko je konstitutivni moment enak na začetku izbrani vrednosti 46.25 kNm (slika 4).

Dani kombinaciji upogibnega momenta in pripadajočih osnil sil sta ravno vrednosti mejne no-silnosti obravnavanega prečnega prereza. To bo v nadaljevanju razvidno tudi iz interakcijskega diagrama (slika 7). S tem potrdimo ugotovitev, da je v primeru, ko je dosežena mejna nosilnost prečnega prereza, dosežena tudi stacionarna vrednosti konstitutivni količini prečnega prereza



Slika 3 : Armiranobetonski prečni prerez. Obtežno–deformacijske krivulje $\mathcal{N}_c - \varepsilon$.

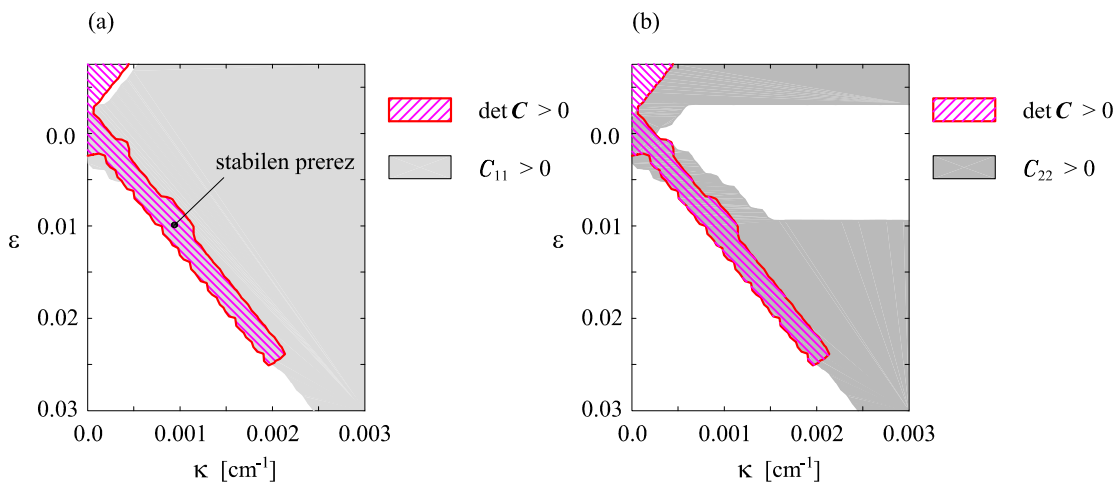


Slika 4 : Armiranobetonski prečni prerez. Obtežno–deformacijske krivulje $\mathcal{M}_c - \kappa$.

\mathcal{N}_c in \mathcal{M}_c . Prva dvojica ($\mathcal{M}_c = 46.25$ kNm, $\mathcal{N}_c = -2264.55$ kN) ustreza krhki porušitvi betonskega prereza, pri kateri pride do hipne porušitve tlačne cone betonskega dela prereza. To je razvidno tudi iz oblike krivulj $\mathcal{N}_c - \varepsilon$ na sliki 3 oziroma $\mathcal{M}_c - \kappa$ na sliki 4, kjer stacionarni vrednosti sledi nenaden padec nosilnosti prečnega prereza. Druga dvojica konstitutivnih količin ($\mathcal{M}_c = 46.25$ kNm, $\mathcal{N}_c = 300$ kN) pa ustreza duktilni porušitvi prečnega prereza, ki je posledica prekoračitve mejne deformacije v armaturi.

3.2 Mejna nosilnost prečnega prereza

V nadaljevanju določimo mejno nosilnost obravnavanega prečnega prereza in pripadajočih mejnih deformacij. Za boljše razumevanje pa najprej izračunamo konstitutivne količine prečnega prereza (\mathcal{N}_c in \mathcal{M}_c) ter člene tangentne konstitutivne matrike prečnega prereza (C_{11} , C_{12} in C_{22}) v odvisnosti od deformacij ε in κ . Rezultate predstavimo na sliki 5, kjer s šrafiranim vzorcem prikazemo deformacijsko območje, na katerem je determinanta tangentne konstitutivne matrike prečnega prereza pozitivna ($\det \mathbf{C} > 0$) oziroma s polnim vzorcem označimo območje, kjer je pozitiven le člen C_{11} oziroma člen C_{22} . Zaradi simetrije prečnega prereza in simetrične razporeditve armature glede na referenčno os y , je predstavljeno le območje pozitivnih vrednosti ukrivljenosti ($\kappa \geq 0$).

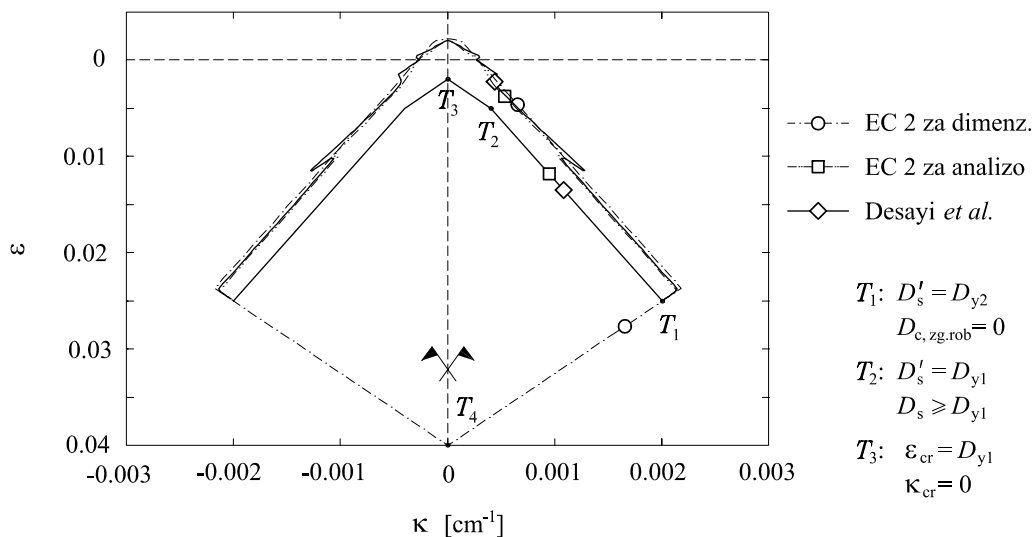


Slika 5 : Deformacijsko območje.

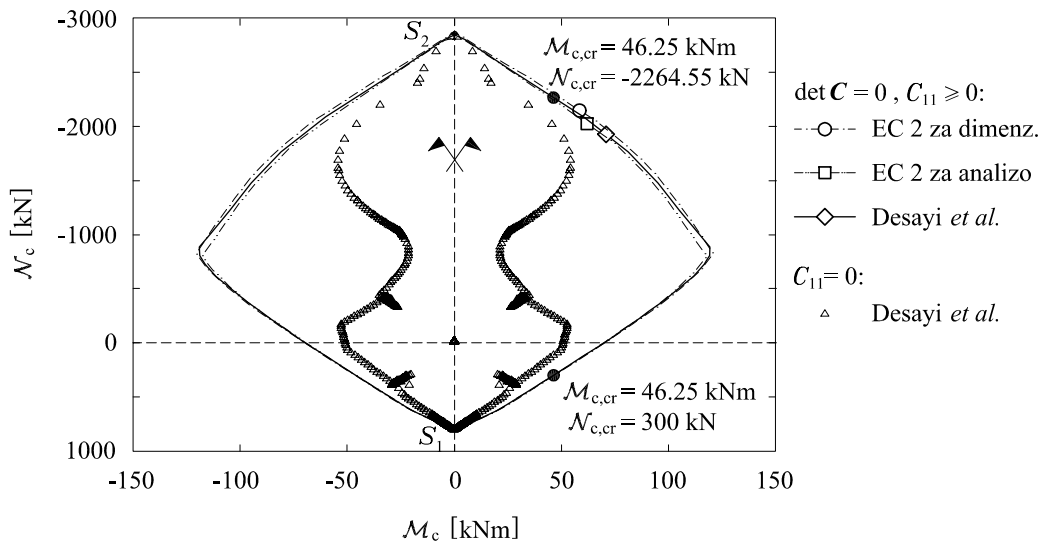
Na območju deformacij, kjer je $\det \mathbf{C} > 0$ in $C_{11} > 0$, je prečni prerez stabilen (glej (7)). Nosilnost prečnega prereza je izčrpana, ko postane determinanta tangentne konstitutivne matrike prereza enaka nič ($\det \mathbf{C} = 0$), pri tem pa je $C_{11} \geq 0$. To pa je na sliki 5(a) ravno mejna črta preseka obeh ploskev.

Na slikah 6 in 7 so prikazane mejne deformacije (ε_{cr} , κ_{cr}) ter pripadajoče mejne konstitutivne količine (\mathcal{N}_{Rd} in \mathcal{M}_{Rd}), ki zadoščajo pogojema mejne nosilnosti prečnega prereza $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} \geq 0$. Količine smo izračunali s pomočjo bisekcije.

Diagram na sliki 7 v gradbeništvu imenujemo *interakcijski diagram nosilnosti prečnega prereza*. Opazimo, da izbira konstitutivnega modela betona bistveno ne vpliva na obliko interakcijskega diagrama. Kljub poenostavljenim konstitutivnim modelom, ki jih za dimenzioniranje armiranobetonskih konstrukcij priporočajo evropski standard Eurocode 2 [5], je izračunana mejna nosilnost armiranobetonskih prečnih prerezov za običajno inženirsko prakso dovolj točna. Podobna ugotovitev velja tudi za predpisane mejne deformacije (slika 6). Edino odstopanje je pri mejnih deformacijah in sicer deformacije po EC 2 ne potekajo po krivulji od točke T_1 do T_3 pač pa po premici med točkama T_1 in T_4 . Hitro lahko ugotovimo, da je na deformacijskem območju med



Slika 6 : Armiranobetonski prečni prerez. Mejne deformacije pri uporabi različnih konstitutivnih modelov betona.



Slika 7 : Armiranobetonski prečni prerez. Interakcijski diagrami nosilnosti pri uporabi različnih konstitutivnih modelov betona.

točkami T_1 , T_3 in T_4 na sliki 6 celoten prerez natežno obremenjen in da sta deformaciji na mestu spodnje (D_s) oziroma zgornje armature (D'_s) presegle deformacijo na meji tečenja D_{y1} . Pri tem pa sta $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} = 0$. Mejna nosilnost, ki ustreza temu polju deformacij, je tako ena sama in je na sliki 7 označena s točko S_1 . Iz povedanega ugotovimo, da neomejena mejna deformacija armature ($D_{y2} = \infty$), ki jo za dimenzioniranje armiranobetonskih konstrukcij priporoča

evropski standardi Eurocode 2 [5] ($E_p = 0$), ne vpliva na mejno nosilnost prečnega prereza. V okviru tega računskega primera smo zato mejno deformacijo D_{y2} pri konstitutivnem modelu za dimenzioniranje (glej sliko 2(d)) omejili na 40 ‰.

V nadaljevanju prikažimo še velikost konstitutivnih količin (\mathcal{N}_c in \mathcal{M}_c), ki pripadajo pogoju $C_{11} = 0$. V tem primeru mora biti $\det \mathbf{C} \leq 0$, nosilnost prečnega prereza pa je takrat manjša od mejne nosilnosti, kar nedvoumno kaže tudi slika 7. Opazimo, da se vse točke (Δ) nahajajo znotraj interakcijskega diagrama nosilnosti prereza. Izjemi sta le skrajna spodnja in skrajna zgornja točka interakcijskega diagrama, ki sta označeni z S_1 oziroma S_2 . V teh točkah je $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} = 0$.

Deformacije, ki zadoščajo pogoju $C_{11} = 0$ so enake oziroma celo večje od mejnih deformacij, ki pripadajo mejni nosilnosti prečnega prereza oziroma pogojema $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} \geq 0$. Torej, če je izpolnjen pogoj $C_{11} = 0$, je obravnavani prečni prerez pred tem že dosegel svojo običajno mejno nosilnost, kajti pripadajoče deformacije so večje od običajnih mejnih vrednosti. Pri pogoju $C_{11} = 0$ je prečni prerez že v fazi mehčanja. Izjemi sta skrajna spodnja in skrajna zgornja točka v interakcijskem diagramu nosilnosti, kjer je tudi $\det \mathbf{C} = 0$. Le takrat je dosežena mejna nosilnost prečnega prereza tako, da je hkrati $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} = 0$.

4 Zaključek

V članku smo analizirali nosilnost armiranobetonskih prečnih prerezov pri centrični in enojno ekscentrični obremenitvi. Ugotovili smo, da je za določitev mejne nosilnosti prečnega prereza edini potreben in zadostni pogoj: $\det \mathbf{C} = 0$ in $C_{11} \geq 0$. Nabor pripadajočih mejnih deformacij se skorajda v popolnosti ujema z mejnimi deformacijami, ki jih za dimenzioniranje armiranobetonskih konstrukcij priporočajo evropski standardi Eurocode 2 [5]. Ugotovili smo tudi, da konstitutivna osna sila \mathcal{N}_c in konstitutivni upogibni moment \mathcal{M}_c dosežeta svoji stacionarni vrednosti takrat, ko je izčrpana nosilnost prečnega prereza, torej ko je $\det \mathbf{C} = 0$.

Literatura

- [1] P.G. Bergan, I. Holand, *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17, 443–467, 1979.
- [2] S. Bratina, *Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo*, Doktorska disertacija, FGG, Univerza v Ljubljani, 2003.
- [3] W.F. Chen, D.J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [4] P. Desayi, S. Krishnan, *Equation for the stress-strain curve of concrete*, Journal of ACI, 61, 345–350, 1964.
- [5] Eurocode 2, *Design of Concrete Structures, Part 1: General rules and rules for buildings*, prEN 1992-1: 2001 (1st draft), 1999.
- [6] F.E. Hohn, *Elementary Matrix Algebra*, 3th edition, The Macmillian Company, New York, 1973.



Optimizacija debeline glede na izbočitev v elastoplastičnem območju

B. Bremec¹ in F. Kosel²

Thickness optimization at buckling in the elastoplastic region

Povzetek.

Prispevek obravnava optimizacijo debeline krožnega kolobarja pri izbočitvi v elastoplastičnem območju. Kolobar je na notranjem in zunanjem robu obremenjen z enakomernima osnosimetričnima obremenitvama. Nekonstantna debelina kolobarja je aproksimirana s funkcijo optimizacijskih spremenljivk in radija. Z optimizacijo iščemo tiste vrednosti spremenljivk, ki maksimizirajo kritično obremenitev ob pogoju konstantne mase/volumna kolobarja. Kritično obremenitev dobimo z rešitvijo stabilnostne diferencialne enačbe pri čemer upoštevamo elastično linearno utrjevalno karakteristiko materiala ter dve različni teoriji plastičnosti. Prikazane so optimalne debeline za različne načine podprtja in obremenitev v odvisnosti od faktorja linearnega utrjevanja materiala. Rezultati kažejo, da je z uporabo nekonstantne debeline mogoče znatno povečati kritične obremenitve pri konstantni masi plošče.

Abstract.

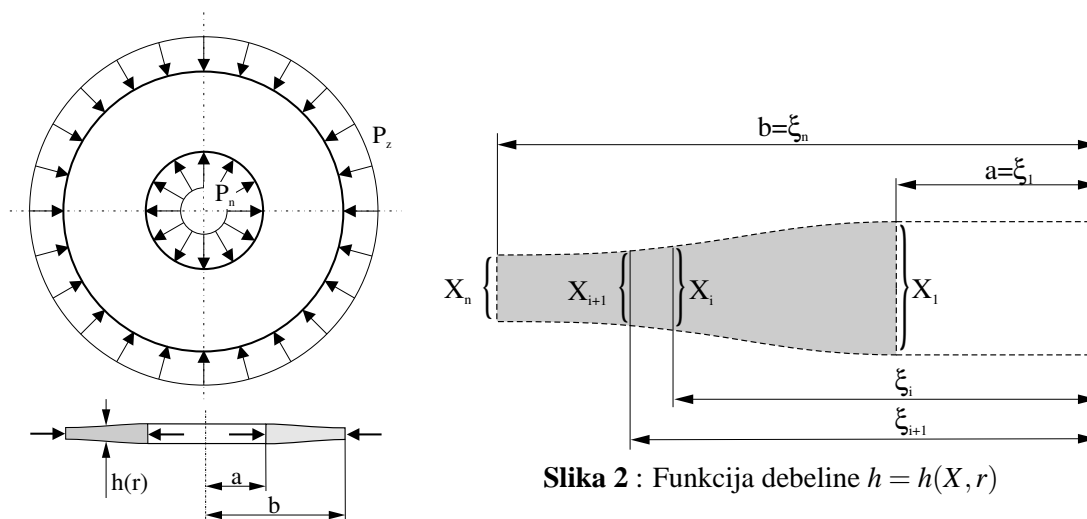
This contribution describes the thickness optimization of a circular annular plate at buckling. The plate is loaded with uniform axially symmetric in-plane loads on the inner and outer edge. The variable thickness of the plate is approximated by a function of radial coordinates and design variables. An optimization problem is defined to find optimal sets of design variables which maximize buckling loads at constant weight/volume of the plate. The required buckling loads are determined according to the standard linear buckling equations and the material is modelled by the small strain J_2 flow and deformation theories of plasticity where an elastic linear hardening rheological model is considered. Optimal thickness functions are determined for different support and load cases and different values of the hardening coefficient of the material. The numerical results show that buckling loads can be increased significantly at constant weight of the plate.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo

1 Uvod

V prispevku obravnavamo krožni kolobar nekonstantne debeline, pri katerem debelino aproksimiramo s funkcijo $h = h(X, r)$ (slika 2) v kateri so X optimizacijske spremenljivke, r pa radij. Kolobar je po zunanjem in notranjem robu obremenjen z enakomernima osnosimetričnima obremenitvama (slika 1), ki delujeta v osrednji ravnini. Pri reševanju stabilnostnega problema upoštevamo, da se nehomogeno napetostno stanje deloma nahaja v elastičnem in deloma v elastoplastičnem območju. Kritična obremenitev je odvisna od mehanskih lastnosti materiala, načina podprtja in obremenitve kolobarja in geometrije plošče, dobimo pa jo z rešitvijo elastoplastičnega stabilnostnega problema. Ko poznamo metodo reševanja jo lahko uporabimo v različnih optimizacijskih algoritmi, ki maksimizirajo kritične obremenitve. Tako rešitev stabilnostnega problema kolobarja konstantne debeline v elastoplastičnem območju, [1] kot tudi optimizacija debeline v elastičnem območju, [2] sta že bili predstavljeni na prejšnjih srečanjih Kuhljevi dnevi. Ta prispevek prikazuje nadaljnji korak pri reševanju stabilnostnih problemov krožnih kolobarjev, kjer pri optimiranju upoštevamo tudi elastoplastično karakteristiko materiala.



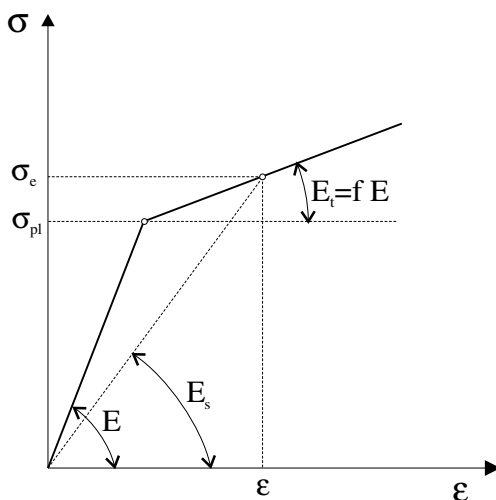
Slika 2 : Funkcija debeline $h = h(X, r)$

Slika 1 : Krožni kolobar nekonstantne debeline

2 Definicija problema

Obravnavamo tanek, homogen, izotropen krožni kolobar (slika 1) z notranjim radijem a in zunanjim radijem b , z nekonstantno debelino $h(X, r)$ (slika 1) pri čemer so X optimizacijske spremenljivke, ki definirajo debelino kolobarja. Gradivo kolobarja ima elastoplastično linearno utrjevalno karakteristiko (slika 3), Poissonovo število ν , elastični modul E in mejo plastičnosti σ_{pl} . Kolobar ima ravno srednjo ravnino, v kateri delujeta na notranji in zunanji rob enakomerni osnosimetrični obremenitvi na enoto dolžine P_n in P_z . Obremenitvi na notranjem in zunanjem robu določa osnovna obremenitev P in obremenitvena koeficienta α in β tako, da velja

$P_n = \alpha \cdot P$ ter $P_z = \beta \cdot P$. Roba kolobarja sta lahko osnosimetrično podprta ali prosta. Vektor



Slika 3 : Reološki model materiala (enoosni preizkus)

optimizacijskih spremenljivk $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ sestavljajo debeline $X_i = h(X, \xi_i)$ na radijih $\xi_i = a + \frac{(i-1)(b-a)}{(n-1)}$, $i = 1, \dots, n$, glej sliko 2, pri čemer je n število optimizacijskih spremenljivk. Kolobar je na ta način v radialni smeri razdeljen na $n - 1$ intervalov, znotraj vsakega pa je funkcija debeline podana s kubičnim zlepkom

$$h_i(X, r) = \sum_{j=1}^4 c_{ji}(X) \frac{(r - \xi_i)^{j-1}}{(j-1)!}, \quad \xi_i < r < \xi_{i+1}. \quad (1)$$

Koeficiente zlepkov c_{ji} izračunamo tako, da funkcije $h_i(X, r)$ gladko potekajo skozi točke (X_i, ξ_i) . Za $n = 1$ je funkcija debeline konstantna, za $n = 2$ linearna, za $n = 3$ kvadratna in za $n = 4$ kubična. Za $n > 4$ uporabljamo Akimove kubične zlepke [3]. Volumen kolobarja s tako definirano nekonstantno debelino se izračuna

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^4 c_{ji}(X) \frac{(\xi_{i+1} - \xi_i)^j}{j!} \left(\xi_{i+1} - \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{j+1} \right). \quad (2)$$

Izračun kritične obremenitve kolobarja nekonstantne debeline v elastoplastičnem območju temelji na metodi uporabljeni pri kolobarjih konstantne debeline [4].

3 Rešitev stabilnostnega problema

Pri kolobarju iz elastoplastičnega materiala, pride do izbočitve v elastičnem področju le pri razmeroma majhnih debelinah. V splošnem je kritična obremenitev P_{cr} funkcija geometrije (a , b , $h(X, r)$), načina obremenitve (α , β) in podprtja ter materialnih lastnosti (elastični modul E , Poissonovo število ν , meja plastičnosti σ_{pl} in linearni utrjevalni koeficient f).

Brezdimenzijski izbočitveni koeficient pri kolobarjih nekonstantne debeline, ki omogoča primerjavo s koeficientom kolobarja konstantne debeline in enakega volumna, izračunamo:

$$\kappa(X) = \sqrt{P_{cr}(X) \frac{b^2}{D_{av}}}, \quad (3)$$

pri čemer je $D_{av}(X)$ upogibna togost, izračunana iz povprečne debeline plošče

$$h_{av}(X) = \frac{V(X)}{\pi(b^2 - a^2)}. \quad (4)$$

Do izbočitve v elastoplastičnem območju pride, ko kritična obremenitev $P_{cr}(X)$ doseže ali preseže obremenitev začetka plastifikacije $P_{pl}(X)$. Slednja se izračuna iz znanega elastičnega napetostnega stanja in meje plastičnosti

$$P_{pl}(X) = \frac{\sigma_{pl}}{\sigma_M^{\max}(P, \alpha, \beta, X)} \cdot P, \quad (5)$$

pri čemer je P osnovna obremenitev, $\sigma_M^{\max}(P, \alpha, \beta, X)$ pa maksimalna primerjalna napetost (Von-Mises).

Pri reševanju upoštevamo teorijo majhnih deformacij in dve teoriji plastičnosti; J_2 teorijo končnih deformacij in teorijo prirastkov deformacij. Če z \dot{w} označimo prirastek prečnega pomika osrednje ravnine kolobarja potem ima stabilnostna diferencialna enačba naslednjo obliko

$$-(D a_{ijkl} \dot{w}_{,kl})_{,ij} + P \frac{h \sigma_{ij}}{P} \dot{w}_{,ij} = 0, \quad (6)$$

kjer je a_{ijkl} tenzor mehanskih lastnosti materiala, ki je odvisen od izbrane teorije plastičnosti in mehanskih lastnosti materiala [5]. Reševanje zahteva uporabo iterativnega postopka pri čemer stabilnostno diferencialno enačbo rešujemo z metodo končnih razlik. Ta reševanje stabilnostne diferencialne enačbe prevede na problem določanja lastnih vrednosti sistema linearnih enačb. Pri reševanju upoštevamo simetrične, $m = 0$, in nesimetrične načine izbočitve kolobarja z $m > 0$ valovi v obodni smeri. Vsaka iteracija zajema izračun elastoplastičnega napetostnega stanja, [6]. Postopek reševanja je že bil podrobneje predstavljen na Kuhljevih dnevih, [1].

4 Optimizacija debeline

Pri optimizaciji maksimiziramo izbočitveni koeficient $\kappa(X)$ ob pogoju konstantnega volumna, $V_{const} = V(X) = konst..$ Pri tem obravnavamo kritično obremenitev oziroma izbočitveni koeficient kot funkcijo optimizacijskih spremenljivk $\kappa = \kappa(X)$. Povezavo dobimo z rešitvijo stabilnostnega problema. Rešujemo problem optimizacije s pogoji, pri čemer je ciljna funkcija $F(X) = -\kappa(X)$, pogoji pa so $g_1(X) = V_{const} - V(X) \geq 0$ (ali $g_1(X) = h_{const} - h_{av}(X) \geq 0$) in $g_2(X) = \min(h(X, r)) \geq h_{min}$. Drugi pogoj uporabimo zato, da preprečimo pojav nične ali celo negativne debeline, ki povzroči odpoved algoritma. Optimizacijski algoritem uporablja metodo zaporednih neomejenih minimizacij (SUMT) [7, 8] in metodo kazenske funkcije. Definiramo novo ciljno funkcijo

$$\Phi(X, r_p) = F(X) + r_p F_p(X), \quad (7)$$

kjer je $F_p(X)$ notranja kazenska funkcija, r_p pa kazenski faktor. Uporabljamo linearno razširjeno kazensko funkcijo

$$F_p(X) = \sum_{j=1}^m \begin{cases} \frac{1}{g_j(X)}, & g_j(X) > \varepsilon \\ \frac{2\varepsilon - g_j(X)}{\varepsilon^2}, & g_j(X) \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Ciljno funkcijo $\Phi(X, r_p)$ minimiziramo s Pellowo metodo, [7, 9] pri čemer potrebne enodimenzijske minimizacije izvršimo z algoritmom, ki uporablja aproksimacije s kvadratno funkcijo.

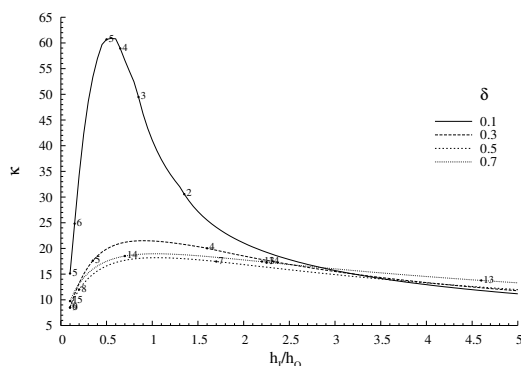
5 Številčni primeri

Čeprav je problem elastične izbočitve krožnih kolobarjev že obširno raziskan in dobro dokumentiran [10, 11, 12, 13, 14, 15] je število raziskav, ki obravnavajo izbočitev v elastoplastičnem območju zelo omejeno. Med obstoječimi, pa je število del, ki upoštevajo nekonstantno debelino kolobarja ali se ukvarjajo z optimizacijo zelo majhno.

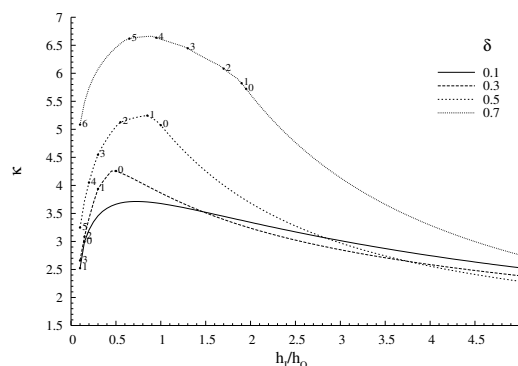
V nadaljevanju so obravnavani naslednji načini podprtja:

- Primer I: oba roba toga vpeta
- Primer VI: notranji rob prost, zunanji rob toga vpet
- Primer IV: oba roba prosto podprta
- Primer VIII: notranji rob prost, zunanji rob prosto podprt

Za prikaz vpliva funkcije debeline na velikost kritičnih obremenitev in načinov izbočitve so v nadaljevanju prikazane izračunane kritične obremenitve krožnega kolobarja z linearno funkcijo debeline, ki je izdelan iz idealno elastičnega materiala. Sliki 4, 5 prikazujeta izbočitveni koeficient κ v odvisnosti od razmerja med debelino kolobarja na notranjem in zunanjem robu h_I/h_O , pri razmerju radijev $\delta = a/b$. Iz diagramov je jasno razvidno, da funkcija debeline vpliva tako na kritično obremenitev/izbočitveni koeficient in način izbočitve (število valov m).



Slika 4 : Primer I - linearna debelina,
 $\alpha = +1, \beta = 0$



Slika 5 : Primer VI - linearna debelina,
 $\alpha = 0, \beta = -1$

Iz rezultatov vidimo, da se lahko kritične obremenitve v primeru optimalne nekonstantne debeline bistveno povečajo. Ker pa povečanje kritične obremenitve pomeni tudi povečanje maksimalnih napetosti v kolobarju v trenutku pred izbočitvijo, je v takšnih primerih nujno upoštevati realno elastoplastično karakteristiko materiala. S pomočjo izračunov smo raziskali vpliv elasto-

Tabela 1 : Vpliv faktorja utrjevanja, primer VI, $a/b = 0.1, \alpha = 0, \beta = -1, n = 5$

f	κ_{konst}	m_{konst}	κ_{opt}	m_{opt}	$\Delta_{\kappa}[\%]$
1.00	3.6758	0	6.1024	0	66.02
0.99	3.6701	0	6.0876	0	65.87
0.70	3.4827	0	4.6674	0	34.02
0.60	3.4331	0	4.9923	2	45.42
0.35	3.3416	0	3.7166	0	11.22
0.25	3.3103	0	4.5739	0	38.17
0.10	2.9321	0	3.7684	0	28.52

plastičnih lastnosti materiala na optimalno funkcijo debeline. Pri tem smo upoštevali naslednje podatke: zunanji premer kolobarja $2b = 300$ mm, začetna konstantna debelina $h = 5$ mm za primer VI ter $h = 3$ mm za primer VIII. Materialne lastnosti: elastični modul $E = 100000$ MPa, meja plastičnosti $\sigma_{pl} = 50$ MPa in Poissonovo število $\nu = 0.3$. Geometrijo in materialne lastnosti smo določili tako, da pride do procesa izbočitve, ko je napetostno stanje delno v elastičnem in delno v elastoplastičnem območju. Pri optimizaciji upoštevamo samo rešitve, pri katerih je minimalna primerjalna Von-Misesova napetost manjša od meje plastičnosti materiala σ_{pl} . Analiza vpliva faktorja utrjevanja materiala na funkcijo debeline je za primer VI podana v tabeli 1 in sliki 6, oziroma v tabeli 2 in sliki 7 za primer VIII.

Tabela 2 : Vpliv faktorja utrjevanja, primer VIII, $a/b = 0.1, \alpha = 0, \beta = -1, n = 5$

f	κ_{konst}	m_{konst}	κ_{opt}	m_{opt}	$\Delta_{\kappa}[\%]$
1.00	1.9541	0	6.2420	0	219.44
0.99	1.9538	0	6.3977	0	227.45
0.75	1.9417	0	4.1849	0	115.50
0.55	1.9270	0	5.5295	0	186.95
0.35	1.7696	0	4.4852	1	153.45
0.25	1.7400	0	2.6730	0	53.62

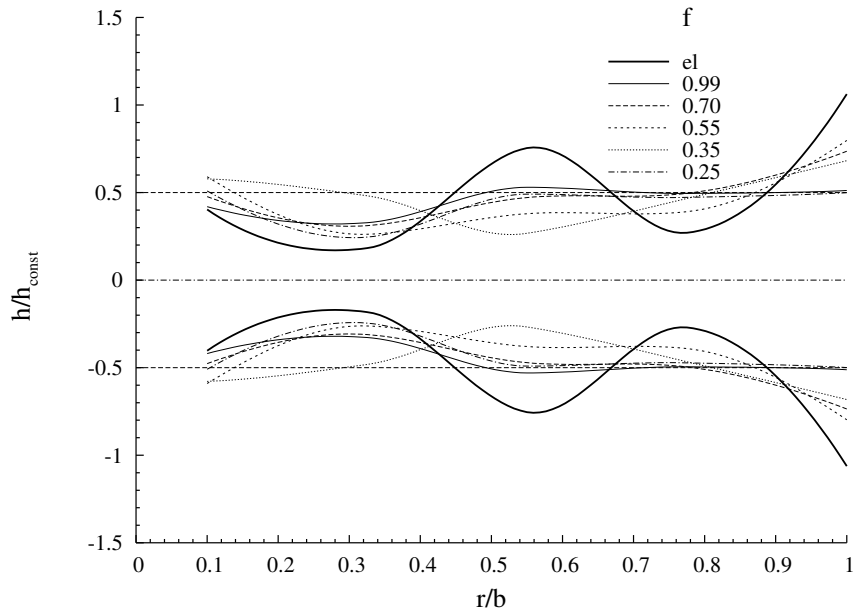
6 Zaključek

V prispevku je prikazana uporaba rešitve stabilnostnega problema krožnega kolobarja nekonstantne debeline v elastoplastičnem območju pri optimizaciji debeline kolobarja. Rezultati

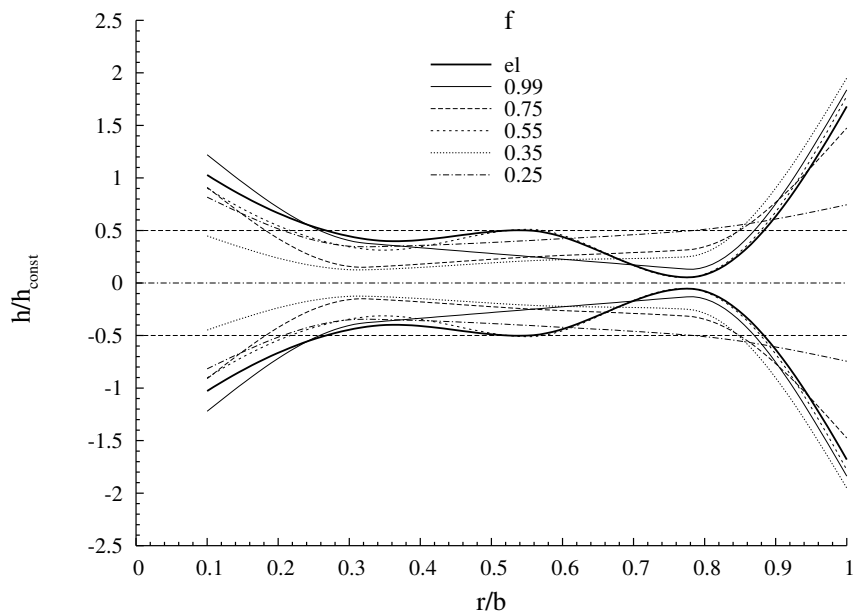
prikazujejo optimalne funkcije debeline v odvisnosti od faktorja utrjevanja materiala f . Rešitve kažejo, da je mogoče dosežati največja povečanja kritičnih obremenitev pri kolobarjih z majhnim razmerjem radijev a/b saj je pri teh na razpolago več materiala, ki ga med optimizacijo lahko razporedimo. Pri manjših vrednostih faktorja utrjevanja f se v splošnem z optimizacijo dosega manjša povečanja kritičnih obremenitev kolobarja. To je posledica vpliva zmanjšanja togosti zaradi večjih plastičnih deformacij v kolobarju. Na podlagi rezultatov lahko zaključimo, da ima največji vpliv na kritično obremenitev povečana debelina enega ali obeh robov. Čeprav je uporaba krožnih plošč nekonstantne debeline zaradi zahtevne izdelave malo verjetna, predstavljeni rezultati prikazujejo možnost povečanja kritičnih obremenitev kolobarja s pomočjo koncentričnih obročev. Takšne rešitve se lahko uporabijo povsod, kjer uporaba radialnih reber ni mogoča.

Literatura

- [1] B. Bremec, F. Kosel, Določanje kritične obremenitve krožnih kolobarjev v elasto-plastičnem območju, in: L. Škerget (Ed.), Zbornik del – Kuhljevi dnevi '02, Slovensko društvo za mehaniko, 2001, pp. 195–202.
- [2] B. Bremec, F. Kosel, Optimiranje krožnega kolobarja glede na izbočitev, in: L. Škerget (Ed.), Zbornik del – Kuhljevi dnevi '03, Slovensko društvo za mehaniko, 2003.
- [3] IMSL, Fortran Subroutines for Mathematical Applications, Math/Library Volume 1 and 2, Visual Numerics, Inc., 1997.
- [4] F. Kosel, B. Bremec, Elastoplastic buckling of circular annular plates under uniform in-plane loading, *Thin-Walled Structures* 42 (1) (2004) 101–117.
- [5] B. Bremec, Geometrijska optimizacija stabilnosti dvakrat povezane plošče v elasto-plastičnem območju, Ph.D. thesis, Fakulteta za strojništvo (Junij 2003).
- [6] A. Mendelson, *Plasticity: Theory and application*, The MacMillan Comp., New York, 1968.
- [7] G. Vanderplaats, *Numerical optimization techniques for engineering design with application*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- [8] B. Gottfried, J. Weisman, *Introduction to optimization theory*, Prentice Hall Inc., Eaglewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [9] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, *Numerical recipes in FORTRAN77: The art of scientific computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [10] N. Yamaki, Buckling of a thin annular plate under uniform compression, *Journal of Applied Mechanics*, ASME (1959) 267–273.
- [11] V. Thevendran, C. Wang, Buckling of annular plates elastically restrained against rotation along edges, *Thin-Walled Structures* 25 (3) (1996) 231–246.
- [12] C. Wang, C. Wang, Buckling of circular plates with an internal ring support and elastically restrained edges, *Thin-Walled Structures* 39 (2001) 821–825.
- [13] P. Laura, R. Gutierrez, V. Sonzogni, S. Idelsohn, Buckling of circular, annular plates of non-uniform thickness, *Ocean Engng.* 24 (1) (1997) 51–61.
- [14] P. Laura, R. Gutierrez, H. Sanzi, G. Elvira, Buckling of circular, solid and annular plates with an intermediate circular support, *Ocean Engineering* 27 (2000) 749–755.
- [15] C. Wang, G. Hong, T. Tan, Elastic buckling of tapered circular plates, *Computers & Structures* 55 (6) (1995) 1055–1061.



Slika 6 : Primer VI - optimalna deblina $n = 5$, $a/b = 0.1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$



Slika 7 : Primer VIII - optimalna deblina $n = 5$, $a/b = 0.1$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$



Uklon sestavljenih lesenih nosilcev

B. Čas, M. Saje in I. Planinc¹

Buckling behaviour of layered wood beams

Povzetek. V članku predstavimo družino novih deformacijskih končnih elementov za materialno in geometrijsko nelinearno analizo kompozitnih konstrukcij z upoštevanjem zdrsa med sloji. Predstavljeni elementi so zasnovani na Galerkinovi metodi končnih elementov. Vsak sloj kompozitnega nosilca modeliramo s kinematično točno Reissnerjevo teoriji ravninskih nosilcev. Posebno pozornost posvetimo analizi uklonske nosilnosti tlačnih dvoslojnih lesenih stebrov. Rezultate računske analize primerjamo z rezultati, ki sta jih predstavlja Girhammar in Gopu [5] oziroma z rezultati, kot jih predpisuje Evropski predstandard za lesene konstrukcije Eurocode 5 [3]. Primerjava med rezultati različnih računskih postopkov za določitev uklonske nosilnosti dvoslojnih lesenih nosilcev je pokazala, da je postopek po Eurocode 5 [3] zelo konservativen.

Abstract. A new strain-based finite element formulation for the non-linear analysis of composite beams with interlayer slips is presented. The slip between the layers largely influences the behaviour of the composite beam. The correct consideration of the slip is therefore one of the key factors in the analysis of composite structures. Material and load–slip characteristics of the interface between layers are assumed to be non-linear. For each layer the geometrically exact Reissner’s beam theory is assumed. A special attention is devoted to the buckling load of axially compressed layered wood beams. In numerical examples we compare present results to those obtained by Girhammar and Gopu [5] and by the European code for timber structures [3]. Comparisons of various methods for the determination of the buckling load of layered wood columns with interlayer slips show that the European code for timber structures [3] gives rather conservative estimates for the buckling load.

1 Uvod

Kompozitne konstrukcije, med katere prištevamo tudi t.i. sestavljene lesene nosilce, se v gradbeništvu vse pogosteje uporabljajo. Znano je, da so le te učinkovite in varčne gradbene konstrukcije. Običajno jih uporabimo v stanovanjski gradnji kot nosilne medetažne konstrukcije ali pa kot stene in strešne konstrukcije, vse pogosteje pa jih zasledimo tudi v mostogradnji.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo

V splošnem so kompozitne konstrukcije sestavljene iz dveh ali več komponent oziroma slojev enakih ali različnih materialnih karakteristik. Kompozitni leseni nosilci pa so sestavljeni iz več lesenih nosilcev, ki jih medsebojno povežemo z veznimi sredstvi, kot so žebli, vijaki, mozniki ali pa jih preprosto zlepimo, v enovito celoto.

Na obnašanje kompozitnih konstrukcij bistveno vpiva način povezave slojev. Če je povezava slojev popolnoma toga, lahko za analizo kompozitnih konstrukcij uporabimo standardne računске postopke. Ker je večina povezav med sloji kompozitnih konstrukcij podajna in ker le ta bistveno vpliva njihovo togost, duktilnost in nosilnost, morajo prav gotovo vsi računski postopki za analizo kompozitnih konstrukcij upoštevati tudi podajnost stika. V literaturi zasledimo številne raziskave o obnašanju kompozitnih konstrukcij oziroma računске postopke za analizo kompozitnih konstrukcij z upoštevanjem zdrsa med sloji [5, 6, 7, 8, 9]. Pomembna pomankljivost vseh omenjenih raziskav je v tem, da so premalo splošne. Tako so običajno omejene na analizo nosilnosti kompozitnih konstrukcij, ki je posledica materialne nelinearnosti slojev in stikov med sloji [6, 7, 9], zanemarijo pa uklonsko nosilnost kompozitnih konstrukcij, ki je značilnost tlačno obremenjenih sestavljenih lesenih stebrov, in je posledica t.i. geometrijske nelinearnosti. Znano je, da je uklonska nosilnost sestavljenih lesenih nosilcev odvisna od načina podpiranja, dimenzij slojev, njihovih materialnih karakteristik ter v precejšnji meri tudi od vrste in razporeditve veznih sredstev. Glede na to, da v literaturi ne zasledimo veliko računskih postopkov za analizo uklonske nosilnosti kompozitnih konstrukcij [5], so inženirski računski postopki, ki jih za to predpisujejo različni standardi [3], zasnovani na eksperimentalnih raziskavah in zato omejeni na preproste konstrukcije. Ker pa je eksperimentalno določanje uklonske nosilnosti sestavljenih lesenih nosilcev drago, je nujno potrebno zaradi ekonomičnosti gradnje izdelati učinkovit in splošen računski postopek za določanje uklonske nosilnosti tovrstnih konstrukcij.

V tem članku predstavimo računski postopek za materialno in geometrijsko nelinearno analizo dvoslojnih kompozitnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Posebno pozornost namenimo analizi uklonske nosilnosti tlačno obremenjenih dvoslojnih lesenih stebrov. Predstavljeni računski postopek je zasnovan na Galerkinovi metodi končnih elementov. Vsak sloj kompozitnega nosilca modeliramo s kinematično točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev. Osnovni predpostavki te teorije sta: (i) Bernoullijeva hipoteza o ravnih prečnih prerezih, ki določa, da ravni prečni prerezi pravokotni na nedeformirano referenčno os nosilca, ostanejo ravni, toda ne več pravokotni na deformirano referenčno os nosilca in (ii) oblika in velikost prečnih prerezov vsakega sloja kompozitnega nosilca se med deformiranjem ne spreminjata. Reissnerjeva teorija ravninskih kompozitnih nosilcev omogoča membransko, strižno in upogibno deformiranje vsakega sloja kompozitnega nosilca in ne omejuje velikost pomikov, zasukov in deformacij. Ker je pri večini gradbenih konstrukcij vpliv strižnih deformacij na napetostno in deformacijsko stanje zanemarljiv, jih v predstavljenem računskem postopku zanemarimo. V splošnem se pri kompozitnih konstrukcijah pojavijo zamiki na stikih slojev v vseh fazah obremenitve konstrukcije, medtem ko se razslojevanje pojavi predvsem pri poružitvi. Zato se pri izpeljavi predstavljenega računskega postopka omejimo samo na nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema, razslojevanje pa zanemarimo.

2 Osnovne enačbe centrično tlačnega kompozitnega nosilca

Osnovne enačbe, s katerimi opišemo napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev so: kinematične, ravnotežne in konstitucijske enačbe z ustreznimi robnimi pogoji za vsakega izmed slojev kompozitnega nosilca ter ustrezne posplošene vezne enačbe. Kot smo omenili se bomo omejili na analizo dvoslojnih kontinuirnih nosilcev z podajno povezavo med slojema. Definijsko območje funkcij, ki določajo napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kontinuirnih nosilcev, razpade na tri medsebojno povezane intervale in sicer: levi in desni previs ter osrednji del na stiku med slojema. Ker se v tem članku omejimo samo na določitev uklonske nosilnosti dvoslojnih lesenih nosilcev, ki so centrično tlačno obteženi samo na robovih nosilca, se previsi pojavijo šele, ko se sestavljeni nosilec ukloni. Tako se definijsko območje funkcij bistveno poenostavi in je v tem posebnem primeru le osrednji del na stiku med slojema. Osnovne enačbe dvoslojnih nosilcev so podrobneje predstavljene v [2] in jih tu le povzamemo:

Kinematične enačbe

$$x \in I^a : \quad 1 + u^{a'}(x) - (1 + \varepsilon^a(x)) \cos \varphi^a(x) = 0, \quad (1)$$

$$w^{a'}(x) + (1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) = 0, \quad (2)$$

$$\varphi^{a'}(x) - \kappa^a(x) = 0, \quad (3)$$

$$x^* \in I^{b*} : \quad 1 + u^{b'}(x^*) - (1 + \varepsilon^b(x^*)) \cos \varphi^b(x^*) = 0, \quad (4)$$

$$w^{b'}(x^*) + (1 + \varepsilon^b(x^*)) \sin \varphi^b(x^*) = 0, \quad (5)$$

$$\varphi^{b'}(x^*) - \kappa^b(x^*) = 0. \quad (6)$$

Ravnotežne enačbe

$$x \in I^a : \quad \mathcal{R}_X^{a'}(x) + q_t^a(x) \cos \varphi^a(x) + q_n^a(x) \sin \varphi^a(x) = 0, \quad (7)$$

$$\mathcal{R}_Z^a(x) - q_t^a(x) \sin \varphi^a(x) + q_n^a(x) \cos \varphi^a(x) = 0, \quad (8)$$

$$\mathcal{M}^a(x) - (1 + \varepsilon^a(x)) Q^a(x) = 0, \quad (9)$$

$$x^* \in I^{b*} : \quad \mathcal{R}_X^{b'}(x^*) + q_t^b(x^*) \cos \varphi^b(x^*) + q_n^b(x^*) \sin \varphi^b(x^*) = 0, \quad (10)$$

$$\mathcal{R}_Z^b(x^*) - q_t^b(x^*) \sin \varphi^b(x^*) + q_n^b(x^*) \cos \varphi^b(x^*) = 0, \quad (11)$$

$$\mathcal{M}^b(x^*) - (1 + \varepsilon^b(x^*)) Q^b(x^*) = 0. \quad (12)$$

Konstitucijske enačbe

$$x \in I^a : \quad \mathcal{N}^a(x) - \mathcal{N}_c^a(x) = 0, \quad (13)$$

$$\mathcal{M}^a(x) - \mathcal{M}_c^a(x) = 0, \quad (14)$$

$$x^* \in I^{b*} : \quad \mathcal{N}^b(x^*) - \mathcal{N}_c^b(x^*) = 0, \quad (15)$$

$$\mathcal{M}^b(x^*) - \mathcal{M}_c^b(x^*) = 0. \quad (16)$$

Posplošene vezne enačbe

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (17)$$

$$w^a(x) = w^b(x^*), \quad (18)$$

$$q_n^b(x^*) + q_n^a(x) = 0, \quad (19)$$

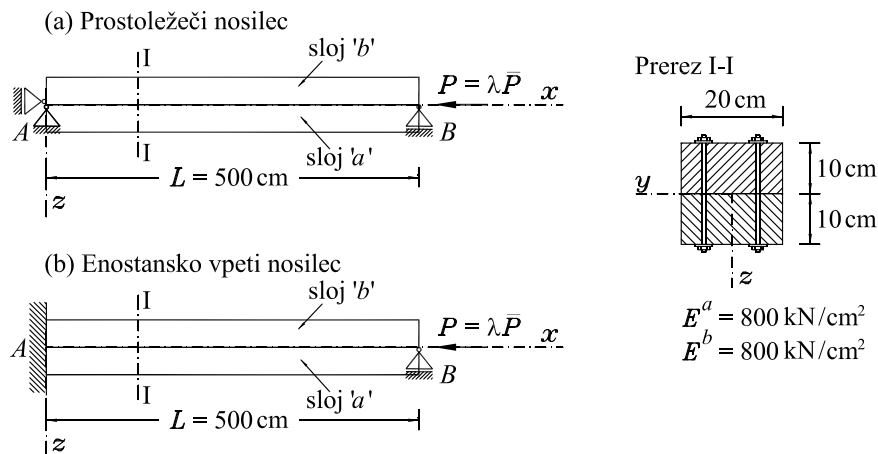
$$q_t^a(x) = \mathcal{H}^a(\Delta^a(x)), \quad (20)$$

$$q_t^b(x^*) = \mathcal{H}^b(\Delta^b(x^*)). \quad (21)$$

Tem enačbam moramo dodati še naravne oziroma kinematične robne pogoje. Sistem enačb (1)–(21) sestavlja enaindvajset enačb za enaindvajset neznanih funkcij: $u^a, w^a, \varphi^a, \varepsilon^a, \kappa^a, \mathcal{R}_X^a, \mathcal{R}_Z^a, \mathcal{M}^a, u^b, w^b, \varphi^b, \varepsilon^b, \kappa^b, \mathcal{R}_X^b, \mathcal{R}_Z^b, \mathcal{M}^b$ in $q_n^a, q_n^b, q_t^a, q_t^b, x^*$. Pomen vseh oznak v enačbah (1)–(21) je podrobno pojasnjen v [2]. Poudarimo le, da zgornji indeks $(\bullet)^a$ oziroma $(\bullet)^b$ označuje količino, ki pripada spodnjemu oziroma zgornjemu sloju kompozitnega nosilca. V splošnem točnih rešitev enačb (1)–(21) ne poznamo, zato jih moramo rešiti numerično. V tem članku jih rešimo z Galerkinovo metodo končnih elementov. Diskretne posplošne ravnotežne enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca rešimo s Crisfieldovo metodo ločne dolžine, kritično ali uklonsko silo pa izračunamo z metodo bisekcije. Kot kriterij za določitev kritične sile uporabimo pogoj $\det \mathbf{K}_T = 0$, kjer $\det \mathbf{K}_T$ predstavlja tangento togostno matriko kompozitne konstrukcije.

3 Računski primeri

Učinkovitost in natančnost razvitega računskega postopka za nelinearno analizo dvoslojnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema prikažemo na primeru uklonske nosilnosti centrično tlačeni dvoslojni leseni nosilec. Za dva statična sistema, (a) prostoležeči nosilec in (b) enostransko vpeti nosilec (slika 1), analiziramo vpliv togosti povezave slojev na velikost uklonske nosilnosti sestavljenih leseni nosilcev.

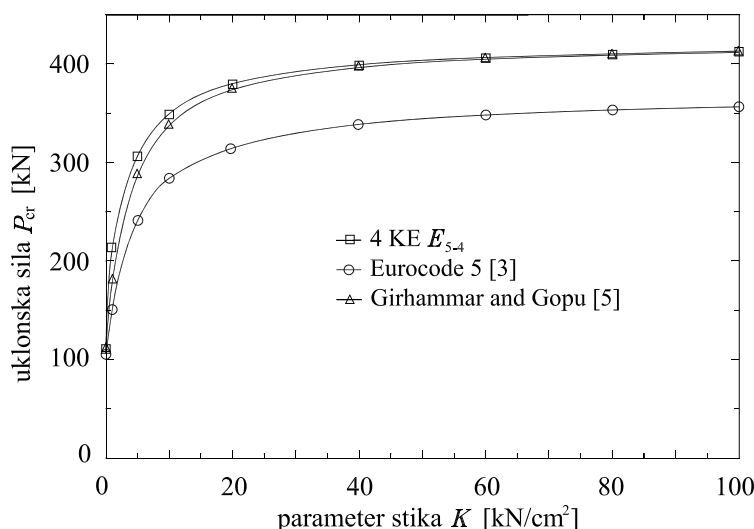


Slika 1 : Geometrijski in materialni podatki ter podatki o načinu podpiranja in legi obtežbe za: (a) dvoslojni prostoležeči nosilec in (b) dvoslojni enostransko vpeti nosilec.

V obeh primerih modeliramo stik med slojema z linearnim konstitucijskim zakonom stika, $q_t^a = K \Delta^a$ in $q_t^b = K \Delta^b$, kjer je K konstanta stične površine. Tudi oba sloja kompozitnega nosilca

modeliramo z linearno elastičnim materialnim modelom. Pri tem za oba sloja izberemo model lesa, ki je po EC 5 [3] klasificiran v razred kvalitete C 30. Za analizo uklonske nosilnosti standard priporoča uporabo elastičnega modula $E^a = E^b = 800 \text{ kN/cm}^2$.

Najprej analiziramo natančnost izračunane uklonske sile P_{cr} prostoležečega dvoslojnega lesenega nosilca. Naše rešitve primerjamo s 'točnimi' rešitvami, ki sta jih podala Girhammar in Gopu [5]. Girhammar in Gopu [5] sta dvoslojni prostoležeči nosilec modelirala z modificirano teorijo drugega reda in pri tem v računu zanemarila membransko deformiranje nosilca. Poudarimo pa, da v predstavljenem računskem postopku dvoslojni nosilec modeliramo z kinematično točno teorijo ravninskih nosilcev. Razvite končne elemente označimo z E_{i-j} . Pri tem indeks i predstavlja število glavnih točk (točke globalne Lobattove integracije), indeks j pa število točk lokalne integracije med dvema glavnima točkama (za podrobnosti glej [2]). Primerjavo med 'točnimi' in našimi numeričnimi rešitvami za velikost uklonskih sil prostoležečega dvoslojnega lesenega nosilca za različne togosti stika prikazujemo na sliki 2. Kot vidimo na sliki 2, se rezultati kljub različnima uporabljenima modeloma nosilca odlično ujemajo.

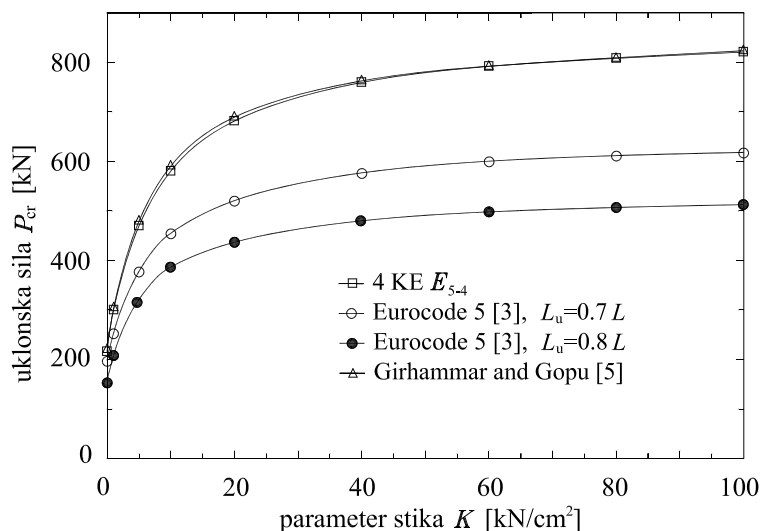


Slika 2 : Vpliv togosti stika na velikost uklonske sile P_{cr} prostoležečega dvoslojnega lesenega nosilca. Primerjava med numeričnimi rezultati (4 KE E_{5-4}), 'točnimi' rezultati [5] in rezultati po Eurocode 5 [3].

V nadaljevanju primerjamo naše numerične rezultate za velikost uklonske sile P_{cr} prostoležečega dvoslojnega lesenega nosilca tudi z rezultati, ki jih izračunamo skladno z EC 5 [3]. Tudi to primerjavo prikazujemo na sliki 2. Vidimo, da so vrednosti za velikost uklonske sile po EC 5 [3] bistveno manjše od vrednosti, ki smo jih izračunali s štirimi končnimi elementi tipa E_{5-4} . Pri podajnih stikih je P_{cr} do 45% manjša od izračunane uklonske sile, pri večjih togostih stika pa se razlike ustalijo pri napaki 15% do 20%. To dokazuje, da je računski postopek za določitev uklonskih sil sestavljenih lesenih nosilcev po EC 5 [3] precej konservativen.

Natančnost razvitih deformacijskih končnih elementov analiziramo tudi pri enostransko vpetem

dvoslojнем nosilcu. Tudi v tem primeru primerjamo rešitve za uklonsko silo obravnavanega nosilca, ki jih izračunamo s predstavljenim računskim postopkom ter s 'točnimi' rešitvami po [5] in rešitvami po EC 5 [3]. Vpliv togosti stika na velikost uklonskih sil ter primerjavo med rezultati različnih računskih postopkov prikazujemo na sliki 3. Kot v primeru prostoležečega nosilca tudi tu opazimo minimalna odstopanja med našim računom in 'točnimi' rešitvami [5].



Slika 3 : Vpliv togosti stika na velikost uklonske sile P_{cr} enostransko vpetega dvoslojnega lesenega nosilca. Primerjava med numeričnimi rezultati (4 KE E_{5-4}), 'točnimi' rezultati [5] in rezultati po EC 5 [3].

Na sliki 3 prikazujemo tudi velikosti uklonskih sil obravnavanega nosilca, kot jih izračunamo skladno s standardom Eurocode 5 [3]. Poudarimo, da EC 5 [3] za obravnavani dvoslojni leseni nosilec ne podaja eksplicitnih izrazov za velikost uklonske sile. Ker je enostransko vpeti nosilec podoben kontinuirnemu nosilcu preko dveh polj s kratkim levim poljem izračunamo uklonsko silo s pomočjo izrazov za kontinuirne nosilce. Standard priporoča enake izraze kot za prostoležeče nosilce, le da namesto dolžine referenčnega razpona L v enačbah upoštevamo vrednost $0.8L$, kar predstavlja konzervativno oceno uklonske dolžine nosilca L_u . Znano je, da je uklonska dolžina enostransko vpetega homogenega nosilca $0.7L$, zato primerjamo tudi vrednosti uklonskih sil po Eurocode 5 [3], ki jih iz vrednotimo z uklonsko dolžino $0.7L$. Izračunane vrednosti uklonskih sil P_{cr} po EC 5 [3] se neglede na izbiro uklonske dolžine $L_u = 0.7L$ ali $0.8L$ izkažejo kot zelo konzervativne. Z uporabo konzervativne ocene uklonske dolžine, t.j. $L_u = 0.8L$, so uklonske sil po Eurocode 5 [3] približno 40% nižje kot 'točne' vrednosti uklonskih sil. Pri togih stikih pa se odstopanja povečajo kar na 60%. Tako velika odstopanja gotovo zahtevajo analizo ustreznosti računskih postopkov za določitev uklonskih sil lesenih sestavljenih nosilcev, kot jih priporoča standard Eurocode 5 [3].

V nadaljevanju primerjamo izračunane uklonske sile prostoležečega in enostransko vpetega dvoslojnega lesenega nosilca s povsem togim ali s povsem podajnim stikom s točnimi uklon-

skimi silami lesenih nosilcev s homogenimi prerezi. Točne izraze za uklonske sile nosilcev s homogenimi prerezi povzamemo po literaturi [4]. Z numeričnim eksperimentiranjem smo ugotovili, da ustreza togemu stiku vrednost parametra stika $K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$. Primerjavo uklonskih sil prostoležečega in enostransko vpetega dvoslojnega lesenega nosilca za podajen in zelo tog stik prikazujeta tabeli 1 in 2. V obeh tabelah primerjamo točno velikost uklonske sile z rezultati, ki jih izračunamo s štirimi končnimi elementi tipa E_{5-4} , oziroma z rezultati po Girhammarju in Gopuju [5] in po EC 5 [3].

Tabeli 1 in 2 dokazujeta veliko natančnost razvitih končnih elementov. Z uporabo samo štirih končnih elementov tipa E_{5-4} je napaka izračunane uklonske sile dvoslojnega lesenega nosilca ne glede na togost stika le nekaj desetink odstotka. Kot smo že omenili sta Girhammar in Gopu izračunala uklonsko silo s poenostavljeno teorijo kompozitnih nosilcev [5]. Ne glede na to pa je napaka izračunane uklonske sile še vedno zelo majhna. Kot smo že ugotovili, rezultati v tabelah 1 in 2 potrjujejo, da Eurocode 5 [3] precej podceni velikost uklonske sile.

Tabela 1 : Primerjava uklonskih sil prostoležečega dvoslojnega lesenega nosilca za podajen in zelo tog ($K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$) stik.

	podajen stik	tog stik ($K=10^5 \text{ kN/cm}^2$)
$P_{cr}^{4KE E_{5-4}}$ [kN]	105.30	421.62
$P_{cr}^{\text{Girhammar in Gopu [5]}}$ [kN]	105.27	421.09
$P_{cr}^{\text{Eurocode 5 [3]}}$ [kN]	99.04	366.54
$P_{cr}^{\text{Euler [4]}}$ [kN]	105.31	421.66

Tabela 2 : Primerjava uklonske sile enostransko vpetega dvoslojnega lesenega nosilca za podajen in zelo tog ($K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$) stik.

	podajen stik	tog stik ($K=10^5 \text{ kN/cm}^2$)
$P_{cr}^{4KE E_{5-4}}$ [kN]	215.55	863.67
$P_{cr}^{\text{Girhammar in Gopu [5]}}$ [kN]	214.85	859.35
$P_{cr}^{\text{Eurocode 5 [3]}}$ [kN] ($L_u = 0.7L$)	196.95	645.38
$P_{cr}^{\text{Eurocode 5 [3]}}$ [kN] ($L_u = 0.8L$)	152.32	533.83
$P_{cr}^{\text{Euler [4]}}$ [kN]	215.51	863.80

4 Sklep

V članku smo predstavili računski postopek za materialno in geometrijsko nelinearno analizo dvoslojnih kompozitnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Posebno pozornost smo namenili analizi uklonske nosilnosti tlačno obremenjenih dvoslojnih lesenih kontinuirnih stebrov. Predstavljeni računski postopek, ki je zasnovan na Galerkinovi metodi končnih elementov, je izredno natančen in zato primeren za analizo uklonske nosilnosti dvoslojnih lesenih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Rezultate računske analize smo primerjali z rezultati, ki sta jih predstavlja Girhammar in Gopu [5] oziroma z rezultati, kot jih predpisuje Evropski predstandard za lesene konstrukcije Eurocode 5 [3]. Primerjava med rezultati različnih računskih postopkov za določitev uklonske nosilnosti dvoslojnih lesenih stebrov je pokazala, da je postopek po Eurocode 5 [3] zelo konservativen. Zavedati pa se moramo, da standard upošteva tudi precejšen raztros trdnostnih karakteristik materiala, kot tudi vplive geometrijskih imperfekcij na obnašanje obravnavanih konstrukcij. Kljub temu, da teh vplivov v predstavljenem računskem postopku ne upoštevamo, bi ugotovitve, ki jih lahko pridobimo z razvitim računskim postopkom, s pridom izkoristili pri nadaljnjem razvoju tega standarda.

Literatura

- [1] B. Čas, M. Saje, I. Planinc, *Nonlinear finite element analysis of composite planar frames with interlayer slip*, Computers and Structures, sprejeto v objavo.
- [2] B. Čas, *Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji*, Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2004.
- [3] Eurocode 5, *Design of timber structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings*, ENV 1995-1-1, 1993.
- [4] R. Flajs, M. Saje, E. Zakrajšek, *On the existence and uniqueness of the generalized solution of Reissner's elastica*, Mathematics and Mechanics of Solids, 8, 3–19, 2003.
- [5] U. A. Girhammar, V. K. A. Gopu, *Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 199(4), 1265–1282, 1993.
- [6] J. R. Goodman, E. P. Popov, *Layered beam systems with interlayer slip*, Journal of Structural Division, ASCE, 94(11), 2535–2547, 1968.
- [7] N. M. Newmark, C. P. Siest, I.M. Viest, *Test and analysis of composite beams with incomplete interaction*, Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, 9, 238–246, 1970.
- [8] H. Y. Rassam, J. R. Goodman, *Buckling behaviour of layered wood columns with interlayer slip*, Wood Science, 2(4), 238–246, 1970.
- [9] E. G. Thompson, J. R. Goodman, M.D. Vanderbilt, *Finite element analysis of layered wood systems*, Journal of the Structural Division, ASCE, 101(ST12), 2659–2672, 1975.



Interkonverzija med dinamičnimi in statičnimi materialnimi funkcijami viskoelastičnih materialov

I. Emri¹, R. Cvelbar¹, A. Nikonov¹ in B. von Bernstorff²

Interconversion between dynamic and static material functions of viscoelastic materials

Povzetek. Trajnost izdelka je ključna zahteva pri konstruiranju dinamično obremenjenih elementov. Karakterizacija viskoelastičnih materialov je običajno izvedena v dinamičnem načinu z uporabo opreme kot je DTMA, reometri, ... K večini opreme je priložena programska oprema, ki omogoča interkonverzijo dinamičnih v statične materialne funkcije preko uporabe aproksimativnih metod. Cilj prispevka je analizirati natančnost najbolj uporabljenih aproksimativnih metod za interkonverzijo med dinamičnimi in statičnimi materialnimi funkcijami. Pravilnost interkonverzij je bila preskušena s primerjavo interkonverzij preko spektrov za različne materiale. Analiza je pokazala pomembne razlike v kvaliteti interkonverzij. V vseh primerih je bila najboljša metoda Schwarzla katera daje napake manjše od 0.8%. V primeru Ninomiya-Ferry metode je napaka manj kot 1%. Metoda Christansena in Schwarzl-Struikova, dajeta napake reda velikosti 5%. Kot pričakovano je bila najslabša t.i. Enostavna metoda, pri kateri so bile napake tudi več kot 60%.

Abstract. Durability is a key requirement in designing of a dynamically loaded structural element. Material characterization of these materials is usually performed in a dynamic mode using equipment i.e., DTMA. Many of the existing apparatuses come with software, which allows interconversions to static material functions, using approximate methods. The goal of this paper is to analyze the accuracy of most widely used approximate methods of interconversion between dynamic and static material functions. The goodness of interconversions were tested through comparison with the interconversions via mechanical spectrum for different materials. The analysis have shown significant differences in the quality of interconversion. In all cases the most successful was the method of Schwarzl, were error of approximation was typically better then 0.8%. Ninomiya-Ferry method produces error within 1%. The other two methods, Christansen and Schwarzl-Struik, yielded errors in the order of 5%. As expected the Simple method was found to be the least accurate resulting in errors larger then 60%.

¹ Center for Experimental Mechanics, University of Ljubljana

² BASF, Ludwigshafen, Germany

1. Uvod

Uporaba polimerov v industriji hitro narašča zaradi prednosti, ki jih ti materiali nudijo v primerjavi z bolj tradicionalnimi materiali kot so kovine. Te prednosti so: cenenost materiala (na enoto volumna), enostavno preoblikovanje, odpornost na korozijo in ugodno razmerje med trdnostjo in težo. Konstruiranje s polimeri je precej zahtevno ker so, za razliko od kovin, mehanske lastnosti polimerov močno odvisne od časa. Njihovih mehanskih lastnosti zato ne popisujemo z moduli, ampak s časovno odvisnimi materialnimi funkcijami. Zanesljivo napovedovanje napetostno-deformacijskega stanja konstrukcijskih polimernih elementov zato ni enostavno. Taka napoved je lahko uspešna le, če poznamo vse potrebne materialne funkcije in vplive robnih pogojev nanje. Za popolno karakterizacijo polimernih materialov je potrebno določiti 21 materialnih funkcij, kar je praktično zelo težko in drago, poleg tega pa s posameznimi eksperimenti ne dobimo odziva materiala v celotnem časovnem ali frekvenčnem območju, v katerem se mu lastnosti spreminjajo. Med materialnimi funkcijami obstajajo povezave. Materialne funkcije znotraj istega obremenitvenega načina (enoosni, strižni ali volumetrični način) v bistvu vsebujejo enako informacijo o časovno odvisnem vedenju materiala. Med takimi linearnimi viskoelastičnimi materialnimi funkcijami obstajajo povezave, ki imajo osnovo v teoriji linearnih diferencialnih in integralnih enačb. To pomeni, da lahko izvršimo interkonverzijo materialnih funkcij med obremenitvenim načinom lezenja in relaksacije ter določitev npr. dinamičnih modulov na osnovi statičnih in obratno [17]. Tako bi namesto 14 neodvisnih meritev potrebovali le 4 meritve za popolno karakterizacijo viskoelastičnih materialov in, če upoštevamo še konstitutivne enačbe, bi teoretično potrebovali le dve meritvi.

Te povezave so analitične v glavnem preko konvolucijskih integralov in načeloma lahko katerokoli izmed funkcij določimo iz ene znane funkcije znotraj istega obremenitvenega načina [17], [3]. Da lahko določimo želeno funkcijo - naredimo interkonverzijo, je potrebno rešiti inverzni problem preko uporabe numeričnih metod. To so slabo pogojeni (*ill-posed*) problemi [17], [4], [3]. Obstaja več metod interkonverzije, ki jih v grobem lahko razdelimo na direktne, indirektno ter približne metode [17], [3], [9], [12].

Material običajno popišemo s spektri, ki so neodvisni od oblike obremenitve znotraj nekega obremenitvenega načina [17]. Spektri izhajajo iz posplošenega Maxwellovega ali Wiechertovega modela za relaksacijski spekter, $H(\tau)$, ter iz posplošenega Voigtovega ali Kelvinovega za retardacijski spekter, $L(\tau)$. Parameter τ predstavlja relaksacijske v prvem in retardacijski čase v drugem primeru. Za končno število elementov (gostota 2 na dekada predstavlja gladke viskoelastične funkcije) uporabimo diskretne spektre in sicer v paru podajamo intenziteto ter časovno lokacijo $((H_i, \tau_i), (L_i, \tau_i))$, za n je neskončno pa dobimo zvezni spekter. Relaksacijski spekter $H(\tau)$ omogoča popis vseh materialnih funkcij znotraj relaksacije, retardacijski spekter $L(\tau)$, pa vseh funkcij znotraj lezenja. Iz tega vidika sta spektra pomembna tudi za interkonverzijo [9], [19]. Določevanje spektrov sledi iz meritev materialnih funkcij in je ravno tako kot direktna interkonverzija numerično slabo pogojen problem [4], na kar močno vplivajo eksperimentalna napaka, prisotna pri določevanju materialnih funkcij, necelovitost podatkov (podatki niso dostopni v celem definicijskem območju) ter sama metoda.

Iz razpoložljive literature je razvidno, da je bilo tekom razvoja predlagana množica metod interkonverzije. Vzrok temu je, da so nekatere relacije med viskoelastičnimi funkcijami podane v obliki Fredholmovih in Volterinih integralnih enačb. Določevanje iskane

materialne funkcije iz takih enačb zahteva analitično ali numerično obravnavo. Ker so bile pred časom numerične metode težko obvladljive, se je razvilo veliko približnih metod, ki so uporabne za iskanje določenih lastnosti. Ko zahtevamo kvalitativno poznavanje je potrebno uporabiti druge, natančnejše metode. Nekaj metod glede na razdelitev je naštetih v nadaljevanju.

Cilj je analizirati in določiti pogoje, pri katerih lahko uporabimo približne metode pri interkonverziji med statičnimi in dinamičnimi funkcijami. Nekaj enostavnih metod se uporablja v redni industrijski praksi, v raziskovalnem delu ter v programski opremi, ki je na voljo za vrednotenje rezultatov meritev na komercialnih reoloških inštrumentih. Nekaj najbolj uporabljenih aproksimativnih metod smo uporabili za primerjavo aproksimativne rešitve z viskoelastičnimi povezavami po zaključeni poti preko relaksacijskih ter retardacijskih spektrov za tri materiale ([10], [5]). Slednje smo izračunali z uporabo Emri-Tschoeglovih algoritmov [2], [18].

2. Časovno in frekvenčno odvisne funkcije podane v obliki relaksacijskega in retardacijskega spektra

Materiale v linearnem področju lahko obravnavamo kot linearni sistem. V tem primeru relaksacijski, $H(\tau)$, in retardacijski, $L(\tau)$, spekter predstavljata dve prenosni funkciji, ki modelirata časovno odvisno reorganizacijo strukture materiala. Ta je povzročena za relaksacijo z deformacijo (premikom), in za retardacijo z napetostjo (silo). Če zagotovimo, da je (kontinuirani) relaksacijski spekter, $H(\tau)$, poznan, potem lahko realno in imaginarno komponento frekvenčno odvisnega (dinamičnega) relaksacijskega modula, in frekvenčno odvisne viskoznosti izračunamo preko naslednjih izrazov [17]:

$$G'(\omega) = \{G_e\} + \sum_{i=1}^{i=n} H_i \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2} = G_g - \sum_{i=1}^{i=n} H_i \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_i^2} \quad \text{in} \quad (1)$$

$$G''(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} H_i \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2} \quad (2)$$

Časovno odvisni relaksacijski modul, $G(t)$, preko diskretnega relaksacijskega spektra izrazimo kot:

$$G(t) = \{G_e\} + \sum_{i=1}^{i=n} H_i \exp(-t / \tau_i) = G_g - \sum_{i=1}^{i=n} H_i [1 - \exp(-t / \tau_i)] \quad (3)$$

Zaviti oklepaji v enačbah označujejo prisotnost ali odsotnost podanih fizikalnih veličin odvisno od tega ali je obravnavan material reo- ali areodiktičen¹ [17]. Ko je znan diskretni retardacijski spekter, $L(\tau_i) = \{L_i, \tau_i; i = 1, 2, \dots, n\}$, lahko analogno izračunamo frekvenčni in časovno odvisni modul lezenja:

¹ Reodiktičen material teče skozi celotno območje – je viskoelastična tekočina, areodiktičen material ima plato v gumastem področju – ravnotežno stanje

$$J'(\omega) = J_g + \sum_{i=1}^{i=n} L_i \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_i^2} = J_e^{\{0\}} - \sum_{i=1}^{i=n} L_i \frac{\omega^2 \tau_i^2}{1 + \omega^2 \tau_i^2},$$

$$J''(\omega) = \sum_{i=1}^{i=n} L_i \frac{\omega \tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2} + \left\{ \frac{\phi_f}{\omega} \right\} \quad (4)$$

in

$$J(t) = J_g + \sum_{i=1}^{i=n} L_i [1 - \exp(-t/\tau_i)] + \{\phi_f t\}. \quad (5)$$

V tem primeru τ in/ali τ_i označujeta retardacijske čase, J_g je steklasti strižni modul, medtem ko je J_e ravnotežni (strižni) modul. Te procedure pripadajo skupini tako imenovanih direktnih rešitev in so numerično stabilne. Poznavanje spektra omogoča točno rešitev (znotraj računske napake) vseh pripadajočih časovno- in frekvenčno-odvisnih materialnih funkcij.

3. Aproximativne povezave med dinamičnimi in statičnimi materialnimi funkcijami lezenja in relaksacije

Mehanskega spektra ne moremo direktno meriti. Potrebno ga je izračunati iz odzivnih funkcij, običajno iz ene ali obeh harmoničnih (dinamičnih), to je, $G'(\omega)$, ali $G''(\omega)$. Dinamične meritve so najpogosteje uporabljene v industriji iz razloga enostavne izvedbe na komercialnih napravah. Izračun relaksacijskega in retardacijskega spektra zahteva inverzno rešitev Fredholmove integralske enačbe prvega ali drugega reda, kar je slabo pogojen (ill-posed) problem. Do nedavnega, [4], [1], [7], [6], [13], [9] ni bilo na razpolago nobene stabilne rešitve za to skupino problemov. Zato so bile v preteklosti za interkonverzijo med frekvenčno in časovno odvisnimi funkcijami razvite številne aproksimativne metode. Nekatere od teh metod se še vedno uporabljajo, predvsem v industrijskih laboratorijih. Mi proučujemo nekatere izmed najbolj uporabljenih algoritmov.

Najenostavnejša aproksimacija iz dinamičnih v statične materialne funkcije uporabi le realni del frekvenčno odvisnega modula, $G'(\omega)$, in modula popuščanja, $J'(\omega)$, in je [11]

$$G(t) \approx G'(\omega) \Big|_{\omega=1/t}, \text{ in } J(t) \approx J'(\omega) \Big|_{\omega=1/t} \quad (6)$$

Christensen [1] je predlagal modificiran algoritem za napoved $G(t)$ in $J(t)$ iz frekvenčno odvisnih materialnih funkcij, $G'(\omega)$, in, $J'(\omega)$. Zamenjal je frekvenco z $\omega = 2/\pi t$ in dobil:

$$G(t) \approx G'(\omega) \Big|_{\omega=2/\pi t}, \text{ in } J(t) \approx J'(\omega) \Big|_{\omega=2/\pi t} \quad (7)$$

Ninomiya in Ferry, [8], [17] sta razvila algoritem za izračun $G(t)$ in $J(t)$, ki upošteva realni in imaginarni del dinamičnega modula,

$$G(t) \approx \left[G'(\omega) - 0.4G''(0.4\omega) + 0.014G''(10\omega) \right] \Big|_{\omega=1/t}, \quad (8)$$

Schwarzl in Struik [14] sta razvila nekaj aproksimacij podobnih oblik. Ena, najbolj uporabljenih je

$$G(t) \approx G'(\omega) - 0,337G''(0,323\omega) \Big|_{\omega=1/t}. \quad (9)$$

V istem članku sta predlagala tudi aproksimacijo v $G(t)$, ki je razvita le iz $G'(\omega)$,

$$G(1,44t) \approx G'(\omega) - 0,4 \left[G'(1,59\omega) - G'(0,193\omega) \right] \Big|_{\omega=1/t}. \quad (10)$$

Schwarzl [15] je razvil serijo aproksimacij za določitev statičnih funkcij iz dinamičnih. V primeru, da je dušenje ($\tan \delta$) majhno, je zadostna enostavna (2 točkovna formula):

$$J(t) \approx J'(\omega) + 0,566J''(0,5\omega) - 0,203J''(\omega) \Big|_{\omega=1/t}. \quad (11)$$

V primeru, ko je dušenje manj kot 0.125, je napaka interkonverzije znotraj 1%. Za višje vrednosti dušenja so predlagane kompleksnejše relacije in naslednja proizvede napako manjšo od 1% v vseh primerih:

$$\begin{aligned} J(t) \approx & J'(\omega) + 0,00807 J''(\omega/16) + 0,00719 J''(\omega/8) - \\ & - 0,00616 J''(\omega/4) + 0,467 J''(\omega/2) - 0,0918 J''(\omega) - \\ & - 0,0534 J''(2\omega) + 0,08 J''(4\omega) - 0,0428 J''(8\omega) \Big|_{t=1/\omega} \end{aligned} \quad (12)$$

Relacije so enake za transformacije v načinu relaksacije in lezenja s tem, da uporabimo simultano substitucijo za:

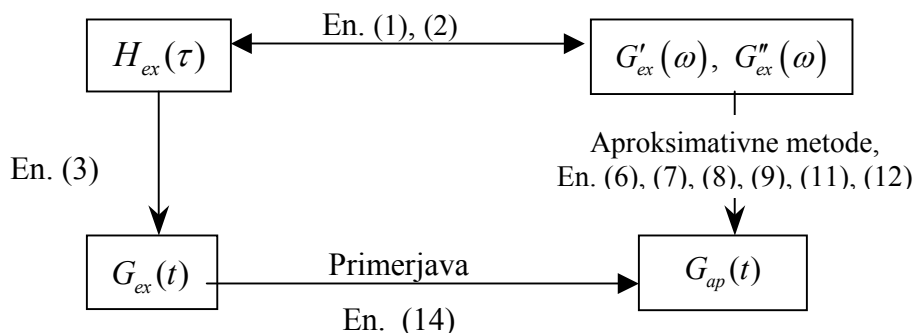
$$J(t) \Rightarrow -G(t); \quad J'(\omega) \Rightarrow -G'(\omega); \quad J''(\omega) \Rightarrow G''(\omega) \quad (13)$$

4. Numerični eksperiment in razprava

Najprej smo proučili aproksimativne povezave med frekvenčno odvisnimi in časovno odvisnimi materialnimi funkcijami z uporabo sintetično generiranih znanih diskretnih spektrov $H_{ex}(\tau)$. Nato smo analizirali natančnost aproksimativnih metod za merjene relaksacijske funkcije za šest različnih materialov. Najprej smo iz njih določili diskretni spekter $H_{ex}(\tau)$ z uporabo Emri-Tschoeglovega algoritma [18] kot "pravi" spekter. Z uporabo spektra lahko generiramo natančno odzivno funkcijo v frekvenčnem prostoru, $G'_{ex}(\omega)$ in $G''_{ex}(\omega)$, in v časovni skali, $G_{ex}(t)$, preko enačb, (2), (3) in (1). Nato uporabimo natančne frekvenčne odzivne funkcije kot začetne točke za napoved časovno odvisne funkcije, $G_{ap}(t)$, s tem, da uporabimo aproksimativne metode (6), (7), (8), (9), (11) in (12) ter $G_{sp}(t)$ z interkonverzijo preko diskretnih spektrov (3). Indeks "ex" predstavlja t.i. "natančno", "ap", aproksimacijo ter "sp" odzivno funkcijo, pridobljeno preko spektrov. Kvaliteta aproksimativne interkonverzije analiziramo z računanjem relativne napake,

$$\Lambda = \left[G_{ap}(t) - G_{ex}(t) \right] / G_{ex}(t) \text{ ali } \Lambda = \left[G_{sp}(t) - G_{ex}(t) \right] / G_{ex}(t). \quad (14)$$

Shema numeričnih eksperimentov je prikazana na sliki 1, rezultati analize pa so prikazani v nadaljevanju.



Slika 1: Shema procedure numeričnega eksperimenta

5. Analiza izmerjenih materialnih funkcij

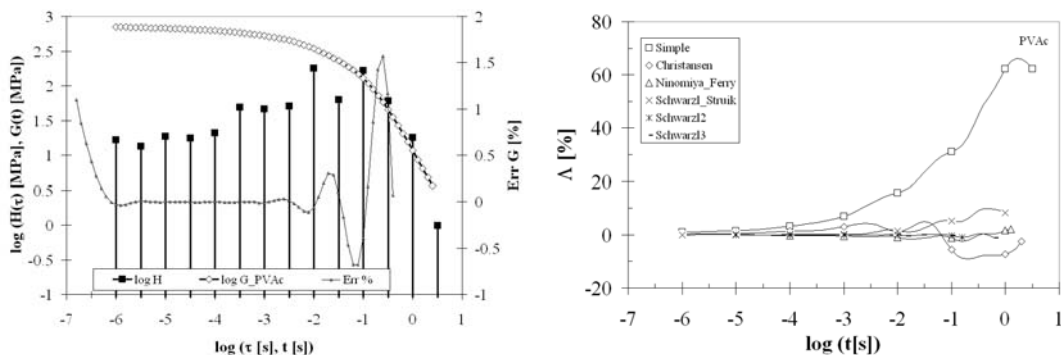
Sedaj nadaljujemo z analizo aproksimativne interkonverzije z uporabo eksperimentalnih podatkov modula relaksacije, $G(t)$, treh različnih materialov: PVAc, SBR, PA6 pomerjenih v Centru za eksperimentalno mehaniko, Fakultete za strojništvo, Univerze v Ljubljani. Detajli eksperimentalne procedure in obdelovanja podatkov so podani v objavah, [5], [10]. Iz časovno odvisnih odzivnih funkcij najprej izračunamo odgovarjajoče relaksacijski spekter, $H(\tau)$, z algoritmi predlaganimi s strani Emrija in Tschoegla, [2]. Pravilnost izračunanega spektra je bila preverjena na način, da smo z enačbo (3) nazaj izračunali modul relaksacije, $G(t)$. Spektri, skupaj z merjenimi materialnimi funkcijami, ponovno izračunanimi materialnimi funkcijami iz spektrov ter njihove relativne napake so podane na slikah 2-4. Maksimalna relativna napaka je bila v vseh primerih manj kot 1%. Iz izračunanega spektra sledimo proceduri predstavljeni na sliki 1 in izračunamo "točni" frekvenčno odvisni materialni funkciji $G'_{ex}(\omega)$, in $G''_{ex}(\omega)$. Ti služita kot osnova za napoved $G_{ap}(t)$, z uporabo aproksimativnih metod in za določitev $G_{sp}(t)$ preko spektrov. Kvaliteto napovedi z uporabo aproksimativne interkonverzije in interkonverzije preko spektrov podamo z relativno napako glede na enačbo (14) na slikah 2-4 na desni strani.

6. Zaključki iz interkonverzije dinamičnih v statične materialne funkcije

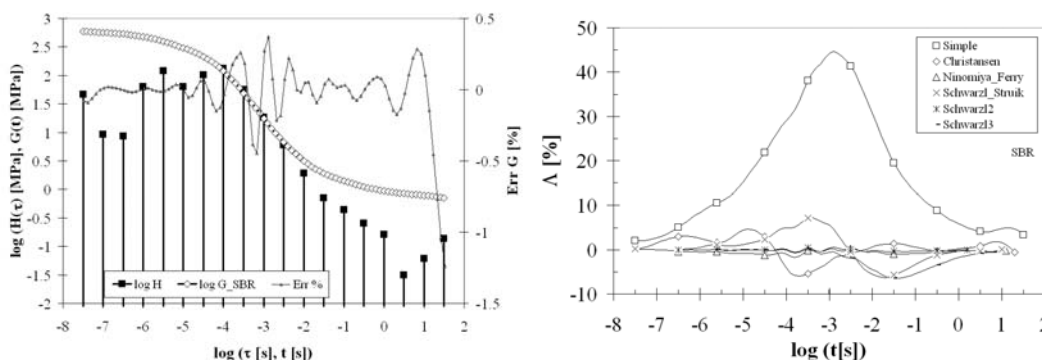
Nekaj zanimivih in uporabnih zaključkov lahko izluščimo iz zgornje analize, ki so pomembni ter uporabni za praktičnega reologa:

- i. Tako imenovane enostavne metode se je potrebno izogibati. Za eksperimentalne podatke za izbrane materiale je relativna napaka interkonverzije do 80 %.
- ii. V vseh primerih je najbolj uspešna metoda Schwarzl2, ki je popisana z enačbo (12). Relativna napaka je bila v vseh primerih znotraj 0.8%. Ninomiya-Ferry metoda daje napake reda velikosti pod 1%. Drugi dve metodi, Christansen in Schwarzl-Struik, dajeta relativne napake velikosti 5%.
- iii. Večjo relativno napako dobimo v primeru, če aproksimiramo krivuljo, ki ima večji naklon, t.j. večji prvi odvod glede na frekvenco. V primeru interkonverzije modula je

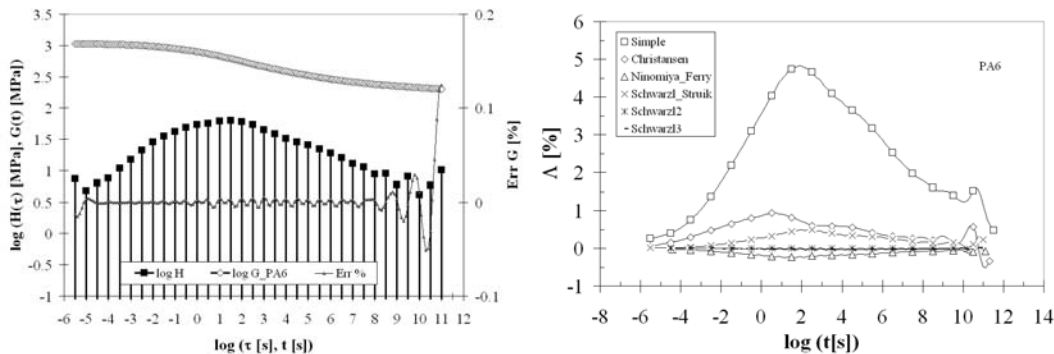
to razvidno za material PVAc, kateri ima med materiali največjo spremembo modula v časovni enoti – največji prvi odvod glede na čas in največjo relativno napako v primeru interkonverzije.



Slika 2: Sumarna krivulja $G(t,T)$ za PVAc (a), skupaj s pripadajočim relaksacijskim spektrom $H(\tau)$ (b) na levi ter relativna napaka aproksimacij na desni strani.



Slika 3: Sumarna krivulja $G(t,T)$ za SBR (a), skupaj s pripadajočim relaksacijskim spektrom $H(\tau)$ (b) na levi ter relativna napaka aproksimacij na desni strani.



Slika 4: Sumarna krivulja $G(t,T)$ za PA6 (a) skupaj s pripadajočim relaksacijskim spektrom $H(\tau)$ (b) na levi ter relativna napaka aproksimacij na desni strani

7. Literatura:

- [1] R.M. Christensen, *Theory of elasticity*, (1982), Academic Press, New York
- [2] I. Emri, N.W. Tschoegl, *Generating line spectra from experimental responses. 1. Relaxation modulus and creep compliance*, Rheol. Acta, 32, 311–321, 1993
- [3] J.D. Ferry, *Viscoelastic Properties of polymers*, 3rd ed. (1981), Willey
- [4] J. Honerkamp, *Ill-posed problems in rheology*, Rheol. Acta, 28, 363-371, 1989
- [5] A. Kralj, T. Prodan, I. Emri, *An apparatus for measuring the effect of pressure on the time-dependent properties of polymers.*, J. rheol., 2001, vol. 45, no. 4, str. 929-943.
- [6] A.Y. Malkin, V.V. Kuznetsov, *Linearization as a method for determining parameters of relaxation spectra*, Rheol. Acta, 39, 379 – 383, 2000
- [7] D.W. Mead, *Numerical interconversion of linear viscoelastic material functions*, Journal of Rheology, Vol. 38, No. 6, pp. 1769-1795, 1994
- [8] K. Ninomija, J.D. Ferry, *Some approximate equations useful in the phenomenological treatment of linear viscoelastic data*, J. of Colloid Sci., 14, 36, 1959
- [9] S.W. Park, R.A. Schapery, *Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I - a numerical method based on Prony series*, Int. J. Solids Struct., 36, 1653-1675, 1999
- [10] T. Prodan, *Vpliv hidrostatičnega tlaka in temperature na strižni modul časovno odvisnih materialov*, doktorska dizertacija, FS, UNI-LJ, Ljubljana, Slovenia
- [11] W. Retting, M.H. Laun, *Kunststoff-Physik*, (1991), Hanser, München, Germany
- [12] R.A. Schapery, S.W. Park, *Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II - an approximate analytical method*, Int J Solids Struct, 36 (11), 1677-1699, 1999
- [13] R.A. Schapery, *Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis*, Proc. Fourth U.S. Nat. Congress Appl. Mech., 2, 1075, 1967
- [14] F.R. Schwarzl, L.C.E. Struik, *Analysis of relaxation measurements*, Adv. Mol. Relax. Processes 1, 210, 1967
- [15] F.R. Schwarzl, *The numerical calculation of storage and loss compliance from creep for linear viscoelastic materials*, Rheol. Acta, 8,6, 1969
- [16] F.R. Schwarzl, *On the interconversion between viscoelastic material functions*, Pure and Applied Chemistry, 1970, 23
- [17] N.W. Tschoegl, *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*, (1989), Springer-Verlag, Berlin, Germany
- [18] N.W. Tschoegl, I. Emri, *Generating line spectra from experimental responses. 2. Storage and loss functions*, Rheol. Acta, 32, 322 – 327, 1993
- [19] H.H. Winter, *Analysis of dynamic mechanical data, Inversion into a relaxation time spectrum and consistency check*, J. Non-Newton. Fluid Mech., 68, 225-239, 1997



O strižnem in torzijskem središču

M. Gams¹, G. Turk¹, S. Srpčič¹

On Shear Center and Center of Twist

Povzetek. V literaturi se pojavlja presenetljivo veliko matematičnih definicij strižnega središča. V članku je prikazano, da lahko vse te definicije razvrstimo v dve različni kategoriji, ki dajeta malenkostno drugačne rezultate; v eni kategoriji torzijsko središče kar sovпада s strižnim. Prikazana je matematična razlaga vzrokov za razlike in parametrična študija, kjer na specifičnem primeru ugotovljamo razlike med obema kategorijama definicij.

Abstract. Surprisingly many definitions of shear center can be found in literature. This article shows, that all these definitions can be divided into two different groups of definitions that produce slightly different results. One group of definitions provides shear center that coincides with the center of twist. Mathematical explanation of this phenomena is presented as well as a parametric study of differences on a specific case.

1 Uvod

Pričujoči članek je v veliki meri nadaljevanje članka Staneka in Turka [3], saj iz njega izhaja, ga dopolnjuje in ponuja odgovore na nekatera vprašanja, ki so tam ostala neodgovorjena. Osnovno vprašanje je bilo, od kod toliko definicij in zakaj razlike med njimi kljub mehansko jasni in enolični definiciji strižnega in torzijskega središča. Ugotovimo lahko, da kljub številnim definicijam, ki jih navajajo različni avtorji (Sokolnikoff [1], Goodier, Vončina [7], Trefftz [5] in drugi), obstajata v osnovi samo dve različni definiciji. Prva definicija energijsko ne loči problemov čistega upogiba in čiste torzije, zato ostane strižno središče odvisno od materialnega parametra (Poissonovega količnika). Druga možnost je, da oba pojava obravnavamo ločeno, kar pripelje do nadaljnjih poenostavitev: (i) strižno in torzijsko središče sovpadata, (ii) njune koordinate so neodvisne od Poissonovega količnika in (iii) strižne napetosti zaradi Poissonovega učinka se statično izničijo. Veubeke [6] je matematično pokazal, da ima definicija, ki energijsko loči pojava, celo kinematično razlago. Izkáže se namreč, da je povprečje obteženih zasukov po

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

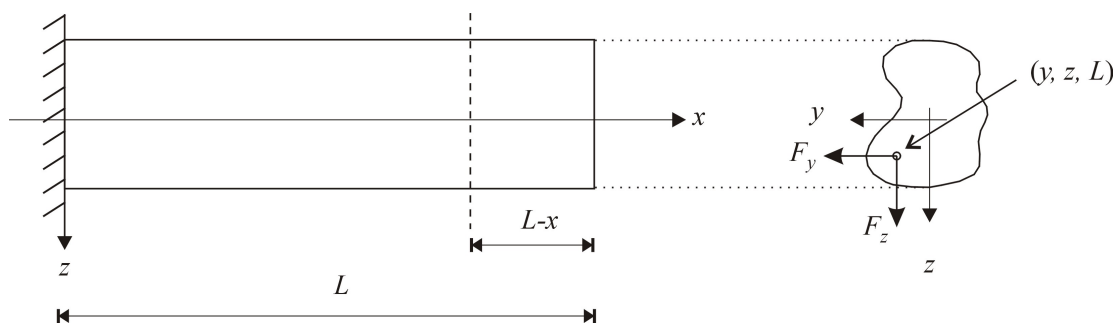
prerezu v primeru čistega upogiba enako nič, obtežna funkcija pa je kar Prandtlova napetostna funkcija. Ta izpeljava je tudi prikazana v članku.

Dodatno smo naredili parametrično študijo na posebnem primeru, kjer smo opazovali razliko v legi središč po obeh definicijah v odvisnosti od debeline prereza oblike C. Obliko izračunane izbočitvene funkcije smo preverili na naravnem modelu.

2 Različni pristopi k določitvi strižnega oziroma torzijskega središča

Kot vemo iz teorije elastičnosti, velja za torzijski (vzdolžni, okoli vzdolžne osi) zasuk poljubnega vlakna v prerezu nosilca, prikazanega na sliki 1, naslednja zveza:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \alpha + v(by - az). \quad (1)$$



Slika 1 : Prikaz geometrije in obtežbe.

V enačbi (1) je ω_x torzijski zasuk, α je specifični torzijski zasuk *središčnega* vlakna, v je koeficient prečne kontrakcije (Poissonov količnik). a in b sta kinematični spremenljivki, ki predstavljata odvode ukrivljenosti: $\frac{d^3 u_y}{dx^3} = -a$, $\frac{d^3 u_z}{dx^3} = -b$, pri čemer sta u_y in u_z pomika v smereh y in z . Velikost spremenljivk a in b je odvisna od obtežbe (notranjih strižnih sil N_y in N_z) in karakteristik prečnega prereza:

$$a = \frac{I_y N_y - I_{yz} N_z}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)}, \quad b = \frac{-I_{yz} N_y + I_z N_z}{E(I_y I_z - I_{yz}^2)}. \quad (2)$$

Prečni sili F_y in F_z delujeta v poljubni točki prečnega prereza na koncu nosilca ($x = L$). Enačba (1) kaže, da se torzijski zasuk ob upoštevanju prečne kontrakcije spreminja po prečnem prerezu in je v splošnem povsod različen od nič. Zaradi tega smo prisiljeni narediti neko predpostavko. Izbira različne predpostavke na tem mestu je vzrok razlik med obema skupinama definicij.

Klasični postopek določanja koordinat strižnega središča temelji na razcepu problema upogibno-torzijsko obremenjenega nosilca (slika 1) na ločena problema čiste torzije in čistega upogiba. Skupina definicij, ki v energijskem pogledu povezano obravnava oba obtežna primera, vpelje predpostavko, da je pri čistem upogibu specifični torzijski zasuk težiščnega vlakna ($x, 0, 0$)

nosilca $\alpha = 0$. Izkaže se, da je tedaj tudi povprečni torzijski zasuk prereza enak nič ($\int_{\mathcal{A}_x} \omega_x dA_x = 0$). Tako predpostavko je prvi predlagal Timoshenko [4], sledili pa so mu mnogi drugi znani mehaniki kot so Sokolnikoff [1], Mindlin in Salvadori [6]. Zanimivo je, da je možno formule strižnega središča iz iste skupine definicij izpeljati tudi brez eksplcitne predpostavke o specifičnem torzijskem zasuku. Taka alternativna izpeljava je na primer v diplomskem delu Vončine [7]. Vendar so tudi tako dobljene formule odvisne od Poissonovega količnika in dajejo numerično enake rezultate, kot ostale definicije, ki pojavov energijsko ne ločijo.

Druga skupina definicij ne privzame predpostavke o velikosti specifičnega torzijskega zasuka, temveč izhaja iz dejstva, da sta oba obtežna primera energijsko ločena. Prvi je na tak način izpeljal formule za koordinate strižnega središča Trefftz [5]. Prva očitna razlika, ki jo vidimo, ko zapišemo te enačbe je, da so neodvisne od materialnega parametra prečne kontrakcije. Od tod sledi še nekaj poenostavitev. Zanimiva je kinematična interpretacija energijske teorije, ki je privzeta po de Veubeke-ju [6] in je prikazana v naslednjem poglavju.

3 Kinematična razlaga energijske teorije

Izhajamo iz predpostavke, da se pri deformiranju nosilca vlakna v prerezu zasukajo le zaradi prečne kontrakcije. Zato v enačbi (1) predpostavimo, da je specifični torzijski zasuk odvisen od Poissonovega koeficienta ($\alpha = \nu c$):

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \alpha + \nu(by - az) = \nu(by - az + c). \quad (3)$$

Naša naloga je, poiskati tako konstanto c , da bosta deformacijski energiji upogiba in torzije neodvisni druga od druge. Enačbe za strižne napetosti v prerezu pri čistem upogibu so tedaj:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -E(ay + bz), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = 2G(\alpha + \nu(by - az)) = 2\nu G(by - az + c). \quad (5)$$

Rešitev za strižne napetosti iščemo z nastavkoma:

$$\sigma_{xy} = E \frac{\partial \Phi}{\partial y} + G \frac{\partial K}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = E \frac{\partial \Phi}{\partial z} - G \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (6)$$

kjer sta Φ in K strižni napetostni funkciji.

$$\mathcal{A}_x : \nabla^2 \Phi = -(ay + bz), \quad \text{pri} \quad \mathcal{C}_x : \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

in

$$\mathcal{A}_x : \nabla^2 K = -2\nu(by - az + c), \quad \text{pri} \quad \mathcal{C}_x : dK = 0. \quad (8)$$

Odvod po n predstavlja odvod v smeri normale na plašč nosilca. Ker lahko funkcijo K določimo samo do konstante natančno, lahko brez izgube na splošnosti vzamemo:

$$\mathcal{C}_x : K = 0 \quad (9)$$

Napetostno stanje, ki ga generira funkcija Φ , imenujemo osnovno napetostno stanje, tisto, ki ga ustvarja funkcija K in upošteva Poissonov učinek, pa dodatno napetostno stanje. Če želimo določiti dodatno napetostno stanje, moramo določiti parameter c . Izračunamo specifično deformacijsko delo (po Clapeyronu):

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\epsilon_{xx}\sigma_{xx} + \sigma_{xy}2\epsilon_{xy} + \sigma_{xz}2\epsilon_{xz}), \quad (10)$$

in jo s Hookeovim zakonom povežemo z napetostmi:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2E}\sigma_{xx}^2 + \frac{1}{2G}(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2). \quad (11)$$

Ker je pri neovirani (čisti) torziji $\sigma_{xx} = 0$, prvi člen ne predstavlja povezave med torzijo in upogibom. Povezavo dobimo preko strižnih napetosti, ki jih zapišemo kot vsoto napetosti zaradi čistega upogiba in čiste torzije:

$$\sigma_{xy} = \left(E \frac{\partial \Phi}{\partial y} + G \frac{\partial K}{\partial z} \right) + \left(G\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{xz} = \left(E \frac{\partial \Phi}{\partial z} - G \frac{\partial K}{\partial y} \right) - \left(G\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Θ je Pandtlova napetostna funkcija [2], ki jo izračunamo s Poissonovo diferencialno enačbo za primer neovirane torzije:

$$\nabla_{yz}^2 \Theta = -2 \quad \text{pri} \quad \mathcal{C}_x : d\Theta = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{C}_x : \Theta = 0. \quad (14)$$

Celotna deformacijska energija nosilca je:

$$D = \int_0^L \int_{\mathcal{A}_x} (\mathcal{D}_{\text{upogib}} + \mathcal{D}_{\text{torzija}} + \mathcal{D}') dA_x dx \quad (15)$$

Ko vstavimo napetosti (12) in (13) v enačbo (11), vidimo, da energijsko povezavo med upogibom brez torzije in čisto torzijo predstavljajo členi:

$$\mathcal{D}' = E\alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) + G\alpha \left(\frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right). \quad (16)$$

Če uporabimo Stokesovo² formulo za prvi člen, dobimo:

$$\int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) dA_x = \int_{\mathcal{C}_x} \Phi d\Theta = 0 \quad (17)$$

in ugotovimo, da je prispevek prvega člena iz enačbe (16) enak nič, saj je po enačbi (14) na $\mathcal{C}_x : d\Theta = 0$. Drugi člen enačbe (16) zapišemo kot skalarni produkt gradientov:

$$\int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) dA_x = \int_{\mathcal{A}_x} \text{grad } K \cdot \text{grad } \Theta dA_x \quad (18)$$

² $\int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\mathcal{C}_x} Q dP = - \int_{\mathcal{C}_x} P dQ$

in na njem uporabimo prvo Greenovo formulo³. Tako dobimo:

$$-\int_{\mathcal{A}_x} \Theta \nabla^2 K \, dA_x + \int_{\mathcal{L}_x} \Theta \frac{\partial K}{\partial n} \, ds. \quad (19)$$

Zahtevamo, da je ta člen nič (s tem energijsko ločimo problema) in vanj vstavimo izraz (8):

$$\int_{\mathcal{A}_x} \Theta (by - az + c) \, dA_x = 0. \quad (20)$$

Enačba (20) je kinematična interpretacija energijsko ločenega upogiba od torzije, saj nam pove, da je v tem primeru obteženo povprečje torzijskih zasukov po prerezu enako nič: $\int_{\mathcal{A}_x} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \Theta \, dA_x = 0$.

Z vpeljavo torzijskega vztrajnostnega momenta I_x sledi iz enačbe (20)

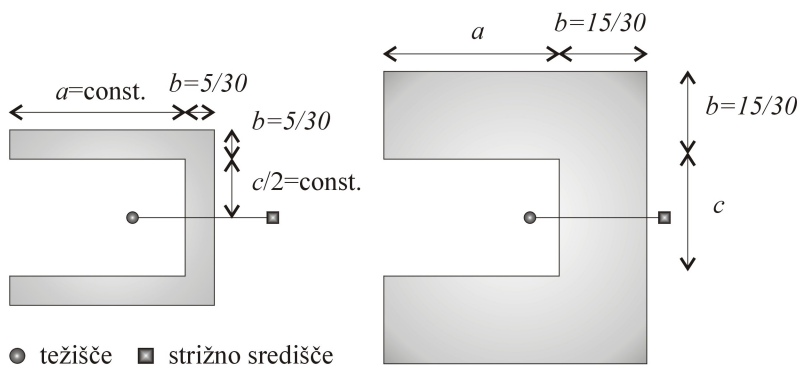
$$I_x = 2 \int_{\mathcal{A}_x} \Theta \, dA_x \quad (21)$$

tudi ekspliciten izraz za c :

$$c = \frac{1}{I_x} \left(2a \int_{\mathcal{A}_x} \Theta z \, dA_x - 2b \int_{\mathcal{A}_x} \Theta y \, dA_x \right) \quad (22)$$

4 Numerični primer

Obravnavamo primer debelostenskega C prereza prikazanega na sliki 2. Prerezu spreminjamo debelino pasnice, kot je prikazano na sliki 2. Parametra $a = 1$ in $c = 2/3$ sta konstantna, parameter b pa se spreminja v intervalu od $5/30$ do 1 .



Slika 2 : Spreminjanje geometrije prereza.

Ker enačb v okviru 1 za račun koordinat strižnega središča ne moremo analitično rešiti, smo za reševanje uporabili diferencialno metodo s simetričnimi formulami. Koordinate strižnega središča

³ $\int_{\mathcal{A}_x} (K \nabla^2 \Theta + \text{grad } K \cdot \text{grad } \Theta) \, dA_x = \int_{\mathcal{L}_x} K \frac{\partial \Theta}{\partial n} \, ds$

so zapisane v tabeli 1, razlike med teorijama v odstotkih pa so prikazane na sliki 3. Rezultati, ki smo jih dobili po Vončini in Sokolnikoffu, so numerično enakovredni, rezultati po energijski teoriji pa malenkostno odstopajo. Največja odstopanja opazimo pri tankostenskem profilu, kjer je razlika malo nad 2%, pri večji širini pa so razlike manjše.

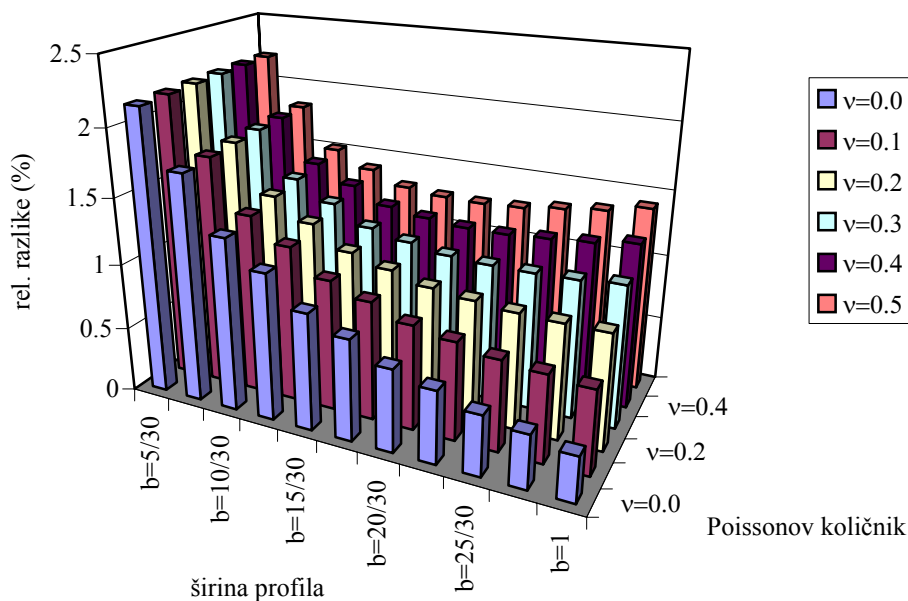
Okvir 1: Formule koordinat strižnega središča.

<p>• Sokolnikoff: $y_{SS} = J(I_z S_2 - I_{yz} S_1)$ $z_{SS} = J(I_{yz} S_2 - I_y S_1)$</p> $S_1 = \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + (1 + \nu) y^2 z - \nu z^3 \right) dA_x$ $S_2 = \int_{\mathcal{A}_x} \left(y \frac{\partial \phi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - (1 + \nu) y z^2 + \nu z^3 \right) dA_x$ $\nabla_{yz}^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla_{yz}^2 \phi_2 = 0$ $\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = ((1 + \nu) y^2 - \nu z^2) e_{ny}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = ((1 + \nu) z^2 - \nu y^2) e_{nz}$ <p>• Vončina: $y_{SS} = \frac{1}{2(1+\nu)I_y} \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial \phi_z}{\partial z} y - \frac{\partial \phi_z}{\partial y} z - \frac{1+\nu}{2} y^2 z + \frac{1-\nu}{2} z^3 \right) dA_x$</p> $z_{SS} = -\frac{1}{2(1+\nu)I_z} \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial z} y - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} z + \frac{1+\nu}{2} y z^2 - \frac{1-\nu}{2} y^3 \right) dA_x$ $\nabla_{yz}^2 \phi_y = 0, \quad \nabla_{yz}^2 \phi_z = 0$ $\frac{\partial \phi_y}{\partial n} = (1 + \nu) y z e_{ny} + \left(\frac{1+\nu}{2} z^2 + \frac{1+\nu}{2} y^2 \right) e_{nz}, \quad \frac{\partial \phi_z}{\partial n} = \left(\frac{1+\nu}{2} y^2 + \frac{1+\nu}{2} z^2 \right) e_{ny} + (1 + \nu) y z e_{nz}$ <p>• Energijska teorija (strižno in torzijsko središče):</p> $y_{SS} = y_{TS} = -\frac{I_z I_{\phi y} + I_{yz} I_{\phi z}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_{SS} = z_{TS} = \frac{I_y I_{\phi z} + I_{yz} I_{\phi y}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$ $I_{\phi y} = \int_{\mathcal{A}_x} z \phi dA_x, \quad I_{\phi z} = \int_{\mathcal{A}_x} y \phi dA_x$ $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right)$

Obliko izbočitvene (torzijske funkcije) lahko kvalitativno preverimo na naravnem modelu. V ta namen smo izdelali model iz penaste gume (slika 4), ki po modelni podobnosti ustreza prerezu C z debelino profila $b = 15/30$. Iz slike 4 je razvidno, da pride do največje izbočitve na notranjih delih pasnic. Ravno takšno rešitev dobimo tudi z matematično simulacijo primera. Izbočitvena funkcija na sliki 4 je normalizirana s specifičnim torzijskim zasukom.

Tabela 1 : Koordinate strižnega središča.

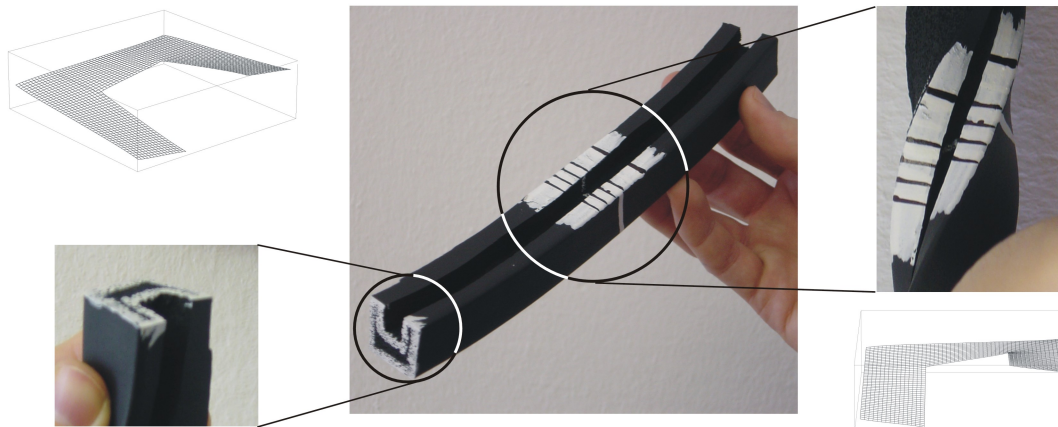
b	Sokolnikoff, Vončina						Trefftz
	$v = 0$	$v = 0.1$	$v = 0.2$	$v = 0.3$	$v = 0.4$	$v = 0.5$	
5/30	0.829	0.829	0.829	0.829	0.829	0.829	0.811
7/30	0.822	0.822	0.822	0.822	0.822	0.823	0.808
10/30	0.805	0.805	0.805	0.806	0.806	0.806	0.794
12/30	0.791	0.791	0.792	0.792	0.782	0.793	0.782
15/30	0.768	0.768	0.769	0.770	0.770	0.771	0.761
17/30	0.752	0.753	0.753	0.754	0.755	0.755	0.746
20/30	0.727	0.729	0.730	0.730	0.731	0.732	0.723
22/30	0.711	0.713	0.714	0.715	0.716	0.716	0.707
25/30	0.688	0.689	0.691	0.692	0.693	0.694	0.684
27/30	0.672	0.674	0.675	0.678	0.678	0.679	0.670
30/30	0.650	0.652	0.654	0.655	0.656	0.657	0.648

**Slika 3** : Razlike med rezultati obeh skupin definicij v odstotkih. Primerjava različnih debelin prereza in različnih koeficientov prečne kontrakcije.

5 Zaključki

V članku smo obravnavali formule za določanje koordinat strižnega središča, ki jih navajajo različni avtorji. Kljub velikemu številu različnih formul smo ugotovili, da lahko vse te razvrstimo v dve skupini: prvo, ki čistega upogiba in čiste torzije energijsko ne loči in drugo, ki ta dva pojava loči. Razlika je posledica različnih predpostavk glede zasukov vzdolžnih vlaken po prerezu. Pri prvi skupini velja predpostavka, da je povprečje torzijskih zasukov enako nič. Posledica energijske definicije je, da je uteženo povprečje tozrijskih zasukov enako nič. Najdemo pa

lahko tudi izpeljave, ki ne temeljijo na eksplicitnih predpostavkah o porazdelitvi vzdolžnih zasukov po prerezu, taka je npr. izpeljava Vončine.



Slika 4 : Naravni model iz penaste gume (sredina), primerjava naravne in matematične izbočitve (levo in desno).

Dodata ugodnost energijsko ločene teorije je, da v primeru njene veljavnosti strižno in torzijsko središče sovpadata in ločen račun obeh središč ni več potreben. Do te ugotovitve pridemo, ko pokažemo, da je dodatno napetostno stanje enako nič. Matematično izpeljavo lahko bralec najde v literaturi [6]. Matematično smo modelirali poseben primer nosilca s C-prerezom in ugotavljali razlike med omenjenimi teorijami. Ugotovili smo, da se rezultati le malo razlikujejo in zato v praksi te razlike niso pomembne.

Literatura

- [1] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- [2] S. Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2003.
- [3] M. Stanek in G. Turk, *Različne definicije strižnega in torzijskega središča*, Kuhljevi dnevi 02, 311–318, Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko, 2002.
- [4] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd edition, McGraw–Hill Book Company, 1970.
- [5] E. Trefftz, *Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol 15, No. 4, 220–225, 1935.
- [6] F. de Veubeke, *A Course in Elasticity*, Springer–Verlag, New York, 1979.
- [7] P. Vončina, *Napetosti in pomiki upogibnega nosilca po Saint–Venantu*, diplomska naloga, FAGG, Ljubljana, 1983.



Optimalno projektiranje oblike prostorskih paličnih konstrukcij

B. Harl¹ in M. Kegl¹

Shape optimal design of space trusses

Povzetek. Članek predstavlja pristop k optimalnemu projektiranju statično obremenjenih prostorskih paličnih konstrukcij. Oblika in vpetje konstrukcije, kakor tudi prerezi posameznih paličnih elementov so odvisni od spremenljivih parametrov – projektnih spremenljivk. Spremenljivo obliko in vpetje konstrukcije smo dosegli s tehniko projektnih elementov in uporabo ustreznega projektnega elementa – Bézierjevega telesa. Kot končni element je uporabljen kinematično nelinearen palični element. Optimizacijsko nalogo smo formulirali v obliki standardnega problema matematičnega programiranja. Ker so projektne spremenljivke zvezne, smo rešitve optimizacijske naloge iskali z uporabo gradientne optimizacijske metode. Za ilustracijo omenjene teorije je predstavljen in rešen optimizacijski problem prostorske palične konstrukcije.

Abstract. This paper describes an approach to optimization of statically loaded space trusses. Cross-sectional properties of individual elements, the shape of the whole structure as well as the support locations depend on design variables. Variable structural shape and support locations are addressed by employing the design element technique and an appropriate design element - the Bézier body. Kinematically nonlinear truss elements are employed as the finite elements. The optimization problem is defined in a form of a general nonlinear problem of mathematical programming. Since the design variables are all assumed to be continuous, a gradient based optimization procedure is proposed. A numerical example of space truss optimization is presented to illustrate the use of the proposed approach.

1 Uvod

Sodobne optimizacijske tehnike pri optimizaciji paličnih konstrukcij lahko razvrstimo v dve skupini. Prva skupina obravnava optimizacijo topologije in pogosto hkrati tudi optimizacijo oblike ter dimenzij elementov palične konstrukcije ([1] in [3]). Druga skupina obravnava samo optimizacijo oblike konstrukcije, pogosto združeno s klasično optimizacijo dimenzij posameznih elementov. Optimizacijo oblike palične konstrukcije tipično izvajamo tako, da koordinate vozlišč privzamemo kot projektne spremenljivke ([2] in [8]). Težave pri tem pristopu se pojavijo predvsem v primerih, ko imamo veliko palično konstrukcijo proste oblike in z veliko vozlišči. V takšnih primerih lahko število projektnih

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

spremenljivk naraste do neobvladljive vrednosti. Zaradi tega je v teh primerih precej primernejši koncept parametrizacije mreže končnih elementov (KE) in vpeljava ustreznih oblikovnih projektnih spremenljivk.

Zanimiv koncept parametrizacije oblike ponuja kombinacija vpeljave tehnike projektnega elementa in uporaba ustreznega projektnega elementa, kot je na primer Bézierjevo telo ([5] in [6]). Pri tem načinu je geometrijsko telo, ki ga določa lupina konstrukcije, razdeljeno v enostavnejše geometrijske objekte, imenovane projektni elementi (PE). Te elemente lahko parametriziramo na dokaj preprost način. Palični končni element nato definiramo v definicijskem območju projektnega elementa in ne direktno v realnem 3-D prostoru. Na ta način dobimo neke vrste 'konvektivno' mrežo končnih elementov, ki avtomatično sledi spremembi geometrije konstrukcije.

2 Formulacija naloge

Obravnavajmo elastično palično konstrukcijo, modelirano s KE, ki je ustrezno podprta in obremenjena z zunanjiimi statičnimi silami. Naj bodo lastnosti palične konstrukcije (oblika, podprtje in prerezi) odvisne od projektnih spremenljivk $b_i, i = 1, \dots, N$, zbranih v vektorju $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$. Sprememba vrednosti teh projektnih spremenljivk torej povzroči tudi spremembo odziva konstrukcije $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$.

Optimizacijsko nalogo lahko z besedami formuliramo tako: najdi takšne vrednosti projektnih spremenljivk, da bo konstrukcija najboljša možna glede na izbrane kriterije. Matematično lahko to zapišemo v obliki standardnega problema matematičnega programiranja, in sicer kot

$$\min f_0 \tag{1}$$

ob upoštevanju pogojev

$$f_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, K. \tag{2}$$

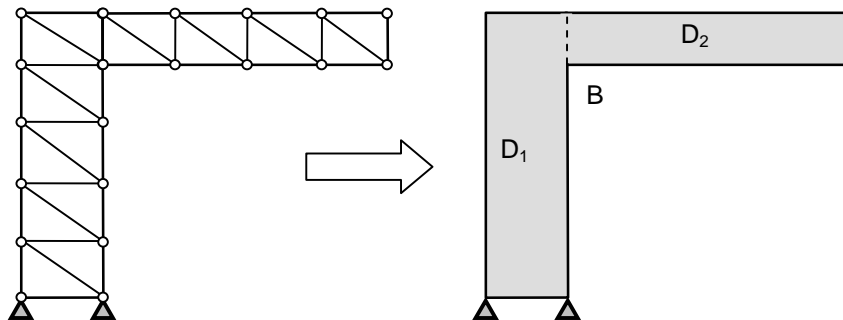
V tem zapisu $f_0 = f_0(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ predstavlja namensko funkcijo, ki je pogosto definirana kot volumen ali kot deformacijska energija konstrukcije. Omejitvene funkcije $f_i = f_i(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ pogosto predstavljajo pomike vozlišč, napetosti v elementih, uklon elementov, geometrijske omejitve, tehnološke omejitve in podobno. Simbol K označuje število vseh omejitvenih pogojev. V nalogi (1)-(2) \mathbf{b} predstavlja neodvisno spremenljivko, odziv $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{b})$ pa ima vlogo odvisne spremenljivke. Ta odvisnost je podana implicitno z enačbo odziva konstrukcije

$$\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

kjer sta $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ in $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ vektorja notranjih in zunanjih sil.

3 Parametrizacija oblike palične konstrukcije

Obravnavali bomo 3-D palično konstrukcijo, katere lupina naj predstavlja mejno ploskev 3-D telesa \mathbf{B} , slika 1. Privzemimo, da predstavlja mreža KE neke vrste konvektivno mrežo, ki avtomatično sledi spremembam oblike telesa \mathbf{B} . Ob teh predpostavkah lahko pričakujemo, da bomo obliko mreže KE (in palične konstrukcije) lahko spreminjali na eleganten in učinkovit način, če nam le uspe ustrezno parametrizirati obliko \mathbf{B} .



Slika 1. Lupina palične konstrukcije določa telo \mathbf{B} , ki je razdeljeno na projektne elemente

V ta namen najprej telo \mathbf{B} razdelimo na N_D enostavnejših geometrijskih objektov $D_i, i=1, \dots, N_D$, imenovanih projektne elemente, slika 1. Projektne element D_i mora biti parametrizirano geometrijsko telo relativno enostavne oblike. Na ta način lahko pričakujemo dokaj enostavno izpeljavo ustrezne parametrizacije celega telesa \mathbf{B} . Označimo s simbolom D poljuben projektne element (spodnji indeks, ki označuje številko projektne elementa, bomo zaradi enostavnosti izpustili). V splošnem je D lahko vsako parametrizirano geometrijsko telo. Če pa bi želeli izbrati takšno, ki bo imelo najboljše splošne lastnosti, bi Bézierjevo telo vsekakor predstavljalo eno od boljših možnosti. Bézierjevo telo je definirano s preslikavo

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K B_i^I B_j^J B_k^K \mathbf{q}_{ijk}, \quad (4)$$

kjer je \mathbf{q}_{ijk} krajevni vektor kontrolne točke (ijk) telesa, medtem ko so $B_i^I = B_i^I(s_1)$, $B_j^J = B_j^J(s_2)$ in $B_k^K = B_k^K(s_3)$ i, j, k -ti Bernsteinovi polinomi [5] reda $I-1$, $J-1$ in $K-1$. Simboli s_1, s_2 in s_3 so neodvisni parametri, ki predstavljajo koordinate točke $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ s_3]^T$ iz območja $\mathbf{U} = [0,1]^3$. Zgornja preslikava torej slika točko \mathbf{s} iz \mathbf{U} v točko \mathbf{r} v realnem 3-D prostoru.

Legi in oblika D sta popolnoma določena z legami kontrolnih točk. To pomeni, da sprememba lege \mathbf{q}_{ijk} spremeni lego in obliko D . Uvedimo sedaj oblikovne projektne spremenljivke. Privzeli bomo, da so kontrolne točke telesa D odvisne od projektne spremenljivke \mathbf{b} . Zapišemo lahko $\mathbf{q}_{ijk} = \mathbf{q}_{ijk}(\mathbf{b})$, kar pomeni, da bo sprememba projektne spremenljivke povzročila spremembo oblike D .

Ko je projektni element izbran in popolnoma določen, lahko konvektivno mrežo paličnih KE dobimo preprosto tako, da vozlišča KE definiramo v domeni \mathbf{U} namesto direktno v realnem 3-D prostoru. S tem smo v bistvu parametrizirali obliko palične konstrukcije v odvisnosti od \mathbf{b} .

Obravnavajmo palični končni element, ki ima vozlišča definirana v \mathbf{U} z legama \mathbf{s}^j , $j=1,2$. Če privzamemo, da so lege kontrolnih točk \mathbf{q}_{ijk} znane, lahko uporabimo enačbo (4), ter lege vozlišč \mathbf{r}^j , $j=1,2$ paličnega končnega elementa v realnem 3-D prostoru zapišemo kot

$$\mathbf{r}^j = \mathbf{r}^j(\mathbf{s}^j, \mathbf{b}). \quad (5)$$

To pomeni, da smo namesto, da bi določili \mathbf{r}^j direktno v realnem 3-D prostoru, definirali njihove slike \mathbf{s}^j v \mathbf{U} . Z določitvijo vseh vozlišč mreže KE v \mathbf{U} namesto v realnem 3-D prostoru dobimo palično konstrukcijo, katere oblika se lahko spreminja na eleganten način z enostavnim premikanjem kontrolnih točk \mathbf{q}_{ijk} . Za palični končni element predstavljata položaja vozlišč skoraj vse geometrijske podatke elementa. Edina parametra, ki ju moramo še določiti, sta ploščina A prereza paličnega elementa in minimalni aksialni vztrajnostni moment I_{\min} , ki ga potrebujemo, če želimo upoštevati uklon palic. Ti dve količini lahko naredimo odvisni od \mathbf{b} zelo preprosto – ena ali več projektnih spremenljivk lahko določa prerez posamezne palice ali skupine palic.

4 Postopek reševanja

Naloga (1)-(2) je zapisana v obliki standardne naloge matematičnega programiranja in se lahko načelno reši s poljubno metodo nelinearnega optimiranja. Toda ker so projektne spremenljivke zvezne, predstavljajo gradientne metode najprimernejšo izbiro. V tem primeru je postopek reševanja iteracijski in ga lahko povzamemo kot sledi:

- Nastavi $k = 0$; izberi začetne vrednosti $\mathbf{b}^{(0)}$.
- Izračunaj f_i , $i = 0, \dots, K$ pri $\mathbf{b}^{(k)}$ (analiza odziva).
- Izračunaj $df_i/d\mathbf{b}$, $i = 0, \dots, K$ pri $\mathbf{b}^{(k)}$ (analiza občutljivosti).
- Pošlji izračunane vrednosti optimizacijskemu algoritmu, tako da dobiš popravke $\Delta\mathbf{b}^{(k)}$ in izračunane popravljene vrednosti spremenljivk $\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + \Delta\mathbf{b}^{(k)}$.
- Nastavi $k = k + 1$ in preveri konvergenčni kriterij – če je izpolnjen, zaključi zanko, drugače se vrni na drugi korak.

Funkcije f_i , $i = 0, \dots, K$ so izražene v odvisnosti od \mathbf{b} in \mathbf{u} . Tako moramo pri analizi odziva najprej izračunati $\mathbf{u}^{(k)}$ pri podanih $\mathbf{b}^{(k)}$. To naredimo s pomočjo odzivne enačbe (3). Odvodi $df_i/d\mathbf{b}$, $i = 0, \dots, K$ so odvisni od \mathbf{b} , \mathbf{u} in $d\mathbf{u}/d\mathbf{b}$. Za analizo občutljivosti pri $\mathbf{b}^{(k)}$ zato potrebujemo $\mathbf{u}^{(k)}$ in $(d\mathbf{u}/d\mathbf{b})^{(k)}$. Odziv $\mathbf{u}^{(k)}$ je že izračunan,

medtem ko moramo $(d\mathbf{u}/d\mathbf{b})^{(k)}$ izračunati iz občutljivostne enačbe. To enačbo lahko dobimo z odvajanjem odzivne enačbe po \mathbf{b} . Ko to naredimo in enačbo uredimo, dobimo

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{b}}. \quad (6)$$

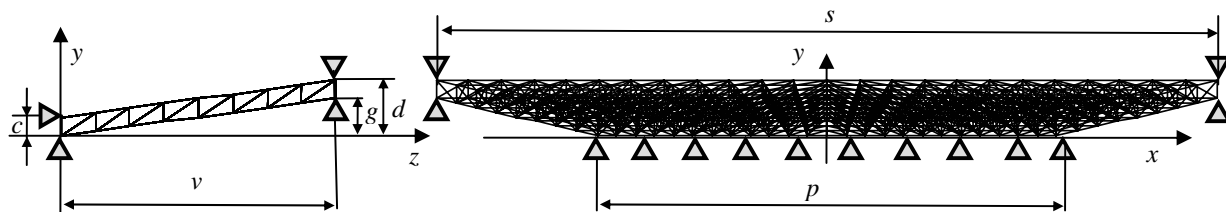
Za izračun $\partial \mathbf{R}/\partial \mathbf{b}$ in $\partial \mathbf{F}/\partial \mathbf{b}$ potrebujemo odvode $dr^j/d\mathbf{b}$, $dA/d\mathbf{b}$ in $dI_{\min}/d\mathbf{b}$. Iz (4) sledi da je

$$\frac{dr^j}{d\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K B_i^I B_j^J B_k^K \frac{dq_{ijk}}{d\mathbf{b}}. \quad (7)$$

Torej dejansko potrebujemo le odvode $dq_{ijk}/d\mathbf{b}$, $dA/d\mathbf{b}$ in $dI_{\min}/d\mathbf{b}$, ki so enostavno izračunljivi.

5 Numerični zglede

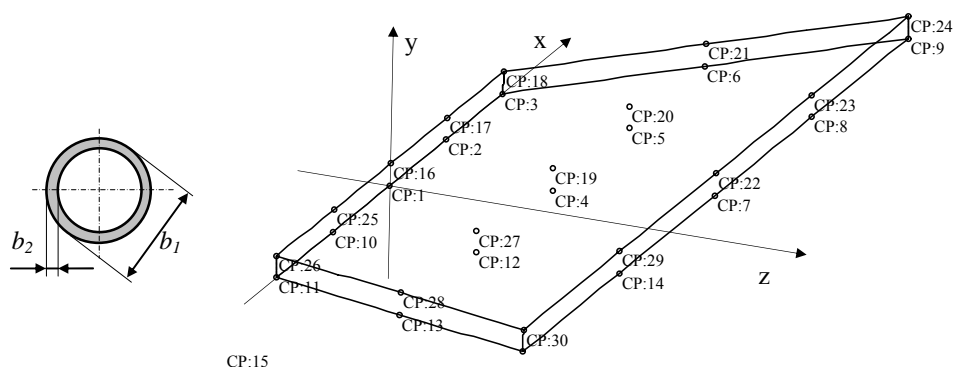
Obravnavajmo problem optimizacije dimenzij in oblike dvoslojnega paličja strešne konstrukcije. Dimenzije prerezov palic ter oblika konstrukcije so odvisni od 18 projektnih spremenljivk zbranih v vektorju \mathbf{b} . Začetne mere palične konstrukcije so $[c, d, g, p, s, v]^T = [2, 6, 4, 50, 120, 30]^T 10^3 \text{ mm}$, slika 2. Elastični modul uporabljenega materiala je $E = 210000 \text{ MPa}$.



Slika 2. Začetna oblika konstrukcije

Celotna konstrukcija je modelirana s paličnimi elementi, ki imajo votel krožni prerez. Prerez elementa je odvisen od dveh projektnih spremenljivk b_1 in b_2 , slika 3.

Oblika palične konstrukcije je bila parametrizirana z enim projektnim elementom, ki je vseboval $3 \times 5 \times 2 = 30$ kontrolnih točk, slika 3. Lege kontrolnih točk so odvisne od 16 oblikovnih projektnih spremenljivk b_3, \dots, b_{18} . Koordinati x in z kontrolnih točk sta konstantni, spreminja se samo y . Zahtevam glede simetrije konstrukcije smo zadostili avtomatično s simetričnimi definicijami koordinat kontrolnih točk v odvisnosti od projektnih spremenljivk.



Slika 3. Prerez paličnega KE, začetna oblika projektnega elementa in lege kontrolnih točk

Konstrukcija je obremenjena z dvema različnima in sočasno delujočima obremenitvama:

- lastna teža konstrukcije,
- zunanja vertikalna sila 500 N, ki deluje na vsako vozlišče gornjega sloja in ni odvisna od oblike paličja.

Cilj optimizacijske naloge je bil minimizirati deformacijsko energijo konstrukcije, pri tem pa smo želeli obdržati volumen (težo) nespremenjen. V nalogo matematičnega programiranja so bili vključeni še pogoji, ki so se nanašali na geometrijo konstrukcije, napetosti elementov ter lokalni uklon elementov. Natančneje lahko optimizacijsko nalogo definiramo tako: najdi takšne vrednosti projektnih spremenljivk, da bo deformacijska energija konstrukcije minimalna ob hkratni zadostitvi naslednjih pogojev:

1. volumen konstrukcije: ne sme narasti,
2. absolutna napetost v palici: ≤ 120 MPa,
3. y-koordinata kontrolne točke 4: ≥ 8000 mm,
4. y-koordinata kontrolne točke 6 in 13: ≥ 2000 mm,
5. y-koordinata kontrolne točke 7: ≥ 9000 mm,
6. y-koordinata kontrolne točke 19: ≥ 10000 mm,
7. y-koordinata kontrolne točke 21 in 28: ≥ 4000 mm,
8. y-koordinata kontrolne točke 22: ≥ 12000 mm,
9. napetost v palici deljena z Eulerjevo uklonsko napetostjo: ≤ 0.5 .

Za ilustracijo pomembnosti različnih pogojev, vključenih v optimizacijsko nalogo (namenska funkcija je bila vedno enaka), smo formulirali tri optimizacijske primere:

- pogoji 1 - 2 (primer A),
- pogoji 1 - 8 (primer B),
- pogoji 1 - 9 (primer C).

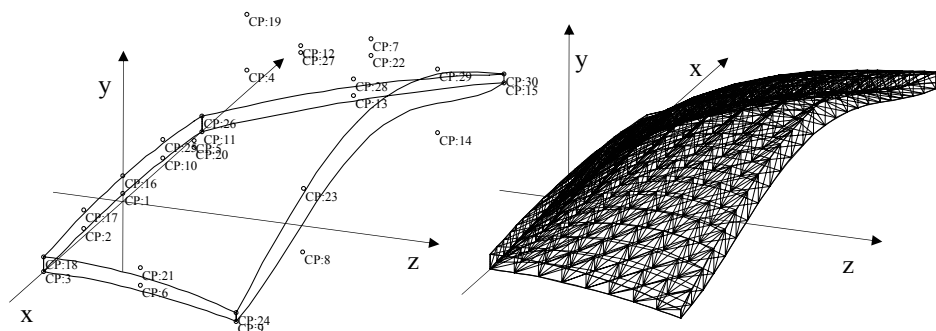
Rezultati za vse tri primere so podani v tabeli 1. V primeru B smo, kot je bilo za pričakovati, dobili nekoliko večje vrednosti namenske funkcije kot v primeru A. Ta rezultat

je v tabeli 1 označen kot B-1. Ker smo posumili, da sta oba dobljena rezultata (A in B-1) lokalna optima, smo vzeli rezultat B-1 in ročno povečali vrednosti projektnih spremenljivk, ki podajajo višine y kontrolnih točk CP4, CP5 in CP12, slika 3. Po ponovnem zagonu optimizacije smo dobili novo obliko konstrukcije B-2 z občutno nižjo vrednostjo namenske funkcije. To potrjuje, da sta A in B-1 dejansko le lokalna optima.

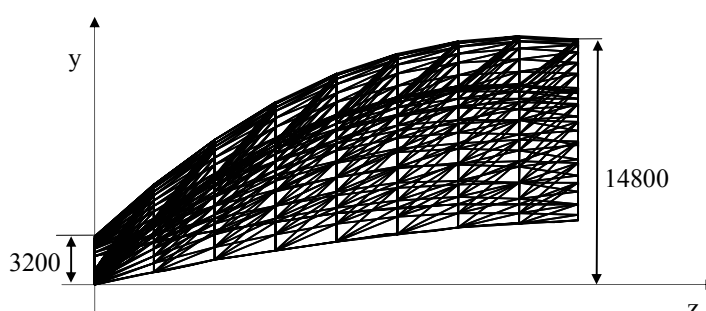
Tabela 1. Primerjava začetnih in optimalnih vrednosti namenske funkcije

	Start	Optim. A	Optim. B-1	Optim. B-2	Optim. C
Normirana deformacijska energija	1.	0.633	0.657	0.129	0.409
Max prekoračitev pog. [%]	0.33	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01

V primeru C smo želeli upoštevati še uklon palic. Kot začetne vrednosti optimizacijske naloge so bile uporabljene vrednosti primera B-2. Končni rezultat zastavljene optimizacijske naloge (primer C) je prikazan na slikah 4 in 5.



Slika 4. Optimalni projekt C



Slika 5. Optimalna projekt C – oblika in nekatere mere strehe

Vsi optimizacijski primeri so bili rešeni z aproksimacijsko metodo opisano v [4] in [7]. V vseh primerih je bil postopek dokaj stabilna. Kot je bilo prikazano, lahko z

gradientnim algoritmom učinkovito rešujemo optimizacijske probleme. Vendar pa se pri optimizaciji oblike pogosto pojavlja več lokalnih optimumov, kar otežuje položaj. V našem primeru nam je uspelo kar hitro priti do rezultata, ki je verjetno globalni optimum. Na žalost to vedno ni tako in v splošnem je projektantova intuicija lahko zelo pomembna, da pridemo do globalnega optimuma.

6 Zaključek

Tehnika projektne elementa in Bézierjevo telo kot projektni element nam nudita zanimiv pristop k optimizaciji oblike paličnih konstrukcij. Geometrijski pogoji kot so simetrija in zahteve glede estetike konstrukcije so upoštevani avtomatično s postavitvijo primernih odvisnost med kontrolnimi točkami in projektnimi spremenljivkami. Prav tako lahko v optimizacijski problem enostavno vključimo tudi poljubne druge omejitvene pogoje. Za reševanje takšnih problemov lahko uspešno uporabimo splošne gradientne optimizacijske postopke. Vendar je potrebno povedati, da gradientni postopki ponavadi konvergirajo k najbližjemu lokalnemu optimumu. Pri optimizaciji oblike pa imamo lahko hitro opravka z mnogimi lokalnimi optimumi, ki so lahko v projektnem prostoru zelo daleč narazen.

Literatura

- [1] I.A. Azid, A.S.K. Kwan, K.N. Seetharamu, *An evolutionary approach for layout optimization of a three-dimensional truss*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 24 (4): 333-337, 2002.
- [2] L. Gil, A. Andreu, *Shape and cross-section optimisation of a truss structure*, Computers & Structures, 79 (7): 681-689, 2001.
- [3] O. Hasancebi, F. Erbatur, *Layout optimisation of trusses using simulated annealing*, Advances in Engineering Software, 33 (7-10): 681-696, 2002.
- [4] M. Kegl, M.M. Oblak, *Optimization of mechanical systems: on non-linear first-order approximation with an additive convex term*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 13: 13-20, 1997.
- [5] M. Kegl, H. Antes, *Shape optimal design of elastic space frames with non-linear response*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43: 93-110, 1998.
- [6] M. Kegl, *Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49: 1571-1588, 2000.
- [7] M. Kegl, B.J. Butinar, B. Kegl, *An efficient gradient-based optimization algorithm for mechanical systems*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 18: 363-371, 2002.
- [8] N.L. Pedersen, A.K. Nielsen, *Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 25 (5-6): 436-445, 2003.



Nelinearna požarna analiza jeklenega nosilca

T. Hozjan, S. Bratina in S. Srpčič¹

Nonlinear analysis of steel beam subjected to fire

Povzetek. V članku predstavimo računski postopek za nelinearno analizo odziva jeklenih linijskih konstrukcij, izpostavljenih sočasnemu delovanju mehanske in požarne obtežbe. Temperaturno odvisnost materialnih in termičnih parametrov upoštevamo skladno z evropskimi standardi Eurocode 3. Pri računu napetosti razen nelinearnih mehanskih deformacij upoštevamo še temperaturne deformacije in viskozno lezenje jekla. Ustreznost računskega postopka in programske opreme preverimo z drugim neodvisnim numeričnim programom.

Abstract. The non-linear structural analysis of fire resistance of steel constructions is presented. The emphasis is on the evaluation of the mechanical response due to simultaneous time dependent thermal and mechanical load. When evaluating the stress-strain state of the beam the change of thermal and material parameters according to the European standards Eurocode 3 is considered. In the stress-strain analysis the elastic, plastic, temperature and creep strains are accounted for. The proposed computer program is verified by comparing with the numerical results of an independent program (SAPHIR).

1 Uvod

Računska analiza obnašanja jeklenih konstrukcij, izpostavljenih visokim temperaturam, je zelo kompleksna in zahtevna naloga, vendar v današnjem času vse bolj pomembna. Eksperimentalne raziskave obnašanja konstrukcij v požarih so namreč zelo drage in dolgotrajne, s sodobno računalniško opremo pa lahko opravimo obsežne računske simulacije.

Do nedavnega je za konstrukcijska jekla veljalo, da brez toplotne zaščite odpovejo pri temperaturi med 500 in 600 °C. Razvoj računalniške tehnologije je prinesel povsem nova spoznanja, kajti omogočil je modeliranje celotne konstrukcije v požaru. Zaradi tega lahko v literaturi [4] zasledimo nov sklop testov, ki se je začel v začetku devetdesetih letih prejšnjega stoletja. Testirajo se konstrukcije v naravnem merilu in s tem se pridobi realna slika obnašanja posameznih

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo

jeklenih elementov kot delov celotne konstrukcije. Upoštevajoč rezultate eksperimentov pa se razvijajo sodobni računalniški programi, s katerimi skušamo čim boljše simulirati obnašanje realne konstrukcije. To pomeni povsem nov pristop pri projektiranju jeklenih konstrukcij, ki vključuje globalno analizo konstrukcij v pogojih požarne obtežbe. Eden izmed takih eksperimentov je bil opravljen v Cardingtonu, kjer je bila testirana osemetažna jeklena poslovna zgradba [4]. V okviru tega eksperimenta je bilo izvedenih šest večjih eksperimentov, in sicer od preizkušanja posameznega nosilca, okvirja, pa vse do večjega poslovnega prostora. Na osnovi dobljenih eksperimentalnih rezultatov je bilo izdelanih več računalniških programov za termomehansko analizo.

Večina sodobnih programov temelji na metodi končnih elementov. V splošni inženirski praksi so v uporabi metode, ki temeljijo na teorijah nosilcev in plošč. 3D končni elementi se zaenkrat uporabljajo le za modeliranje detajlov, kajti pri modeliranju celotne konstrukcije postane analiza zaradi velikega števila prostostnih stopenj prezahtevna. Sistem nelinearnih ravnotežnih enačb konstrukcije kot rezultat metode končnih elementov večina raziskovalcev rešuje z Newtonovo inkrementno-iteracijsko metodo. Pri tem razen materialne nelinearnosti upoštevajo tudi geometrijsko nelinearnost, praviloma v okviru teorije 2. reda.

V predstavljeni požarni analizi uporabimo računski postopek in ustrezno programsko opremo, ki jo je predstavil Bratina [1], ter jo priredimo za termomehansko analizo jeklenih linijskih konstrukcij. V analizi uporabimo učinkovit deformacijski linijski končni element, ki je neobčutljiv na vse vrste blokiranja. Pri tem upoštevamo Bernoullijevo predpostavko o ravnih prečnih prerezih ter predpostavko, da se oblika in velikost prečnega prereza med deformiranjem ne spreminjata. V program je vgrajen konstitucijski model konstrukcijskega jekla, ki ga je predlagal Srpčič [7], dopolnjen z določili Eurocode 3.

Članek ima Uvod in še tri kratka poglavja. V drugem poglavju predstavimo računski postopek termomehanske analize jeklenih konstrukcij. V tretjem poglavju na primeru enostavnega nepomičnega jeklenega nosilca primerjamo rezultate računa z rezultati drugih raziskovalcev. Na koncu podamo zaključke.

2 Računski postopek požarne analize konstrukcij

Analizo interakcije med požarom in konstrukcijo zaradi zahtevnosti razdelimo v tri fizikalno utemeljene in matematično nepovezane faze. V prvi fazi določimo razvoj temperature v neposredni okolici konstrukcije. V drugi fazi izračunamo časovno razporeditev temperature po konstrukciji. V tretji pa zasledujemo časovni mehanski odziv konstrukcije na sočasen vpliv mehanske in požarne obtežbe.

2.1 Določitev temperature okolja

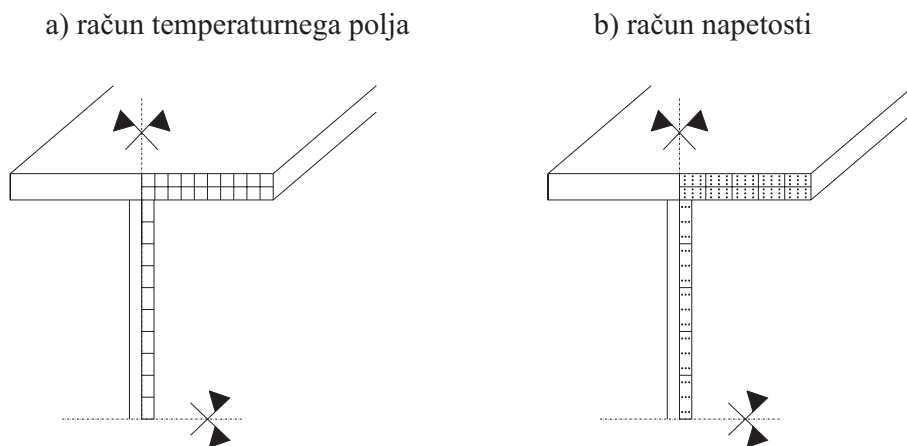
Določitev razvoja temperature požarnega prostora je zelo zahtevna naloga in je odvisna od velikega števila dejavnikov in parametrov, ki so več ali manj slučajne narave. Zato nam še tako natančne računske metode dajejo le približno oceno dejanskega poteka temperature v požarnem prostoru. Zato so v inženirski praksi v rabi različne poenostavitve v obliki parametričnih požarnih krivulj, ki so zasnovane na podlagi eksperimentov in opisujejo časovni razvoj temperature požarnega prostora. Ta je odvisen predvsem od zaloge gorljivega materiala in možnosti

prezračevanaja prostora. V odvisnosti od teh parametrov so podane številne požarne krivulje s katerimi je zajet širok spekter možnih požarov.

2.2 Časovna razporeditev temperature po konstrukciji

Ko poznamo časovni režim požara, lahko časovno in prostorsko razporeditev temperature po konstrukciji določimo kot rešitev problema nestacionarnega prostorskega prevajanja toplote. Prenos toplote iz okolja na konstrukcijo in obratno se med požarom vrši na več načinov, in sicer s sevanjem, konvekcijo in kondukcijo.

Porazdelitev temperature po konstrukciji določimo v začetnem, nedeformiranem stanju; pri tem skupnega vpliva prevajanja in deformiranja konstrukcije na spremembo temperaturnega polja ne upoštevamo. Pri določitvi temperaturnega polja nosilca predpostavimo, da je temperatura okolice homogena. Zato lahko spreminjanje temperature v vzdolžni smeri nosilca zanemarimo. Za določitev temperaturnega polja v nosilcu je tako potrebno določiti le spreminjanje temperature po karakterističnem prečnem prerezu. V ta namen uporabimo računalniški program HEATC [5], ki je zasnovan na metodi končnih elementov. Prečni prerez razdelimo na ustrezno število štirivozliščnih končnih elementov (slika 1a). Trajanje požara razdelimo na časovne prirastke, in sicer tako, da v nobenem vozlišču temperatura v posameznem časovnem koraku ne naraste ali pade za več kot $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ [2]. Rezultati programa HEATC so temperature v posameznih vozliščnih prerezu, kar v nadaljevanju požarne analize predstavlja temperaturno obtežbo nosilca. V primeru eno-dimenzionalnega temperaturnega polja nosilca pa temperaturni režim določimo s pomočjo rekurzivnih enačb [3].



Slika 1 : Mreža končnih elementov pri računu temperaturnega polja in razporeditev integracijskih točk pri računu napetosti.

2.3 Mehanski odziv konstrukcije na sočasen vpliv statične in požarne obtežbe

V predstavljenem računskem postopku sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb konstrukcije rešimo z Newtonovo inkrementno-iteracijsko metodo. Pri tej metodi celoten čas požarne analize razdelimo na časovne prirastke $[t^i, t^{i+1}]$. Znotraj i-tega časovnega koraka pri

znanem prirastku obtežnega faktorja in prirastku temperature izračunamo popravke prirastkov posplošenih vozliščnih pomikov do željene natančnosti [1].

Zaradi privzete predpostavke o enoosnem napetostnem stanju se lahko pri formulaciji konstitucijskih enačb neposredno navežemo na rezultate enoosnih preizkusov. V smislu Lagrangevega opisa se napetosti in deformacije nanašajo na začetno, nedeformirano stanje nosilca. Zveze med napetostmi, deformacijami, temperaturami in časom izrazimo v inkrementni obliki. Pri tem prirastek geometrijske deformacije $\Delta\varepsilon$ razdelimo na prirastek elastične $\Delta\varepsilon_E$, plastične $\Delta\varepsilon_P$, temperaturne $\Delta\varepsilon_T$ in viskozne deformacije jekla $\Delta\varepsilon_C$ [7]:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_E + \Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_T + \Delta\varepsilon_C. \quad (1)$$

Pri računu napetosti v prečnem prerezu le-tega razdelimo na lamele (slika 1b). Znotraj vsake lamele uporabimo 3×3 ploskovno Gaussovo numerično integracijo. Ker se vozlišča končnih elementov pri programu HEATC ne ujemajo z integracijskimi točkami prečnega prereza, uporabimo za določitev temperatur v integracijskih točkah linearno interpolacijo. Računska analiza odziva konstrukcije na požarno obtežbo odpove, ko postane tangentska togostna matrika konstrukcije singularna. Pravimo, da smo dosegli mejno požarno odpornost konstrukcije, pripadajoči čas pa imenujemo kritični čas.

2.3.1 Mehanske lastnosti jekla

S spreminjanjem temperature se spreminjajo tudi mehanske lastnosti jekla. V okviru predstavljene požarne analize upoštevamo temperaturno odvisnost materialnih parametrov jekla (elastični modul E_s , meja tečenja f_y , meja proporcionalnosti f_p) v skladu z evropskim standardom Eurocode 3 [3]. Prirastek mehanske deformacije $\Delta\varepsilon_M = \Delta\varepsilon_E + \Delta\varepsilon_P$, ki ni eksplicitno odvisen od časa oziroma temperature in je z vzdolžno normalno napetostjo σ povezan s konstitucijskim zakonom v obliki $\sigma = f(\varepsilon_M)$, izračunamo s pomočjo aditivnega razcepa geometrijske deformacije (1). Upoštevamo izotropno utrjevanje jekla.

2.3.2 Temperaturne deformacije in viskozno lezenje jekla

Prirastek temperaturne deformacije $\Delta\varepsilon_T$ pri spremembi temperature $\Delta T = T^{i+1} - T^i$ izračunamo v skladu s standardom Eurocode 3 [3], v katerem je temperaturna deformacija jekla ε_T podana s formalnim izrazom $\varepsilon_T = f(T)$. Tako znotraj časovnega prirastka $[t^i, t^{i+1}]$ določimo prirastek temperaturne deformacije z izrazom $\Delta\varepsilon_T = \varepsilon_T^{i+1} - \varepsilon_T^i$.

Pri temperaturah in napetostih, ki ne dosegajo ekstremnih vrednosti, je viskozno lezenje konstrukcijskih jekel praktično zanemarljivo. Pri temperaturah nad 400°C pa preizkusi kažejo, da se pri konstantni obremenitvi deformacije s časom sorazmerno hitro povečujejo. Za račun prispevka viskoznega lezenja jekla uporabimo Harmathyjev model, ki ga je dodatno poenostavil kanadski raziskovalec Williams-Leir [8]. Časovni razvoj viskoznega lezenja jekla je določen z navadno diferencialno enačbo:

$$\frac{d\varepsilon_C}{dt} = \text{sgn}(\sigma) b_1 \coth^2(b_2 \varepsilon_C). \quad (2)$$

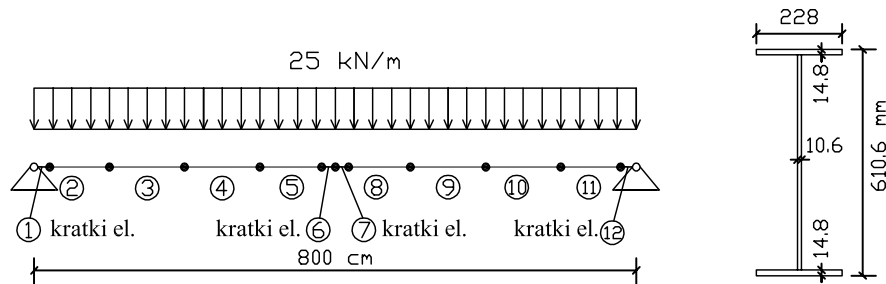
Pri tem sta koeficienta b_1 in b_2 funkciji napetosti σ in konstantne absolutne temperature T . Znotraj časovnega prirastka $[t^i, t^{i+1}]$ določimo prirastek viskoznega lezenja z enačbo: $\Delta\varepsilon_C =$

$\text{sgn}(\sigma) b_1 \coth^2(b_2 \varepsilon_C) \Delta t$. Standard Eurocode 3 dovoljuje pri analizi požarne odpornosti jeklenih konstrukcij zanemaritev vpliva viskoznega lezenja jekla.

3 Računski primer

Ne primeru prostoležečega nepomičnega nosilca preverimo ustreznost uporabljene računske metode in programske opreme za analizo mehanskega odziva jeklenih konstrukcij na hkratni vpliv mehanske in požarne obtežbe. Rezultate primerjamo z rezultati drugih avtorjev [6].

Nosilec je bil s spodnje in z bočnih strani izpostavljen požaru pri katerem je temperatura linearno naraščala, in sicer 10°C na minuto. Nosilec je bil ves čas trajanja požara obtežen še z enakomerno zvezno obtežbo. Geometrijski podatki in podatki o obtežbi so prikazani na sliki 2. Za elastični modul jekla pri temperaturi 20°C smo privzeli vrednost $E_s(20^\circ\text{C}) = 21000\text{kN/cm}^2$, za mejo plastičnega tečenja pa vrednost $f_y(20^\circ\text{C}) = 43\text{kN/cm}^2$. Kot vidimo, imamo opravka z jeklom visoke trdnosti, kar pa ni običajno za vsakdanjo inženirsko prakso. Namen tega primera je namreč primerjava računskih rezultatov, dobljenih z različnimi programi, ter analiza obnašanja jeklenega nosilca pri ekstremnih temperaturah, ki jih omogoča jeklo visoke trdnosti.



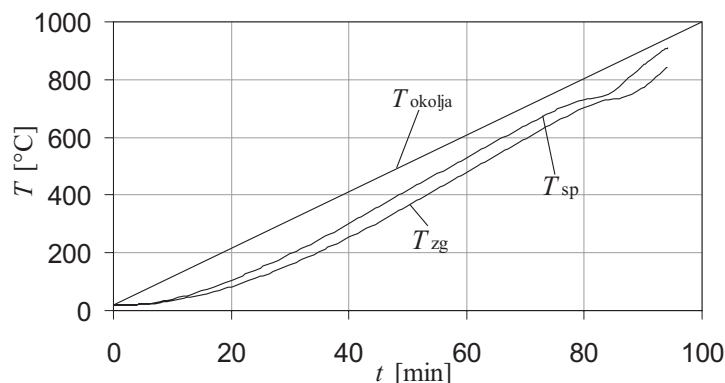
Slika 2 : Geometrijski podatki in podatki o obtežbi.

3.1 Račun temperaturnega polja prečnega prereza nosilca

Časovni razvoj temperaturnega polja prečnega prereza nosilca izračunamo s programom HEATC [5]. Ker predpostavimo ravninsko deformiranje nosilca, sta tako oblika prečnega prereza kot tudi razporeditev temperature po prerezu simetrična glede na ravnino upogiba. Tako polovico prečnega prereza modeliramo s 55 ploskovnimi končnimi elementi. Termične parametre upoštevamo skladno z Eurocode 3 [3]. Na sliki 3 je prikazan časovni razvoj temperature požarnega prostora ter razvoj temperature na sredini zgornje in spodnje ploskve prečnega prereza.

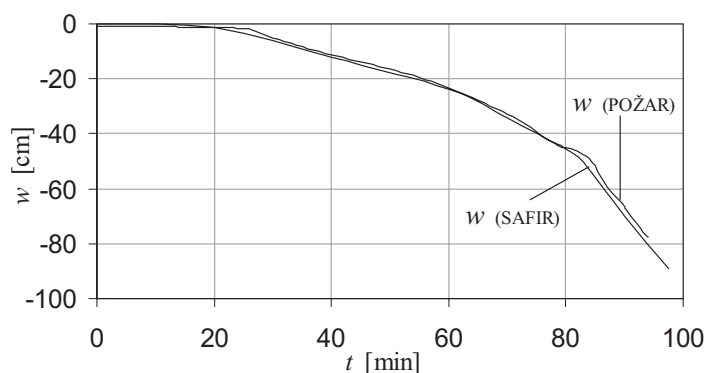
3.2 Mehanski odziv nosilca

Nosilec smo modelirali z 12 deformacijskimi končnimi elementi. Med njimi so bili štirje t.i. kratki elementi dolžine 10 cm, ki smo jih namestili ob podpori ter v polje (glej sliko 2). S kratkimi elementi smo preprečili nihanje deformacijskih količin vzdolž končnih elementov ter zajeli vpliv lokalizacije deformacij. Pri integraciji napetosti po prečnem prerezu smo



Slika 3 : Časovni razvoj temperature požarnega prostora (T_{okolja}), temperature na sredini zgornje (T_{zg}) ter na sredini spodnje ploskve prečnega prereza (T_{sp}).

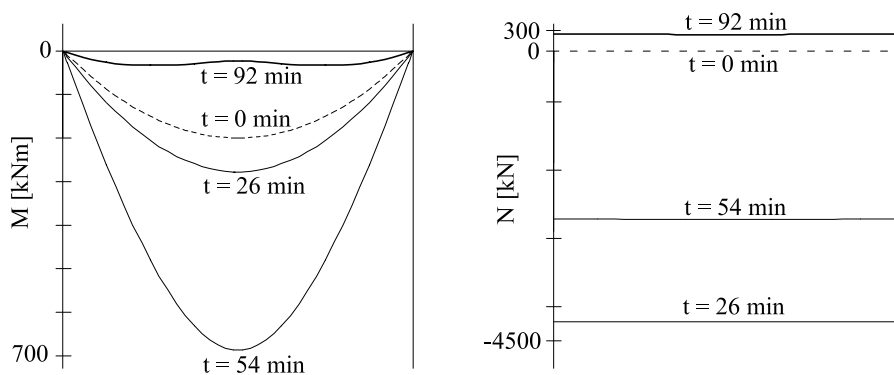
polovico prečnega prereza razdelili na 10 pravokotnih ploskev in znotraj vsake ploskve uporabili tritočkovno Gaussovo ploskovno integracijsko shemo. Celoten čas požarne analize smo razdelili na časovne korake v velikosti 1 minute. Glede na to, da drugi avtorji [6] pri požarni analizi obravnavanega prostoležečega nepomičnega jeklenega nosilca niso upoštevali prispevka viskoznega lezenja jekla, smo tudi mi zanemarili ta vpliv. Numerični postopek je odpovedal pri času $t_{crit} = 94$ min. Pri tem je znašal največji navpični pomik $w = 78$ cm. Slika 4 prikazuje časovni razvoj navpičnega pomika na sredini nosilca. Lahko opazimo odlično ujemanje rezultatov požarne analize z rezultati računa, ki ga je opravila Seputro [6].



Slika 4 : Časovni potek navpičnega pomika na sredini nosilca.

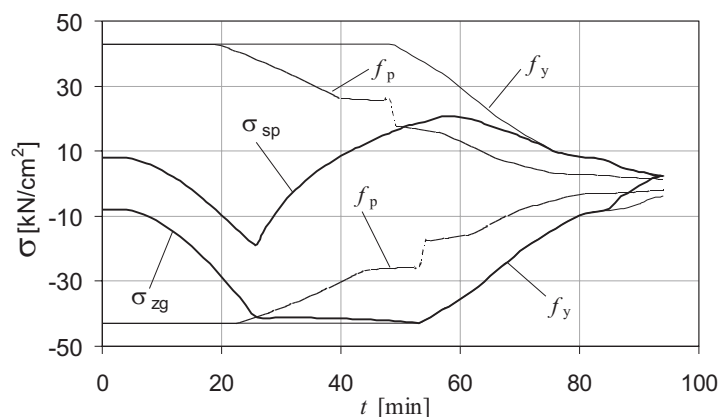
Ker sta obe podpori prostoležečega nosilca nepomični in se nosilec ne more prosto raztezati, se zaradi temperaturnih deformacij, ki so posledica požarne obtežbe, v nosilcu pojavi tlačna osna sila (slika 5). Le-ta narašča vse do 26. minute (Seputro [6] do 25. minute), ko je v zgornji pasnici dosežena meja proporcionalnosti f_p , in se začne plastifikacija zgornje pasnice, medtem ko je spodnja pasnica še v elastičnem področju (slika 6). Področje plastifikacije se širi proti dnu prereza vse do 51. minute (Seputro [6] do 53. minute), ko je še na dnu dosežena meja proporcionalnosti f_p .

V primerjavi z osno silo upogibni moment ves ta čas narašča, vse do 54. minute (Sepetro [6] do 53. minute), ko zgornja točka srednjega prereza doseže mejo tečenja f_y in se začne oblikovati plastični členek, kar povzroči prerazporeditev momentov (slika 5). Spodnja točka doseže mejo tečenja f_y v 80. minuti (Sepetro [6] v 74. minuti) in sedaj nosilec nima več dovolj upogibne nosilnosti, da bi prenašal upogibni moment, vse dokler se prerez polno ne plastificira. To se zgodi v 85. minuti in od tod naprej se obtežba prenaša s pomočjo vravnega efekta (slika 5). Ta mehanizem se razvije, ko preide osna sila v natezno območje in se obtežba prenaša preko nateznih sil.

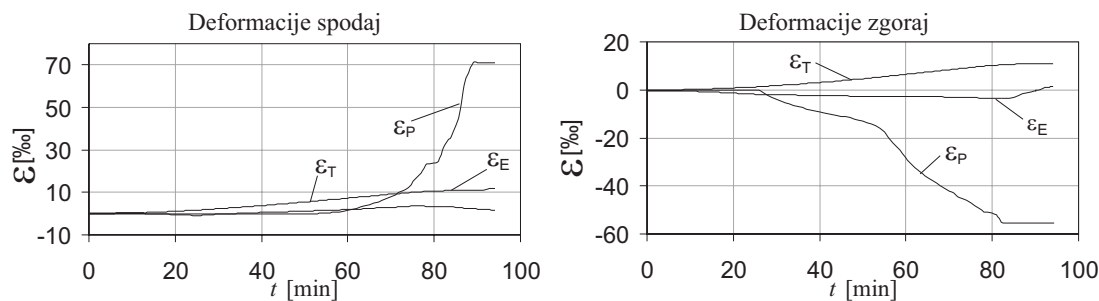


Slika 5 : Potek momentov in osne sile vzdolž nosilca.

Na ta način nosilec zdrži še nadaljnjih nekaj minut vse do 94. minute (Sepetro [6] do 97. minute), ko račun odpove. Na sliki 6 je prikazan časovni razvoj napetosti na sredini zgornje in spodnje ploskve v srednjem prečnem prerezu nosilca, kjer je lepo vidna zgoraj opisana časovna dinamika. Slika 7 prikazuje časovni razvoj elastične $\Delta\varepsilon_E$, plastične $\Delta\varepsilon_P$ in temperaturne $\Delta\varepsilon_T$ deformacije na sredini zgornje in spodnje ploskve srednjega prečnega prereza nosilca. Opazimo, da po pojavu vravnega efekta pride do razbremenitve v okolici sredine nosilca.



Slika 6 : Časovni razvoj napetosti na sredini zgornje in spodnje ploskve srednjega prereza.



Slika 7 : Časovni razvoj deformacij na sredini zgornje in spodnje ploskve srednjega prereza.

4 Zaključek

V članku smo predstavili računski postopek za nelinearno analizo mehanskega odziva jeklenih konstrukcij na sočasen vpliv mehanske in požarne obtežbe. Težišče analize predstavlja določitev napetostnega in deformacijskega stanja konstrukcije. Pri tem smo upoštevali tako geometrijsko kot materialno nelinearnost. Ustreznost in natančnost računskega postopka smo preverili na primeru prostoležečega nepomičnega jeklenega nosilca. Rezultati analize se odlično ujemajo z računskimi rezultati drugih raziskovalcev.

Literatura

- [1] BRATINA, S., *Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo*, Doktorska disertacija, FGG, Univerza v Ljubljani, 2003.
- [2] EUROCODE 1, *Basic of design and actions on structures, Part 2.2: Actions on structures-Actions on structures exposed to fire*, ENv 1991-2-2, 1995.
- [3] EUROCODE 3, *Design of steel structures, Part 1.2: General rules-Structural fire design*, DRAFT prEN 1993-1-2, 2001.
- [4] NEWMAN, G.M., ROBINSON, J.T., BAILEY, C.G., *Fire Safe Design: A New Approach to Multi-Storey Steel-Framed Buildings*, Berkshire, SCI, 2001.
- [5] SAJE, M., TURK, G., *HEATC, program za račun nelinearnega in nestacionarnega prevajanja toplote*, FGG, Univerza v Ljubljani, 1987.
- [6] SEPUTRO, J., *Effect of support conditions on steel beams exposed of fire*, A research project report, University of Catenbury Christchurch, New Zeland, 2001.
- [7] SRPČIČ, S., *Račun vpliva požara na jeklene konstrukcije*, Doktorska disertacija, FGG, Univerza v Ljubljani, 1991.
- [8] WILLIAMS-LEIR, G., *Creep of Structural Steel in Fire: Analytical Expressions*, Fire and Materials, 7(2), 73-78, 1983.



O lastnih viskozno dušenih prečnih nihanjih osno premikajoče se strune

N. Jakšič¹ in M. Boltežar²

On the free viscous damped transverse vibrations of the axially moving string

Povzetek. V tem prispevku predstavljamo analizo delovanja viskoznega dušenja na prečna nihanja osno premikajoče se strune. Analizirani linearni model viskoznega dušenja je zapisan v obliki $b_1 \frac{\partial w}{\partial t} + (\dot{v} + b_2 v) \frac{\partial w}{\partial x}$. Najprej smo rešili gibalno enačbo lastnega nihanja – linearno parcialno diferencialno enačbo. Nato smo analizirali vplive vrednosti koeficientov viskoznega dušenja b_1 in b_2 na lastne frekvence in na odziv sistema pri lastnih nihanjih. Pokazali smo, da je potrebno vrednosti koeficientov izbrati previdno, da bi se izognili fizikalno nerealnim odzivom.

Abstract. In this article the viscous damping mechanism acting on the axially moving string is analyzed. The analyzed linear damping model is in the form $b_1 \frac{\partial w}{\partial t} + (\dot{v} + b_2 v) \frac{\partial w}{\partial x}$. The equation of motion, the linear partial differential equation, of the free transverse vibrations of the string is solved first. Then the influence of the viscous damping coefficients b_1 and b_2 on the natural frequencies and free responses is studied. It was found that the values of the coefficients should be carefully selected in order to avoid physically unrealistic responses.

1 Uvod

Modeliranje osno premikajočih se linijskih struktur je deležno nezmanjšane pozornosti od šestdesetih let prejšnjega stoletja. Pri tem gre za modeliranje verig v verižnih gonilih [5], modeliranje žaginega lista pri žagah [7] ali pa modeliranje vej jermenov pri jermenskih pogonih [1]. Obsežen pregled modeliranja jermenov in jermenskih pogonov do leta 1992 je podan v prispevku [1]. Problematika osno premikajočega se modela strune je obravnavana v številnih člankih, naj izpostavimo le nekatere: [3, 4, 6, 8, 9]. Prispevek [5] analizira prečna nihanja verig verižnih gonil. Analiza je pokazala, da se amplituda nihanja točke na sredini veje verige

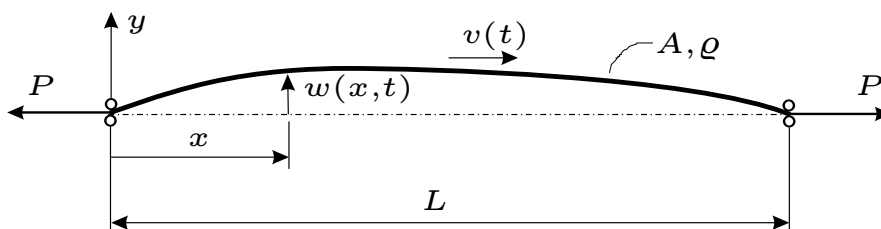
¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; nikola.jaksic@fs.uni-lj.si

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; miha.boltezar@fs.uni-lj.si

poveča, če se poveča osna hitrost potovanja verige, če upoštevamo le $b_1 \frac{\partial w}{\partial t}$ del modela viskoznega dušenja ($b_2 = 0$ v tem primeru, enačba (6)). Enak fenomen sta odkrila avtorja v prispevku [7]. Jermeni, ki so v rabi, so v glavnem kompleksne nekovinske strukture, kjer viskoelastičnost igra pomembno vlogo. Prvi modeli, ki popisujejo viskoelastične lastnosti jermenov, se že uporabljajo pri modeliranju vej jermenov, [2, 10]. Čeprav so bolj sofisticirani materialni modeli že vstopili v domeno modeliranja vej jermenov, pa fenomen, opisan v delih [5] in [7], še ni bi deležen večje pozornosti. Slednje je cilj tega prispevka.

2 Gibalna enačba prečnih nihanj osno gibajoče se strune

Prečni odmik strune od statične ravnovesne lege popisuje koordinata $w = w(x, t)$, slika 1. Predpostavimo, da se struna osno giblje s hitrostjo $v = v(t)$.



Slika 1 : Osno premikajoča se struna.

Diferencial koordinate prečnega pomika $w(x, t)$ podaja enačba (1). Uporabimo jo za izpeljavo hitrosti strune v prečni smeri, enačba (2). Tako lahko tvorimo diferencialna operatorja

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial t} dt \quad (1)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t} = v \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{D}{Dt} = v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{in} \quad \frac{D^2}{Dt^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dot{v} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3)$$

Gibalno enačbo prečnih nihanj (4) osno gibajoče se strune izpeljemo s pomočjo 2. Newtonovega zakona

$$\rho A \frac{D^2 w(x, t)}{Dt^2} = P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - d \frac{Dw(x, t)}{Dt} \quad (4)$$

kjer ρ popisuje gostoto gradiva strune, A velikost prečnega prereza strune, P natezno obremenitev strune in d koeficient viskoznega dušenja. Z uporabo diferencialnih operatorjev (3) ter z deljenjem enačbe s konstanto pri pospešku dobimo gibalno enačbo v obliki (5).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial w}{\partial t} + (\dot{v} + bv) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{P}{\rho A}} \quad ; \quad b = \frac{d}{\rho A} \quad (5)$$

Namen tega prispevka je analizirati gibalno enačbo lastnega nihanja osno gibajoče se strune, če imata koeficienta b različne vrednosti. Pri tem predpostavimo še nespremenljivost osne hitrosti

strune, $dv/dt = 0$, in dobimo enačbo, ki nas zanima:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial w}{\partial t} + b_2 v \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

kjer naj velja $0 \leq v < c$, $b_1 \geq 0$ in $b_2 \geq 0$.

3 Analitična rešitev gibalne enačbe prečnih nihanj osno gibajoče se strune

Enačbo (6) transformiramo v drugo kanonično obliko s pomočjo transformacije (7).

$$\begin{aligned} \zeta &= \alpha x + \beta t \\ \eta &= \gamma x + \delta t \end{aligned} \quad ; \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7)$$

Če se hočemo znebiti mešanega odvoda v enačbi (6), morajo parametri transformacije zasesti naslednje vrednosti: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = v/(c^2 - v^2)$ in $\delta = 1$. Tako lahko gibalno enačbo zapišemo v drugi kanonični obliki kot:

$$\frac{c^2}{c^2 - v^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + b_2 v \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} b_2 + b_1 \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (8)$$

in jo rešujemo z Euler-Fourierjevim nastavkom $w(\zeta, \eta) = W(\zeta)T(\eta)$, ki ga vnesemo v enačbo (8). To enačbo delimo z nastavkom in na tej podlagi tvorimo dve navadni diferencialni enačbi:

$$(c^2 - v^2)W'' - b_2 v W' + \omega^2 W = 0 \quad (9)$$

$$\frac{c^2}{c^2 - v^2} \ddot{T} + \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} b_2 + b_1 \right) \dot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (10)$$

Prvo rešujemo enačbo (9), da bi določili izraz za parameter ω . Rešitev predpostavimo v obliki $W(\zeta) = C e^{\lambda \zeta}$ in dobimo karakteristični polinom

$$\lambda^2 - \frac{b_2 v}{c^2 - v^2} \lambda + \frac{\omega^2}{c^2 - v^2} = 0 \quad (11)$$

s koreni

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{b_2 v}{c^2 - v^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_2 v}{c^2 - v^2} \right)^2 - 4 \frac{\omega^2}{c^2 - v^2}} \right] = \frac{1}{2} \tilde{\alpha} \pm i \tilde{\gamma} \quad (12)$$

kjer so $\tilde{\alpha} = b_2 v / (c^2 - v^2)$, $\tilde{\beta} = \omega^2 / (c^2 - v^2)$ in $\tilde{\gamma} = \sqrt{\tilde{\beta} - (\tilde{\alpha}/2)^2}$. Izraz pod korenem enačbe za $\tilde{\gamma}$ je vedno pozitiven, če le velja $v < c$. Ta izraz lahko zapišemo tudi kot $\omega^2 > \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 \frac{v^2}{c^2 - v^2}$, njegovo veljavo pa ocenimo na podlagi enačbe (15). Rešitev enačbe (9) je linearna kombinacija rešitve obeh korenov

$$W(\zeta) = e^{\tilde{\alpha}\zeta/2} (C_1 \cos \tilde{\gamma}\zeta + C_2 \sin \tilde{\gamma}\zeta) \quad (13)$$

kjer sta C_1 in C_2 konstanti. Z uporabo robnih pogojev (14) vidimo, da jih mora funkcija (13) zadovoljiti.

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0 &\Rightarrow W(0)T(t) = 0 &\Rightarrow W(0) = 0 = C_1 \\ w(L,t) = 0 &\Rightarrow W(L)T(Lv/(c^2 - v^2) + t) = 0 &\Rightarrow W(L) = 0 = C_2 e^{\tilde{\alpha}L/2} \sin \tilde{\gamma}L \end{aligned} \quad (14)$$

Iz enačb (14) sledi

$$\sin \tilde{\gamma}L = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma} = \frac{k\pi}{L} = \sqrt{\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}^2/2} \Rightarrow \omega^2 = (c^2 - v^2) \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \frac{v^2}{c^2 - v^2} \left(\frac{b_2}{2}\right)^2, \quad (15)$$

kjer je k naravno število. Pri reševanju diferencialne enačbe (10) uporabimo nastavek v obliki $T(\eta) = C e^{\lambda\eta}$ in dobimo karakteristični polinom

$$\lambda^2 + \left(\frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1) + b_1\right) \lambda + \frac{c^2 - v^2}{c^2} \omega^2 = 0 \quad (16)$$

s koreni

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1) + b_1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1) + b_1\right)^2 - 4\omega^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{\alpha} \pm \sqrt{\hat{\alpha}^2 - 4\hat{\beta}} \right] \quad (17)$$

kjer sta $\hat{\alpha} = \frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1) + b_1$ in $\hat{\beta} = \omega^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2}$. Če velja

$$\hat{\beta} > \frac{1}{4} \hat{\alpha}^2 \Rightarrow \omega^2 > \frac{1}{4} \frac{c^2 - v^2}{c^2} \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} b_2 + b_1\right)^2, \quad (18)$$

potem imamo opravka z nihanjem, torej s podkritičnim dušenjem. Če pa neenačbi (18) ni zadoščeno, nihanja ni in opredelimo dušenje kot nadkritično.

3.1 Podkritično dušenje

V tem primeru velja $\hat{\beta} > \frac{1}{4} \hat{\alpha}^2$. Rešitev karakterističnega polinoma (16) zapišemo kot

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \hat{\alpha} \pm i\hat{\gamma} \quad (19)$$

kjer je $\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{\beta} - (\hat{\alpha}/2)^2}$. Rešitev diferencialne enačbe (10) zapišemo kot

$$T(\eta) = e^{-\hat{\alpha}\eta/2} (A \cos(\hat{\gamma}\eta) + B \sin(\hat{\gamma}\eta)) \quad (20)$$

Iz enačbe (20) vidimo, da je parameter $\hat{\gamma}$ enak lastni frekvenci dušenega nihanja.

$$\omega_{d_k}^2 = \hat{\gamma}^2 = \left(\frac{c^2 - v^2}{c}\right)^2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} + \frac{1}{4} \frac{c^2 - v^2}{c^2} \left[\frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1)^2 - b_1^2\right] \quad (21)$$

Odziv k -tega moda izpeljemo kot:

$$\begin{aligned} w_k(x,t) &= e^{\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} (b_2 - b_1)x} \sin \frac{k\pi x}{L} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} [v^2 (b_2 - b_1) + c^2 b_1]t} \\ &\quad \left[A_k \cos \left(\omega_{d_k} \left(\frac{xv}{c^2 - v^2} + t \right) \right) + B_k \sin \left(\omega_{d_k} \left(\frac{xv}{c^2 - v^2} + t \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

3.2 Kritično dušenje

V primeru kritičnega dušenja velja $\hat{\beta} = \hat{\alpha}^2/4$ oziroma $\omega^2 = \frac{1}{4} \frac{c^2 - v^2}{c^2} \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} b_2 + b_1 \right)^2$, kar pomeni, da ima karakteristični polinom (16) dve enaki realni rešitvi.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1) + b_1 \right) = -\frac{1}{2} \hat{\alpha} \quad (23)$$

Rešitev diferencialne enačbe (10) zapišemo kot:

$$T(\eta) = (C_1 + C_2 \eta) e^{-\frac{1}{2} \hat{\alpha} \eta} \quad (24)$$

in odziv k -tega moda kot:

$$w_k(x, t) = e^{\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} (b_2 - b_1) x} \sin \frac{k \pi x}{L} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} [v^2 (b_2 - b_1) + c^2 b_1] t} \left[A_k + B_k \left(\frac{xv}{c^2 - v^2} + t \right) \right] \quad (25)$$

3.3 Nadkritično dušenje

V primeru nadkritičnega dušenja velja $\hat{\beta} < \hat{\alpha}^2/4$ oziroma $\omega^2 < \frac{1}{4} \frac{c^2 - v^2}{c^2} \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} b_2 + b_1 \right)^2$, kar pomeni, da ima karakteristični polinom (16) dve različni realni rešitvi.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \hat{\alpha} \pm \hat{\epsilon} \quad (26)$$

kjer je $\hat{\epsilon} = \sqrt{(\hat{\alpha}/2)^2 - \hat{\beta}} = i\hat{\gamma}$. Rešitev diferencialne enačbe (10) zapišemo kot:

$$T(\eta) = e^{-\hat{\alpha} \eta / 2} (A \operatorname{ch}(\hat{\epsilon} \eta) + B \operatorname{sh}(\hat{\epsilon} \eta)) \quad (27)$$

in odziv k -tega moda kot:

$$w_k(x, t) = e^{\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} (b_2 - b_1) x} \sin \frac{k \pi x}{L} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} [v^2 (b_2 - b_1) + c^2 b_1] t} \left[A_k \operatorname{ch} \left(\hat{\epsilon}_k \left(\frac{xv}{c^2 - v^2} + t \right) \right) + B_k \operatorname{sh} \left(\hat{\epsilon}_k \left(\frac{xv}{c^2 - v^2} + t \right) \right) \right]. \quad (28)$$

4 Analiza in razprava

Pod predpostavko oziroma ob pogojih $b_1 \geq 0, b_2 \geq 0$ in $0 \leq v < c$ pričakujemo, da bo model viskoznega dušenja, kot model disipacije energije v sistemu, vplival na lastne frekvence dušenega nihanja strune na način, da se bodo omenjene lastne frekvence zmanjšale ob povečanju vrednosti koeficientov viskoznega dušenja. Druga domneva pa govori o tem, da se amplituda odziva sistema ne bi smela zmanjševati počasneje s povečanjem osne hitrosti strune.

4.1 Vpliv koeficientov dušenja na lastno frekvenco prečnega nihanja strune

Nihanje strune s svojo lastno frekvenco se pojavi le pri podkritičnem dušenju. Enačba (21) lastne frekvence dušenega nihanja je sestavljena iz dveh delov. Prvi del je enak lastni frekvenci nedušenega nihanja osno gibajoče se strune. Na drugi del pa pomembno vpliva viskozno dušenje. Pričakujemo, da se bo lastna frekvenca dušenega nihanja zmanjšala glede na lastno frekvenco nedušenega nihanja, iz česar izhaja matematično formuliran pogoj (29).

$$\frac{v^2}{c^2} (b_2 - b_1)^2 - b_1^2 \leq 0. \quad (29)$$

$$b_1 \geq \frac{v}{c+v} b_2, \quad (30)$$

$$b_1 = \frac{v}{c+v} b_2 = k_1 b_2. \quad (31)$$

Rešitev tega pogoja je ploskev, ki jo podaja neenačba (30), le ta pa je omejena s premico (31). Koeficient naklona premice k_1 doseže najmanjšo vrednost pri $v = 0$, $k_1(v = 0) = 0$, in največjo vrednost v limitnem primeru $v \rightarrow c$, $k_1(v \rightarrow c) = 0.5$. Mejo med nihanjem strune in nadkritičnim obnašanjem slednje za vsak mod posebej izpeljemo iz enačbe $\omega^2 = \frac{1}{4} \frac{c^2 - v^2}{c^2} \left(\frac{v^2}{c^2 - v^2} b_2 + b_1 \right)^2$, glej pod poglavje 3.2.

$$b_1 = f_k(b_2) = \frac{1}{c^2 - v^2} \left[-b_2 v^2 + c \sqrt{b_2^2 v^2 + \left(2 \frac{k\pi}{L} (c^2 - v^2) \right)^2} \right] \quad (32)$$

Enačba (32) doseže svoj minimum v točki $b_1 = b_2 = 2 \frac{k\pi}{L} \sqrt{c^2 - v^2}$ in se asimptotično približuje enačbi (31).

4.2 Vpliv koeficientov dušenja na amplitudo odziva strune

Opredelimo še drugo domnevo, ki pa govori o tem, da se amplituda odziva sistema ne bi smela zmanjševati počasneje s povečanjem osne hitrosti strune. Konstanta zadnjega člena enačbe 6 je produkt koeficienta b_2 in osne hitrosti premikanja strune in predstavlja del koeficienta dušenja strune, saj leži ob izrazu za prečno hitrost strune. Z večanjem osne hitrosti se poveča vrednost omenjene konstante. Večja vrednost te konstante pomeni večjo disipacijo energije iz sistema in s tem poveča hitrost zmanjševanja amplitude odziva lastnega nihanja takega sistema. To sklepanje je bolj zapleteno, saj se hitrost in koeficienta dušenja pojavljata tudi v delu, ki pomembno opredeljuje lastno obliko. Oglejmo si prvo ta del, ki ga okarakterizira izraz $\bar{W}(x) = e^{\frac{v}{2c^2}(b_2 - b_1)x} \sin \frac{k\pi x}{L}$ iz katerega lahko sklepamo o položaju največje amplitude nihanja strune zaradi koordinate lege. Če je $b_2 - b_1 \geq 0$, sledi, da se maximum $\bar{W}(x)$ pojavi na zadnjem polvalu lastne oblike, ko je $x = \frac{2k-1}{2k} L$, ter če je $b_2 - b_1 < 0$, sledi, da se maximum $\bar{W}(x)$ pojavi na prvem polvalu lastne oblike, ko je $x = \frac{1}{2k} L$. Amplitudo odziva dominantno opredeljuje enačba

$$\text{Amp}(w(x,t)) = \exp \left[\frac{1}{2c^2} (v[b_2 - b_1]x - [v^2(b_2 - b_1) + c^2 b_1]t) \right] \quad (33)$$

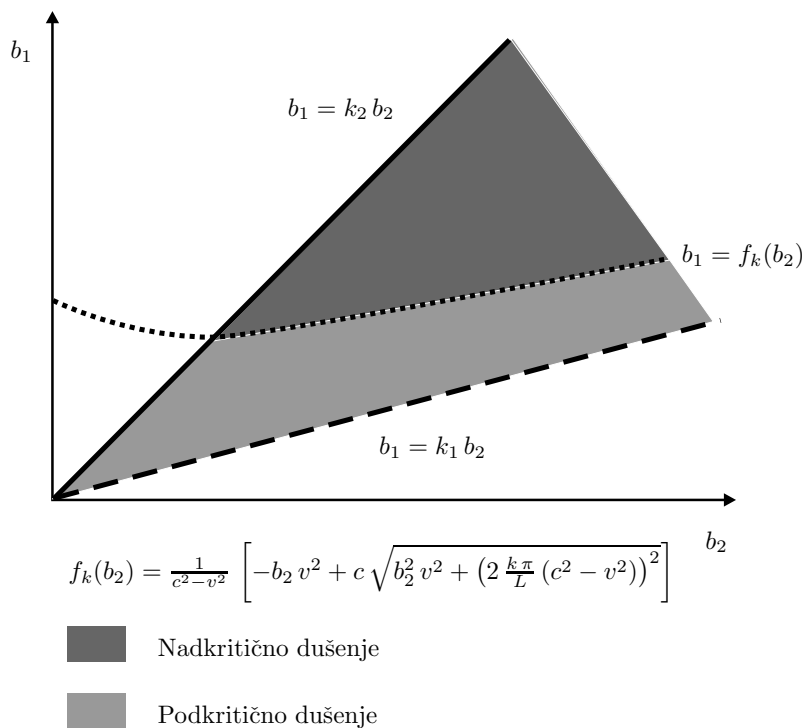
kjer je $x = (2k - 1)L/(2k)$ ali pa $x = L/(2k)$. Eksponentna funkcija je monotona, zato zadošča analiza eksponenta: $\frac{1}{2c^2} (v[b_2 - b_1]x - [v^2(b_2 - b_1) + c^2 b_1]t)$. Zahtevamo, da se eksponent ne povečuje s povečevanjem hitrosti strune, kar matematično formuliramo kot

$$\frac{\partial}{\partial v} (v[b_2 - b_1]x - [v^2(b_2 - b_1) + c^2 b_1]t) = (x - 2vt)(b_2 - b_1) \leq 0. \quad (34)$$

Poglejmo si oba primera vrednosti $b_2 - b_1$. Če je $b_2 - b_1 \geq 0$, sledi $x = \frac{2k-1}{2k} L$ in $x - 2vt \geq 0$, kar velja za poljuben, dovolj velik t , $t \geq \frac{2k-1}{4kv} L$. Dovolj velik čas, ki zadovolji vse mode, dobimo, ko gre $k \rightarrow \infty$: $t_{cr} = t(k \rightarrow \infty) = L/(2v)$, kar pomeni, da mora biti $t \geq t_{cr}$. Če pa je $b_2 - b_1 < 0$ sledi $x = \frac{1}{2k} L$ in $x - 2vt < 0$, kar pa v splošnem ne velja, ker je x omejen z dolžino strune in ker lahko t zasede poljubne vrednosti med 0 in ∞ , torej $0 < t < \infty$. Veljavnost je tu omejena le na čase t , ki so $t < \frac{L}{4kv}$. Ker pa je modov neskončno veliko, $k \rightarrow \infty$, sledi, da rešitev $b_2 - b_1 < 0$ ni fizikalno sprejemljiva.

Poglejmo si fizikalno sprejemljivo območje pri $b_2 - b_1 \geq 0$. Dobimo sistem treh neenačb (35), od katerih sta pomembni le prvi dve. Sprejemljivo območje koeficientov b_1 in b_2 je senčeno na sliki 2.

$$\begin{aligned} b_1 &\geq k_1 b_2 & ; & \quad k_1 = \frac{v}{c+v} \leq k_2 \\ b_1 &\leq k_2 b_2 & ; & \quad k_2 = 1 \\ t &\geq t_{min} & ; & \quad t_{min} = \frac{L}{2v} \end{aligned} \quad (35)$$



Slika 2 : Fizikalno sprejemljivo območje vrednosti koeficientov b_1 in b_2 leži med premicama v senčenem območju. Svetlejšo senčeno območje predstavlja nihanje strune, temnejše pa odziv strune z nadkritičnim dušenjem.

5 Zaključki

V prispevku smo analizirali vplive viskoznega mehanizma dušenja na lastna prečna nihanja osno premikajoče se strune. Pokazali smo, da vrednosti parametrov b_1 in b_2 ne moremo povsem poljubno izbirati, če želimo ohraniti fizikalno korektno obnašanje sistema. Senčeno področje na

sliki 2 predstavlja območje dvojic vrednosti parametrov b_1 in b_2 , ki daje fizikalno sprejemljive rezultate.

Kot rešitev problema predlagamo, da, če je le mogoče, ne razlikujemo med vrednostmi b_1 in b_2 , torej $b_1 = b_2 = b$. Tako pravilo ima močno fizikalno ozadje, saj je sila viskoznega dušenja enaka zmnožku koeficienta viskoznega dušenja in hitrosti delca strune. Slednja pa je definirana z enačbo (2) in uporabljena v tvorbi gibalne enačbe (4), kjer pa ne obstaja matematični formalizem, ki bi lahko pripeljal do različnih vrednosti parametra b , kot to srečamo v enačbi (6). Zatorej ni jasno, kaj je avtorje prispevkov [5, 7] motiviralo k taki uporabi modela viskoznega dušenja.

Zahvala

Raziskavo je omogočil Goodyear Engineered Products Europe iz Kranja po pogodbi 5/53-03.

Literatura

- [1] S. Abrate, *Vibrations of belts and belt drives*, Mech. Mach. Theory, **27**(6), 645–659, 1992.
- [2] K. (Stevanović) Hedrih in A. Filipovski, *Longitudinal creep vibrations of a fractional derivative order rheological rod with variable cross section*, Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, **3**(12), 327–349, 2002.
- [3] L. Lengoc in H. McCallion, *Transverse vibration of a moving string: A physical review*, J. Sys. Eng., **6**, 61–71, 1996.
- [4] L. Lengoc in H. McCallion, *Transverse vibration of a moving string: A comparison between the closed-form solution and the normal-mode solution*, J. Sys. Eng., **6**, 72–78, 1996.
- [5] S. Mahalingam, *Transverse vibrations of power transmission chains*, British Journal of Applied Physics, **8**, 145–148, 1957.
- [6] G. Suweken in W.T. Van Horssen, *On the transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity. Part I: the string-like case*, Journal of Sound and Vibration, **266**, 117–133, 2003.
- [7] A.G. Ulsoy in C.D. Mote, Jr., *Vibration of band saw blades*, Journal of Engineering for Industry, **104**, 71–78, 1982.
- [8] J.A. Wickert in C.D. Mote, Jr., *On the energetics of axially moving continua*, J. Acoust. Soc. Am., **85**(3), 1365–1368, 1989.
- [9] J.A. Wickert in C.D. Mote, Jr., *Classical vibration analysis of axially moving continua*, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, **57**, 738–744, 1990.
- [10] L. Zhang in J.W. Zu, *Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts, Part I: Free vibration analysis*, Journal of Sound and Vibration, **216**(1), 75–91, 1998.



Primerjava med Forcheimerjevim in Brinkmanovim modelom konvektivnega toka v porozni kotanji

R. Jecl¹

Comparison between the Forcheimer and the Brinkman model for convective flow in porous cavity

Povzetek. V prispevku je predstavljena uporaba Forcheimerjevega modela za analizo konvektivnega toka v porozni kotanji s poudarkom na določitvi vpliva dodatnega (Forcheimerjevega) vztrajnostnega člena v gibalni enačbi na hitrost in skupni prenos toplote. Znano je, da je vpliv tega člena pri inženirskih problemih v zasičeni porozni snovi minimalen, kar pa še ni bilo dokazano z uporabo metode robnih elementov (MRE) ali s katero od njenih razširitev. V prispevku je zato podana numerična rešitev problema naravne konvekcije v porozni kotanji z uporabo robno območne integralske metode (ROIM), pri čemer so hitrosti in skupni prenos toplote izračunani za različna modificirana Rayleighova in Darcyjeva števila, rešitve pa primerjane z objavljenimi rezultati na osnovi Brinkmanovega modela.

Abstract. The use of the Forcheimer model for analyzing the convective flow in a porous cavity is presented emphasizing investigation of the effect of the additional (Forcheimer) inertia term in momentum equation on the velocity and global heat transfer through the cavity. The effects that this term have upon the engineering parameters of interest for the case of a fluid saturated media, is known to be minimal but was not confirmed yet with the use of the boundary element method (BEM) or any of its extension. Therefore the numerical solution of the problem of natural convection in porous cavity using boundary domain integral method (BDIM) is presented, where the velocities and the total heat transfer are calculated for different modified Rayleigh and Darcy numbers and solutions are compared with published results obtained with the Brinkman model.

1 Uvod

Gibalna enačba toka tekočine skozi porozno snov je ekvivalent Navier-Stokesovi gibalni enačbi za čisto tekočino. Pri študiju prenosnih pojavov v porozni snovi najdemo v literaturi kar nekaj različnih oblik gibalne enačbe [1]. Namen našega prispevka je ugotoviti vpliv Forcheimerjevega člena v gibalni enačbi na hitrost in skupni prenos toplote z uporabo robno območne integralske metode.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za Gradbeništvo, Smetanova 17, 2000 Maribor, E-mail: renata.jecl@uni-mb.si

Teorija laminarnega toka skozi porozno snov temelji na eksperimentih, ki jih je pri študiju enodimenzijskega toka vode skozi homogen in nedeformabilen porozen material izvajal francoski inženir Henry Darcy leta 1856. Rezultat njegovih poiskov je linearen zakon prepustnosti (Darcyjev zakon), ki podaja proporcionalno zvezo med količino toka in tlačno razliko v obliki $\vec{v} = (-\mathbf{K}/\mu) \vec{\nabla}P$, kjer je μ dinamična viskoznost tekočine, koeficient \mathbf{K} pa propustnost. Propustnost je neodvisna od tekočine, njena vrednost je odvisna le od geometrije porozne snovi, v splošnem je tenzor drugega reda. V primeru izotropne porozne snovi je propustnost skalar in Darcyjev zakon lahko zapišemo kot

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K} \vec{v} . \quad (1)$$

Tako kot pri katerem koli problemu definiranim v toku tekočine, je tudi v porozni snovi režim toka definiran z Reynoldsovim številom Re , ki določa razmerje med vztrajnostnimi in viskozni silami. V splošnem je obveljalo prepričanje, da velja Darcyjev zakon dokler je $Re < 10$ - hitrosti so majhne in govorimo o laminarnem režimu toka skozi porozno snov v katerem prevladujejo viskozne sile. Ko pa je Reynoldsovo število večje, so večje tudi vztrajnostne sile in Darcyjevemu zakonu je potrebno dodati člene, s katerimi zajamemo vpliv povečanja hitrosti.

Najenostavnejša dopolnitev linearne zakona je Darcyjev zakon z upoštevanjem vztrajnostnih učinkov po analogiji z Navier-Stokesovo enačbo

$$\rho \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{K} \vec{v} . \quad (2)$$

Naslednja velikokrat uporabljena gibalna enačba je Brinkmanova enačba

$$\rho \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{K} \vec{v} + \mu_e \nabla^2 \vec{v} , \quad (3)$$

s katero je mogoče zadostiti brezdrsnemu robnemu pogoju (no-slip boundary condition), ki pravi da je hitrost na trdnem robu (na površini, ki omejuje porozno snov) enaka nič. Pri tem velja omeniti, da se Brinkmanova enačba prevede v Navier-Stokesovo gibalno enačbo za čisto tekočino, ko propustnost narašča preko vseh meja ($K \rightarrow \infty$), ko pa se propustnost zmanjšuje in približuje nič ($K \rightarrow 0$), dobimo Darcyjevo enačbo.

V literaturi zasledimo tudi uporabo Forcheimerjeve gibalne enačbe

$$\rho \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{K} \vec{v} - \frac{\rho c_F}{K^{1/2}} |\vec{v}| \vec{v} , \quad (4)$$

ki vsebuje dodaten vztrajnostni člen zaradi nelinearnih učinkov, ki so posledica povečanja hitrosti.

3 Osnovne enačbe

Makroskopske enačbe ohranitve mase, gibalne količine in energije v porozni snovi dobimo s postopkom povprečenja po reprezentativnem elementarnem volumnu iz Navier-Stokesovih enačb za čisto tekočino ob upoštevanju dejstva, da je samo del obravnavanega volumna (izražen s poroznostjo) na voljo za tok tekočine. Te enačbe v literaturi najdemo pod imenom "Brinkmanov model", ki ga sestavljajo kontinuitetna, Brinkmanova gibalna in energijska enačba [2]. V našem primeru smo gibalno enačbo dopolnili še s Forcheimerjevim členom kar predstavlja Forcheimerjev model [3] v obliki

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + F g_i - \frac{\nu_f}{K} v_i + \nu_e \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{c_F}{\sqrt{K}} v v_i, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi(\rho c_f) + (1-\phi)(\rho_s c_s)] T + (\rho c_f) \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \quad (7)$$

kjer so v_i i-ta komponenta filtracijske hitrosti, x_i i-ta koordinata, ϕ poroznost, ρ gostota tekočine, ν_f kinematična viskoznost tekočine, ν_e kinematična viskoznost porozne snovi, K propustnost porozne snovi, $\partial P/\partial x_i$ tlačni gradient. Povezava med gostoto in temperaturo je podana z funkcijo F kot $F = (\rho - \rho_0)/\rho_0 = -\beta_T(T - T_0)$, kjer je ρ_0 referenčna gostota tekočine pri temperaturi T_0 in β_T koeficient temperaturnega volumskega raztezka. Nadalje so ρ_s in ρ gostote trdne in tekoče faze porozne snovi, c_s in c_f specifične toplote pri konstantnem tlaku za trdno in tekočo fazo, T je temperatura, λ_e pa predstavlja dejansko toplotno prevodnost zasičene porozne snovi. Ta se običajno določi z uporabo klasičnega "mešalnega" pravila $\lambda_e = \phi \lambda_f + (1-\phi) \lambda_s$, kjer λ_f in λ_s predstavljata toplotne prevodnosti tekočine in trdne snovi. Forcheimerjev člen - zadnji člen na desni strani enačbe (6) povezuje kvadrat hitrosti s koeficientom c_F odvisnim od geometrije por in s propustnostjo K . Oba koeficienta lahko izračunamo po Ergunu, podano v [1], v odvisnosti od poroznosti z naslednjimi relacijami

$$K = \frac{d^2 \phi^3}{150 (1-\phi)^2}; \quad c_F = \frac{1.75}{(150 \phi^3)^{1/2}}. \quad (8)$$

Gibalna enačba (6) ima v našem primeru dva viskozna in dva vztrajnostna člena. Prvi viskozni je običajen Darcyjev člen (tretji na desni), drugi pa je Brinkmanov člen (četrti na desni), ki je analogen Laplaceovemu členu v Navier-Stokesovi enačbi za čisto tekočino. V tem členu nastopa dejanska viskoznost ν_e , ki je odvisna od geometrije porozne snovi in ima praviloma drugačno vrednost od viskoznosti tekočine ν_f . Prvi vztrajnostni člen je konvektivni vztrajnostni člen podan kot produkt hitrosti in divergence hitrosti (drugi člen na

levi), drugi pa je Forcheimerjev vztrajnostni člen zapisan kot produkt hitrosti in njene absolutne vrednosti (zadnji člen na desni).

4 Robno območna integralska metoda

Podane vodilne ohranitvene enačbe (5), (6) in (7) rešimo z uporabo robno območne integralske metode (ROIM). Numerične sheme ne bomo ponavljali, saj smo jo že večkrat opisali in predstavili na Kuhljevih dnevih, podrobnosti pa so podane v [4], [5] in [6]. Bistveni koraki, ki vodijo do rešitve so:

- v gibalno enačbo vpeljemo parameter $\Lambda = \nu_e / \nu_f$ kot razmerje med viskoznostjo porozne snovi in viskoznostjo tekočine ter modificiran vrtnični časovni korak $\tau_v = t / \phi$,
- v energijsko enačbo vpeljemo toplotno difuzivnost porozne snovi $a_p = \lambda_e / \rho c_f$ ter razmerje toplotnih kapacitet $\sigma = \phi(\rho c_f) + (1 - \phi)(\rho_s c_s) / \rho c_f$,
- z uporabo hitrostno vrtnične formulacije zapišemo vodilne ohranitvene enačbe v obliki prenosnih enačb za kinematiko, kinetiko vrtničnosti in temperaturno kinetiko,
- integralsko obliko enačb prenosnih enačb izpeljemo s pomočjo metode utežnih ostankov in ustreznih Greenovih funkcij (eliptične Laplaceove osnovne rešitve za kinematiko ter parabolične difuzijske osnovne rešitve za vrtnično in temperaturno kinetiko),
- s postopkom diskretizacije roba in območja rešitve robno območne integralske enačbe zapišemo za vsa robna in notranja vozlišča in izpeljemo vezan matrični sistem katerega rešitev poiščemo z uporabo tehnike podobmočij, pri čemer uporabimo diskretni model, ki predstavlja vsako podobmočje sestavljeno iz štirih nezveznih 3-točkovnih kvadratnih robnih elementov in ene zvezne 9-točkovne kvadratne celice.

Upoštevaje zgoraj našete korake izpeljemo matrične sisteme za izračun hitrosti, vrtničnosti in temperature za dvodimenzionalni tok tekočine v porozni kotanji v obliki

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}] \{v_x\} &= [\mathbf{H}_t] \{v_y\} - [\mathbf{D}_y] \{\omega\} \\ [\mathbf{H}] \{v_y\} &= [\mathbf{H}_t] \{v_x\} - [\mathbf{D}_x] \{\omega\} \end{aligned} \quad (9)$$

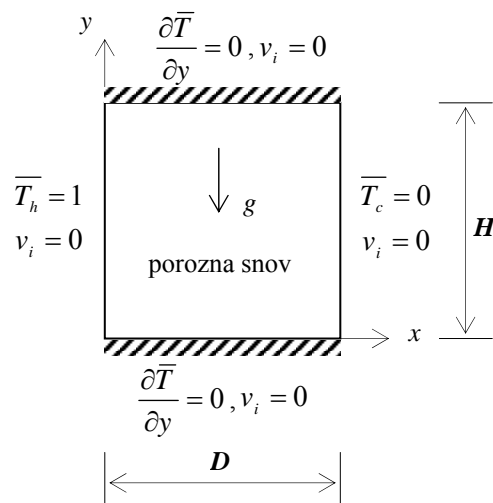
$$\begin{aligned} [\mathbf{H}] \{\omega\} &= \frac{\nu_f}{\bar{\nu}_f} [\mathbf{G}] \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} \right\} - \frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{\nu}_f} [\mathbf{G}] \left\{ \begin{aligned} &\omega v_n + \phi^2 e_{ij} n_i g_j F n_j \\ &+ \phi^2 \Lambda f_j n_j + \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} e_{ij} v_n v \end{aligned} \right\} - \\ &\frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{\nu}_f} [\mathbf{B}] \left[\frac{\phi^2 \nu_f}{K} + \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} v \right] \{\omega\} + \\ &\frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{\nu}_f} [\mathbf{D}_j] \left\{ \begin{aligned} &\omega v_j - \phi^2 e_{ij} g_j F - \phi^2 \Lambda f_j - \\ &\phi^2 \Lambda \bar{\nu}_f \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \phi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}} e_{ij} v_j v \end{aligned} \right\} + \frac{1}{\phi^2 \Lambda \bar{\nu}_f} \beta [\mathbf{B}] \{\omega\}_{F-1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H}] \{T\} &= \frac{a_p}{\bar{a}_p} [\mathbf{G}] \left\{ \frac{\partial T}{\partial n} \right\} - \frac{1}{\bar{a}_p} [\mathbf{G}] [v_n] \{T\} + \\
 \frac{1}{\bar{a}_p} [\mathbf{D}_i] [v_j] \{T\} &- \frac{\tilde{a}_p}{\bar{a}_p} [\mathbf{D}_i] \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_j} \right\} + \frac{1}{\bar{a}_p} \beta [\mathbf{B}] \{T\}_{F-1}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

V zgornjih enačbah pomenijo $[\mathbf{H}]$, $[\mathbf{G}]$, $[\mathbf{D}]$, $[\mathbf{B}]$ matrike sestavljene iz integralov, ki predstavljajo integracijo po robnih elementih in notranjih celicah, zapisanih za vsa robna in območna vozlišča. Vidimo, da je Forcheimerjev člen v enačbi (10) razdeljen na tri dele, pri čemer sta prispevka pomnožena z matrikama $[\mathbf{G}]$ in $[\mathbf{B}]$ pridružena sistemski matriki, zadnji del člena z matriko $[\mathbf{D}_i]$ pa je obravnavan kot del izvornega člena oziroma člena s katerim zajamemo vpliv nelinearnosti.

5 Testni primer

Učinkovitost metode ter pravilnost delovanja predlagane numerične sheme smo testirali na primeru naravne konvekcije v porozni kotanji greti od strani. Kotanja je zapolnjena s homogeno, nedeformabilno, popolnoma zasičeno porozno snovjo. Leva stena kotanje je greta, desna hlajena, horizontalni pa toplotno izolirani. Za porozno snov predpostavimo, da ima konstantno poroznost in propustnost ter da je hidrodinamično in toplotno izotropna. Tekočina s katero je porozna snov zasičena je v toplotnem ravnovesju s trdno fazo, kar pomeni da lahko toplotno obnašanje porozne snovi opišemo z eno samo enačbo za povprečno temperaturo. Geometrija, hidrodinamični in temperaturni robni pogoji obravnavanega problema so podani na sliki 1.



Slika 1: Geometrija ter robni pogoji.

Izračune smo opravili za dva primera, in sicer za pravokotno kotanjo z razmerjem stranic ($A = H/D$) $A = 1$ in za vertikalno kotanjo pri $A = 5$. Ostali vodilni parametri problema so

še Darcyjevo število $Da = \Lambda(K/D^2)$, tekočinsko Prandtlovo število $Pr_f = \nu_f/a_f$, modificirano Rayleighovo število $Ra^* = Ra Da \lambda$, kjer je $Ra = g\beta_T D^3 \Delta T / \nu_f a_f$, razmerje toplotnih prevodnosti $\lambda = \lambda_f/\lambda_e$ in razmerje toplotnih kapacitet σ . Zaradi poenostavitve smo upoštevali $Pr_f = 1$, $\lambda = 1$ in $\sigma = 1$. Za pravokotno kotanjo je poroznost ϕ enaka 0.5, Forcheimerjev koeficient c_F določen po Ergunovem modelu je 0.404. Uporabili smo dve neekvidistantni računski mreži 20×20 in 40×40 podobmočij, pri čemer je bilo razmerje med najdaljšo in najkrajšo stranico $r = 6$ za prvo in $r = 12$ za drugo mrežo. Gostejša mraža je bila potrebna pri majhnih Darcyjevih številih ($Da \leq 10^{-3}$) zaradi velikih hitrostnih gradientov v bližini vertikalnih sten. Časovni koraki so se zmanjševali z zmanjševanjem Darcyjevega števila do $\Delta t = 10^{-5}$ s, konvergenčni kriterij pa je bil $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$. Za visoko kotanjo smo upoštevali poroznost $\phi = 0.8$ in koeficient $c_F = 0.2$. Računska mreža je bila v tem primeru sestavljena iz 30×40 podobmočij z razmerji $r_x = 30$ in $r_y = 20$.

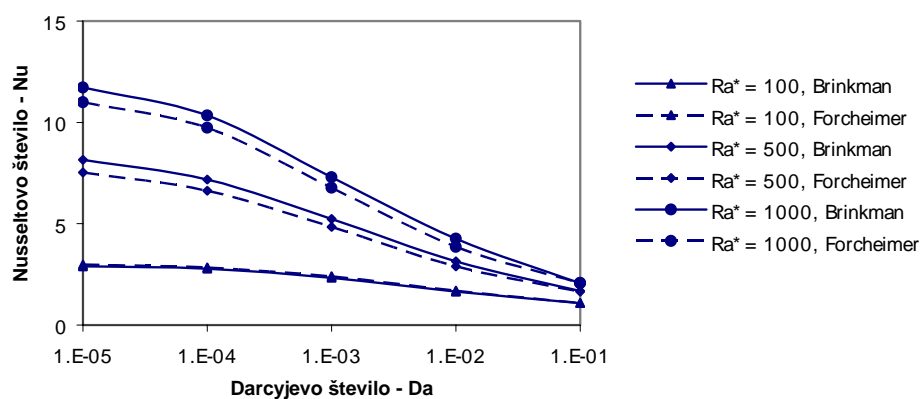
Za prikaz vpliva dodatnega Forcheimerjevega člena na prenos toplote skozi kotanjo smo Nusseltova števila $Nu = -\int_0^1 (\partial T / \partial x)_{x=0} dy$ izračunana z uporabo Brinkmanovega modela (podano v [2], [5]) primerjali z Nusseltovimi števili izračunani na osnovi zgoraj opisanega postopka, ki temelji na Forcheimerjevem modelu. Primerjava je podana v tabeli 1.

Tabela 1: Skupni prenos toplote skozi kotanjo, Nu .

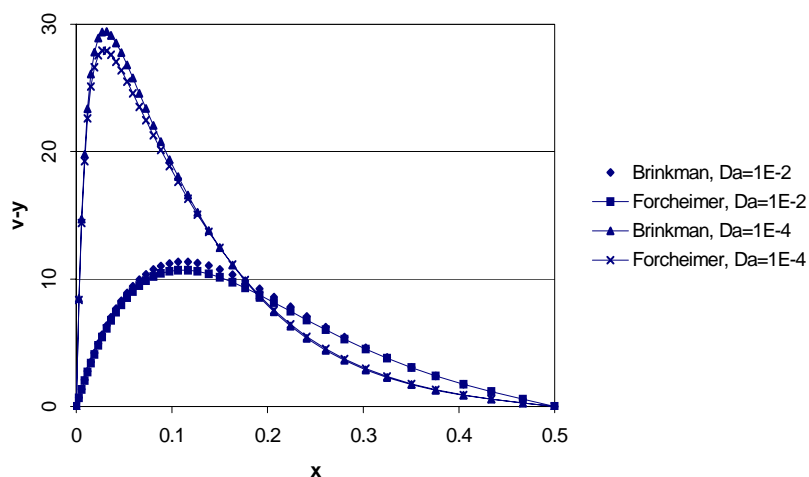
Razmerje stranic	Ra^*		Da mreža	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$A=1$	100	sedanji rezultati	20×20	1.084	1.647	2.322	2.762	2.588
			40×40	1.085	1.655	2.330	2.783	2.902
		ref. [2]	41×41	/	1.70	2.41	2.84	3.02
		ref. [5]	20×20	1.086	1.685	2.402	2.823	2.67
		ref. [5]	40×40	1.088	1.695	2.414	2.847	2.995
	500	sed. rez	40×40	1.660	3.021	4.844	6.633	7.812
		ref. [5]	40×40	1.681	3.145	5.235	7.185	8.428
	1000	sed. rez	40×40	2.07	3.79	6.57	9.31	10.61
ref. [5]		40×40	2.08	4.03	6.98	9.89	11.45	
$A=5$	100	sed. rez	30×40	5.299	7.033	8.834	9.609	/
		ref. [5]	30×40	5.312	7.254	9.134	9.953	/

Iz tabele 1. je razvidno, da je razlika v skupnem prenosu toplote skozi kotanjo izračunana po obeh modelih minimalna iz česar lahko sklepamo, da je vpliv Forcheimerjevega člena

minimalen. Razlike nikoli ne presežejo 7 %, kot je bilo pričakovati pa naraščajo z povečevanjem modificiranega Rayleighovega števila in z zmanjševanjem Darcyjevega števila. Ugotovimo lahko tudi, da Forcheimerjev model daje nižje vrednosti skupnega prenosa toplote skozi kotanjo v primerjavi s Brinkmanovim modelom. Rezultati se ujemajo z ugotovitvami podanimi v [3] za vertikalno porozno kotanjo, kot tudi z zaključki v [7] za horizontalni porozni sloj. Spremembe Nusseltovega števila za oba modela glede na različna Darcyjeva in modificirana Rayleighova števila so grafično podane na sliki 2 iz katere lahko povzamemo, da skupni prenos toplote skozi kotanjo vedno narašča z modificiranim Rayleighovim številom in pada glede na Darcyjevo število ter, da vključitev Forcheimerjevega člena v gibalno enačbo ne spremeni asimptotičnega obnašanja krivulje odvisnosti med Nusseltovim in Darcyjevim številom [2], [5].



Slika 2: Sprememba Nusseltovega števila pri različnih Ra^* in Da za oba modela



Slika 3: Vertikalni hitrostni profili skozi vodoravno središnico za polovico kvadratne kotanje pri $Ra^* = 100$ za oba modela

Vpliv Forcheimerjevega vztrajnostnega člena je prikazan še na sliki 3. na kateri so podani vertikalni hitrostni profili skozi vodoravno središčnico kotanje izračunani po obeh modelih za dve različni Darcyjevi števili $Da = 10^{-2}$ in $Da = 10^{-4}$. Pri majhnem Darcyjevem številu ima porazdelitev hitrosti strme gradiente v bližini vertikalne stene, z naraščanjem Darcyjevega števila se hitrost zmanjšuje, mesto nastopa maksimalne hitrosti se pomakne proti središču kotanje, pri čemer pa lahko vidimo, da je razlika v hitrostih za oba modela minimalna.

6 Zaključek

Prikazana je uporaba robno območne integralske metode za primer naravne konvekcije v porozni kotanji greti od strani. Za prikaz vpliva Forcheimerjevega vztrajnostnega člena v gibalni enačbi je uporabljen Forcheimerjev model, rezultati pa so primerjani z vrednostmi dobljenimi na osnovi Brinkmanovega modela. Vključitev Forcheimerjevega člena povzroča minimalno zmanjšanje prenosa toplote skozi kotanjo, kakor tudi minimalno zmanjšanje hitrosti. Numerična shema je zaradi dodanega nelinearnega člena še bolj kompleksna, kar vodi do povečanja računskega časa potrebnega za konvergenco, ne spremeni pa se asimptotična oblika krivulje odvisnosti med Nusseltovim in Darcyjevim številom. Na osnovi teh rezultatov je mogoče potrditi, da v obravnavanem primeru Forcheimerjev člen ne vpliva bistveno na skupni prenos toplote, kot je bilo to že objavljeno v literaturi, kjer so bile za izračun uporabljene druge numerične metode.

Zahvala

Prispevek Renate Jecl je del raziskovalnega projekta Z2-3289-0797/2001, ki ga finančno podpira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije.

Literatura

- [1] D. A. Nield, A. Bejan, *Convection in porous media (Second ed.)*, Springer-Verlag, 1999.
- [2] G. Lauriat, V. Prasad, *Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study for Brinkman-extended Darcy formulation*, Journal of Heat Transfer 109, 688-696, 1987.
- [3] G. Lauriat, V. Prasad, *Non-Darcian effects on natural convection in a vertical porous enclosure*, International Journal of Heat and Mass Transfer 32, 2135-2148, 1989.
- [4] R. Jecl, L. Škerget, E. Petrešin, *Boundary domain integral method for transport phenomena in porous media*, Int. Journal for Numerical Methods in Fluids 35, 39-54, 2001.
- [5] R. Jecl, L. Škerget, *Boundary element method for natural convection in non-Newtonian fluid saturated square porous cavity*, Eng. Anal. with Boundary Elements 27, 963-975, 2003.
- [6] L. Škerget, M. Hriberšek, G. Kuhn, *Computational fluid dynamics by boundary domain integral method*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 46, 1291-1311, 1999.
- [7] J. L. Lage, *Comparison between the Forcheimer and the convective inertia terms for Benard convection within a fluid saturated porous medium*, HTD 193, Fundamentals of Heat Transfer in Porous Media, ASME, 49-55, 1992.



Numerični izračun toka v odvodnem tunelu francisove turbine

D. Jošt¹, A. Lipej¹ in V. Schweiger¹

Numerical analysis of the flow in the tunnel behind Francis turbine

Povzetek. Članek obravnava numerični izračun toka v odvodnem tunelu francisove turbine. Zanimala nas je predvsem višina vode v tunelu. Potrebno je bilo modelirati tok s prosto površino. Izračun je bil narejen s programskim paketom CFX-5.

Abstract. The paper deals with numerical analysis of the flow in a tunnel behind Francis turbine. We were interested in the level of the water in a tunnel. Flow was modeled by free surface model. CFX-5 computer code was used.

1 Uvod

Članek se nanaša na projekt obnove elektrarne z dvema francisovima turbinama. Za obema turbinama sta tunela, ki se nato združita. Tunel, dolg 500 m, se konča z iztokom v morje. Cilj obnove je bil povečati izkoristek in moč, zlasti pri velikih pretokih. Z razvojem novega gonilnika smo povečali izkoristek turbine, hkrati pa se je maksimalni pretok povečal za več kot 15 %. Voda tudi pri povečanem pretoku nikjer ne sme segati do stropa tunela. Numerični izračun je bil narejen za najbolj neugodne razmere, to je za obratovanje pri maksimalnem pretoku in za najvišjo gladino morja.

2 Modeliranje toka s prosto površino

Tok v tunelu za turbino je bil izračunan s programskim paketom CFX-5 z modelom za homogene večfazne tokove [1]. Model večfaznih tokov uporabljamo, kadar imamo več različnih fluidov. Lahko gre za različne spojine (npr. voda, zrak) ali za različne faze iste spojine (voda, vodna para). Fluidi niso premešani na mikroskopski ravni, ampak so delci posameznega fluida večji, med njimi pa vidne meje. Volumski delež posamezne faze je

¹ Turboinštitut, Rovšnikova 7, Ljubljana

$V_\alpha = r_\alpha V$, vseh faz je N_p . Pri tem velja $\sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha = 1$. Pri nehomogenih modelih moramo za vsako fazo posebej rešiti transportne enačbe. Upoštevati je treba sile med njimi in prenos toplote in mase na meji med fazami. Pri homogenem modelu privzamemo, da so hitrostno, tlačno, in ostala polja skupna vsem fluidom.

$$U_\alpha = U, \quad p_\alpha = p, \quad 1 \leq \alpha \leq N_p \quad (1)$$

Pri homogenem modelu ne rešujemo kontinuitetne in transportnih enačb za vsak fluid posebej, ampak rešimo enačbe za mešanico:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = \sum_{\beta=1}^{N_p} \Gamma_{\alpha\beta} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U - \mu (\nabla U + (\nabla U)^T)) = S_M - \nabla p \quad (3)$$

V kontinuitetni enačbi $\Gamma_{\alpha\beta}$ predstavlja masni pretok iz faze β v fazo α . Gostota in viskoznost postaneta spremenljivki, odvisni od deleža posameznih faz v določenem volumnu:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha \rho_\alpha, \quad \mu = \sum_{\alpha=1}^{N_p} r_\alpha \mu_\alpha \quad (4)$$

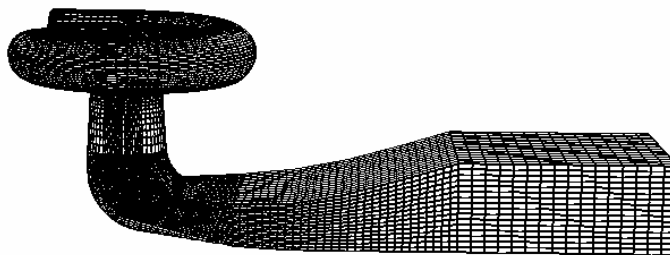
Model prostih površin je poseben primer večfaznega modela. Običajno imamo dva fluida, v našem primeru vodo in zrak. Meja med njima je rezultat izračuna.

3 Izračun toka v turbini in za turbino

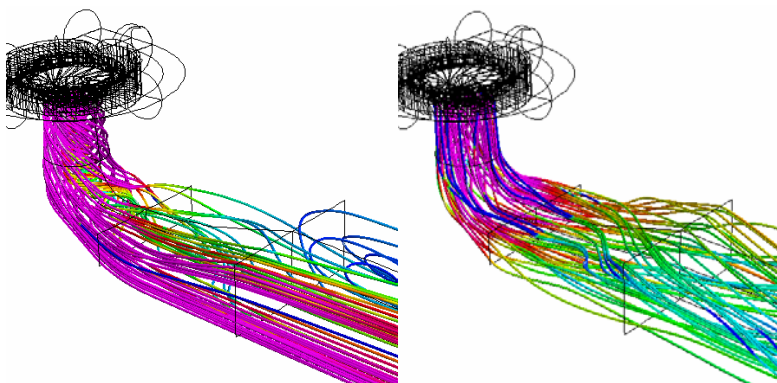
Problem smo reševali z numeričnim izračunom toka v turbini in za turbino. Že v procesu razvoja novega gonilnika je bil izračunan tok v celotni francisovi turbini s starim in novim gonilnikom. Rezultate tega izračuna smo uporabili za vstopne pogoje pri izračunu toka za turbino.

3.1 Izračun toka v turbini

Izračun je bil narejen s programskim paketom CFX-TASCflow na mreži z okoli 1.200.000 elementi (slika 1). Računali smo s standardnim k- ϵ modelom. Rezultati izračuna za pet obratovalnih točk so podrobneje predstavljeni v [2]. Tok v sesalni cevi je odvisen od pogojev na vstopu, ti pa so odvisni od gonilnika in od obratovalne točke. Stari gonilnik je imel optimalno točko obratovanja pri manjših pretokih, pri maksimalnem pretoku pa je bila na izstopu iz gonilnika velika obodna komponenta hitrosti v obratni smeri vrtenja gonilnika. Zato je bil tok v sesalni cevi zelo zvrtničen, večina vode je tekla po desni strani. Novi gonilnik ima optimalno točko obratovanja pri večjih pretokih. Zato je pri maksimalnem pretoku obodna komponenta na vstopu v sesalno cev majhna, razporeditev pretoka po sesalni cevi pa dokaj enakomerna (slika 2).



Slika 1: Mreža za izračun toka v celotni turbini



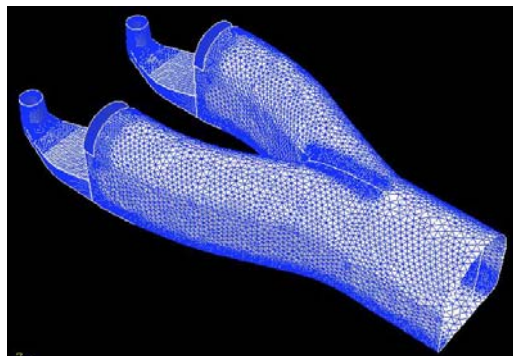
Slika 2: Tokovne razmere v sesalni cevi pri maksimalnem pretoku v primeru starega (levo) in novega gonilnika (desno)

3.2 Izračun toka v sesalnih ceveh in v začetnem delu tunela za turbino

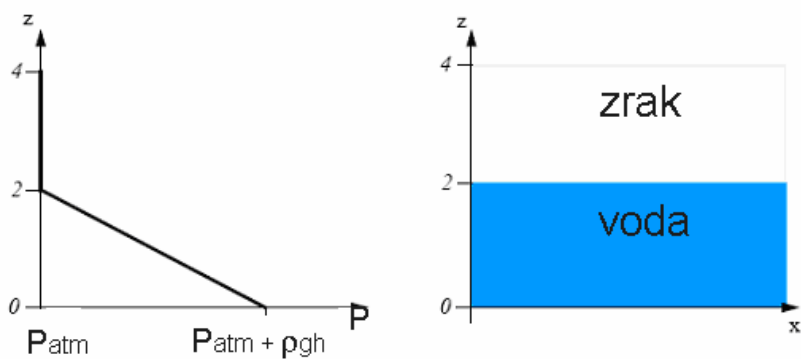
Območje računanja je zajemalo obe sesalni cevi, tunela za njima in krajši del tunela po združitvi (slika 3). Mreža v obeh sesalnih ceveh je enaka kot pri izračunu celotne turbine, mreža v tunelu pa je nestrukturirana. Izračun je bil narejen s programskim paketom CFX-5 s $k-\omega$ SST modelom. Za modeliranje proste površine v tunelu smo uporabili homogeni večfazni model. Na vstopu smo podali vektorje hitrosti iz predhodnega izračuna cele turbine. V zgornjem delu tunela smo predpisali majhen vtok zraka. Na izstopu je predpisana višina gladine vode s pomočjo tlaka. Ta je nad gladino vode konstanten in enak atmosferskemu tlaku, nato pa z globino narašča (slika 4). Predpisana višina vodne gladine na izstopu je zaradi varnosti za 0,5 m višja od maksimalne gladine morja.

S tem izračunom smo hoteli ugotoviti, ali oblika tunela vpliva nazaj na tok v sesalni cevi. Izkazalo se je, da je ta vpliv zanemarljiv. Tok v obeh sesalnih ceveh je enak kot pri izračunu cele turbine, kjer je bil za sesalno cevjo le kratek raven podaljšek. Tudi izračunane izgube so skoraj povsem enake. Tok v desnem in levem kraku tunela pa ni enak. Pogoji na vstopu so za obe sesalni cevi enaki, kraka tunela pa zavijata eden v desno, drugi pa v levo. V desnem

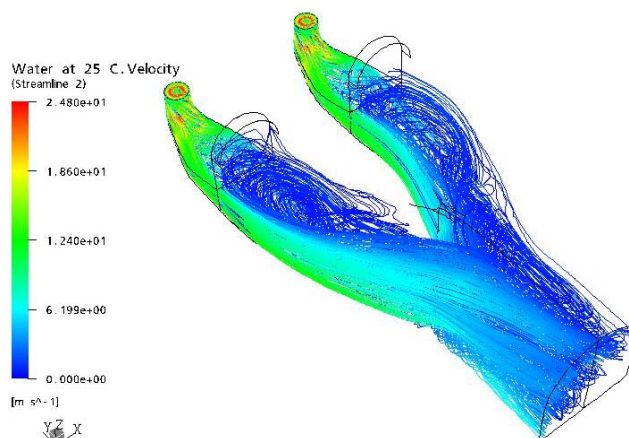
kraku tunela, gledano v smeri toka, nastane večji vrtinec kot v levem kraku (slika 5). Pozneje je bil narejen še nestacionarni izračun. S primerjavo posnetkov z elektrarne in rezultati preračuna vidimo, da se pri numeričnem izračunu pokažejo enake strukture v toku, kot so bile opažene na elektrarni (sliki 6 in 7).



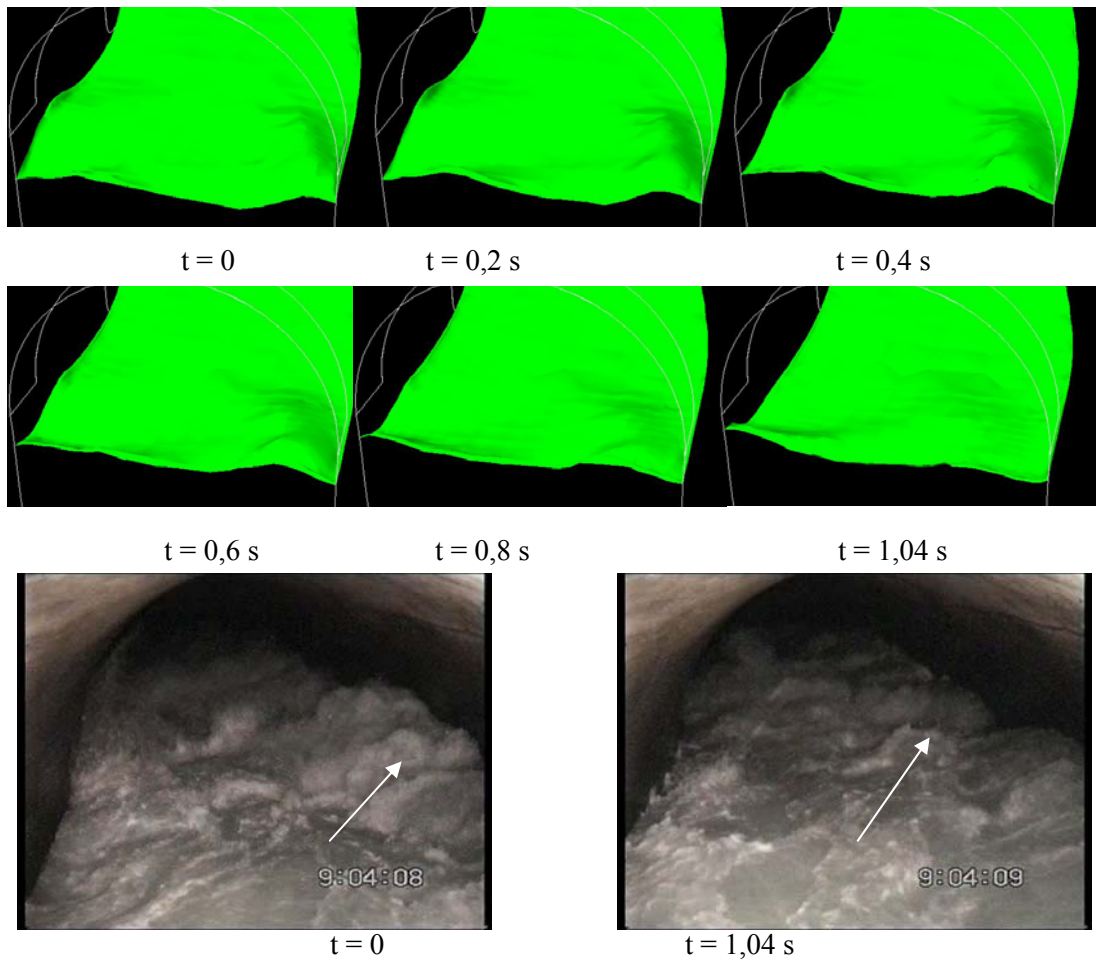
Slika 3: Mreža za izračun toka v obeh sesalnih ceveh in v delu tunela za turbino



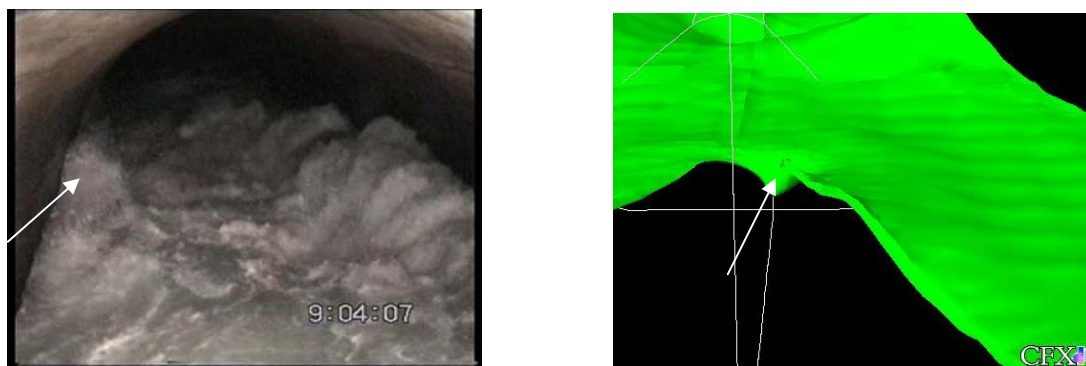
Slika 4: Določanje višine gladine s tlakom [1]



Slika 5: Tokovne razmere v sesalnih ceveh in v delu tunela za turbinama



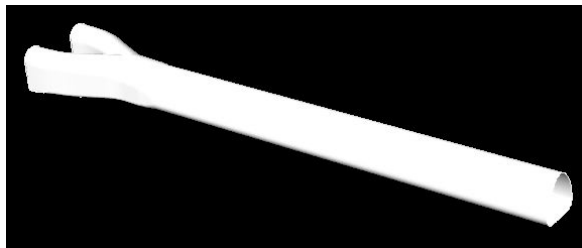
Slika 6: Nastanek in izginjanje vala v desnem kraku tunela – numerični izračun in posnetek z elektrarne



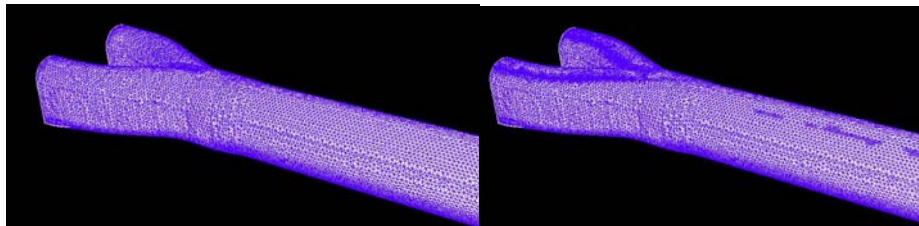
Slika 7: Primerjava struktur v toku med posnetkom na elektrarni in rezultati numeričnega izračuna

3.3 Izračun toka v tunelu za turbino

Glavni del izračuna za turbino pa je zajemal tok od izstopa iz obeh sesalnih cevi pa do konca tunela (slika 8). Sprva smo obravnavali samo prvih 150 m tunela. Da bi robni pogoji na izstopu čim bolj ustrezali realnemu stanju, smo izračun ponovili za 500 m dolg tunel. Pri krajšem tunelu smo imeli nestrukturirano mrežo z 1.154.000 tetradri. Med izračunom smo mrežo še gostili do končnih 3.177.000 elementov (slika 9). CFX-5 omogoča avtomatično zgoščanje mrež tam, kjer so spremembe v toku največje. Žal pa veljajo nekatere resne omejitve: območje mora biti iz enega dela, mreža ne sme vsebovati prizmatičnih elementov, izračun mora biti stacionaren. Daljši tunel ima strukturirano mrežo z okoli 500.000 elementi (slika 10). Na izstopnem preseku sesalne cevi smo podali komponente hitrosti dobljene iz izračuna toka v celi turbini. Enako kot v prejšnjem izračunu je v zgornjem delu tunela predpisan majhen vtok zraka, na izstopu pa je predpisana višina gladine vode s pomočjo tlaka.



Slika 8: Tunel za turbino - območje računanja



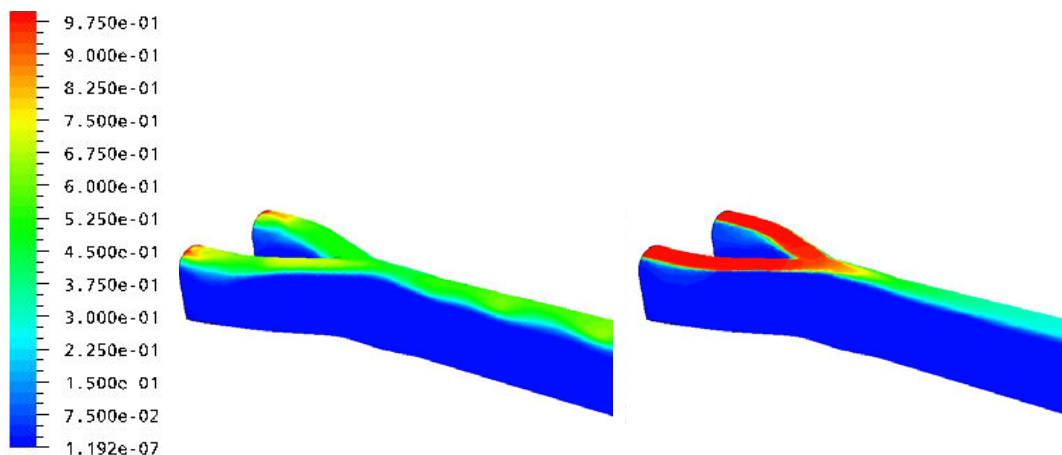
Slika 9: Osnovna računrska mreža (1.154.000 elementov) in avtomatično zgoščena mreža (3.177.000 elementov)



Slika 10: Tunel, dolg 500 m

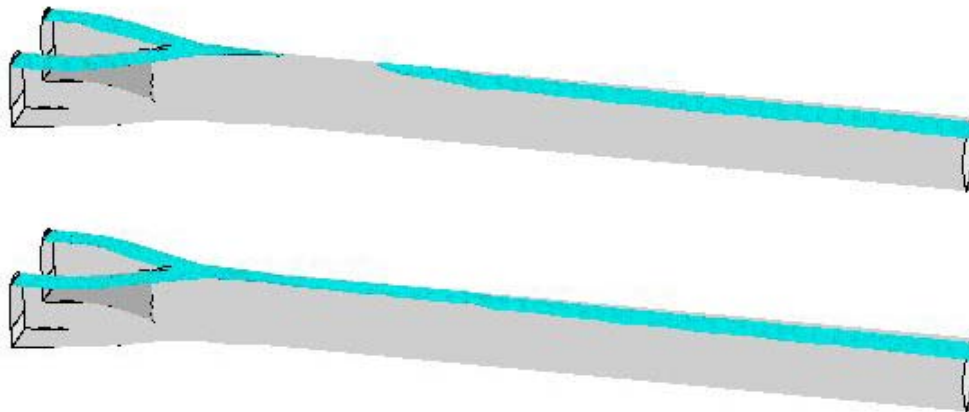
Glavni rezultat preračuna je višina vodne gladine v tunelu. Žal pa naše mreže niso dovolj goste, da bi dobili ostro mejo med vodo in zrakom. Na sliki 7 vidimo, da je mreža zgoščena

predvsem v vstopnem delu. Tam je tudi meja med vodo in zrakom dokaj ostra (slika 11). V nadaljnjem delu tunela pa z avtomatičnim zgoščanjem nismo mogli nadaljevati zaradi omejenih računalniških zmogljivosti in predolghih računskih časov. Zato je v nadaljevanju kot gladina narisana površina, kjer je 25 % zraka in 75 % vode.



Slika 11: Porazdelitev vode in zraka na redki mreži (levo) in na zgoščeni mreži (desno)
(rdeča barva – 100 % zrak, modra barva 100 % voda)

Namen teh izračunov je bil predvsem ugotoviti, ali voda kje povsem zapre tunel. Pokazalo se je, da so zaradi bolj enakomernega toka na izstopu iz sesalne cevi razmere v tunelu v primeru novega gonilnika ugodnejše. Višina vode je skoraj povsod nižja in nikjer ne sega do stropa tunela. V primeru starega gonilnika pa nivo vode v območju, kjer se presek kanala zmanjša, naraste do stropa tunela (slika 12).



Slika 12: Gladina vode v tunelu za turbino v primeru starega gonilnika (zgoraj) in v primeru novega gonilnika (spodaj)

Podobni so tudi rezultati preračuna toka v dolgem tunelu. V primeru starega gonilnika na dveh mestih v tunelu voda sega do stropa, pri novem gonilniku pa do tega ne pride. Izračun smo ponovili še s k-ε modelom z upoštevanjem hrapavosti sten. Izračunana gladina vode je zaradi hrapavosti v obeh primerih nekoliko višja, a v primeru novega gonilnika še vedno nikjer ne sega do stropa tunela.

4 Zaključek

Programski paket CFX-5 omogoča računanje toka s prostimi površinami. Naš primer je dokaj zahteven zaradi velikega območja računanja. Glede na dobljene rezultate vidimo, da je računska mreža preredka za ostro mejo med vodo in zrakom. Zato natančne višine vodne gladine ni mogoče odčitati iz numeričnih rezultatov. Uporaben zaključek numerične analize toka je predvsem, da razmere v primeru povečanega pretoka pri novem gonilniku niso kritične, oziroma so boljše kot pri starem gonilniku. Z razvojem novega gonilnika, ki ima višji izkoristek predvsem pri velikih pretokih, smo hkrati izboljšali tudi tokovne razmere v sesalni cevi in tunelu.

Literatura

[1] CFX 5.6, Solver Theory, 2003.

[2] D. Jošt, A. Lipej, P. Mežnar, V. Schweiger, *Izračun toka v kaplanovi, cevni, francisovi in reverzibilni turbini*, Zbornik del Kuhljevi dnevi '03, str. 103-110, 2003

[3] D. Jošt, A. Lipej, V. Schweiger, *Flow in Draft Tube and Tunnel of High Head Francis Turbine*, 11th International Meeting of the Work Group on The Behaviour of Hydraulic Machinery under Steady Oscillatory Conditions, Stuttgart, Germany, 2003.



Izboljšana simetrična shema zmanjšanja totalne variacije

T. Katrašnik¹ in F. Trenc¹

Improved symmetric total variation diminishing scheme

Povzetek. Predstavljena je izboljšana shema zmanjšanja totalne variacije (TVD) s simetrično bazo. Izboljšana shema, ki temelji na fizikalno relevantnih predpostavkah, omogoča natančnejšo simulacijo dinamike plinov kot do sedaj objavljene sheme. Prikazana je aplikacija izboljšane simetrične sheme zmanjšanja totalne variacije na dvostopenjski metodi Lax-Wendroff. Natančnost izboljšane metode je potrjena z rezultati numeričnih eksperimentov.

Abstract. New improved symmetric total variation diminishing (TVD) scheme is presented. Improved scheme, which is based on physically relevant assumptions enables simulation of gas dynamics processes with higher accuracy than other previously published schemes. New improved scheme is applied on two-step Lax-Wendroff method. Accuracy of improved scheme is verified with the results of numerical experiment.

1 Uvod

Tok plina v polnilnih in predvsem v izpušnih zbiralnikih motorjev z notranjim zgorevanjem je izrazito nestacionaren. V stacionarnem delovanju motorja je dogajanje v zbiralnikih periodično s periodo, ki jo določa taktnost motorja in število valjev povezanih s posameznim zbiralnikom. V prehodnem režimu delovanja motorja pa je dogajanje neperiodično. Kompleksnost simulacije celotnega motorja in z njo povezana časovna zahtevnost dajeta prednost uporabi enodimenzionalnih modelov za popis procesov v zbiralnikih motorja pred tridimenzionalnimi modeli za simulacijo delovanja motorja v stacionarnem delovnem režimu [1]. Uporaba enodimenzionalnih modelov pa je neizogibna za simulacijo delovanja motorja v prehodnem režimu [1,2].

V nadaljevanju bodo predstavljene enodimenzionalne Eulerjeve enačbe, razširjene z enačbami koncentracij posameznih komponent. Že bežen pogled na sestavo in temperaturo plinov v polnilnem in izpušnem zbiralniku nam pove, da je nekorektno uporabljati enake fizikalne konstante lastnosti plinov za popis dogajanja v polnilnem in izpušnem zbiralniku. Temperatura in koncentracija plinov pa se spreminjata tudi v odvisnosti od delovnega režima motorja.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Enodimenzionalne enačbe običajno rešujemo z numeričnimi shemami, ki temeljijo na diskretni integralni obliki ohranitvenih enačb [1]. Proces diskretizacije vnaša v rešitev nefizikalne pojave, kot so numerična disipacija in disperzija ter fazni zamik. V splošnem je znano [1], da so metode s sodim redom zaokrožitvene napake disipativne, metode z lihim redom zaokrožitvene napake pa disperzne. Harten [3] je dokazal, da monotone sheme aplicirane na ohranitvenem zakonu vedno konvergirajo k fizikalno relevantni rešitvi. Iz Godunovega teorema pa sledi, da imajo monotone sheme največ prvi red natančnosti [1,4]. Boris in Book [5] ter van Leer [6] so predlagali uporabo nelinearnih diferenčnih shem, ki zagotavljajo doseganje zadostne natančnosti rezultatov ob hkratni fizikalni relevantnosti rešitev. Osnovno vodilo omenjenega pristopa je uporaba shem višjega reda, pri čemer pa se red metode lokalno znižuje v odvisnosti od gradienta podatkov. Hirsch [7] je pokazal, da Eulerjeve enačbe ne dovoljujejo nastanka novih ekstremov v časovnem razvoju. Toro [8] je dokazal, da monotone sheme ne producirajo novih ekstremov, kar pomeni, da je rešitev vezana med minimumom in maksimumom podatkov. Princip zmanjšanja totalne variacije je po Toru [8] definiran kot: 1). ne sme se pojaviti nov lokalni ekstrem in 2). vrednost lokalnega minimuma se ne sme zmanjšati ter vrednost lokalnega maksimuma ne povečati.

Omejevalci toka, katerih naloga je zniževanje reda shem višjega reda v okolici velikih gradientov, bi naj zagotovili skladnost numeričnih shem z značilnostmi Eulerjevih enačb.

2 Enačbe enodimenzionalnega toka

Izpeljane bodo enačbe enodimenzionalnega nevizkoznega toka plina po ceveh. Omenjena predpostavka zahteva, da je plin dovolj redek, da je dovoljeno zanemariti medmolekulske interakcije. Bulaty in Niessner [9] sta pokazala, da so v ceveh zbiralnikov motorjev z notranjim zgorevanjem členi, ki so posledica viskoznih sil in longitudinalne toplotne prevodnosti, nekaj redov velikosti manjši od členov, ki jih prinaša trenje s stenami in prestop toplote iz plina na stene zbiralnika. Enačbe izpeljane v nadaljevanju veljajo tudi za cevi z longitudinalno spremenljivim presekom. Pri tem se je treba zavedati omejitve, da so enačbe veljavne le za zadovoljivo zmerne gradientne preseka, pri katerih ne prihaja do separacije toka, ki prav tako omejuje uporabo enačb 1D enačb v ceveh z majhnim krivinskim radijem.

Vodilne enačbe enodimenzionalnega nevizkoznega stisljivega toka plina v ceveh s spremenljivim presekom in upoštevanjem trenja s stenami ter prestopa toplote na stene, razširjene z ohranitvenimi zakoni koncentracij posameznih komponent, zapišemo v obliki

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{W})}{\partial x} + \bar{C}(\bar{W}) = 0, \quad (1)$$

kjer je

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} \rho F \\ \rho u F \\ \rho e_0 F \\ \rho F \bar{Y} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}(\bar{W}) = \begin{bmatrix} \rho u F \\ \rho(u^2 + p)F \\ \rho u h_0 F \\ \rho u F \bar{Y} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}(\bar{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p \frac{dF}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho G F \\ -\rho q F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

in

$$e_0 = e + \frac{1}{2}u^2, \quad h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}, \quad G = \frac{1}{2}u|u|f \frac{4}{D}, \quad q = \frac{2fu}{D}c_p(T_w - T_g) \quad (3)$$

ter D premer, e specifična notranja energija, F površina, f koeficient trenja, h specifična entalpija, u hitrost in Y masni delež posamezne komponente; indeks g predstavlja plin in w steno.

Ohranitveni zakoni koncentracij posameznih komponent so izpeljani s predpostavko, da je difuzija zanemarljiva. Predpostavka je upravičena za tokove z velikim Reynoldsovim številom, kar je značilno za tokove v zbiralnikih motorjev z notranjim zgorevanjem. Opis algoritma izračuna temperature in tlaka iz vektorja stanja \bar{W} ter konstrukcije vektorjev \bar{F} in \bar{C} ni predmet tega članka in se nahaja v [2]. Enačbe (1-2) so zapisane v konservativni obliki, saj so izpeljane direktno iz integralnih ohranitvenih enačb za maso, gibalno količino, energijo in koncentracijo apliciranih na fiksni kontrolni prostornini. Integralne enačbe ohranitvenih zakonov aplicirane na kontrolni prostornini diskretiziramo v prostoru in jih nato rešujemo z diferenčnimi metodami. Takšen pristop zagotavlja ohranitev fizikalnih količin tudi v prisotnosti udarnih valov, saj je izpolnjen Rankine-Hugoniotov pogoj, kar pomeni, da za rešitev diferencialne enačbe zadostujejo šibke rešitve.

Za popis dogajanja v polnilnih in izpušnih zbiralnikih je bila uporabljena dvostopenjska metoda Lax-Wendroff, ki omogoča zelo enostavno implementacijo izvornega člana, hkrati pa je tudi simetrična. Slednje dejstvo je pomembno predvsem za hitrost simulacije, saj ni treba reševati Riemannovega problema. Sledi

$$\bar{W}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\bar{W}_{i+1}^n - \bar{W}_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\bar{F}_{i+1}^n - \bar{F}_i^n) - \frac{\Delta t}{4}(\bar{C}_{i+1}^n - \bar{C}_i^n) \quad (4)$$

in

$$\bar{W}_i^{n+1} = \bar{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\bar{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2}(\bar{C}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{C}_{i-1/2}^{n+1/2}). \quad (5)$$

4 Princip zmanjšanja totalne variacije

Totalna variacija za diskretne probleme je v določenem časovnem koraku definirana kot $TV(w^n) = \sum_i |w_{i+1}^n - w_i^n|$ [1], podatki pa izpolnjujejo kriterij zmanjšanja totalne variacije, če $TV(w^{n+1}) \leq TV(w^n)$.

Z uporabo kriterija TVD je možno konstruirati sheme višjega reda, katerih koeficienti so odvisni od podatkov in izpolnjujejo zahtevo po zmanjšanju totalne variacije. Takšne sheme konvergirajo k fizikalno relevantni rešitvi.

4.1 Davisov princip TVD

Davis [10,11] je razvil omejevalec toka s simetrično bazo, ki omogoča implementacijo TVD principa v simetrično shemo. Enako kot pri simetričnih shemah za reševanje parcialnih

diferencialnih enačb tudi simetrična baza omejevalca toka bistveno poenostavi in pospeši simulacijo, saj ni treba poznati smeri toka, kar daje prednost uporabi Davisove sheme v primerjavi z drugimi znanimi nesimetričnimi shemami (upwind schemes).

Na tem mestu so podane le enačbe, ki so bistvene za razumevanje Davisovega TVD principa (podrobnejše informacije se nahajajo v [10,11]). Z aplikacijo Davisovega principa TVD na dvostopenjsko shemo Lax-Wendroff ostane prvi korak (en. 4) nespremenjen, za drugi korak metode (en. 5) pa pridelamo [10,11]

$$\begin{aligned} \bar{W}_i^{n+1} = & \bar{W}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{2} (\bar{C}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{C}_{i-1/2}^{n+1/2}) \\ & + [G_{i+1/2}^+(r_i^+) + G_{i+1/2}^-(r_{i+1}^-)] \Delta \bar{W}_{i+1/2}^n - [G_{i-1/2}^+(r_{i-1}^+) + G_{i-1/2}^-(r_i^-)] \Delta \bar{W}_{i-1/2}^n \end{aligned}, \quad (6)$$

kjer je

$$\Delta \bar{W}_{i+1/2}^n = \bar{W}_{i+1}^n - \bar{W}_i^n, \quad (7)$$

$$G_i^\pm(r_i^\pm) = \frac{1}{2} C(v) [1 - \phi(r_i^\pm)], \quad C(v) = \begin{cases} v(1-v), & v \leq 0.5 \\ 0.25, & v > 0.5 \end{cases} \quad (8)$$

$$v = \max_k |\lambda_k| \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \max_k |\lambda_k| = |u| + a, \quad \phi(r) = \begin{cases} \min(2r-1), & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

in

$$r_i^+ = \frac{[\Delta \bar{W}_{i-1/2}^n, \Delta \bar{W}_{i+1/2}^n]}{[\Delta \bar{W}_{i+1/2}^n, \Delta \bar{W}_{i+1/2}^n]}, \quad r_i^- = \frac{[\Delta \bar{W}_{i-1/2}^n, \Delta \bar{W}_{i+1/2}^n]}{[\Delta \bar{W}_{i-1/2}^n, \Delta \bar{W}_{i-1/2}^n]}, \quad (10)$$

kjer [.,.] predstavlja skalarni produkt vektorjev.

Predstavljeni TVD princip je empirično razširjen model omejevalca toka, izpeljan za enačbo linearne advekcije na sistem enačb (1) [10,11].

4.2 Izboljšan princip TVD

V nadaljevanju bo predstavljen izboljššan inovativni pristop TVD algoritma, ki zagotavlja boljšo ohranitev mase in natančnejši popis nezveznosti, hkrati pa ima tudi smiselno fizikalno ozadje - pri vsakem stacionarnem toku po cevi se mora ohranjati masa, v primeru toka brez trenja in prestopa toplote pa tudi totalna entalpija.

Prvi korak k izpolnitvi zgornje zahteve dosežemo tako, da enačbo (7) nadomestimo z

$$\Delta \bar{W}_{i+1/2}^n = \begin{bmatrix} (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n) F_{i+1/2} \\ \rho_{i+1}^n u_{i+1}^n F_{i+1} - \rho_i^n u_i^n F_i \\ (\rho_{i+1}^n e_{0i+1}^n - \rho_i^n e_{0i}^n) F_{i+1/2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Zapis v obliki (11) zagotavlja mnogo boljšo ohranitev mase med koncema cevi, saj nova druga komponenta vektorja $\Delta \bar{W}$ eksplicitno ohranja maso.

Primerjava velikosti komponent vektorja \vec{W} , zapisanega v enotah SI in izračunanega v pogojih, ki veljajo v zbiralnikih motorja z notranjim zgorevanjem, pokaže, da je tretja komponenta dva reda velikosti večja od druge, ta pa dva reda velikosti večja od prve. Iz opisanega sledi, da ima na vrednosti r_i^+ in r_i^- v enačbah (10) največji vpliv tretja komponenta vektorja $\Delta\vec{W}$. Glede na omenjeno dejstvo in dejstvo, da se pri stacionarnem toku brez trenja in prestopa toplote ohranja totalna entalpija, prepisemo enačbi (10) v obliko

$$r_i^+ = \frac{\left[\tilde{h}_{0_{i-1/2}}^n, \tilde{h}_{0_{i+1/2}}^n \right]}{\left[\tilde{h}_{0_{i+1/2}}^n, \tilde{h}_{0_{i+1/2}}^n \right]}, \quad r_i^- = \frac{\left[\tilde{h}_{0_{i-1/2}}^n, \tilde{h}_{0_{i+1/2}}^n \right]}{\left[\tilde{h}_{0_{i-1/2}}^n, \tilde{h}_{0_{i-1/2}}^n \right]}, \quad (12)$$

kjer je

$$\Delta\tilde{h}_{0_{i+1/2}}^n = \rho_{i+1}^n u_{i+1}^n h_{0_{i+1}}^n - \rho_{i+1}^n u_{i+1}^n h_{0_{i+1}}^n. \quad (13)$$

Davisov TVD princip in izboljšan TVD princip sta izpeljana za sistem Eulerjevih enačb. Za uporabo TVD principa na enačbah, ki upoštevajo spremenljive koncentracije plinov, pa je predstavljeni TVD algoritem treba ponovno intuitivno razširiti. Inovativen pristop uporabe principa TVD na Eulerjevih enačbah, razširjenih z ohranitvenimi zakoni koncentracij posameznih komponent, je podrobno razložen v [2].

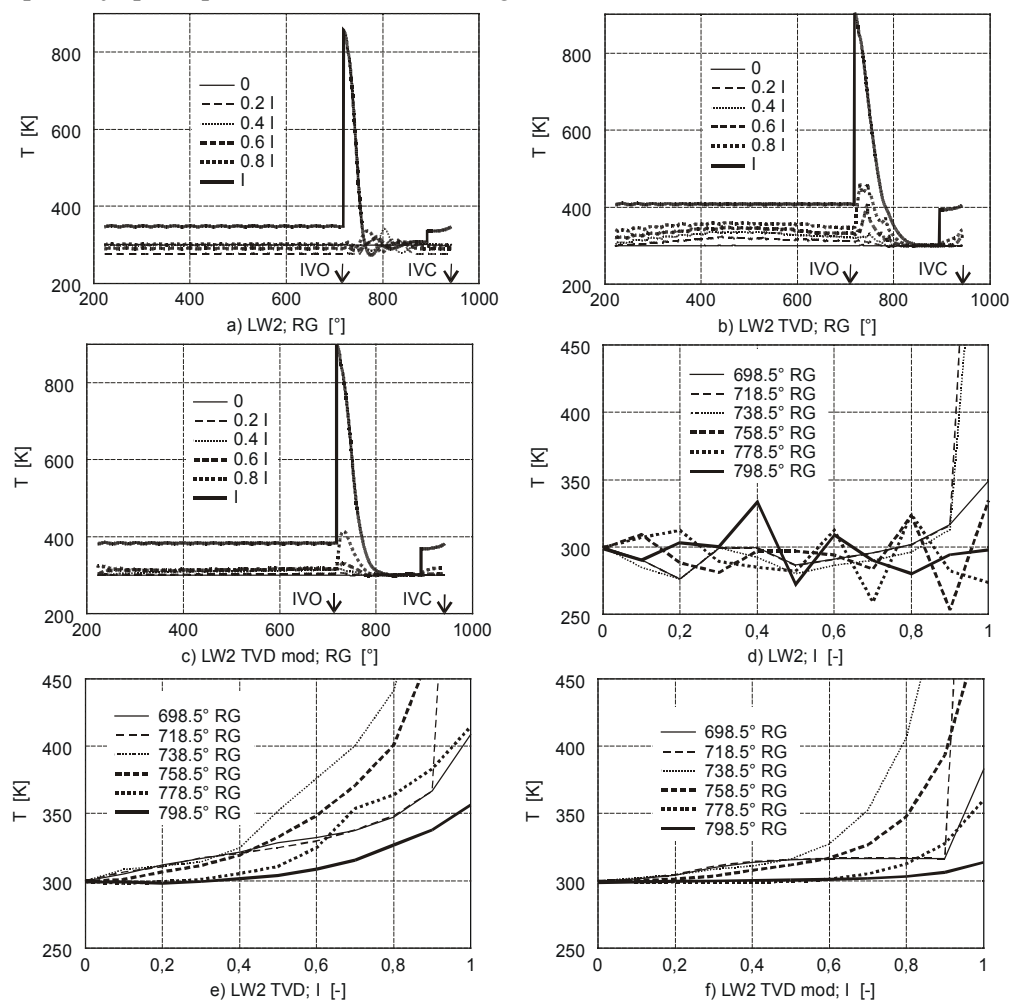
5 Numerični eksperiment 1D metod

Primerjani bodo rezultati dvostopenjske metode Lax-Wendroff (LW2), dvostopenjske metode Lax-Wendroff, pri kateri je bil uporabljen Davisov TVD princip (LW2 TVD) ($\Delta\vec{W}$ je izračunan z en. (11), saj zapis z en. (7) implicitno uvaja generator neohranitve mase za cevi s spremenljivim presekom), in dvostopenjske metode Lax-Wendroff, pri kateri je bil uporabljen izboljšan TVD princip (LW2 TVD mod).

V [2] je predstavljenih mnogo primerjav zgoraj navedenih metod, ki potrjujejo prednosti izboljšane metode TVD, v nadaljevanju pa bosta predstavljena le dva značilna primera.

Prvi primer simulacije toka po cevi s spremenljivim presekom predstavlja zahteven test za natančnost simulacijske metode. Primerjane bodo razlike v masnem toku med koncema cevi po 0.2s (vzpostavljene stacionarne razmere) za tok brez trenja in prestopa toplote ter začetne pogoje: $p_{amb}=101325$ Pa, $p_0=150000$ Pa, $T_0=293$ K, $l=1$ m, $m=20$, $\kappa=1.4$ in $f=0$, kjer je m število mrežnih točk, indeks 0 pa predstavlja začetno stanje. Metoda LW2 TVD ($\Delta\dot{m}=4.99E-2$) ohranja masni tok nekoliko slabše kot metoda LW2 ($\Delta\dot{m}=1.65E-2$), kar je predvsem posledica definicije r_i^+ in r_i^- (en. 10), kjer ima največji vpliv na upravljanje algoritma TVD notranja energija, ki pa se za stacionarni tok ne ohranja vzdolž cevi spremenljivega preseka. To je tudi glavni razlog za mnogo boljše ohranitev masnega toka metode LW2 TVD mod ($\Delta\dot{m}=3.89E-3$), kjer v definiciji r_i^+ in r_i^- (en. 12) nastopa totalna entalpija. Metoda LW2 TVD mod za predstavljen testni primer ohranja masni tok boljše od drugih metod, predstavljenih v literaturi. Liu in soavtorji [12] so predlagali 'izboljšano' metodo in za predstavljen testni primer dosegli ohranitev masnega toka $2.49E-2$. Winterbone in Pearson [1] sta izvedla podoben test kot Liu in soavtorji [12], nista pa navedla niti

natančnih začetnih pogojev niti uporabljene oblike ohranitvenih zakonov, ter doseglja z aplikacijo principa TVD ohranitev masnega toka $6.3E-3$.



Slika 1: Potek temperature v polnilni cevi za različne 1D simulacijske metode

V nadaljevanju bodo primerjani rezultati simulacije poteka temperature v polnilnem zbiralniku enovaljnega motorja. Simulacija delovanja enovaljnega motorja omogoča proučevanje značilnosti numeričnih metod z robnimi pogoji, kakršni vladajo v motorju, hkrati pa se zaradi enostavne zgradbe motorja ne pojavljajo interakcije z drugimi komponentami v motorju, kar omogoča boljši pregled in interpretacijo rezultatov.

Kot enovaljni motor je bil uporabljen en valj STEYRjevega motorja družine M1, ki jih za raziskave uporabljamo v laboratoriju in je podrobneje predstavljen v [2]. Dolžina polnilne cevi je 0.2m, polnilni ventil pa se odpre 2° RG pred zgornjo mrtvo lego bata (na slikah: IVO 718° RG) in zapre 42° RG po spodnji mrtvi legi bata (na slikah: IVC 942° RG), zgornja mrtva lega bata pa ustreza 360° RG in 720° RG.

V večini motorjev se v začetku ali/in na koncu polnilnega takta pojavi povratni tok plinov iz valja v polnilno cev. Omenjen povratni tok predstavlja skok v koncentraciji in temperaturi oziroma entropiji in predstavlja strog test za stabilnost sheme. V nadaljevanju bodo natančneje analizirani rezultati simulacije za polnilno cev ($m=10$, $x=0$ se nahaja na odprtem koncu (vtok v polnilno cev) in $x=l$ pri polnilnem ventilu).

Iz poteka temperature za shemo LW2 je razvidno, da metode drugega reda v okolici nezveznosti zaradi disperzije producirajo nefizikalne rezultate, kar je posledica visokofrekvenčne disperzne ali fazne napake [13]. Omenjeni pojav je viden kot prepletanje krivulj temperature metode LW2 (sl. 1a)) v različnih točkah, izrisanih v časovni domeni, kar je fizikalno nesmiselno, saj se plin in posledično tudi temperatura v enodimenzionalni neviskozni aproksimaciji po cevi prenaša z advekcijo, kar je lepo razvidno iz slik LW2 TVD (sl. 1b)) in LW2 TVD mod (sl. 1c)). Opisani pojav je nazorneje prikazan na sliki 1d), kjer je izrisan potek temperatur po odprtju polnilnega ventila v prostorski domeni za časovne intervale 20° RG. Iz slike LW2 (sl. 1d)) je lepo razvidno nefizikalno prepletanje krivulj temperature, kar je posledica fazne napake, in fizikalno smiseln potek advektivnega toka metode LW2 TVD mod (sl. 1f)). Iz poteka temperatur za metodi LW2 TVD in LW2 TVD mod je razvidno, da zgolj razlika v definiciji r_i^+ in r_i^- privede do velike razlike v kvalitativnem popisu temperature, ki je nedvomno boljša za shemo LW2 TVD mod, saj se v rezultatih te sheme ne pojavijo visokofrekvenčna nihanja, ki so posledica delovanja omejevalca toka. Prav tako pa je za metodo LW2 TVD mod značilen tudi natančnejši popis nezveznosti (sl. 1c) in f)) kot za metodo LW2 TVD (sl. 1b) in e)).

Opisano obnašanje metode LW2 lahko pojasnimo z von Neumannovo metodo analize stabilnosti. Metoda LW2, ki ima natančnost drugega reda v prostoru in času, v okolici nezveznosti producira oscilacije zaradi visokofrekvenčne disperzne ali fazne napake, ki za velike fazne kote (visoke frekvence) in $CFL^2 < 0.5$ limitira proti 0, za velike fazne kote in $CFL^2 > 0.5$ pa proti π [13]. Nezveznosti vsebujejo tudi visokofrekvenčne komponente, ki v opisanem primeru zaradi $CFL^2 < 0.5$ zaostajajo, se separirajo in producirajo oscilacije. Oscilacije se pojavijo kljub dejstvu, da je disipacijska napaka ali modulus pomnožitvenega faktorja manjši od 1 za fazne kote blizu π [13].

Kljub fizikalno relevantnejšemu popisu pa metodi LW2 TVD in LW2 TVD mod slabše ohranjata maso med obema koncema cevi, kar je posledica delovanja principa TVD. Osher in Chakravarthy [14] sta pokazala, da TVD sheme drugega reda degenerirajo v prvi red v okolici ekstremov. Iz primerjave rezultatov metod LW2 TVD in LW2 TVD mod je razvidno [2], da z večanjem števila točk ob stalni fizikalni smiselnosti rezultatov le-ti konvergirajo k pravilni rešitvi, saj je za konstrukcijo rešitve na voljo večje število harmonikov, medtem ko princip TVD preprečuje nastanek nefizikalnih oscilacij. Nasprotno pa metoda LW2 ne glede na število mrežnih točk producira oscilacije v temperaturi in gostoti ter tako tudi za velik m ne konvergira k fizikalno konsistentni rešitvi. Napaka neohranitve mase metode LW2 TVD mod je, neodvisno od števila mrežnih točk, približno dva krat manjša od napake metode LW2 TVD.

6 Sklep

Iz prikazanih rezultatov je razvidno, da je uporaba principa TVD neizogibna za izračun fizikalno konsistentnih rešitev z numeričnimi shemami višjega reda. Iz navedenih rezultatov sklepamo, da predstavljena izboljšana shema TVD zagotavlja boljšo ohranitev mase in natančnejši popis nezveznosti kot do sedaj objavljene sheme.

Literatura

- [1] D. E. Winterbone in R. J. Pearson, *Theory of Engine Manifold Design*, Professional Engineering Publishing Limited, UK, 2000.
- [2] T. Katrašnik, *Numerično modeliranje prehodnih pojavov v tlačno polnjenem dizelskem motorju*, Doktorska disertacija, Dr 278, UL Fakulteta za strojništvo, 2004.
- [3] A. Harten, J. M. Hyman in P. D. Lax, *On finite.difference approximations and entropy conditions for shocks*, Commun. Pure. Appl. Math., 19, 297-322, 1976.
- [4] S. K. Godunov, *A difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations*, Mat. Sb., 47, 271-306, 1959.
- [5] J. P. Boris in D. L. Book, *Flux-corrected transport, I. SHASTA – s fluid transport algorithm that works*, J. Comp. Phys., 11, 38-69, 1973.
- [6] B. van Leer, *Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity*, Lecture note in physics, 18 (Springer Verlag, New York), 1973.
- [7] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. Vol. 2-Computational methods for inviscid and viscous flows*, John Wiley and Sons, 1994.
- [8] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A practical introduction*, Springer-Verlag, 1992.
- [9] T. Bulaty in H. Niessner, *Calculation of 1-D unsteady flows in pipe systems of IC engines*, ASME Annual Winter Meeting, New Orleans, 1984.
- [10] S. F. Davis, *TVD finite difference scheme and artificial viscosity*, NASA CR 172373, 1984.
- [11] S. F. Davis, *A simplified TVD finite difference scheme via artificial viscosity*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8, 1-18, 1987.
- [12] J. Liu, N. Schron, C. Schernu in L. Peng, *Comparisons Studies on the Method of Characteristics and Finite Difference Methods for One-Dimensional Gas Flow through IC Engine Manifold*, SAE paper 960078, 1996.
- [13] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows. Vol. 1-Fundamentals of numerical discretization*, John Wiley and Sons, 1994.
- [14] S. Osher in S. Chakravarthy, *High resolution schemes and the entropy condition*, SIAM J. Numer. Anal., 21, 5, 955-984, 1984.



Optimiranje oblike lupinastih konstrukcij

M. Kegl¹ B. Brank² in M. Jaklič²

Shape optimization of shell structures

Povzetek. Članek predstavlja pristop k optimalnemu projektiranju elastičnih, statično obremenjenih lupin. Oblika in vpetje lupine, kakor tudi njena debelina, so odvisni od spremenljivih parametrov – projektnih spremenljivk. Spremenljivo obliko in vpetje konstrukcije smo dosegli s tehniko projektnih elementov in uporabo ustreznega projektnega elementa – racionalne Bézierjeve ploskve pravokotnega tipa. Uporabljeni končni element je geometrijsko linearen 4-vozliščni končni element. Optimizacijsko nalogo smo formulirali v obliki standardnega problema matematičnega programiranja. Ker so projektne spremenljivke zvezne, smo rešitve optimizacijske naloge iskali z uporabo gradientne optimizacijske metode. Za ilustracijo omenjene teorije je predstavljen in rešen optimizacijski problem minimizacije deformacijske energije armiranobetonske lupine.

Abstract. The paper describes an approach to optimization of elastic statically loaded shells. The shape of the shell and the support locations as well as its thickness may depend on design variables. Variable structural shape and support locations are addressed by employing the design element technique and an appropriate design element - the rational Bézier surface of a rectangular type. A geometrically linear 4-noded finite element is employed. The optimization problem is defined in a form of a general nonlinear problem of mathematical programming. Since the design variables are all assumed to be continuous, a gradient based optimization procedure is employed. A numerical example of strain energy minimization of a concrete shell is presented to illustrate the use of the proposed approach.

1 Uvod in opis uporabljenega modela lupin

Lupinaste konstrukcije lahko prenašajo velike obtežbe preko velikih razponov ob minimalni porabi konstrukcijskega materiala, če so sprojektirane tako, da se v lupini aktivira skoraj čisto membransko napetostno stanje pri najpomembnejših obtežnih primerih - lep takšen zgled so armiranobetonske lupine H. Islerja [1]. V tem kontekstu igra optimalna oblika lupine ključno vlogo. V tem delu predstavljamo pristop k numeričnemu iskanju optimalne oblike lupinaste konstrukcije, katerega glavni značilnosti sta: (a) uporaba projektnega elementa za opis oblike konstrukcije, (b) hkratna optimizacija oblikovnih in dimenzijskih količin: optimizacija oblike se namreč vrši hkrati z optimizacijo po konstrukciji spreminjajoče se debeline.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Model lupin, ki ga uporabimo, velja za linearno elastične materiale in za male deformacije ter temelji na t.i. Reissner-Mindlinovi kinematiki. Krajevni vektor poljubnega delca lupine je podan kot

$$\mathbf{x}(\mathbf{s}, s) = \mathbf{r}(\mathbf{s}) + s \mathbf{n}(\mathbf{s}), \quad \text{kjer je} \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2) \in U, \quad s \in \left\{ \frac{-t(\mathbf{s})}{2}, \frac{t(\mathbf{s})}{2} \right\}, \quad |\mathbf{n}(\mathbf{s})| = 1 \quad (1)$$

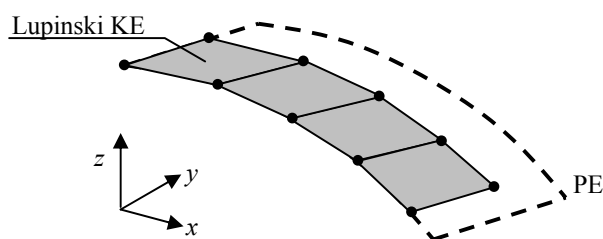
V gornji enačbi predstavlja \mathbf{r} središčno ploskev lupine, \mathbf{n} je polje enotskih normal na to ploskev, t je debelina, s_1 in s_2 sta krivočrtni koordinati, ki parametrizirata središčno ploskev, s pa je ravna koordinata v smeri debeline. Ob predpostavki, da so pomiki središčne ploskve \mathbf{v} in zasuki normale $\Delta \mathbf{n}$ medsebojno neodvisni, lahko izpeljemo linearne membranske, upogibne in prečne strižne specifične deformacije, $\varepsilon_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha$. Nadalje lahko preko enačb snovi izrazimo membranske sile, upogibne momente in prečne strižne sile $n^{\alpha\beta}, m^{\alpha\beta}, q^\alpha$. Po diskretizaciji šibke oblike ravnotežnih enačb

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{v}, \Delta \mathbf{n}) = \int_A \left(n^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + q^\alpha \delta \gamma_\alpha \right) j ds_1 ds_2 - G_{ext}(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{n}, t) = 0 \quad (2)$$

s končnimi elementi (KE), dobimo linearen sistem enačb $\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$, ki predstavlja enačbo konstrukcije.

2 Opis geometrije lupine (in pripadajoče mreže KE) s projektnim elementom

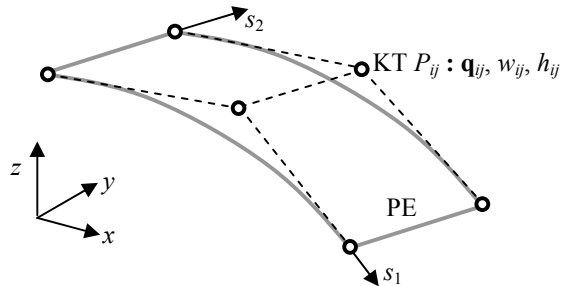
Pri uporabi tehnike projektnih elementov [2], opišemo geometrijo osnovne (t.j. središčne) ploskve lupine z enim ali z več projektnimi elementi (PE). PE so lahko zelo različni; v nadaljevanju bomo za PE uporabili racionalno Bézierjevo ploskev, ki je pri praktičnih aplikacijah zelo uporabna zaradi svojih odličnih geometrijskih lastnosti [3]. Po aproksimaciji središčne ploskve lupine z mrežo KE, postane PE tudi nosilec geometrijskih informacij za KE, saj le-ti ki ležijo na PE - v našem primeru so to lupinski KE, slika 1.



Slika 1: Projektni element kot nosilec geometrijskih informacij za končne elemente

Bézierjeva ploskev je topološko pravokotna shema $N_1 \times N_2$ kontrolnih točk P_{ij} . Običajno vsaki kontrolni točki (KT) pridružimo vektor njene lege \mathbf{q}_{ij} in utež w_{ij} , v tem delu pa KT pridružimo še dodatno skalarno količino, ki jo imenujemo vrednost h_{ij} , slika 2. S pomočjo vrednosti KT napnemo preko PE gladko skalarno polje, ki ga povežemo z debelino lupine. Bézierjeva ploskev ima lokalni krivočrtni koordinatni sistem s koordinatami $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, ki

tečejo od 0 do 1, slika 2. Vektor \mathbf{s} je torej točka v definicijskem območju $U=[0,1]^2$ projektnega elementa.



Slika 2: Vsaki KT pripada njena lega \mathbf{q}_{ij} , utež w_{ij} in vrednost h_{ij} .

Vsaki točko \mathbf{s} , ki jo bomo imenovali *lokalna točka* PE, ustreza točka \mathbf{r} v realnem 3-D prostoru ter vrednost t skalarnega polja PE. Ti dve količini izrazimo kot

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_i^{N_1} B_j^{N_2} w_{ij} \mathbf{q}_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_i^{N_1} B_j^{N_2} w_{ij}}, \quad t = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_i^{N_1} B_j^{N_2} w_{ij} h_{ij}}{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} B_i^{N_1} B_j^{N_2} w_{ij}} \quad (3)$$

kjer so $B_i^{N_1} = B_i^{N_1}(s_1)$ in $B_j^{N_2} = B_j^{N_2}(s_2)$ Bernsteinovi polinomi reda N_1 ter N_2 . Če upoštevamo, da imata vektorja $\partial \mathbf{r} / \partial s_1$ in $\partial \mathbf{r} / \partial s_2$ smer tangente na parametrično črto in da ležita na tangentski ravnini na Bézierjevo ploskev, lahko enotski normalni vektor na ploskev izračunamo kot

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_2} \right] / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_2} \right|, \quad (4)$$

Če želimo optimirati obliko konstrukcije, moramo PE parametrizirati v odvisnosti od *projektne spremenljivke* b_1, b_2, \dots, b_N , zbranih v vektorju $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$. V ta namen predpostavimo, da \mathbf{q}_{ij} , w_{ij} ter h_{ij} niso nujno konstante, pač pa so lahko odvisni od \mathbf{b} . Torej imamo

$$\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}(\mathbf{b}), \quad w_{ij} = w_{ij}(\mathbf{b}), \quad h_{ij} = h_{ij}(\mathbf{b}). \quad (5)$$

Komentar. Pri praktični implementaciji obstaja več možnosti kako te odvisnosti vzpostavimo. V naši aplikaciji lahko katerikoli komponento \mathbf{q}_{ij} ter katerikoli w_{ij} ali h_{ij} definiramo z aritmetičnim izrazom v odvisnosti od b_1, b_2, \dots, b_N . Te izraze nato ustrezen razčlenjevalnik (ang. *parser*) pred vsako numerično analizo pretvori v ustrezno (hitro izračunljivo) kodo. Uporabljen razčlenjevalnik je odgovoren tudi za izračun odvodov teh

količin po projektnih spremenljivkah $d\mathbf{q}_{ij}/d\mathbf{b}$, $dw_{ij}/d\mathbf{b}$ in $dh_{ij}/d\mathbf{b}$, ki jih potrebujemo za analizo občutljivosti.

Z zgoraj opisano parametrizacijo je oblika PE postala odvisna od \mathbf{b} . Enako seveda velja za mrežo KE, če jo definiramo tako, da leži na PE. To lahko dosežemo na enostaven način, če lege vozlišč ne podamo v \mathbf{R}^3 prostoru pač pa v definicijskem območju \mathbf{U} projektnega elementa. To pri praktični implementaciji pomeni, da se mora mreženje izvesti po \mathbf{U} in nato preslikati v \mathbf{R}^3 . Seveda moramo biti pozorni na kvaliteto mreže – enakomerna mreža na \mathbf{U} lahko pomeni tudi zelo popačeno mrežo v \mathbf{R}^3 .

Lupinski KE, ki ga bomo uporabili, ima 4 vozlišča, [4]: v našem kontekstu bo torej njegova geometrija povsem določena s položajem štirih točk $\mathbf{s}^i, i=1,2,3,4$. To so edini vhodni geometrijski podatki, ki jih KE potrebuje, seveda ob predpostavki, da so vsi podatki o PE znani. Dejanske lege vozlišč poljubnega KE, vozliščne debeline ter vozliščne normale izračunamo torej s pomočjo (3)-(4) kot

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{r}^i(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}), \quad t^i = t^i(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}), \quad \mathbf{n}^i = \mathbf{n}^i(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Podobno izračunamo tudi odvode, ki jih potrebujemo za analizo občutljivosti

$$\frac{d\mathbf{r}^i}{d\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{r}^i}{d\mathbf{b}}(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}), \quad \frac{dt^i}{d\mathbf{b}} = \frac{dt^i}{d\mathbf{b}}(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}), \quad \frac{d\mathbf{n}^i}{d\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{n}^i}{d\mathbf{b}}(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

S tem dobimo vse vozliščne geometrijske podatke, ki ji potrebujemo. Ko pri integraciji potrebujemo vrednosti znotraj KE, le-te dobimo z uporabo interpolacijskih funkcij lupinastega 4-vozliščnega KE.

3 Formulacija in reševanje optimizacijskega problema

Matematično lahko optimizacijski problem zapišemo v obliki standardnega problema matematičnega programiranja, in sicer kot

$$\min f_0, \quad (8)$$

$$f_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, K, \quad (9)$$

kjer $f_0 = f_0(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ predstavlja namensko funkcijo, ki je pogosto definirana kot volumen ali kot deformacijska energija konstrukcije. Omejitvene funkcije $f_i = f_i(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ predstavljajo pomike vozlišč, napetosti v elementih, geometrijske omejitve, tehnološke omejitve in podobno. Simbol K označuje število vseh omejitvenih pogojev. V nalogi (8)-(9) predstavlja vektor \mathbf{b} neodvisno spremenljivko, odziv $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{b})$ pa ima vlogo odvisne spremenljivke. Ta odvisnost je podana implicitno z diskretizirano enačbo konstrukcije

$$\mathbf{F} - \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

kjer sta $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ in $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{b}, \mathbf{u})$ vektorja notranjih in zunanjih sil.

Ker so projektne spremenljivke zvezne, je za postopek reševanja najprimernejša gradientna metoda. Postopek je iteracijski in zahteva, da razen analize odziva opravimo tudi analizo občutljivosti. Ta temelji na odvodih odzivnih spremenljivk po projektnih spremenljivkah, ki jih lahko izračunamo iz enačbe

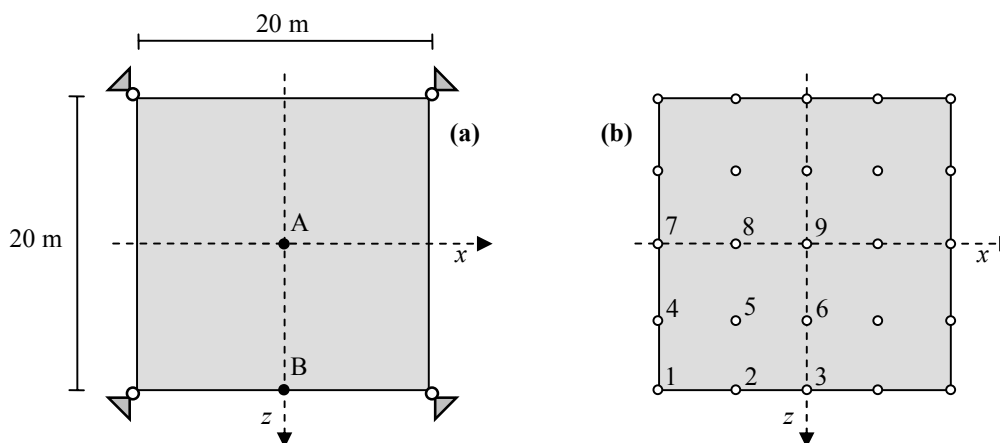
$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{b}} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{b}} \right). \quad (11)$$

V našem primeru smo zadnji člen na desni strani te enačbe (parcialni odvod po \mathbf{b}) izračunali s pomočjo končnih (centralnih) diferenc.

Na koncu poudarimo le to, da rabimo za reševanje enačbe odziva in občutljivosti geometrijske podatke posameznih končnih elementov ter njihove odvode po projektnih spremenljivkah. Te količine je seveda potrebno izračunati glede na trenutne vrednosti projektnih spremenljivk, tako kot je to opisano v prejšnjem poglavju.

4 Numerični zgled

Obravnavajmo členkasto podprto lupinasto konstrukcijo podano na sliki 3. Lastnosti materiala so podane z $E = 30000 \text{ N/mm}^2$ in $\nu = 0.3$. Konstrukcija je obremenjena s snegom, in sicer z $w = 5 \text{ kN/m}^2$.



Slika 3: Tloris konstrukcije (a) in lege kontrolnih točk (b)

Namen naloge je minimizacija deformacijske energije kar bi naj pripeljalo do čimbolj membranskega napetostnega stanja. Obravnavali bomo dva primera, ki se razlikujeta glede na geometrijske omejitvene pogoje:

- Primer A: $y_A \geq 8 \text{ m}$
- Primer B: $y_A \geq 8 \text{ m}$ in $y_B = 8 \text{ m}$

Dodatno k tem pogojem smo omejili tudi volumen konstrukcije na $V = 60 \text{ m}^3$.

Uporabili smo 1 projektni element s $5 \times 5 \times 1 = 25$ kontrolnimi točkami (KT), slika 3(b). projektne spremenljivke se nanašajo na lege (spremenljiva oblika) kontrolnih točk ter na njihove vrednosti (spremenljiva debelina). Definicije kontrolnih točk 1 do 9, slika 3(b), so podane v tabeli 1. Konstante v izrazih so izbrane tako, da je velikostni red projektnih spremenljivk približno 1. Definicije ostalih kontrolnih točk sledijo iz simetrije konstrukcije.

Tabela 1: Definicije kontrolnih točk.

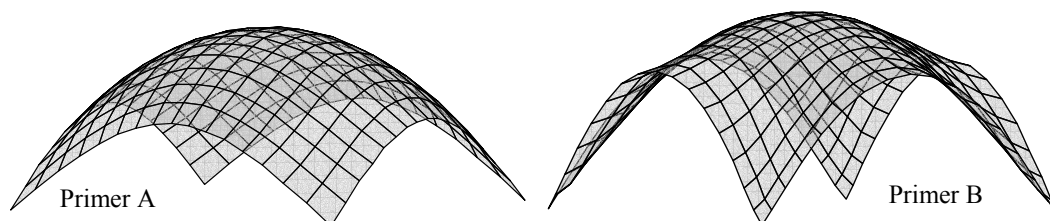
KT	X	Y	Z	Vrednost
1	-10000	0	10000	$150 b_9$
2	$-5000b_1$	$8000b_4$	10000	$150 b_{10}$
3	0	$8000b_5$	10000	$150 b_{12}$
4	-10000	$8000b_4$	$5000b_1$	$150 b_{10}$
5	$-5000b_2$	$8000b_6$	$5000b_2$	$150 b_{11}$
6	0	$8000b_7$	$5000b_3$	$150 b_{13}$
7	-10000	$8000b_5$	0	$150 b_{12}$
8	$-5000b_3$	$8000b_7$	0	$150 b_{13}$
9	0	$8000b_8$	0	$150 b_{14}$

Tabela 2: Vrednosti projektnih spremenljivk ter relativne deformacijske energije.

Spremenljivka	Spodnja	Gornja	Začetna	Optimalna A	Optimalna B
1	0	1.9	1	0.72549	1.54440
2	0	1.9	1	1.63736	0.90135
3	0	1.9	1	0.19567	0.80382
4	0	4	0	0.63336	0.22387
5	0	4	0	0.85788	2.36815
6	0	4	0	0.50935	0.00000
7	0	4	0	2.32411	2.92379
8	0	4	0	0.28598	0.16219
9	0.1	4	1	3.82926	4.00000
10	0.1	4	1	0.1	0.24125
11	0.1	4	1	0.10120	0.17162
12	0.1	4	1	0.1	0.30133
13	0.1	4	1	0.11704	0.11988
14	0.1	4	1	0.17143	0.10183
Rel. def. ene.	-	-	-	0.24936E-3	0.26322E-3

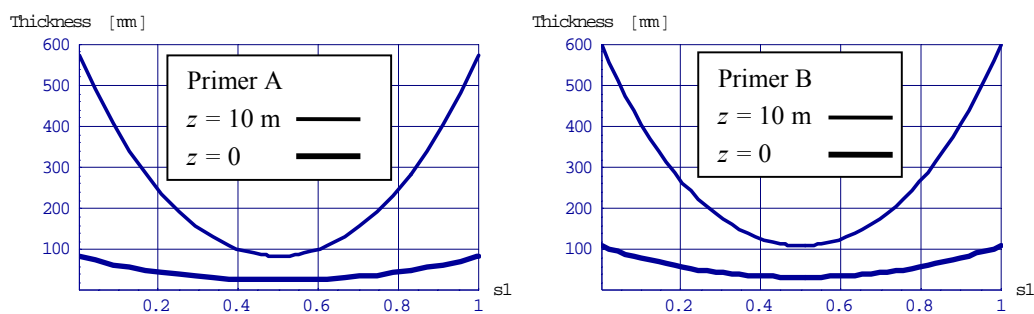
Iz tabele 1 lahko vidimo, da je 8 projektivnih spremenljivk (1-8) povezanih z obliko, 6 projektivnih spremenljivk (9-14) pa z debelino lupine. Spodnje in gornje vrednosti projektivnih spremenljivk ter njihove začetne vrednosti so podane v tabeli 2. Začetne vrednosti ustrezajo ploski kvadratni lupini konstantne debeline $t = 150$ mm .

Oba primera smo rešili z uporabo gradientne optimizacijske metode. Obliki končnih konstrukcij prikazuje slika 4.

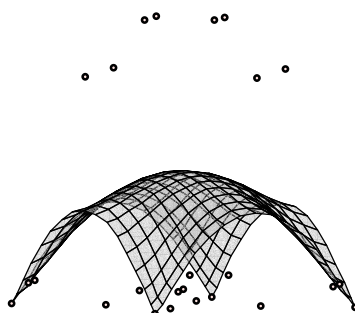


Slika 4: Končni obliki lupine za primera A in B

Primer B vsebuje več omejitev, kar bi naj pomenilo višjo končno deformacijsko energijo. Številke so to potrdile, saj je deformacijska energija končne lupine v primeru B za 5.6% višja kot v primeru A. V obeh primerih pa znaša končna deformacijska energija le približno 2.5 tisočine deformacijske energije začetne konstrukcije.



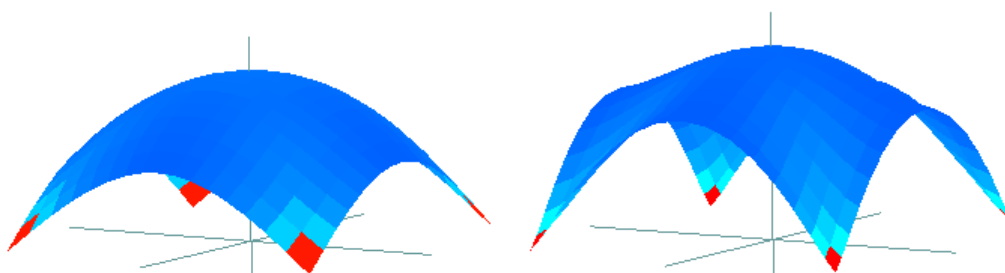
Slika 5: Porazdelitev debeline lupine za primera A in B



Slika 6: Končne lege kontrolnih točk v primeru B

Na sliki 5 so prikazani poteki debelin lupine pri koordinatah $z = 0$ in $z = 10$ m. Kot lahko vidimo, je lupina najbolj tanka na sredini in v temenih robov, daleč najbolj debela pa je pri podpornih točkah.

Na koncu si za ilustracijo pogledjmo še kako so se premaknile kontrolne točke. Na začetku so vse ležale v ravnini podprtja, njihove končne lege v primeru B pa prikazuje slika 6. Povejmo še to, da se je deformacijska energija dokaj enakomerno porazdelila po konstrukciji (z izjemo vogalnih (podprtih) končnih elementov). Razporeditev deformacijske energije po končnih elementih prikazuje slika 7.



Slika 7: Razporeditev deformacijske energije po elementih za primera A in B

5 Zaključek

Članek predstavlja poenoten pristop k optimizaciji oblike lupin konstantne in spremenljive debeline. Zvezno spremenljiva debelina lupine je vpeljana preko dodatnega skalarnega polja na projektnem elementu. To smo dosegli tako, da smo kontrolni točki razen *lege* in *uteži* pripisali tudi *vrednost*, ki služi za izračun skalarnega polja debeline lupine. Optimizacijski problem je rešen z gradientno metodo, številčni rezultati pa so potrdili uspešnost prikazanega pristopa.

Literatura

- [1] J. Chilton, The Engineer's Contribution to Contemporary Architecture. Heinz Isler, Thomas Telford, 2000.
- [2] M. Kegl, Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49: 1571-1588 2000.
- [3] M. Kegl, H. Antes, Shape optimal design of elastic space frames with non-linear response, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43: 93-110 1998.
- [4] B. Brank, D. Perić, F.B. Damjanić, On implementation of a non-linear four-node shell finite element for thin multilayered elastic shells, Comp Mech, 16: 341-359, 1995.



Poševni elastoplastični upogib

Franc Kosel¹ in Simon Jevšnikar²

Asymmetrical bending in the elastic – plastic region

Povzetek. V članku je obravnavan poševni upogib nosilcev s konstantnim prerezom v elastoplastičnem področju. Nosilci so izdelani iz gradiva z elastično – linearno utrjevalnim reološkim modelom. Obremenjeni so s konstantnim upogibnim momentom. Analitično je določeno deformacijsko stanje nosilca po razbremenitvi. Za dve obliki prerezov je prikazana tudi primerjava analitične rešitve in eksperimentalnih rezultatov na podlagi opravljenih preizkusov.

Abstract. The contribution treats the asymmetrical bending of beams with constant cross section in the elastic-plastic region. The beams are made of material with elastic – linear hardening properties and are loaded by a constant bending moment. The elasto-plastic deflection state of the beam after unloading is analytically determined. Numerical and experimental results for two different cross sections are given and the difference between them is shown.

1 Uvod

V praksi nas velikokrat zanima končno deformacijsko stanje nosilca po procesu obremenjevanja in razbremenjevanja. Če ga lahko določimo, potem lahko iz dane oblike izdelka določimo potrebno obliko orodja. Proces elastoplastičnega upogiba s konstantnim upogibnim momentom dosežemo s krivljenjem nosilca na okrogli plošči s konstantnim radijem r_l . Pri takšni obremenitvi ($M_{pl}=konst.$) je plastificirana cona prereza po vsej dolžini nosilca konstantna, tako je tudi radij ukrivljenosti R po razbremenitvi konstanten.

2 Osnovne predpostavke in enačbe

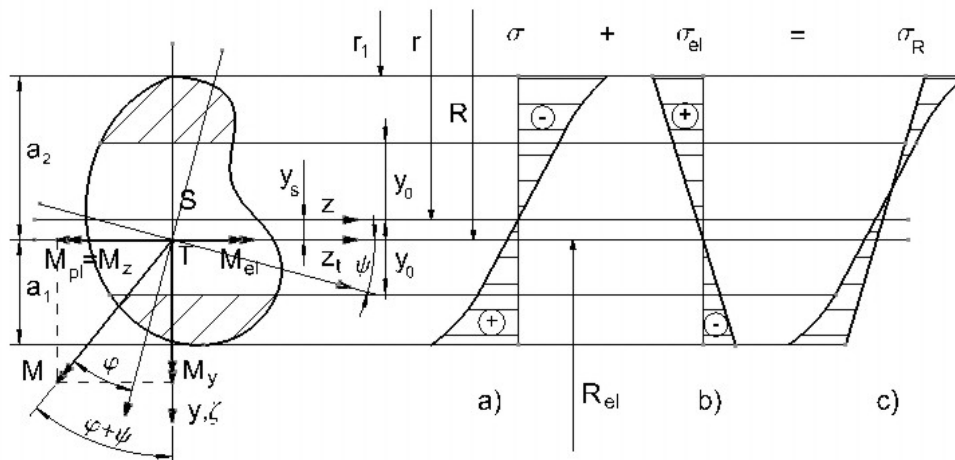
Nosilec naj bo obremenjen s konstantnim upogibnim momentom tako, da je napetostno stanje v elastoplastičnem območju. Prerez elementa pa je nesimetričen glede na os, v kateri deluje upogibni moment. Po razbremenitvi se vzpostavi ravnotežno stanje med elastoplastičnim in elastičnim upogibom. Pri obravnavi poševnega elastoplastičnega upogiba upoštevamo sledeče predpostavke:

- Po razbremenitvi se pojavijo samo elastične napetosti.
- Tangencialne napetosti med vlakni pri upogibu zanemarimo.
- Velja naj Bernoulli-Navierjeva hipoteza o ravnih prerezih.
- Os nosilca naj bo pred deformacijo ravna.

¹ prof. dr. Franc Kosel, univ. dipl. inž., Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, Ljubljana

² mag. Simon Jevšnikar, univ. dipl. inž., SŽ-Oprema Ravne d. o. o., Koroška c. 14, Ravne na Koroškem

e) Oblika in velikost prereza je po vsej dolžini enaka.
 Za določitev končnega deformacijskega stanja nosilca moramo najprej določiti lego nevtralne osi z , ki jo določa kot ψ (slika 1). Nevtralna os mora ustrezati pogoju $\sigma=0$. Končni krivinski radij pa je pravokoten na to os. Os y je pravokotna na nevtralno os.



Slika 1: Napetostna stanja po prerezu pri procesu obremenjevanja in razbremenjevanja.

Napetostno stanje pri obremenitvi za elastično – linearno utrjevalno gradivo lahko zapišemo na sledeči način (slika 1a):

$$\sigma(y) = \begin{cases} -\sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right]; -a_2 + y_s \leq y \leq -y_0 \\ \sigma_0 \frac{y}{y_0}; |y| \leq y_0 \\ +\sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right]; y_0 \leq y \leq a_1 + y_s \end{cases} \quad (1)$$

Ravnotežni pogoj osnih sil lahko zapišemo, kot sledi:

$$N = \int_A \sigma(y) dA = 0 \quad (2)$$

kjer je: $dA = b(y) dy$

in sledi:

$$N = - \int_{-a_2+y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] b(y) dy + \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y}{y_0} b(y) dy + \int_{y_0}^{a_1+y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] b(y) dy = 0 \quad (3)$$

Komponenti upogibnega momenta imata sledečo obliko:

$$M_y = - \int_A z(y) \sigma(y) dA(y)$$

$$M_y = \int_{-a_2+y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] z(y) b(y) dy - \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y}{y_0} z(y) b(y) dy - \int_{y_0}^{a_1+y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] z(y) b(y) dy \quad (4)$$

$$M_z = \int_A y \sigma(y) dA(y)$$

$$M_z = - \int_{-a_2+y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{-y_0}{y} - 1 \right) \right] y b(y) dy + \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y^2}{y_0} b(y) dy +$$

$$+ \int_{y_0}^{a_1+y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] y b(y) dy \quad (5)$$

Lego nevtralne osi lahko glede na sliko 1 določimo s pomočjo spodnje enačbe:

$$\operatorname{tg}(\psi + \varphi) = \frac{M_z}{M_y} \Rightarrow \psi = \psi(\varphi, y_0, y_s) \quad (6)$$

Komponenti upogibnega momenta M_y in M_z sta definirani z enačbama (4) in (5). V zgornjih enačbah predstavlja y_0 globino plastifikacije prereza, ki pa jo določimo s pomočjo spodnje enačbe:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_0}{y_0} \Rightarrow y_0 = r \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0 \cdot r}{E} \quad (7)$$

Končno deformacijsko stanje določimo na osnovi ravnotežja momentov:

$$M_{pl} + M_{el} = 0 \quad (8)$$

M_{pl} je moment, ki deluje vzdolž nevtralne osi in je definiran z enačbo (5). M_{el} je moment, ki se pojavi pri razbremenitvi, je nasprotno usmerjen in povzroči samo elastične deformacije. Zapišemo ga lahko na sledeči način:

$$M_{el} = \int_A \sigma_{el}(\zeta) \zeta dA(\zeta) \quad (9)$$

Ob upoštevanju izpeljave iz [2] lahko enačbo za elastičen moment sedaj zapišemo na sledeči način:

$$M_{el} = \left(\frac{\sigma_0}{y_0} - \frac{E}{R} \right) \cdot \left[\int_0^{-a_2} \zeta^2 dA(\zeta) - \int_0^{a_1} \zeta^2 dA(\zeta) \right] \quad (10)$$

Z upoštevanjem enačb (5) in (10) dobi enačba (8) sedaj sledečo obliko:

$$\left(\frac{\sigma_0}{y_0} - \frac{E}{R} \right) \cdot \left[\int_0^{-a_2} \zeta^2 dA(\zeta) - \int_0^{a_1} \zeta^2 dA(\zeta) \right] - \int_{-a_2+y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{-y}{y_0} - 1 \right) \right] \cdot y b(y) dy +$$

$$+ \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y^2}{y_0} b(y) dy + \int_{y_0}^{a_1+y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] y b(y) dy = 0 \quad (11)$$

S pomočjo zgornjih enačb lahko popišemo končno deformacijsko stanje enosnega elementa. Najprej je potrebno s pomočjo enačbe (6) določiti lego nevtralne osi in s pomočjo enačbe (11) lahko izračunamo končni krivinski radij R , ki je pravokoten na nevtralno os z .

3 Analitični primeri

Za številčne izračune in eksperimente smo izbrali kotnika in sicer:

1. Enakokraki kotnik L 10x10x2 mm

Kemijska sestava: Fe 0.21 %, Si 0.54 %, Mg 0.56 %, ostalo je aluminij in neškodljive primesi.

Mehanske lastnosti so: meja plastičnosti $\sigma_0=224.8 \text{ N/mm}^2$, modul elastičnosti $E= 70000 \text{ N/mm}^2$,

modul plastičnosti $E_t= 581 \text{ N/mm}^2$.

2. Raznokraki kotnik L 15x10x1.5 mm

Kemijska sestava: Fe 0.19 %, Si 0.42 %, Mg 0.48 %, ostalo je aluminij in neškodljive primesi .
 Mehanske lastnosti so: meja plastičnosti $\sigma_0=197.4 \text{ N/mm}^2$, modul elastičnosti $E= 63716 \text{ N/mm}^2$,
 modul plastičnosti $E_t= 394.5 \text{ N/mm}^2$.

Mehanske lastnosti so bile določene z nateznim preizkusom.

3.1 Deformacijsko stanje enakokrakega kotnika

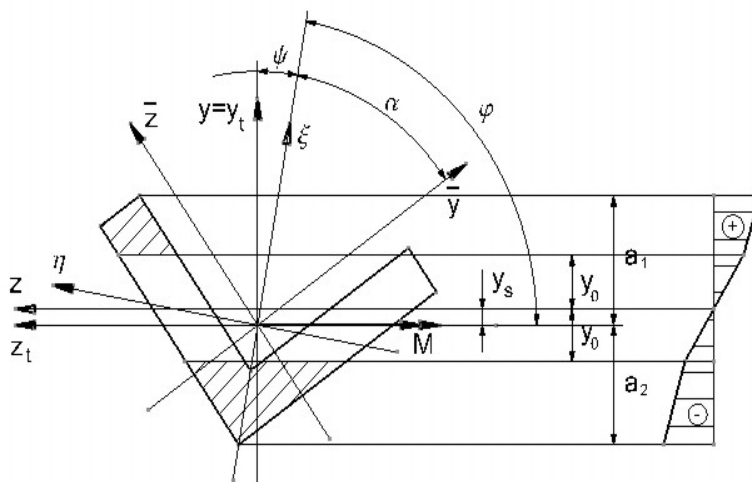
Ta primer služi kot potrditev enačb iz prejšnjega poglavja. Ker je nosilec simetričen glede na os ζ , pričakujemo, da se bo nosilec deformiral ravninsko, če bo upogibni moment deloval vzdolž osi η . To smo pokazali tudi analitično. Nosilec naj bo obremenjen tako, kot je prikazano na sliki 2. Da lahko določimo lego nevtralne osi z , je potrebno izračunati kot ψ in oddaljenost nevtralne osi od težiščne osi y_s .

Da se bo nosilec deformiral ravninsko, mora biti izpolnjen sledeči pogoj:

$$\psi + \varphi = 90^\circ$$

Upogibni moment pa mora delovati v osi z . In enačba (6) ima sedaj glede na sliko 2 sledečo obliko:

$$\operatorname{tg}(\psi + \varphi) = \frac{M_z}{M_y} = \infty \quad (12)$$



Slika 2: Obremenitev enakokrakega kotnika 10x10x1.5.

Kar pa pomeni, da potem velja:

$$\begin{aligned} M_z &= f(\psi, y_s, y_0) = M \\ M_y &= f(\psi, y_s, y_0) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Potrebno je rešiti sledeči sistem treh enačb s tremi neznankami:

$$\begin{aligned} N &= f(\psi, y_s, y_0) = \int_A \sigma(y) dA(y) = 0 \\ M_y &= f(\psi, y_s, y_0) = - \int_A z(y) \sigma(y) dA(y) = 0 \\ y_0 &= \frac{\sigma_0 r}{E} \end{aligned} \quad (14)$$

Z upoštevanjem napetostnega stanja in geometrijskih razmer po sliki 2 ima sistem enačb (14) sedaj sledečo obliko:

$$\begin{aligned}
& - \int_{-a_2-y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] b(y) dy + \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y}{y_0} b(y) dy + \int_{y_0}^{a_1-y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] b(y) dy = 0 \\
& - \int_{-a_2-y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] z(y) b(y) dy + \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y}{y_0} z(y) b(y) dy + \\
& + \int_{y_0}^{a_1-y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] z(y) b(y) dy = 0 \\
& y_0 = \frac{\sigma_0}{E} (r_1 + (y_t + z_t \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \psi)) \cos(\alpha + \psi) + y_s)
\end{aligned} \tag{15}$$

Z rešenjem zgornjega sistema enačb (15) dobimo rešitve za ψ , y_s in y_0 ter s tem lego nevtralne osi. Da se bo nosilec deformiral ravninsko, mora upogibni moment delovati vzdolž težiščne osi, ki je vzporedna z nevtralno osjo prereza.

Končno deformacijsko stanje določimo iz ravnotežja momentov:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sigma_0}{y_0} - \frac{E}{R} \right) \cdot \left[\int_0^{-a_2} \zeta^2 dA(\zeta) - \int_0^{a_1} \zeta^2 dA(\zeta) \right] - \int_{-a_2-y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] \cdot y b(y) dy + \\
& + \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y^2}{y_0} b(y) dy + \int_{y_0}^{a_1-y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] y b(y) dy = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

S pomočjo enačb (15) in (16) dobimo sledeče rešitve:

$$\begin{aligned}
\psi &= 0^\circ \\
y_s &= 0.036 \\
y_0 &= 0.335 \\
R &= 122.55 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Kot smo pričakovali, se zaradi simetrije enakokraki kotnik L10x10x2 deformira ravninsko, če upogibni moment deluje vzdolž glavne vztrajnostne osi η .

3.2 Ravninsko deformacijsko stanje raznokrakega kotnika L15x10x1.5

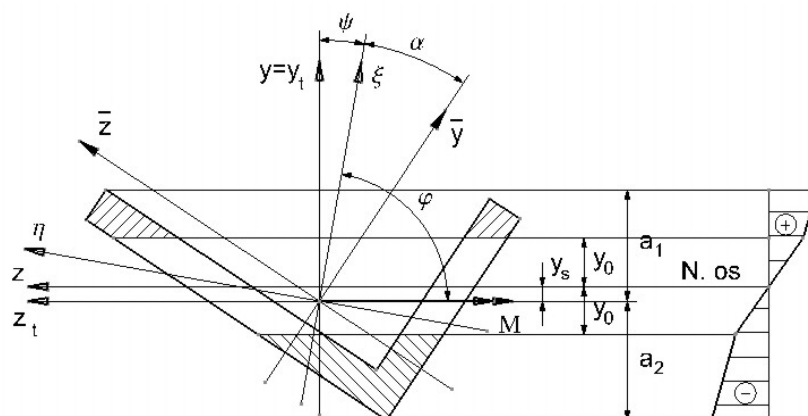
Ker se raznokraki kotnik deformira prostorsko, če upogibni moment deluje vzdolž glavne vztrajnostne osi η , smo želeli poiskati tisto os, vzdolž katere naj deluje up. moment, da se bo nosilec deformiral ravninsko. Nosilec naj bo obremenjen tako, kot je prikazano na sliki 3.

Da se bo nosilec deformiral ravninsko, mora bit izpolnjen sledeči pogoj:

$$\psi + \varphi = 90^\circ$$

Tudi za ta primer veljajo enačbe (12), (13), (14), (15) in (16) in dobimo sledeče rešitve:

$$\begin{aligned}
\psi &= -4.376^\circ \\
y_s &= -0.156 \\
y_0 &= 0.325 \\
R &= 119.067 \text{ mm}
\end{aligned}$$



Slika 3: Napetostno stanje prereza pri obremenitvi.

3.3 Prostorsko deformacijsko stanje raznokrakega kotnika L 15x10x1.5

Upogibni moment naj deluje vzdolž osi \bar{z} (slika 4). V tem primeru se nosilec deformira prostorsko. Enačba (6) ima za ta primer glede na sliko 4 sledečo obliko:

$$\operatorname{tg}(\psi + \alpha) = \frac{M_y}{M_z} \quad (17)$$

Potrebno je rešiti sistem treh enačb s tremi neznankami:

$$N = f(\psi, y_s, y_0) = \int_A \sigma(y) dA(y) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\psi + \alpha) = f(\psi, y_s, y_0) = \frac{M_y}{M_z} \quad (18)$$

$$y_0 = \frac{\sigma_0 r}{E}$$

Z upoštevanjem geometrijskih razmer po sliki 4 ima sistem enačb sedaj sledečo obliko:

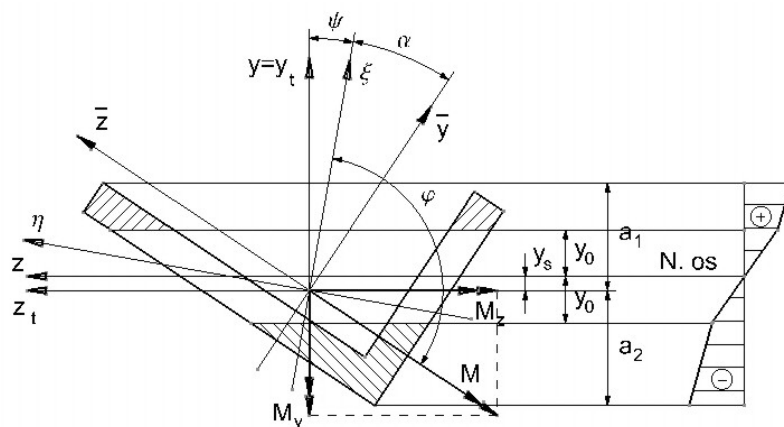
$$-\int_{-a_2-y_s}^{-y_0} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(-\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] b(y) dy + \int_{-y_0}^{y_0} \sigma_0 \frac{y}{y_0} b(y) dy + \int_{y_0}^{a_1-y_s} \sigma_0 \left[1 + \frac{E_t}{E} \left(\frac{y}{y_0} - 1 \right) \right] b(y) dy = 0$$

$$\operatorname{tg}(\psi + \alpha) = \frac{M_y}{M_z}$$

$$y_0 = \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{r_1}{\cos(\alpha + \psi)} + (y_t + z_t \operatorname{tg}(\alpha + \psi)) \cos(\alpha + \psi) + y_s \right) \quad (19)$$

Končno deformacijsko stanje pa določimo s pomočjo enačbe (16). Rešitve za ta primer pa so sledeče:

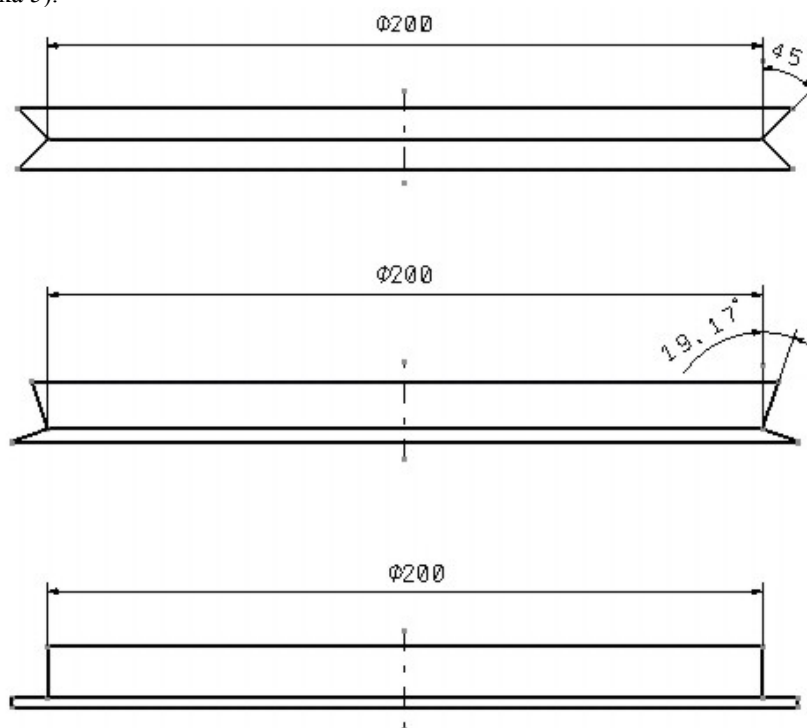
$$\begin{aligned} \psi &= 10.97^\circ \\ y_s &= 0.0069 \\ y_0 &= 0.327 \\ R &= 118.1 \text{ mm} \end{aligned}$$



Slika 4: Napetostno stanje prereza pri obremenitvi.

4 Primerjava analitičnih in eksperimentalnih rezultatov

Za vse tri analitične primere so bili opravljeni tudi eksperimenti. Aluminijaste kotnike smo krivili na krivilni napravi z bobnom konstantnega polmera r_f . Za vsak primer je bil izdelan boben z ustreznim izrezom (slika 5).



Slika 5: Navijalni bobni za krivilno napravo.

V primeru prostorske deformacije smo meritve opravili s pomočjo koordinatnega merilnega stroja, s katerim smo skenirali preseke deformiranega nosilca, končne rezultate pa smo dobili s pomočjo obdelave podatkov meritev s CAD sistemom CATIA. Rezultati so predstavljeni v tabeli 1.

Tabela 1: Primerjava analitičnih in eksperimentalnih rezultatov.

Oblika prereza	R [mm]	Re [mm]	ϵ [%]
L 10x10x2	122.55	123.42	0.71
L 15x10x1.5 (ravninska deformacija)	119.07	120.34	1.07
L 15x10x1.5 (prostorska deformacija)	118.1	120.02	1.65

5 Zaključek

Primerjava analitičnih in eksperimentalno določenih rezultatov pokaže, da je največja napaka 1.65 % za primer prostorske deformacije raznokrakega kotnika L 15x10x1.5. Iz tega lahko sklepamo, da so izbrane fizikalne predpostavke procesa obremenjevanja in razbremenjevanja realne. Predpostavka elastično – linearno utrjevalnega materiala pa dovolj dobro popiše mehanske lastnosti preizkušancev.

6 Literatura

- [1] A. Mendelson: *Plasticity, Theory and Application*, New York, 1968.
- [2] F. Kosel, S. Jevšnikar, J. Petrišič: *Upogib nosilcev s konstantnim prerezom v elasto-plastičnem območju*, Zbornik del Kuhljevi dnevi '98, str. 9-16.
- [3] F. Kosel, J. Petrišič, B. Bremec: *Nesimetrični upogib v elasto-plastičnem področju*, Zbornik del Kuhljevi dnevi '99, str. 9-16.
- [4] F. Kosel, I. Borštnik: *Upogib nosilcev s konstantnim prerezom v elasto-plastičnem območju*, Strojniški vestnik št. 9-10, Ljubljana 1979, str. 205-208.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2004

Določitev nekaterih materialnih lastnosti pri gradivih z oblikovnim spominom

F. Kosel¹ in T. Videnič²

Determination of some material properties of shape memory materials

Povzetek. Večosni konstrukcijski elementi iz materialov z oblikovnim spominom so zelo zahtevni za matematični popis napetostnega, deformacijskega in temperaturnega stanja. Del težav je čisto matematične narave, drug del pa sledi iz pomanjkanja eksperimentalnih podatkov, ki so potrebni za ustrezno obravnavo. V prispevku je prikazan teoretično – eksperimentalni način določitve dveh materialnih konstant, ki ju potrebujemo v matematičnem modelu s katerim je možno popisati napetostno, deformacijsko in temperaturno stanje v elementih iz materialov z oblikovnim spominom.

Abstract. Two and three – dimensional constructional elements made of shape memory materials are very difficult for mathematical modelling and determination of stress, deformation and temperature states. Partly these problems are mathematical in nature and partly spring up from unknown material properties, which are necessary for mathematical modelling. In this paper theoretical – experimental way of determination of two material constants is shown. These material constants are essential for determination of stress, deformation and temperature state in constructional elements made of shape memory materials.

1 Uvod

Materiali z oblikovnim spominom spadajo med trdnine pri katerih se lahko izvrši povračljiva fazna transformacija med kristalografsko bolj urejeno fazo, imenovano avstenit, in kristalografsko manj urejeno fazo, imenovano martenzit. Če element iz takšnega materiala deformiramo v nizko temperaturni fazi (martenzitna struktura), se mu povrne osnovna nedeformirana oblika ob segretju na temperaturo A_f , ko se v elementu dovrši obratna transformacija iz martenzita v avstenit. Osnovna značilnost takšnih materialov je njihova urejena struktura. Pri jeklih, naprimer, je možna martenzitna transformacija (kaljenje jekel), vendar je njihova struktura precej neurejena, tako da pojava oblikovnega spomina ne opazimo. Tudi matematična obravnava mehanskega obnašanja takšnih materialov je

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

specifična in jo je možno izvesti v okviru snovno nelinearne mehanike [1], vendar pa je potrebno poznati nekatere materialne lastnosti, ki jih v dostopni literaturi ni. V tem prispevku je predstavljen teoretično – eksperimentalni način določitve dveh materialnih konstant materialov z oblikovnim spominom α in λ_M , ki se pojavita v modelu snovno nelinearne mehanike. Celotna obravnava poteka na primeru osnosimetričnih krožnih obročkov izdelanih iz materiala z oblikovnim spominom NiTiNb, ki se najpogosteje uporabljajo v praktičnih aplikacijah ovirane povračljivosti kot vezni elementi.

2 Snovno nelinearna mehanika in materiali z oblikovnim spominom

Snovno nelinearna mehanika je matematični model z eno ali večimi notranjimi spremenljivkami hitrostno neodvisne neelastičnosti. Hitrostno neodvisna neelastičnost predpostavlja, da so vsi procesi počasni. Razvita je bila za popis napetostno-deformacijskih stanj v trdninah, pri katerih po začetnem plastičnem obremenjevanju in elastičnem razbremenjevanju ponovno obremenjevanje ni nujno elastično do stanja pri katerem se pričelo razbremenjevanje. Med takšne trdnine spadajo grafit, nekatera nerjaveča jekla, navadni kamen pa tudi materiali z oblikovnim spominom.

V primeru proporcionalnega obremenjevanja lahko zapišemo naslednjo termomehansko zvezo [2]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{el}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{kl} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{el}}{\partial T} T + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^i}{\partial q_\alpha} q_\alpha \quad (1)$$

kjer so q_α ($\alpha=1, \dots, n$) notranje spremenljivke, zadnji člen na desni strani izraza (1) je tenzor neelastične deformacije ε_{ij}^i , medtem ko sta $\partial \varepsilon_{ij}^{el} / \partial \sigma_{kl}$ in $\partial \varepsilon_{ij}^{el} / \partial T$ trenutni tenzor elastičnih konstant in trenutni toplotni deformacijski tenzor. V splošnem sta odvisna od σ_{ij} , T in q_α , vendar pa sta v trdninah s kristalno strukturo določena z osnovno kristalno strukturo in sta neodvisna od nepovračljivih procesov, zato lahko njuno odvisnost od q_α zanemarimo:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el}(\sigma_{ij}, T) + \varepsilon_{ij}^i(q_\alpha) \quad (2)$$

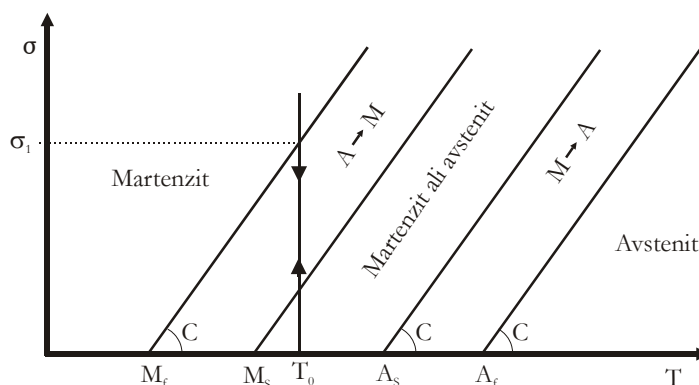
kjer sta člena na desni strani izraza (2) elastični in neelastični deformacijski tenzor. Elastični deformacijski tenzor ε_{ij}^{el} je podan z običajnimi termomehanskimi napetostno-deformacijsko-temperaturnimi zvezami. Tenzor neelastične deformacije ε_{ij}^i pa lahko ob pogoju, da obstaja skalarna funkcija F , dobimo iz zakona tečenja:

$$\varepsilon_{ij}^i = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

kjer je λ skalarna veličina in je določljiva z notranjimi spremenljivkami q_α , $F=F(\sigma_{ij}, T, q_\alpha)$ pa je skalarna funkcija in se imenuje neelastični potencial. V našem primeru izberemo Trescin modificirani neelastični potencial, ki ga v primeru osnosimetričnega krožnega kolobarja, v katerem se pojavi ravninsko napetostno stanje, zapišemo na naslednji način:

$$F = \sigma_e - \Phi(T) = \sigma_\varphi - \sigma_r + \alpha(\sigma_r + \sigma_\varphi) - CT \quad (4)$$

kjer je efektivna napetost $\sigma_e = \sigma_\varphi - \sigma_r + \alpha(\sigma_r + \sigma_\varphi)$, neznan konstanta α popisuje neenak odziv elementa iz materiala z oblikovnim spominom na natezno in tlačno obremenitev, konstanta C , ki jo običajno poznamo, pa je napetostno razmerje, njen fizikalni pomen pa je prikazan na sliki 1.



Slika 1: Fizikalni pomen napetostnega razmerja C

V dvofaznih sistemih lahko privzamemo, da je edina notranja spremenljivka q_α masni delež ene od faz. V literaturi se ponavadi upošteva, da je notranja spremenljivka masni delež martenzita, ki ga označimo z ζ in lahko zavzame vrednosti $0 \leq \zeta \leq 1$. Ko je $\zeta=0$ obstaja v materialu le avstenitna faza, ko pa je $\zeta=1$ je v materialu le martenzitna faza. Poskusi kažejo, da je v primeru enoosnega napetostnega stanja neelastična deformacija ε^i , ki ob segretju nad temperaturo A_f popolnoma izgine, proporcionalna masnemu deležu martenzita ζ :

$$\varepsilon^i = \varepsilon_M \zeta \quad (5)$$

kjer je ε_M konstanta, ki je enaka največji neelastični deformaciji dobljeni, ko je material popolnoma martenziten. V primeru večosnega napetostnega stanja lahko zapišemo v smislu teorije snovno nelinearne mehanike [1] namesto izraza (5):

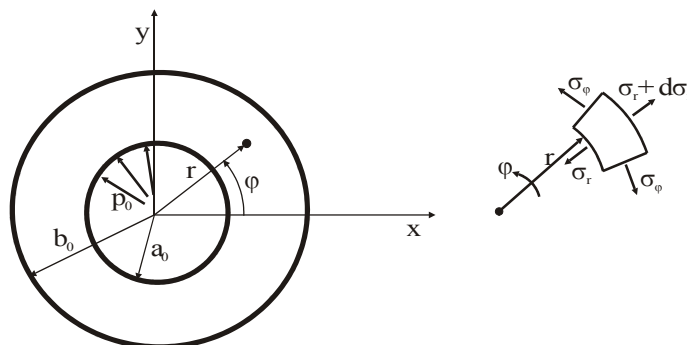
$$\lambda = \lambda_M \zeta \quad (6)$$

Seveda v primeru večosnega napetostnega stanja konstanta λ_M ni enaka ε_M , in jo je potrebno posebej določiti. Za matematično obravnavo termomehanskega stanja večosnih elementov moramo poznati parametra α in λ_M , zato sta v naslednjem poglavju prikazana dva možna način njune določitve.

3 Določitev materialnih konstant α in λ_M

Če hočemo uporabiti obroček iz materiala z oblikovnim spominom kot vezni element, ga moramo razširiti tako, da se v njem izvrši transformacija iz avstenita v martenzit. To najlažje

naredimo z ustrežno tlačno obremenitvijo p_0 na notranjem robu z radijem a_0 , slika 2, in naknadno razbremenitvijo pri konstantni temperaturi T_0 . Tako se notranji in zunanji radij obročka spremenita na a_1 in b_1 , vendar pa se ob segretju nad temperaturo A_f povrne prvotna oblika – notranji radij a_0 in zunanji radij b_0 .



Slika 2: Krožni kolobar iz materiala z oblikovnim spominom

Z uporabo izrazov (3) in (4) lahko določimo neelastične oziroma povračljive deformacije:

$$\varepsilon_r^i = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_r} (\sigma_e) = \lambda(\alpha - 1) = \lambda_M \zeta (\alpha - 1) \quad (7)$$

$$\varepsilon_\phi^i = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_\phi} (\sigma_e) = \lambda(1 + \alpha) = \lambda_M \zeta (1 + \alpha) \quad (8)$$

$$\varepsilon_z^i = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_z} (\sigma_e) = 0 \quad (9)$$

Najprej predpostavimo, da se med obremenjevanjem v celotnem obročku izvede transformacija iz avstenita v martenzit. Torej velja v razbremenjenem stanju pri konstantni temperaturi T_0 : $\zeta_0=1$ za celoten obroček in lahko zapišemo z upoštevanjem izraza (2):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_S} (\sigma_r - \nu_S \sigma_\phi) + \lambda_M (\alpha - 1) = \frac{du}{dr} \quad (10)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{E_S} (\sigma_\phi - \nu_S \sigma_r) + \lambda_M (1 + \alpha) = \frac{u}{r} \quad (11)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_S}{E_S} (\sigma_r + \sigma_\phi) \quad (12)$$

kjer je E_S modul elastičnosti ter ν_S Poissonov količnik materiala z oblikovnim spominom. Izraz (11) odvajamo po r in uredimo, tako da ga lahko izenačimo z izrazom (10).

Upoštevamo še ravnotežno enačbo in zapišemo:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = -2\lambda_M E_S \quad (13)$$

$$\sigma_r = \lambda_M E_S \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_0^2}{r^2} \right) - \ln \frac{r}{a_0} \right] + A^{OB} + B^{OB} r^{-2} \quad (14)$$

kjer sta A^{OB} in B^{OB} integracijski konstanti in ju določimo iz robnih pogojev. Iz ravnotežne enačbe določimo še cirkularno napetost in efektivno napetost iz izraza (4) med obremenjevanjem:

$$\sigma_\varphi = -\lambda_M E_S \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a_0^2}{r^2} \right) + \ln \frac{r}{a_0} \right] + A^{OB} - B^{OB} r^{-2} \quad (15)$$

$$\sigma_e = -\lambda_M E_S \left(1 - \frac{a_0^2}{r^2} + 2\alpha \ln \frac{r}{a_0} \right) + 2(\alpha A^{OB} - B^{OB} r^{-2}) \quad (16)$$

Robni pogoji za določitev A^{OB} , B^{OB} in p_0 pa so, sliki 1 in 2:

$$\sigma_r(a_0) = -p_0 \quad \sigma_r(b_0) = 0 \quad \sigma_e(b_0) = \sigma_1 = C(T_0 - M_f) \quad (17)$$

Konstante A^{OB} , B^{OB} in p_0 po procesu obremenjevanja so tako:

$$A^{OB} = \frac{\sigma_1}{2(1+\alpha)} + \lambda_M E_S \ln \frac{b_0}{a_0} \quad (18)$$

$$B^{OB} = -\frac{1}{2} \left[\lambda_M E_S (b_0^2 - a_0^2) + \frac{b_0^2 \sigma_1}{1+\alpha} \right] \quad (19)$$

$$p_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{b_0^2}{a_0^2} - 1 \right) \left(\frac{\sigma_1}{1+\alpha} + \lambda_M E_S \right) - \lambda_M E_S \ln \frac{b_0}{a_0} \quad (20)$$

Napetostno-deformacijsko stanje po razbremenitvi je posledica ravnotežnega stanja med zunanjimi obremenitvami in notranjimi silami, ki se pojavijo med obremenjevanjem v trenutku, ko zunanje obremenitve izginejo. Torej, če je med obremenjevanjem napetost na notranjem robu kolobarja $-p_0$, je po elastični razbremenitvi napetost p_0 :

$$\sigma_r^R(a_0) = p_0 \quad \sigma_r^R(b_0) = 0 \quad (21)$$

Izraza za radialno in cirkularno napetost pa sta:

$$\sigma_r^R = A^R + B^R r^{-2} \quad \sigma_\varphi^R = A^R - B^R r^{-2} \quad (22)$$

Neznani konstanti določimo brez težav iz izrazov (21) in (22), končno napetostno – deformacijsko stanje po obremenitveno – razbremenitvenem ciklu pa z upoštevanjem $\sigma_r^z = \sigma_r + \sigma_r^R$ itd., lahko zapišemo:

$$\sigma_r^z = \lambda_M E_S \left[\frac{(r^2 - a_0^2) b_0^2}{r^2 (b_0^2 - a_0^2)} \ln \frac{b_0}{a_0} - \ln \frac{r}{a_0} \right] \quad (23)$$

$$\sigma_\varphi^z = \lambda_M E_S \left[\frac{(r^2 + a_0^2) b_0^2}{r^2 (b_0^2 - a_0^2)} \ln \frac{b_0}{a_0} - \ln \frac{r}{a_0} - 1 \right] \quad (24)$$

$$\varepsilon_r^z = \varepsilon_{r0}^i = \lambda_M \left[\left(1 - \nu_S - (1 + \nu_S) \frac{a_0^2}{r^2} \right) \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \ln \frac{b_0}{a_0} - (1 - \nu_S) \left(1 + \ln \frac{r}{a_0} \right) + \alpha \right] \quad (25)$$

$$\varepsilon_\varphi^z = \varepsilon_{\varphi 0}^i = \lambda_M \left[\left(1 - \nu_S + (1 + \nu_S) \frac{a_0^2}{r^2} \right) \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \ln \frac{b_0}{a_0} - (1 - \nu_S) \ln \frac{r}{a_0} + \alpha \right] \quad (26)$$

Z uporabo izraza (26) je možno določiti neznani konstanti λ_M in α . Zapišimo zaostalo cirkularno deformacijo pri notranjem in zunanem radiju, ter izrazimo konstanti λ_M in α :

$$\lambda_M = \frac{\varepsilon_{\varphi 0}^i(a_0) - \varepsilon_{\varphi 0}^i(b_0)}{2 \ln(b_0 / a_0)} \quad (27)$$

$$\alpha = 2 \left[\frac{\varepsilon_{\varphi 0}^i(a_0)}{\varepsilon_{\varphi 0}^i(a_0) - \varepsilon_{\varphi 0}^i(b_0)} - \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \right] \ln \frac{b_0}{a_0} \quad (28)$$

Izraza (27) in (28) sta izpeljana ob predpostavki, da je celoten obroček po obremenitveno – razbremenitvenem ciklu v martenzitnem stanju. Ta predpostavka je pravilna v primeru tankostenskih obročkov, v primeru debelostenskih pa je struktura martenzitno avstenitna, saj bi bile potrebne prevelike napetosti za popolno transformacijo iz avstenita v martenzit.

Najprej je zato potrebno določiti delež martenzita $\zeta_0(r)$ po obremenitveno – razbremenitvenem ciklu. Če zanemarimo zaostale napetosti lahko zapišemo:

$$\varepsilon_r(r) = \varepsilon_{r0}^i(r) = \lambda_M \zeta_0(r) (\alpha - 1) = \frac{du}{dr} \quad (29)$$

$$\varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_{\varphi 0}^i(r) = \lambda_M \zeta_0(r) (1 + \alpha) = \frac{u}{r} \quad (30)$$

Upoštevamo, da je le notranje vlakno obročka popolnoma v martenzitni fazi $\zeta_0(a_0)=1$, za vsa ostala vlakna pa velja $\zeta_0(r)<1$. Izrazimo pomik v radialni smeri u v izrazu (30), ga odvajamo po radiju r ter izenačimo z izrazom (29), tako da po ureditvi dobimo:

$$(1 + \alpha)r \frac{d\zeta_0}{dr} + 2\zeta_0 = 0 \quad (31)$$

$$\zeta_0 = Kr^{-\frac{2}{1+\alpha}} \quad (32)$$

kjer je K neznana konstanta. Izraz (32) popisuje porazdelitev deleža martenzita po obremenitveno – razbremenitvenem ciklu. Kot smo že omenili pa velja tudi:

$$\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0) = \lambda_M(1 + \alpha) \quad (33)$$

$$\varepsilon_{\varphi_0}^i(b_0) = \lambda_M(1 + \alpha)\zeta_0(b_0) \quad (34)$$

$$Ka_0^{-\frac{2}{1+\alpha}} = 1 \quad (35)$$

$$Kb_0^{-\frac{2}{1+\alpha}} = \zeta_0(b_0) \quad (36)$$

V izrazih (33 – 36) so štiri neznanke: λ_M , α , K in $\zeta_0(b_0)$, ki jih lahko brez težav določimo:

$$\alpha = \frac{2 \log(a_0/b_0)}{\log(\varepsilon_{\varphi_0}^i(b_0)/\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0))} - 1 \quad (37)$$

$$\lambda_M = \frac{\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0)}{1 + \alpha} \quad (38)$$

$$\zeta_0(b_0) = \frac{\varepsilon_{\varphi_0}^i(b_0)}{\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0)} \quad (39)$$

$$K = a_0^{-\frac{2}{1+\alpha}} \quad (40)$$

Tako imamo dva različna načina za določitev materialnih konstant λ_M in α : izraza (27) in (28), ter izraza (37) in (38). Cirkularni deformaciji pri notranjem in zunanjem radiju $\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0)$ in $\varepsilon_{\varphi_0}^i(b_0)$, ki se pojavita v omenjenih izrazih pa lahko eksperimentalno določimo, saj velja:

$$\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0) = \frac{a_1 - a_0}{a_0} \quad \varepsilon_{\varphi_0}^i(b_0) = \frac{b_1 - b_0}{b_0} \quad (41)$$

Če poznamo dimenzije obročka iz materiala z oblikovnim spominom pred in po obremenitveno – razbremenitvenim ciklom, potem lahko z uporabo izrazov (41) ter (27) in (28) ali (37) in (38) določimo neznani materialni konstanti α in λ_M .

V našem primeru smo izmerili dimenzije debelostenskega obročka:

$$a_0=9.143 \text{ mm} \quad b_0=16.08 \text{ mm}$$

$$a_1=9.7015 \text{ mm} \quad b_1=16.515 \text{ mm}$$

Najprej izračunamo cirkularni deformaciji iz izrazov (41):

$$\varepsilon_{\varphi_0}^i(a_0) = 0.06108 \quad \varepsilon_{\varphi_0}^i(b_0) = 0.02705$$

Vrednosti za materialni konstanti α in λ_M , določeni na oba načina sta predstavljeni v tabeli 1:

Tabela 1: Materialni konstanti α in λ_M in zaostala cirkularna napetost pri notranjem radiju a_0

	λ_M	α	$\sigma_{\varphi}^z(a_0)$ [MPa]
$\zeta(r)=1 \quad a_0 \leq r \leq b_0$	0.03014	0.35809	604.6
$\zeta(r)<1 \quad a_0 < r \leq b_0$	0.04406	0.38635	??

Seveda so vrednosti za materialni konstanti α in λ_M različne, če upoštevamo le martenzitno strukturo, $\zeta_0(r)=1 \quad a_0 \leq r \leq b_0$, ali pa martenzitno – avstenitno strukturo, $\zeta_0(r)<1 \quad a_0 < r \leq b_0$. Pojavi se vprašanje, katere vrednosti bolj ustrezajo dejanskemu stanju. Zato je v tabeli 1 podana tudi vrednost zaostale cirkularne napetosti pri notranjem radiju a_0 , ki jo določimo iz izraza (24) ob upoštevanju $E_s=30$ GPa in je v prvem primeru močno prevelika, zato lahko sklepamo, da je predpostavka o popolnoma martenzitni strukturi napačna. Če bi hoteli zagotoviti popolnoma martenzitno strukturo, bi bili zunanji tlak p_0 in posledične napetosti v obročku tako velike, da bi prišlo do porušitve, saj je natezna trdnost uporabljenega materiala 870 MPa. V drugem primeru smo zaostale napetosti v izpeljavi zanemarili, saj so zaradi nižjih obremenitev nižje kot v prvem primeru. Torej je v zgornjem konkretnem primeru struktura obročka martenzitno – avstenitna, za kar so potrebne med obremenjevanjem manjše napetosti.

Na osnovi dobljenih rezultatov lahko sklepamo, da je v primeru tankostenskih obročkov iz materiala z oblikovnim spominom struktura po obremenitveno – razbremenitvenem ciklu martenzitna, v primeru debelostenskih obročkov, pa je struktura martenzitno avstenitna.

Literatura

- [1] Lubliner J., Auricchio F.: *Generalized plasticity and shape-memory alloys*, Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No. 7, 1996, str. 991-1003.
- [2] Lubliner J.: *On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics*, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 7, 1972, str. 237-254.



Optimiranje procesa segrevanja valja

A. Kotar¹, P. Koc², B. Štok¹

Optimization of a Cylinder Heating Problem

Povzetek. Učinkovitost postopka indukcijskega segrevanja je možno povečati z upoštevanjem izsledkov, ki jih dobimo s predhodnim numeričnim optimiranjem postopka segrevanja. Pri tem je cilj optimizacije predpisati protokol segrevanja tako, da bo doseženo vnaprej predpisano temperaturno polje v obdelovancu pri najkrajšem porabljenem času ter ob upoštevanju tehnoloških omejitev. Optimizacija segrevanja fizikalno sklopljenega problema je numerično izjemno zahteven problem, zato je ugodno, če imamo pred pričetkom optimizacije na voljo vsaj dober začetni približek. V prispevku je predstavljen postopek pridobivanja začetnega približka na osnovi reševanja radialnega problema prenosa toplote.

Abstract. Efficiency of induction heating processes can be improved considerably when designed in accordance with a respective optimal control problem solution. In order to achieve a required temperature field evolution in a heated workpiece efficiently, considering minimization of the time needed for the accomplishment of the heating process, while respecting all technological limitations, the process parameters must be correspondingly tuned. Since a highly demanding numerical approach is needed, in general, for the optimal solution of the considered physically coupled problem, any trustful initial estimation, though based on a physically simplified model, is beneficial and advantageous. As a first attempt to shorten the computational time the investigation of a corresponding radial problem is performed.

1 Uvod

Induktivno gretje uporabljamo v industrijskih procesih za segrevanje kovinskih obdelovancev [1]. Pri induktivnem gretju povzroči od zunanega izvora vsiljeni izmenični električni tok skozi t.i. induktor elektromagnetno polje, ki v električno prevodnem obdelovancu inducira električni tok. Posledica inducirane električne toka v obdelovancu je sproščanje toplote, kar povzroči segrevanje in s tem ustrezno temperaturno polje v obdelovancu. Ker se električno polje inducira po volumnu obdelovanca, je segrevanje letega, za razliko od konvencionalnih načinov ogrevanja, tudi volumsko. Celotni pojav je fizikalno sklopljen, termalni problem je neposredno odvisen od inducirane električne moči, elektromagnetni problem pa posredno preko temperaturno odvisnih lastnosti materiala.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Laboratorij za numerično modeliranje in simulacijo, Aškerčeva 6

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Katedra za mehaniko, Lepi pot 11

Zaradi temperaturno odvisnih snovnih lastnosti ter zaradi nenadne spremembe magnetne permeabilnosti feromagnetnih materialov pri Curiejevi temperaturi je elektromagnetni problem nelinearen. Reševanje sklopljenega nelinearnega problema je izvedeno numerično, s kombinacijo metode končnih elementov (MKE) in metode robnih elementov (MRE). Za osnosimetrične primere, ki prevladujejo v industrijski rabi, je ta pot prikazana v članku [2].

Reševanje opisanega direktnega problema predstavlja obsežno delo tudi v numeričnem smislu, t.j. v porabi računalniških zmogljivosti in računskega časa. Reševanje optimizacijskega problema, kjer iščemo optimalne vrednosti procesnih parametrov indukcijskega gretja s pomočjo ene izmed gradientnih metod optimizacije, pa je potemtakem časovno še bolj zahtevno. Čas reševanja optimizacijskega problema se lahko občutno skrajša, če imamo na voljo dober začetni približek optimizacijskih parametrov. Dobra osnova za izbiro začetnih približkov so zagotovo praktične tehnološke izkušnje, na žalost pa si z njimi v bolj zahtevnih primerih težko pomagamo. Namesto izkušenj in/ali intuicije bomo pri iskanju začetnih približkov uporabili poenostavljene, toda še vedno objektivne matematične modele, s katerimi bomo poiskali optimalne rešitve poenostavljenega modela. Te rešitve bodo v nadaljevanju postopka optimizacije služile kot začetni približek pri optimizaciji zahtevnega, na osnovi MKE in MRE temelječega modela.

V prispevku je prikazan prvi del optimiranja, t.j. optimizacija procesnih parametrov poenostavljenega osnosimetričnega problema segrevanja. Omejimo se na najbolj preprost primer segrevanja valjastega obdelovanca, katerega dolžina (višina valja) je veliko večja od premera. Ker poteka v tem primeru prevod toplote v valju pretežno v radialni smeri, imamo opravka z enoosnim – radialnim problemom.

2 Rešitev radialnega termalnega problema

Neskončno dolg valj zunanega radija R je izpostavljen enakomerni, časovno spreminjajoči se termični obremenitvi, ki deluje, v odvisnosti od izbrane frekvence izmeničnega toka induktorja, pretežno na plašč valja ali pa tudi na material pod površino. Območje valja, kjer velja enačba prevoda toplote (1), označimo z Ω . Le-to definiramo s krajevno koordinato r , kjer je $0 \leq r \leq R$. Površino plašča označimo z Γ . Rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\lambda} q_v(r, t) \quad ; \quad r \in \Omega, \quad (1)$$

kjer je q_v volumski vnos toplote pod površino plašča, je radialno in časovno odvisno temperaturno polje $T(r, t)$. Njegov razvoj opredeljujeta snovni konstanti κ in λ , prva kot termična difuzivnost in druga kot toplotna prevodnost, ter začetni in robni pogoji

$$T(r, 0) = F(r) \quad ; \quad r \in \Omega, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = f(r, t) \quad ; \quad r \in \Gamma. \quad (3)$$

Z enačbo (3) je izražen konvektivni tip robnega pogoja, α je koeficient toplotne prestopnosti, njen prvi člen pa zajema površinske toplotne izvore.

Ob privzetih temperaturno neodvisnih materialnih lastnostih je rešitev problema, podanega z enačbami (1), (2) in (3), temperaturno polje $T(r, t)$, ki ga lahko izrazimo z Greenovimi funkcijami $G(r, t/r', \tau)$ [3]. Funkcijska oblika temperaturnega polja za opisani problem je

$$T(r, t) = \int_{\Omega} G(r, t | r', 0) F(r') 2\pi r' dr' + \int_{\tau=0}^t \int_{\Omega} \frac{\kappa}{\lambda} G(r, t | r', \tau) q_v(r', \tau) 2\pi r' dr' d\tau + \kappa \int_{\tau=0}^t \left[\frac{f(r', \tau)}{\lambda} G(r, t | r', \tau) 2\pi r' \right]_{\Gamma} d\tau. \quad (4)$$

Posamezni členi v (4) zajemajo posledice vplivov začetnega pogoja, volumskih izvorov toplote ter površinskih posrednih in neposrednih izvorov toplote.

V nadaljevanju si oglejmo primer vnosa toplote preko površine Γ . Greenova funkcija, ki zajema konvektivni robni pogoj, je oblike

$$G(r, t | r', \tau) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_m^2 \kappa (t-\tau)}{R^2}} \frac{\beta_m^2 J_0\left(\beta_m \frac{r}{R}\right) J_0\left(\beta_m \frac{r'}{R}\right)}{J_0^2(\beta_m) (Bi^2 + \beta_m^2)}, \quad (5)$$

kjer je Bi Biotovo število, β_m pa so koreni enačbe

$$-\beta_m J_1(\beta_m) + Bi J_0(\beta_m) = 0 \quad ; \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}. \quad (6)$$

Za primer posrednega površinskega vnosa toplote delujemo na obdelovanec samo preko predpisane temperature okolice T^∞ . V ta namen definirajmo časovno odsekoma konstantno temperaturo okolice, kar pomeni, da za i -ti časovni interval velja: $t \in [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow T^\infty(t) = T_i^\infty$. Upoštevajoč še enačbi (4) in (5) dobimo temperaturno polje $T(r, t)$

$$T(r, t) = 2T_0 \sum_{m=1}^{\infty} C_m A_m(r) e^{D_m t} + 2Bi \sum_{i=1}^{n-1} T_i^\infty \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_m(r) (e^{D_m(t-t_i)} - e^{D_m(t-t_{i-1})}) + 2Bi T_n^\infty \sum_{m=1}^{\infty} B_m A_m(r) (1 - e^{D_m(t-t_{n-1})}), \quad (7)$$

kjer so funkcije $A_m(r)$ in koeficienti B_m , C_m in D_m definirani v obliki Besselovih funkcij in korenov na naslednji način

$$A_m = \frac{J_0\left(\beta_m \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\beta_m) + J_0^2(\beta_m)}, \quad B_m = \frac{J_0(\beta_m)}{\beta_m^2}, \quad C_m = \frac{J_1(\beta_m)}{\beta_m}, \quad D_m = -\frac{\beta_m^2 \kappa}{R^2}. \quad (8)$$

3 Formuliranje optimizacijskega problema

Namen optimizacije procesnih parametrov indukcijskega gretja je določiti najkrajši čas τ , v katerem poljubno osnosimetrično plast valja $r \in [r_{in}, r_{out}]$, $r \in \Omega^* \subseteq \Omega$, segrejemo tako, da je temperatura kateregakoli delca plasti znotraj predpisanega temperaturnega intervala $T(r) \in [T_{low}, T_{high}]$. Toplotni tok na površini, ki je pogojen s primerno visoko predpisano temperaturo okolice T^∞ , povzroča prevajanje toplote iz površine $r=R$ v notranjost valja in s tem porast temperature v notranjosti.

Za optimiranje so zanimivi primeri, kjer zaradi prevelikega dovoda toplote (npr. visokofrekvenčno indukcijsko gretje, plamensko gretje) in/ali premajhne termične

difuzivnosti κ z monotonim segrevanjem ne moremo doseči predpisanega temperaturnega območja $[T_{\text{low}}, T_{\text{high}}]$. V takšnih primerih se lahko temperatura površine valja približa maksimalni dopustni temperaturi izbranega materiala T_{max} , še preden temperatura na notranjem radiju $T(r_{\text{in}})$ doseže spodnjo predpisano temperaturo T_{low} . Zato vir toplote začasno izključimo, kar povzroči hlajenje površine. Medtem se zaradi prevoda akumulirane toplote v zunanjih plasteh valja jedro še vedno segreva. Opisana ogrevalno - ohlajevalna zaporedja se nadaljujejo, dokler ne dosežemo predpisanih temperaturnih vrednosti.

Minimizacijska procedura poteka v dveh delih. V prvem delu v grobem poiščemo minimalen čas procesa segrevanja τ , ki je sestavljen iz zaporednih segrevanj in hlajenj $\tau = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$, nato pa v drugem delu sledi natančnejše iskanje minimuma. V prvem delu doseženih temperatur ne preverjamo po celotni plasti r , $0 \leq r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{out}} \leq R$, glede na željeno temperaturno območje $T(r) \in [T_{\text{low}}, T_{\text{high}}]$, temveč le temperaturi $T(r_{\text{in}})$, $T(r_{\text{out}})$ na notranjem in zunanjem radiju. Čas, ko ti dve temperaturi prideta do dopustnega temperaturnega območja, označimo s τ_{in} in τ_{out} . V splošnem ogrevalno - ohlajevalnem zaporedju časa nista enaka, večji od njiju

$$\tau = \max[\tau_{\text{in}}, \tau_{\text{out}}] \quad (9)$$

pa je čas, ko so temperaturne zahteve na robovih preučevane plasti valja izpolnjene. To je res samo takrat, ko se v nadaljevanju prevoda toplote pri času $t > \tau$, temperaturi $T(r_{\text{in}})$ in $T(r_{\text{out}})$ izenačita, ta temperatura, označena s T_{sect} , pa je še vedno znotraj predpisanega temperaturnega območja

$$T(r_{\text{in}}, t) = T(r_{\text{out}}, t) = T_{\text{sect}} \quad , \quad t > \tau \quad \wedge \quad T_{\text{sect}} \in [T_{\text{low}}, T_{\text{high}}] \quad (10)$$

Vsi parametri, ki vplivajo na prevod toplote v valju, so v postopku minimizacije konstantni, z izjemo ogrevalnih in ohlajevalnih časov t_i . Indeks i predstavlja i -to časovno zaporedje gretja in hlajenja. Skupno število ogrevalnih in ohlajevalnih obdobij je n . Iščemo minimum ciljne funkcije $W(\mathbf{x})$, ki je s primerno izbiro parametrov vektorja \mathbf{x} zapisana v obliki

$$W(\mathbf{x}) = W(x_1, \dots, x_p) = \tau(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (11)$$

kjer so parametri minimizacije x_j pravzaprav časi t_i , ki ustrezajo zaključkom i -tega ogrevalnega ali ohlajevalnega obdobja. Konec zadnjega ohlajevalnega obdobja je čas τ , katerega minimum iščemo v optimizaciji. Torej ta ne predstavlja optimizacijskega parametra, ampak ciljno funkcijo samo.

Omejitev minimizacijskega problema so: omejitev pregrevanja površine valja ob zaključku kateregakoli segrevalnega obdobja, časovno naraščajoče vrednosti začetkov sledečih se ogrevalnih in ohlajevalnih obdobij ter ohranjanje temperature T_{sect} znotraj predpisanega temperaturnega območja. Naštete omejitve zapišemo v normalizirani obliki kot

$$g_j(\mathbf{x}) = \frac{T_i(r_{\text{out}}, t_{2j-1}; t_0, \dots, t_{2j-2}, T_1^\infty, \dots, T_{2j-1}^\infty)}{T_{\text{max}}} - 1 \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, j_0 \quad , \quad j_0 = \frac{n}{2} \quad (12)$$

$$g_j(\mathbf{x}) = \frac{t_{j-j_0}}{t_{j+1-j_0}} - 1 \leq 0 \quad , \quad j = j_0 + 1, \dots, j_1 \quad , \quad j_1 = j_0 + n - 2 \quad (13)$$

$$g_{j_1+1}(\mathbf{x}) = 1 - \frac{T_{\text{sect}}}{T_{\text{low}}} \leq 0 \quad , \quad g_{j_1+2}(\mathbf{x}) = \frac{T_{\text{sect}}}{T_{\text{high}}} - 1 \leq 0 \quad (14)$$

Po postavitvi vseh omejitev minimizacijskega problema sledi reševanje z uporabo postopka kvadratnega programiranja [4].

V prvem delu minimizacijskega postopka kontroliramo temperaturi samo na dveh radijih $T(r_{in})$ in $T(r_{out})$. Zato ni izključena možnost, da so posamezne plasti znotraj r_{in} in r_{out} v času τ izven predpisanega temperaturnega območja, ki je omejeno s T_{low} in T_{high} . Tipično se to zgodi v primerih intermitentnega segrevanja obdelovanca, ko se površina že nekoliko ohladi, v notranjosti pa je temperatura višja od površinske. Maksimalna temperatura je tedaj na nekem vmesnem radiju r_x , ki leži med r_{in} in r_{out} . Ta vmesni radij lahko določimo analitično ob pogoju ničnosti parcialnega odvoda temperaturnega polja po radiju, $\partial T/\partial r=0$, ter dodatnem pogoju $T(r_x, \tau_x)=T_{high}$.

V drugem delu optimizacije postopka segrevanja je načeloma potrebno preveriti temperature na treh radijih: r_{in} , r_{out} in r_x . Pri tem je r_x odvisen od vseh prejšnjih segrevanj in ohlajanj. Ker je pri ohlajanju površine $T(r_{out}, \tau) < T(r_x, \tau)$, je čas τ , ko so izpolnjene temperaturne zahteve (preurejena enačba 9)

$$\tau = \max[\tau_{in}, \tau_x]. \quad (15)$$

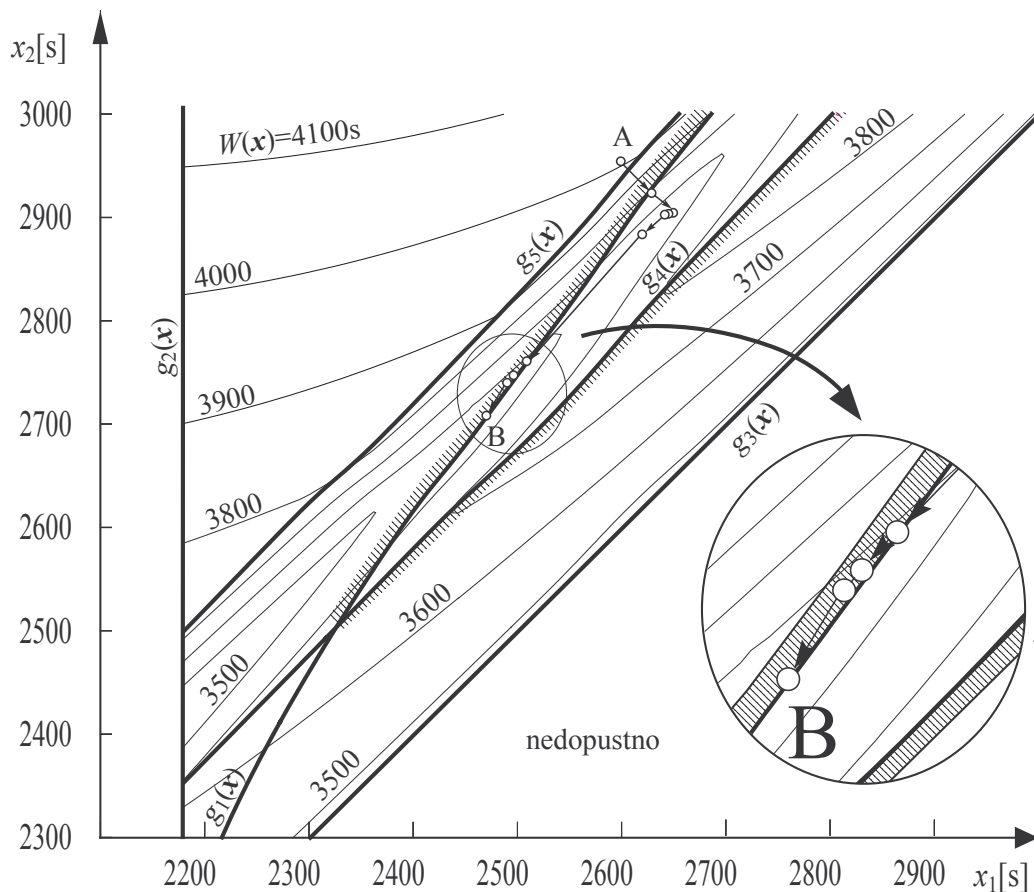
Potrebno je tudi preveriti, pri katerem času t_c temperatura $T(r_{out})$ doseže spodnjo dopustno temperaturo T_{low} , kar izrazimo v obliki

$$g_j(\mathbf{x}) = \frac{\tau}{t_c} - 1 \leq 0. \quad (16)$$

V drugem delu problem optimizacije, ki je formuliran z enačbami (11-13, 15, 16), rešujemo enako, kot v prvem delu, t.j. po postopku kvadratnega programiranja.

4 Numerični primer

Neskončni polni valj polmera $R=117\text{mm}$, gostote $\rho=7800\text{kg/m}^3$, specifične toplotne kapacitete $c=460\text{J/kgK}$ in toplotne prevodnosti $\lambda=5,85\text{W/mK}$ ima v času $t=0$ homogeno temperaturo 20°C po celotnem preseku. Zelena končna temperatura valja $r \in [r_{in}=0, r_{out}=R]$ je omejena med $T_{low}=205^\circ\text{C}$ in $T_{high}=216^\circ\text{C}$, pri čemer je maksimalna dovoljena temperatura materiala $T_{max}=285^\circ\text{C}$. Protokol segrevanja je sestavljen iz dveh segrevanj in dveh ohlajanj, podan je v obliki spreminjajoče se temperature okoliškega zraka: $T^\infty_1=2000^\circ\text{C}$, $T^\infty_2=20^\circ\text{C}$, $T^\infty_3=2000^\circ\text{C}$, $T^\infty_4=20^\circ\text{C}$. Koeficient toplotne prestopnosti med površino valja in okoliškim zrakom je $\alpha=10\text{W/m}^2\text{K}$. Čas prvega segrevanja t_1 izračunamo analitično ob upoštevanju maksimalne temperature površine. Ker je čas t_4 pravzaprav iskani čas segrevanja obdelovanca τ , ostaneta v obravnavanem problemu samo še dve optimizacijski spremenljivki, poimenovani $x_1=t_2$ in $x_2=t_3$. Ker je za obravnavani numerični primer optimizacijski prostor dvorazsežen, je moč vse za optimizacijo pomembne količine prikazati na grafu (slika 1). Optimizacijo pričnemo iz začetnega približka $x_1=2600\text{s}$ in $x_2=2950\text{s}$, (točka A na sliki 1), nato pa z uporabo računalniškega programa NLPQL [4] pridemo po 21 iteracijah do optimalne rešitve $x_1^{\text{opt}}=2471\text{s}$ in $x_2^{\text{opt}}=2717\text{s}$, točka B. Na sliki 1 so poleg izolinij ciljne funkcije (enačba 11) prikazane tudi omejitvene funkcije najvišje temperature materiala $g_1(\mathbf{x})$ (enačba 12), naraščajočih časov pričetkov drugega segrevanja $g_2(\mathbf{x})$ in ohlajanja $g_3(\mathbf{x})$ (enačba 13) ter spodnja $g_4(\mathbf{x})$ in zgornja $g_5(\mathbf{x})$ omejitev temperature T_{sect} (enačba 14). Dopustno območje se nahaja med omejitvama $g_1(\mathbf{x})$ in $g_4(\mathbf{x})$, kar je na sliki prikazano z odebeljenima in osenčenima črtama. Območje dopustnih rešitev je zelo ozko, z



Slika 1: Potek optimizacije

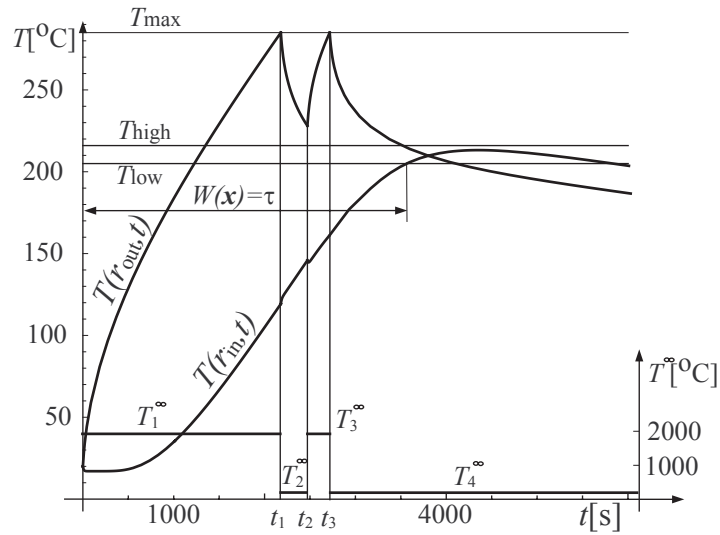
izrazitim gradientom ciljne funkcije v eni smeri ter majhnim gradientom v pravokotni smeri, kar otežuje optimizacijo.

V tabeli 1 je deloma prikazan potek spreminjanja optimizacijskih parametrov in ciljne funkcije za prvi del optimizacije, kjer temperaturo preverjamo samo na dveh radijih in sicer pri $r_{in} = 0$ in $r_{out} = R = 117$ mm.

Tabela 1: Prvi del iskanja optimalne rešitve

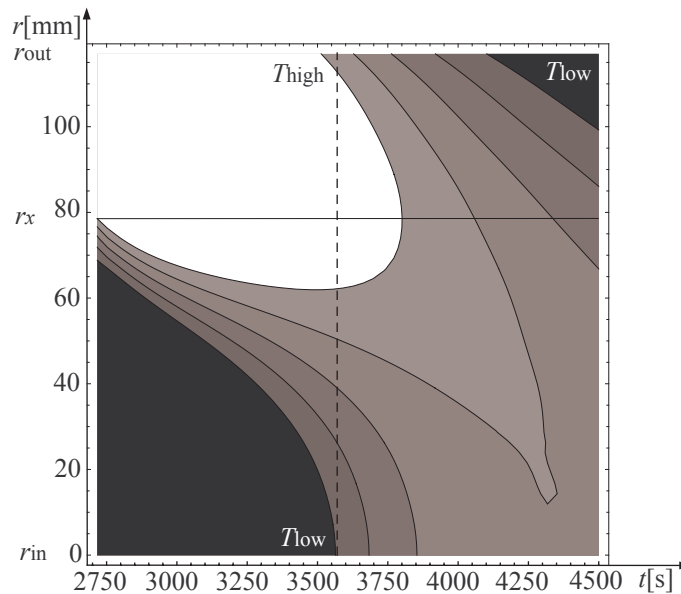
i	x_1 [s]	x_2 [s]	$W(x)$ [s]
0	2600,000	2950,000	3999,915
1	2631,440	2924,571	3786,066
:	:	:	:
21	2471,361	2716,839	3563,971

Časovni potek temperature pri $r_{in}=0$, $r_{out}=R$ je prikazan v sliki 2. Razvidno je prekinjeno dvakratno segrevanje površine valja do maksimalno dopustne temperature materiala, kakor tudi monotono naraščajoča temperatura na osi valja. Rešitev optimizacije prvega dela je večji izmed dveh časov, pri katerih se temperatura $T(r_{out})$ izenači s T_{high} ali $T(r_{in})$ izenači s T_{low} . V spodnjem delu grafa je predstavljena zgodovina vsiljenega ogrevalno - ohlajevalnega režima T^∞ .



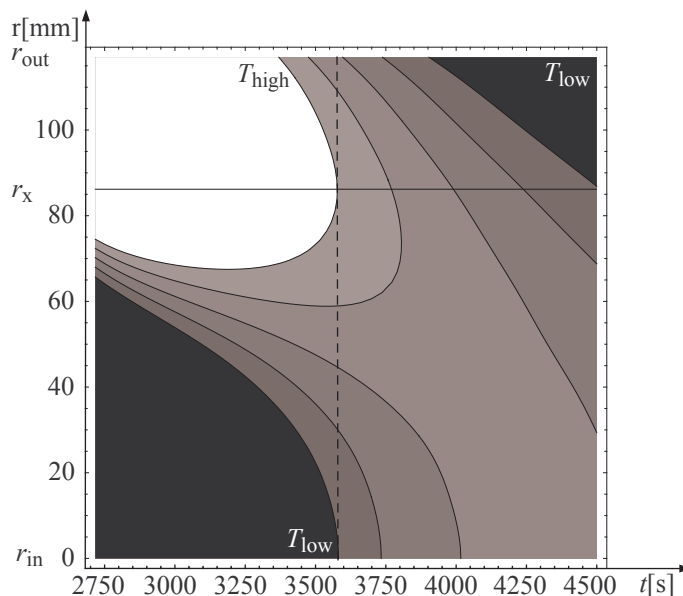
Slika 2: Časovno spreminjanje temperature površine in osi valja

Drugačen pogled na temperaturno polje v okolici optimalnega časa pa je na sliki 3. Na abscisi je nanešen čas, na ordinati pa radij. Belo in črno območje grafa predstavljata temperature, ki so višje od T_{high} (belo) in nižje od T_{low} (črno). Rešitev prvega dela optimizacije je takšna, da sta oba časa τ_{in} in τ_{out} približno enaka. Optimalna rešitev je prikazana s črtkano črto. S slike je razvidno, da ta rešitev ni ustrezna, saj je valj na območju od $r=0,55 R$ do $r=R$ pretežno pregret na temperaturo, višjo od T_{high} .



Slika 3: Časovni razvoj temperaturnega polja v obdelovancu za primer rešitve prvega dela optimizacije

Za razrešitev drugega dela optimizacije je potrebno izbrati takšne čase segrevanja, s katerimi bomo zmanjšali pregreto območje valja. Rezultat drugega dela optimizacije je podan v sliki 4. Merodajna za iskanje optimalnega časa sta radija r_{in} in r_x . Preveriti je potrebno še temperaturo pri r_{out} , ki ne sme biti manjša od T_{low} . Optimalna rešitev je prikazana z navpično črtno črto.



Slika 4: Časovni razvoj temperaturnega polja v obdelovancu za primer rešitve drugega dela optimizacije

5 Zaključek

Metoda določevanja začetnega približka segrevanja valja na osnovi radialnega problema prevoda toplote je dovolj preprosta in zadovoljivo verodostojna, da se jo da uporabiti kot pripravo na zahtevno optimizacijo, ki bo vključevala še vpliv prenosa toplote preko čelnih ploskev valja, volumsko generacijo toplote in temperaturno odvisne snovne lastnosti.

Literatura

- [1] Davies, E. J.: "Conduction and Induction Heating", Peter Peregrinus Ltd, London, 1990.
- [2] Štok, B. and Mole, N.: "Coupling FE and BE Approach in Axisymmetric Eddy Current Problems Solution", Proc. of the Int. Conf. on Comp. Eng. & Sci., Puerto Vallarta, Mexico, 2001.
- [3] Beck, J. V., Cole, K. D., Haji-Sheikh, A. and Litkouhi, B.: "Heat Conductions Using Green's Functions", Hemisphere Publishing Corporation, 1992.
- [4] Schittkowski, K.: "NLPQL - A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems", Annals of Operations Research, No. 5, 485-500, 1985.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2004

Anomalna difuzija in dielektrični odziv izbranih vezljivih zemljin

J. Kramer¹ in D. Korošak²

Anomalous diffusion and dielectric response of selected moist clays

Povzetek. V zadnjem času se vedno bolj uveljavlja metoda dielektrične spektroskopije za določevanje vsebnosti vlage v zemljinah, ter tako posledično določevanje električnih in mehanskih lastnosti zemljin. Že dokazana odvisnost med mehanskimi lastnostmi in vsebnostjo vode v zemljinah je sprožila idejo iskanja odvisnosti med dielektričnimi in mehanskimi lastnostmi. Za preiskavo smo uporabili posebne vzorce kaolinitske gline, meritve pa so se izvajale v območju nizkih frekvenc (med 100 Hz in 100 MHz). Rezultati meritve pokažejo, da se dielektrične lastnosti zaznavno spreminjajo skozi celotno merjeno frekvenčno območje. V frekvenčnem intervalu med nekaj 100 Hz in 100 MHz se izmerijo negativne vrednosti kapacitete. Rezultati meritev dielektričnega odziva izbranih zemljin so interpretirani v okviru anomalne difuzije delcev v bližini delno absorbirajoče bariere. Pokazano je, da je lahko anomalna difuzija vzrok za opaženo frekvenčno odvisnost kapacitete.

Abstract. Recently, the dielectric spectroscopy studies of soils has been extensively used for characterisation of water content in these materials in order to better understand their electrical and mechanical properties. Within the range of plasticity of cohesive soils there exists a direct relationship between water content and mechanical properties. We have measured dielectric properties and investigated possible relationship between mechanical and dielectric properties. The obtained results show that the measured dielectric properties vary through the frequency range. Within the certain frequency range (100 Hz – 100MHz) the negative values of capacitance have been observed. A model of particles dynamics in the presence of a partially absorbing barrier is presented and it is shown that the anomalous diffusion is the probable cause for the specific observed frequency dependance of the capacitance.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Smetanova 17, 2000 Maribor, Slovenija, E-naslov: janja.kramer@uni-mb.si

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Smetanova 17, 2000 Maribor, Slovenija, E-naslov: dean.korosak@uni-mb.si

1 Uvod

Raziskave mehanskih lastnosti (nedrenirane strižne trdnosti) vezljivih zemljin [1], so privedle do zaključka, da v območju plastičnega stanja zemljin (med mejo plastičnosti in mejo židkosti zemljine) obstaja točno določena odvisnost med količino vode v zemljini in nedrenirano strižno trdnostjo. Količina vode v zemljini pa močno zavisi od sestave zemljine, to je od mineralne sestave zrn in od fizikalnih pogojev okolja (temperatura, vlažnost, tlak,...).

V splošnem so vezljive zemljine sestavljene iz glinenih in neglidenih mineralov, količina vode v njih pa je odvisna le od vrste in količine glinenih. Voda se lahko veže na zunanjo površino zrn, v primeru nabreklih mineralov pa tudi na notranjo površino, to je med pakete, ki sestavljajo posamezno zrno. Ta, medpaketna voda, ki je trdo vezana med pakete ne vpliva na mehanske lastnosti zemljine, to je na vrednost nedrenirane strižne trdnosti, poveča pa celotno vlažnost zemljine. Izkazuje se, da mehanske lastnosti determinira zgolj količina medzrnske vode. [1]

Meritve električnih lastnosti zemljin se vedno bolj uporabljajo tudi za identifikacijo in določitev kontaminacije zemljin na samem mestu nastanka onesnaženja [2] ter tudi za nedestruktivne preiskave stanja površin zemljišč in cestišč. Znana in uveljavljena metoda meritve stanja cestišč je metoda radarskega presevanja tal (Ground penetrating radar) kjer gre v bistvu za meritve dielektričnega odziva in električne prevodnosti zemljine pri visokih frekvencah, frekvenčno območje je nekje med 0,1 GHz do nekaj 10 GHz. Rezultati teh meritev pokažejo, da se voda v zemljinah v splošnem lahko razdeli na adsorbirano ali higroskopsko, viskozno ali kapilarno in prosto vodo [3]. Higroskopsko vodo tvorijo vodne molekule, ki so na podlagi površinskih sil adsorbirane iz zraka na površino zrna zemljine. Adsorbirana voda se razdeli na zunanjo in notranjo nasprotno nabito plast. Dvojna plast je sestavljena iz plasti električnih nabojev, ki so vpeti ali se nahajajo v neposredni bližini mineralnega zrna ter plasti ionov nasprotnega naboja, ki so manj gibljivi in so razporejeni v kapljevini na površini zrna. Vlaga, ki ni vezana okrog zrna kot higroskopska voda in še ni pod vplivom gravitacije, je viskozna ali kapilarna voda. Prosta voda je zelo slabo vezana na zrna zemljine in pod vplivom gravitacijskih sil izteče iz zemljine. [3]

Rezultati meritev dielektričnega odziva vzorca znane geometrije na zunanje nihajoče električno polje z majhno amplitudo v nizkem frekvenčnem območju (100 Hz – 100MHz) podajo presenetljive in zaenkrat še nerazložljive rezultate, saj se v območju nizkih frekvenc izmerijo zelo visoke vrednosti kapacitivnosti, v frekvenčnem območju med nekaj 100 Hz in 100 MHz pa celo negativne vrednosti kapacitivnosti [4].

Meritve dielektričnih lastnosti so povezane z mehanizmi polarizacije snovi. Pri vlažnih zemljinah je posebnega pomena interfacialna polarizacija ter dinamika nabitih delcev (ionov) v elektrolitu na mejnih plasteh (med dvema različnima materialoma).

2 Eksperiment in rezultati meritev

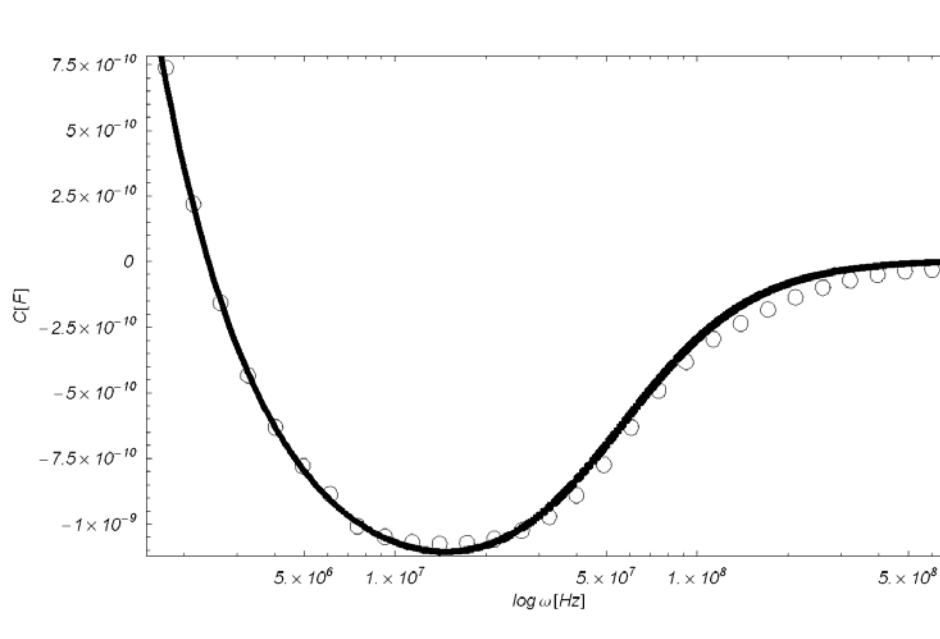
Dielektrične lastnosti vlažnih vezljivih zemljin so bile merjene z metodo dielektrične spektroskopije. V ta namen smo izdelali posebno merilno celico, v obliki ploščnega kondenzatorja, s površino plošč $S=5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2$, razdalja med ploščama d pa se je za vsak vzorec spreminjala med 3,5 in 5,5 mm. Merilna naprava, uporabljena pri meritvah, nizkofrekvenčni impedančni analizator, omogoča avtomatsko merjenje admitance $Y(\omega) = G + i\omega C$, oziroma kapacitete in prevodnosti vzorca v območju nizkih frekvenc, to je med 100 Hz in 100 MHz. Vzorec, ki je bil uporabljen pri meritvah, je posebna vrsta gline, ki

je sestavljena iz minerala kaolinita. Meritve so se izvajale na suhem vzorcu in nato na vlažnih vzorcih, kjer se je vlažnost spreminjala med 32% in 56%.

Primer tipične izmerjene frekvenčne odvisnosti kapacitete za vzorec z 32% vsebnostjo vlage je prikazan na sliki 1. Razvidno je, da se pri nizkih frekvencah pojavijo zelo visoke vrednosti kapacitivnosti, v območju med nekaj 100 Hz in 100 MHz, ki je prikazano na sliki, pa so te vrednosti celo negativne. Meritev kapacitivnosti celice napolnjene samo z destilirano vodo poda konstantno vrednost kapacitete, ki vodi do splošno poznane vrednosti dielektrične konstante za vodo 81, kar potrjuje pravilnost in merodajnost meritev.

Eksperimentalno izmerjeno frekvenčno odvisnost kapacitete smo opisali z naslednjim modelom:

$$C(\omega) = C_{\infty} \left(\varepsilon_{\infty} - \frac{b}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{c_1}{(\omega \tau)^{\alpha+1}} \right), \quad (1)$$



Slika 1: Frekvenčna odvisnost kapacitete vzorca kaolinita pri vsebnosti vlage 32%, v območju negativne kapacitete. Točke predstavljajo izmerjene vrednosti, krivulja je izračunana po enačbi (1)

ki je na grafu ponazorjen s črto. Model vsebuje vrsto, v odvisnosti od vlažnosti vzorca spreminjajočih se parametrov: ε_{∞} podaja vrednost dielektrične konstante pri visokih frekvencah, τ je relaksacijski čas b pa popiše gostoto delcev [4]. Parameter $C_{\infty} = \varepsilon_{\infty} S / d$ pomeni geometrijsko kapacitivnost prazne merilne celice (S je površina plošč merilne celice, d pa njuna medsebojna razdalja).

Na sliki 1 predstavljen model ima naslednje vrednosti parametrov: $\epsilon_{\infty} = 5$, $b = 950$, $\tau = 1.8 \cdot 10^{-8}$, $\alpha = 0.3$, $c_1 = 15$.

Izkaže se, da je vrednost parametra b , ki popisuje gostoto gibljivih delcev v raztopini za suh vzorec enaka nič, kar pomeni, da v suhem vzrocu ni prosto gibljivih delcev. Fizikalni izvor izbranih spreminjajočih se parametrov, ki nastopajo v modelu za kapacitivnost še ni poznana. Izkaže pa se, da se z vlažnostjo spreminjajo predvsem parametri, ki podajajo število prosto gibljivih delcev v snovi.

3 Interpretacija in diskusija rezultatov

Glavni značilnosti izmerjenih vrednosti dielektričnih lastnosti mešanice zemljine in vode, ki so razvidne iz slike 1 so: zelo visoke vrednosti kapacitivnosti pri nizkih frekvencah ter pojav negativnih vrednosti kapacitivnosti na intervalu med nekaj 100 Hz in 10 MHz.

V literaturi najdemo nekaj podobnih rezultatov meritev frekvenčne odvisnosti kapacitivnosti vezljivih zemljin [5], ter pojav negativne kapacitete, ki ga avtorji v glavnem pripisujejo dogajanju ob elektrodah, brez natančnejše razlage pojava. Interpretacija pojava negativne kapacitete v odvisnosti od frekvence se najde v povezavi z meritvami kapacitivnosti organskih polimerov [6], kjer je posebej uvedena kompleksna mobilnost delcev raztopine.

Pri opisu izmerjenega dielektričnega odziva izhajamo iz Maxwelllove enačbe (Maxwell-Amperov zakon) za rotor magnetnega polja [7]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}(\vec{r}, \omega) = \vec{j}_f(\vec{r}, \omega) - i\omega\vec{D}(\vec{r}, \omega), \quad (2)$$

kjer je skupna gostota toka definirana kot vsota toka delcev in premikalnega toka, \vec{D} je gostota električnega polja. Tok delcev se še naprej razdeli na prosti tok in vezani tok. Ta razdelitev potrди že pokazano lastnost, da se voda v zemljinah pojavlja v treh oblikah [3] in sicer kot: adsorbirana, viskozna in prosta voda. Gibanje delcev v vodi je pri prvih dveh tipih močno povezana s površino zrna zemljine, medtem ko ta mejna površina nima nikakršnega vpliva na delce v prosti vodi.

Prosti tok delcev popisuje gibanje nevezanih ionov skozi raztopino, to je tok delcev v prosti vodi. Na vsak nabit delec v raztopini deluje sila električnega poja in sila upora, ki se opiše z relaksacijskim časom in je sorazmerna hitrosti delca. Enačba gibanja delca v raztopini pod vplivom oscilirajočega zunanega električnega polja je tako:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} + e\vec{E}. \quad (3)$$

Po Fourierjevi transformaciji enačbe (3) sledi izraz za tok delcev:

$$j_b(\omega) = \frac{(e^2 n \tau / m) E(\omega)}{1 + i\omega\tau}, \quad (4)$$

kjer je n povprečna gostota delcev. Prosti tok opisuje drugi člen v enačbi (1).

Tretji člen v enačbi (1) opisuje odziv vezane vode na zunanjo motnjo in kaže potenčno odvisnost od frekvence:

$$C J \bar{w}^{-(1+\alpha)} . \quad (5)$$

Gibanje ionov v adsorbirani in kapilarni plasti vode se popiše z naključnim gibanjem delcev ob prisotnosti delno absorbirajoče bariere. V zelo grobem približku, to je, če zanemarimo vpliv zunanjega električnega polja, se reševanje problema za gibanje delcev prevede na enostavno reševanje difuzijske enačbe v obliki:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} . \quad (6)$$

Rešitev enačbe poda verjetnostno gostoto w , ki pove verjetnost, da se bo delec, ki se v času $t=0$ nahaja na mestu x_0 v nekem poljubnem trenutku t nahajal na mestu x . Ustrezni začetni in robni pogoji za rešitev enačbe so torej:

$$w(x, x_0, t = 0) = \delta(x - x_0) , \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} - h w(x, x', t) \Big|_{x=0} = 0 . \quad (8)$$

Robni pogoj popisuje delno absorbirajočo bariero, kjer je parameter h je podan kot $h = (1 - p) / p \lambda \sqrt{2\pi}$, p pa podaja lastnost delno absorbirajoče bariere, pri čemer velja, da je za $p=1$ bariera popolnoma odbojna in se ne absorbira noben delec, za $p=0$ pa je bariera popolnoma absorbirajoča, kar pomeni, da se absorbira vsak delec, ki pade nanjo. Parameter λ popisuje povprečno prosto pot delca.

Reševanje enačbe (6) ob pogojih (7) in (8) je izvedeno v [8] in vodi do rešitve za gostoto toka delcev dN/dt in število delcev, ki se absorbirajo. Izkaže se, da je v primeru $\hat{h} = h\sqrt{Dt} \gg 1$ število delcev opisano z enačbo:

$$N \cong 2n_0 \sqrt{\frac{Dt}{\pi}} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\hat{h}} \right) . \quad (9)$$

Tako za gostoto toka delcev za dolge čase velja:

$$\frac{dN}{dt} \propto t^{-1/2} . \quad (10)$$

Admitanca sistema, ki je posledica difuzije delcev skozi plast vezane vode ob površini zrna zemljine, je definirana kot razmerje (Laplaceovih transformirank) gostote toka in koncentracije delcev [9]. Iz rezultatov (9) in (10) za normalno difuzijo delcev ob absorbirajoči barieri sledi, da je difuzijska kapaciteta takega sistema v limiti nizkih frekvenc konstantna in torej normalna difuzija delcev ne more biti vzrok potenčne odvisnosti kapacitete (5).

V dinamiki delcev v kompleksnih sistemih (amorfni trdninah [10], poroznih snoveh [11], hidroloških sistemih [12],) se velikokrat opazijo anomalni difuzijski procesi [13] za katere je značilno, da je povprečje kvadrata oddaljenosti delca potenčna funkcija časa $\langle x^2 \rangle \propto t^\beta$, $\beta \neq 1$

medtem, ko je za normalno difuzijo značilna linearna odvisnost povprečja kvadrata oddaljenosti delca od časa $\langle x^2 \rangle \propto t$. V nadaljevanju podajamo mogočo razlago potenčne frekvenčne odvisnosti kapacitete vezane vode, ki temelji na anomalni difuziji delcev v plasti vezane vode ob absorbirajoči površini zrna zemljine.

Omejimo se na enodimenzionalni primer anomalne difuzije delcev v območju $0 < x < L$ v bližini delno absorbirajoče bariere. Formalno ozadje anomalne difuzije izhaja iz frakcijskega diferencialnega računa [13, 14], kjer je frakcijski časovni odvod definiran tako:

$$\frac{\partial^\gamma \phi}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t dt' (t-t')^{-\gamma} \frac{d\phi(t')}{dt'}, \quad (11)$$

kjer je ϕ poljubna funkcija, Γ pa poljubno izbran parameter.

Za transport delcev v vezani vodi v bližini površine delca predpostavimo, da velja kontinuitetna enačba:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}, \quad (12)$$

kjer je c koncentracija delcev, j pa njihov tok ter da tok delcev opišemo z generaliziranim Darcyjevim zakonom [9, 14]:

$$j = -D \frac{\partial^{-\alpha} c}{\partial t^{-\alpha} \partial x}, \quad (13)$$

kjer je D sedaj generalizirana difuzijska konstanta. Iz zgornjih enačb sledi frakcijska difuzijska enačba v obliki:

$$\frac{\partial^{1+\alpha} c}{\partial t^{1+\alpha}} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (14)$$

kjer je α izbrana vrednost parametra definirana pri modelu (1).

Sprememba koncentracije delcev na robu opazovane plasti debeline L je sorazmerna spremembi električnega polja v tem območju, tako da je odziv določen z razmerjem:

$$Y(s) \propto \frac{j(s)}{c(s)}, \quad (15)$$

kjer je s Laplaceova spremenljivka povezana s frekvenco $s = i\omega$. Reševanje frakcijske difuzijske enačbe (14) v frekvenčni domeni, ob robnem pogoju za delno absorbirajočo bariero (8), privede do izraza:

$$Y(z) \propto -z^{-(1-\alpha)/2} \frac{\sinh(z^{(1+\alpha)/2}) - h' \cosh(z^{(1+\alpha)/2})}{h' \sinh(z^{(1+\alpha)/2}) - \cosh(z^{(1+\alpha)/2})}, \quad (16)$$

kjer je $z = s/\omega_0$, $h' = h(\omega_0/s)^{(1+\alpha)/2}L$ in $\omega_0 = (D/L^2)^{(1+\alpha)}$. V nizkofrekvenčni limiti $\omega/\omega_0 \ll 1$ dobimo za imaginarni del admitance, t.j. kapaciteto, sistema s popolnoma absorbirajočo bariero ($h \rightarrow \infty$):

$$C(\omega) \propto \omega^{-(1+\alpha)} + const., \quad (17)$$

ki kaže enako frekvenčno odvisnost kot modelska funkcija (5).

4 Zaključki

V prispevku so predstavljene meritve dielektričnih lastnosti izbranih vezljivih zemljin v območju plastičnosti. Meritve v nizkem frekvenčnem območju podajo nepričakovane rezultate, saj se v določenem frekvenčnem območju izmerijo celo negativne vrednosti kapacitete. V literaturi zaenkrat še ni najti ustreznega modela, ki bi popisoval podobna dogajanja v vlažnih zemljinah. Predstavljen model, ki ustrezno popiše izmerjene vrednosti temelji na dejstvu, da se tok delcev v sistemu zemljina – voda razdeli na prosti in vezani del. Prosti tok delcev v vodi, ki ni vezana na površino zrn je opisan z enačbo gibanja pod vplivom oscilirajočega električnega polja in ima tako ustrezno fizikalno podlago. Dinamika toka vezanih delcev pa je predstavljena v okviru anomalne difuzije, ki pokaže potenčno odvisnost kapacitete od frekvence.

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Brunu Cviklu za pomoč in vodenje pri raziskovanju v okviru diplomske naloge, katere nadaljevanje predstavlja ta prispevek.

Literatura

- [1] B. Dolinar, *Fizikalne lastnosti zasičenih vezljivih zemljin v odvisnosti od mineralne sestave*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Doktorska disertacija, 2004.
- [2] A. Kaya, H.Y. Fang, *Identification of contaminated soils by dielectric constant and electrical conductivity*, Journal of environmental engineering 123, 169-177, 1997.
- [3] T. Saarenketo, *Electrical properties of water in clay and silty soils*, Journal of Applied Geophysics 40, 73-88, 1998.
- [4] J. Kramer, *Raziskava možne soodvisnosti nekaterih mehanskih (nedrenirane strižne trdnosti v območju plastičnosti) in dielektričnih svojstev izbranih vezljivih zemljin*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Diplomsko delo, 2003.
- [5] M. Carrier, K. Soga, *A four terminal measurement system for measuring the dielectric properties of clay at low frequencies*, Engineering Geology 53, 115-123, 1999.
- [6] H. L. Kwok, *Modeling negative capacitance effect in organic polymers*, Solid State Electronics 47, 1089-1093, 2003.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed., Pergamon Press, 1984.

- [8] A. S. Usenko, A. G. Zagorodny, *Brownian motion in a system with absorbing boundaries*, Molecular Physics 61, 1213-1246, 1987.
- [9] J. Bisquert, A. Compte, *Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion*, J. Electroanal. Chem. 499, 112, 2001.
- [10] H. Scher, E. W. Montroll, *Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids*, Phys. Rev. B 12, 2455, 1975.
- [11] B. Berkowitz, H. Scher, *The role of probabilistic approaches to transport theory in heterogeneous media*, Transp. Porous Media, 42, 241, 2001.
- [12] H. Scher, G. Margolin, R. Metzler, J. Klafter, B. Berkowitz, *The dynamical foundation of fractal stream chemistry: The origin of long retention times*, Geophys. Res. Lett. 29, 1, 2002.
- [13] R. Metzler, J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach*, Phys. Rep. 339, 1, 2000.
- [14] M. Caputo, *Diffusion of fluids in porous media with memory*, Geothermics 28, 113, 1999.



Linearne elastične lastnosti materiala z naključno celično strukturo

G. Mejak¹

Linear elastic properties of the material with the random cellular structure

Povzetek. V prispevku je obravnavan direktni numerični izračun linearnih materialnih lastnosti materiala z naključno celično strukturo. Izračun temelji na uporabi metode končnih elementov dveh velikostnih skal, ki je v prispevku na kratko predstavljena. Z numeričnim računom je pokazano, da je statistična porazdelitev komponent volumenskega povprečja napetostnega tenzorja že pri sorazmerno majhnem številu celic blizu normalne porazdelitve. V primeru struktur z večjim številom celic so na osnovi dovolj velikih vzorcev izračunane osnovne statistike materialnih lastnosti.

Abstract. Direct numerical computation of the linear material properties of the material with the cell structure is presented. The computation is based on the two scale finite element method which is briefly explained. Presented numerical examples show that the statistical distribution of the spacial average of the stress components is close to the normal distribution for a quite small number of cells. In the case of the material with a large number of cells basic statistical characteristics of the material are computed using a sufficiently large population.

1 Uvod

Teoretična določitev materialnih lastnosti heterogenega kompozitnega materiala iz danih materialnih lastnosti kompozitnih komponent je zahtevna naloga. Znano je, da so materialne lastnosti odvisne tako od materialnih lastnosti kot tudi od geometrične strukture komponent. V številnih primerih ima geometrična struktura v primerjavi z velikostjo vzorca materiala majhno karakteristično velikost. Pravimo, da ima naloga potem dve velikostni skali; makro, ki ustreza velikosti vzorca in mikro, ki je enaka karakteristični velikosti mikrostrukture. Mikrostruktura ima lahko določen vzorec. Najenostavnejši primer je celična struktura, katere posebni primer je periodična struktura. Znano je, da moremo v primeru periodične strukture materialne lastnosti

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

teoretično določiti s pomočjo homogenizacije. V primeru neperiodične strukture teorija homogenizacije praviloma ne določa enolično efektivnih materialnih lastnosti, temveč zagotavlja samo njihov obstoj. Z drugimi besedami, homogenizacija je zgolj eksistenčna teorija, ki žal ne pove kako se efektivne materialne lastnosti dejansko tudi izračunajo.

Direktno numerično računanje efektivnih materialnih lastnosti materiala z mikrostrukturo je časovno in prostorsko zelo zahtevno. V posameznih primerih se uporabljajo najmočnejši možni računalniki, v večini primerov pa je račun omejen na sorazmerno majhne reprezentativne volumenske elemente (RVE) [3]. V nasprotju s tem bo v prispevku uporabljena nova numerična metoda, imenovana metoda končnih elementov dveh velikostnih skal, ki omogoča izračun s sorazmerno velikim RVE že pri skromni računalniški moči. Hkrati pa je zaradi izredne učinkovitosti metode moč že pri majhnem številu celic izračunati popolno populacijo vseh možnih celičnih struktur. Pri srednjem velikem številu celic pa je možno izračunati dovolj velik statistični vzorec, ki dovolj zanesljivo določa osnovne statistične karakteristike materiala.

Prispevek bomo začeli s kratko teoretično predstavitevijo celične strukture in pripadajočim pojmom mešanja z naključnim izborom celične strukture. V naslednjem razdelku bo na kratko predstavljena metoda končnih elementov dveh velikostnih skal [4]. Sledil bo primer izračuna popolne populacije vseh možnih celičnih struktur za 9 in 16 celicami z naključno orientiranim eliptičnim vključkom. Videli bomo, da se že pri 16-tih celicah nakazuje normalna porazdelitev slučajnostnih spremenljivk celične strukture. Pri večjem številu celic popolni izračun populacije ni možen. Zato bomo namesto le tega izbrali dovolj velik naključni vzorec in za njega izračunali osnovne statistične karakteristike. Z računskim primerom bomo potrdili predpostavko, da z naraščajočim številom celic statistično povprečje volumenskih povprečij napetostnega tenzorja konvergira.

2 Celična struktura, mešanje in osnovne statistike

Označimo z O položaj materiala v d razsežnem prostoru \mathbb{R}^d , $d \in \{1, 2, 3\}$ in s \underline{C} pripadajoči elastični tenzor. Privzeli bomo, da je O odprta in omejena množica. Pravimo, da ima material v položaju O celično strukturo, če

- a) obstaja družina odprtih množic $\hat{O}^\gamma \subset \mathbb{R}^d$, $\gamma \in \{1, \dots, \Gamma\} \subset \mathbb{N}$ skupaj z družino elastičnih tenzorjev $\hat{\underline{C}}^\gamma$;
- b) obstaja družina difeomorfizmov $T_i^\gamma: \hat{O}^\gamma \rightarrow O_i^\gamma := T_i^\gamma(O^\gamma) \subset O$, $i \in \{1, \dots, I^\gamma\} \subset \mathbb{N}$ s paroma disjunktnimi zalogami vrednosti;
- c) $\bar{O} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \cup_{i \in I^\gamma} \bar{O}_i^\gamma$;
- d) zožitev elastičnega tenzorja \underline{C} na O_i^γ je enaka prenosu tenzorja $\hat{\underline{C}}^\gamma$ z difeomorfizmom T_i^γ iz \hat{O}^γ na O_i^γ .
- e) $\Gamma \ll \sum_{\gamma \in \Gamma} I^\gamma$.

Množicam \hat{O}^γ bomo v nadaljevanju pravili osnovne oziroma referenčne celice, množicam O_i^γ pa celice. Skupno število celic je $K = \sum_{\gamma \in \Gamma} I^\gamma$. S točko e) izključujemo trivialni primer $I^\gamma = 1$

za vsak $\gamma \in \Gamma$. Primer celične strukture je periodična struktura. V tem primeru je $\Gamma = 1$, družina difeomorfizmov pa je družina translacij. Za $\Gamma > 1$ je struktura praviloma neperiodična in le v posebnem primeru periodična. Vidimo, da so po točki d) materialne lastnosti telesa s celično strukturo določene z materialnimi lastnostmi osnovnih celic.

Privzemimo sedaj, da obstaja taka bijektivna preslikava $S : O \rightarrow O$, da je njena zožitev na poljubno celico $O_i^{\gamma_1}$, $i \in I^{\gamma_1}$ diferenciablena preslikava s sliko $O_j^{\gamma_2}$, $j \in I^{\gamma_2}$, $(i, \gamma_1) \neq (j, \gamma_2)$. Zahteva $S(O_i^{\gamma_1}) = O_j^{\gamma_2}$ ohranja celičnost strukture. Material $S(O)$ je sestavljen iz enakih celic kot O , vendar ima drugačno geometrično in materialno strukturo. V tehnologiji proizvodnje materiala ima preslikava S vlogo mešanja. Opisan model ustreza primeru, ko so osnovne celice določene s fizikalnimi robnimi pogoji, kot so naprimer temperatura, tlak, napetosti, materialna in geometrična slika celične strukture pa je posledica mešanja osnovnih celic.

Operator mešanja premeša celično strukturo (O, \underline{C}) v celično strukturo $(O, S(\underline{C}))$. Pri danih predpostavkah je množica operatorjev mešanja \mathcal{S} končna, vendar je njena moč oziroma kardinalnost $|\mathcal{S}|$ lahko zelo velika. Poglejmo na primeru. Naj bo $d = 2$, O kvadrat z enotsko dolžino stranice, $\Gamma = 1$ in \hat{O} kvadrat z dolžino stranice $\frac{1}{N}$. Potem je $I = N^2$, difeomorfizmi T_i pa so natanko togi pomiki z rotacijo za kot φ_i , ki je večkratnik $\frac{\pi}{2}$. Označimo z m_j , $j = 1, 2, 3, 4$ število rotacijskih kotov $\varphi_i = j\frac{\pi}{2}$. V primeru, če osnovna celica nima kvadratne materialne simetrije, je potem število vseh možnih mešanj enako številu permutacij N^2 elementov s ponavljanji m_j . Torej $|\mathcal{S}| = \frac{N^2!}{m_1!m_2!m_3!m_4!}$.

Iz primera vidimo, da je materialna slika celične strukture neodvisna od translacij med celicami, ki so dobljene z enakim kotom rotacije osnovne celice. V ta namen v splošnem primeru definiramo ekvivalenčno relacijo na družini preslikav $\{T_i^\gamma, i \in I^\gamma\}$ s predpisom $T_i^\gamma \equiv T_j^\gamma \iff \exists \vec{a} \in \mathbb{R}^d$ tako, da $T_i^\gamma = \vec{a} + T_j^\gamma$. Tu smo z \vec{a} zapisali translacijski vektor. Ekvivalenčna relacija separira družino preslikav $\{T_i^\gamma\}$ v ekvivalenčne razrede $[T]_j^\gamma$. Materialni opis snovi s predpisano geometrijo celične strukture je tako določen s surjektivno preslikavo $\omega : \{1, \dots, K\} \rightarrow \{[T]_j^\gamma : \gamma \in \{1, \dots, \Gamma\}, j \in \{1, \dots, J^\gamma\}\}$, mešanje pa je permutacija na množici $\mathcal{K} = \{1, \dots, K\}$ s ponavljanjem na množicah $\omega^{-1}([T]_j^\gamma)$. Množico vseh teh permutacij bom označevali s $\Pi(\mathcal{K})$. Če označimo s $[K]$ število vseh ekvivalenčnih razredov in z n_j^γ število elementov v $\omega^{-1}([T]_j^\gamma)$, potem si moremo mešanje predstavljati kot izbor K kroglic iz žare, ki vsebuje K kroglic, $[K]$ različnih barv, kjer je n_j^γ kroglic enake barve.

Vsako mešanje predstavlja tehnološko realizacijo materiala. Če je mešanje naključno, so tudi realizacije naključne in tako postane vmesno vprašanje, kakšne so pričakovane materialne lastnosti in kakšno je odstopanje realizacij od pričakovanih vrednosti. Odgovor na to vprašanje bomo dali v okviru verjetnostne teorije. Verjetnostni prostor je trojica $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, kjer je Ω množica dogodkov, \mathcal{F} sigma-algebra podmnožic množice Ω in μ enotska mera definirana na σ . Pri celični strukturi je Ω diskretna množica in zato je opis pripadajočega verjetnostnega prostora precej enostavnejši. Videli smo, da je dogodek mešanja enakovreden izboru K kroglic torej $\Omega = \Pi(\mathcal{K})$. Privzeli bomo, da so vsa mešanja enako verjetna, $\mu(\omega_1) = \mu(\omega_2)$ za poljubna $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, 2$.

Funkciji f , ki je odvisna od dogodka ω , $f = f(\omega)$ pravimo naključnostna funkcija. Primeri naključnostnih funkcij, ki jih bomo obravnavali so prostorsko povprečne vrednosti komponent napetostnega tenzorja. Vsaki naključni funkciji f definirani na prostoru dogodkov prired-

imo povprečno vrednost $E(f) = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$, ki se v primeru končnega prostora dogodkov poenostavi v končno vsoto. Naključni spremenljivki priredimo še disperzijo $C(f)$, povprečno vrednost kvadrata razlike med slučajno spremenljivko in njeno povprečno vrednost in standardno deviacijo $\sigma(f) = \sqrt{C(f)}$.

3 Metoda dveh velikostnih skal

Vsaki realizaciji pripada robna naloga elastostatike. Vsem realizacijam bomo predpisali enake robne pogoje. Konkretno, predpisali bomo pomike, ki pripadajo osnovnim homogenim deformacijam, enoosnim deformacijam in enostavnim strigom. V ravninskem primeru imamo tako tri robne naloge, dve enoosni deformaciji in en enostavni strig.

Pri velikem številu celic je direktno reševanje robne naloge z običajno metodo končnih elementov s stališča časovne in prostorske zahtevnosti praktično nemogoče. Zato smo razvili novo metodo, metodo končnih elementov dveh velikostnih skal, ki pri svojem izračunu upošteva celično strukturo in na ta način omogoča reševanje problemov z velikim, več tisoč, številom celic. Osnova metode je hkratna diskretizacija naloge z dvema prostoroma končnih elementov. Metodo bomo predstavili na primeru linearne elastične naloge ravnovesja: poišči $\vec{u} \in \vec{u}_0 + \vec{\mathcal{U}}$, tako, da je

$$\int_O \underline{t}(\vec{u}) : \underline{e}(\vec{v}) dO = \vec{0}, \quad (1)$$

za vse $\vec{v} \in \vec{\mathcal{U}}$. Tu smo označili $\vec{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^d$ množico vseh dopustnih pomikov, ki imajo ničelne vrednosti na robu območja $O \subset \mathbb{R}^d$, \vec{u}_0 je predpisan pomik na robu območja, $\underline{e}(\vec{v})$ je infinitezimalni deformacijski tenzor, ki pripada pomiku \vec{v} , $\underline{t}(\vec{u}) = \underline{\underline{C}}\underline{e}(\vec{u})$ je napetostni tenzor, $\underline{\underline{C}}$ pa je elastični tenzor.

Označimo z \mathcal{T}_H diskretizacijo območja O na končne elemente, ki je pokorna dani celični strukturi $O = \cup O_i^y = \cup_{k=1, \dots, K} O_k$. Z drugimi besedami, zožitev diskretizacije na vsako celico je diskretizacija celice na končne elemente. Pripadajoči prostor končnih elementov bomo označili z V_H . Prostor V_H imenujemo prostor makro končnih elementov. Z \hat{V}_H označimo podprostor prostora V_H tistih funkcij, ki so neničelne na robu celic. Prostoru pravimo prostor robnih funkcij celice. Bazne funkcije prostorov V_H in \hat{V}_H so Φ_p , $p = 1, \dots, P$ in $\hat{\Phi}_p$, $p = 1, \dots, \hat{P}$. Nadalje označimo s \mathcal{T}_{h_k} diskretizacijo celice O_k na končne elemente in z V_{h_k} pripadajoč prostor končnih elementov. Prostor V_{h_k} imenujemo prostor mikro elementov. Mikro in makro diskretizacija nista neodvisni, ampak morata biti med seboj kompatibilni. To pomeni, da so vsi vozli makro diskretizacije hkrati tudi vozli mikro diskretizacije. Po drugi strani, pa ne zahtevamo, da so vozli mikro diskretizacije hkrati tudi vozli makro diskretizacije. To pomeni, da je mikro diskretizacija finejša od makro diskretizacije. Prostora V_H in V_{h_k} sta prostora skalarnih funkcij. Direktna vsota po komponentah teh prostorov sta prostora vektorskih funkcij \vec{V}_H and \vec{V}_{h_k} .

Vsaki celici O_k in vsaki makro bazični funkciji $\vec{\Phi}_p \in \vec{V}_H$ priredimo diskreten variacijski celični problem: najdi $\vec{M}_{p,k} \in \vec{V}_{h_k}$ tako, da

$$\begin{aligned} \vec{M}_{p,k} &= \vec{\Phi}_p|_{\partial O_k} & \text{na} & \partial O_k & \text{in,} & (2) \\ \alpha_k(\vec{M}_{p,k}, \vec{\Phi}) &= \vec{0} & \text{za vse} & & \vec{\Phi} \in \vec{V}_{0h_k}. \end{aligned}$$

Tu je \vec{V}_{0h_k} podmnožica funkcij iz \vec{V}_{h_k} , ki imajo ničelno vrednost na robu $\partial\Omega_k$, $a_k(\bullet, \bullet)$ pa je zožitev forme (1) na celico O_k . S pomočjo funkcij $\vec{M}_{p,k}$ definiramo funkcijo \vec{M}_p , zožitev katere na O_k je natanko $\vec{M}_{p,k}$. Funkcijam \vec{M}_p pravimo celične bazične funkcije. Velja omeniti, da je v primeru, ko sta celici O_k and O_l afino ekvivalentni oziroma pripadata isti referenčni celici, dovolj izračunati celične bazične funkcije samo za eno celico.

Z danimi celičnimi bazičnimi funkcijami rešitev globalnega problema (1) aproksimiramo z $\vec{u}_{H,h} = \sum_{p=1}^P U^p \vec{M}_p$ tako, da velja

- i) $\vec{u}_{H,h} = \Pi \vec{u}_0$ na robu $\partial\Omega$, kjer je $\Pi \vec{u}_0$ projekcija \vec{u}_0 na \vec{V}_H ;
- ii) $\vec{u}_{H,h}$ je Petrov-Galerkinova rešitev za diskretizacijo \mathcal{T}_H s prostorom koordinatnih funkcij \vec{M}_p in prostorom utežnih funkcij $\vec{\Phi}_p \in \vec{V}_{0H}$. Tu je \vec{V}_{0H} podprostor funkcij iz \vec{V}_H , ki imajo ničelne vrednosti na robu.

Iz (ii) sledi:

$$a(\vec{M}_p, \vec{\Phi}_q) U^p = 0 \quad \text{za vse} \quad \vec{\Phi}_q \in \vec{V}_{0H}, \quad q \in \{1, \dots, P_0\}. \quad (3)$$

V (3) je uporabljena sumacija po ponavljajočem se indeksu p .

Iz konstrukcije sledi, da je zožitev funkcije $\vec{u}_{H,h}$ na celico O_k rešitev celičnega problema. Konvergenca metode končnih elementov dveh velikostnih skal je enaka konvergenca makro diskretizacije. Res, iz (1) in (3) sledi, da $a(\vec{u} - \vec{u}_{H,h}, \vec{w}) = 0$ za vsak $\vec{w} \in \vec{V}_{0H} \subset \vec{H}_0^1(O)$. Potem

$$\begin{aligned} a(\vec{u} - \vec{u}_{H,h}, \vec{u} - \vec{u}_{H,h}) &= a(\vec{u} - \vec{u}_{H,h}, \vec{u} - \vec{w} + \vec{w} - \Pi \vec{u}_{H,h} + \Pi \vec{u}_{H,h} - \vec{u}_{H,h}) = \\ &= a(\vec{u} - \vec{u}_{H,h}, \vec{u} - \vec{w} + \Pi \vec{u}_{H,h} - \vec{u}_{H,h}), \end{aligned} \quad (3)$$

Pri predpostavki, da je a omejena eliptična forma potem sledi

$$\|\vec{u} - \vec{u}_{H,h}\|_1 \leq \frac{\|a\|}{\alpha} (\|\vec{u} - \vec{w}\|_1 + \|\Pi \vec{u}_{H,h} - \vec{u}_{H,h}\|_1) \quad (4)$$

za poljuben $\vec{w} \in \vec{V}_{0H}$ in konvergenca sledi iz interpolacijskih lastnosti prostora končnih elementov \vec{V}_{0H} .

4 Numerični primeri

Omejili se bomo na ravninski primer na material s celično strukturo, ki je sestavljen iz dveh osnovnih kvadratnih celic. Privzeli bomo, da ima vzorec materiala kvadratno obliko z enotsko dolžin stranice in da je sestavljen iz $K = N^2$ kvadratnih celic. Obe osnovni celici imata eliptični vključek s polosema $a_e = 0.4$ in $b_e = 0.2$ v smeri stranic kvadrata. Celici se razlikujeta med seboj po orientaciji eliptičnih vključkov za pravi kot. Število osnovnih celic prve oziroma druge vrste je v materialu predpisano, nedoločena pa je njihova porazdelitev med K celicami. Privzeli bomo, da sta tako matrika celice kot tudi vključek iz izotropičnega materiala in da imata osnovni celici enake materialne lastnosti. Materialne lastnosti matrike bomo zapisali z E^m in ν^m , vključka pa z E^i in ν^i . Predstavljeni bodo rezultati za $E^m = 100E^i$ in $\nu^m = \nu^i = \frac{1}{4}$. Material z veliko razliko Youngovega modula med matriko in vključkom je izbran z namenom poudariti

vpliv strukture na efektivne materialne lastnosti. Tu velja opozoriti na posplošitev Hillovega rezultata, da so v posebnem primeru $\mu^m = \mu^i$ makro materialne lastnosti odvisne zgolj od volumenskega razmerja med matriko in vključki in neodvisne od geometrije vključkov.

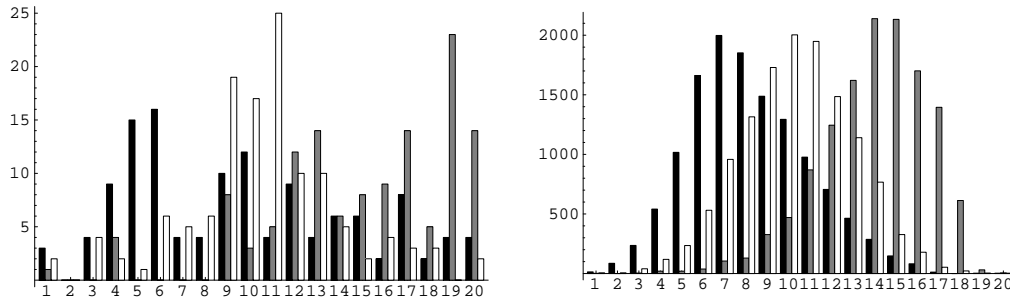
Začnimo s primerom $K = 9$, struktura pa naj bo sestavljena iz 5 osnovnih celic prve in 4 osnovnih celic druge vrste. Skupno število vseh možnih struktur je $S = 126$. Rezultati za ta primer so zbrani v Sliki 1 in Tabeli 1. Iz slike vidimo, da je razporeditev povsem naključna. V Tabeli 1 je podana statistična analiza površinskih povprečnih vrednosti ² brezdimenzijskih komponent napetostnega tenzorja za enoosno deformacijo in enostavni strig v smeri osi x . Maksimalne vrednosti so v prvi vrstici, v drugi je razpon med maksimalnimi in minimalnimi vrednostmi, v tretji so povprečne vrednosti in v zadnji standardne deviacije. Primer $K = 16$, z osmimi osnovnimi celicami vsake vrste, ima $S = 12870$ vseh možnih struktur. Tu v Sliki 1 že opazimo porazdelitev, ki ima že nekatere značilnosti normalnega porazdelitvenega zakona. Porazdelitev pa še ni normalna, saj med drugim ni simetrična glede na povprečno vrednost. Množica struktur je za $K = 16$ precej bogatejša kot za $K = 9$, zato je vpliv strukture v tem primeru večji. Opazimo, da je pri enoosni obremenitvi v smeri osi x vpliv strukture relativno največji na $\langle t_{yy} \rangle$. Pri enoosni deformaciji je zaradi simetrije zrcaljenja populacijsko povprečje strižnih napetosti enako nič. Podobno velja za osne napetosti pri strižni deformaciji. Pri statističnem vzorcu je simetrija porušena. Povprečje strižnih napetosti enoosne deformacije je tako mera simetričnosti populacije. Za primera $K = 9$ in $K = 16$ smo lahko izračunali popolno populacijo. Za nadaljne K pri enakem številu osnovnih celic prve in druge vrste pa je število popolne populacije bistveno preveliko, pri $K = 64$ je S velikostnega razreda 10^{19} , pri $K = 256$ pa 10^{329} , zato se v nadaljevanju omejujemo na statistični vzorec. Iz množice vseh populacij smo za $K = 64$ izbrali vzorec z $S = 6000$ strukturami, za $K = 256$ pa z $S = 1000$ strukturami. Njuni porazdelitvi sta dani na Sliki 2. Porazdelitvi imata osnovne značilnosti normalne porazdelitve. Velikost vzorca je v primerjavi z velikostjo populacije izredno majhna, zato je na mestu vprašanje, kako velik mora biti vzorec, da je v okviru predpisane natančnosti dosežena stacionarnost statističnih karakteristik. Izračun smo naredili za $K = 64$ in $S = 18000$, njen rezultat za povprečno vrednost komponente $\langle t_{xx} \rangle$ pri enoosni obremenitvi v smeri x pa je prikazan na Sliki 3. Vidimo, da je stacionarnost v okviru natančnosti štirih decimalnih mest dosežena že pri $S = 2500$. Podobni rezultat velja tudi za ostale statistične karakteristike. Omenimo, da je za $K = 256$ dovolj vzeti $S = 500$. Če privzamemo veljavnost normalne porazdelitve, potem iz vrednosti E in σ iz Tabele 1 za $K = 64$ in $K = 256$ sledi, da je maksimalna vrednost $\langle t_{xx} \rangle$ pri enoosni obremenitvi v smeri osi x enaka 0.53894 oziroma 0.55534 ³. S pomočjo analize vpliva mešanja, ki zamenja samo dve celici smo ugotovili, da je maksimalnemu rezultatu blizu pasovna struktura, ki ima tri pasove enako orientiranih vključkov. Iz predstavljenih rezultatov in izračunov, ki jih zaradi pomanjkanja prostora ne navajamo, sklepamo, da z naraščajočim številom celic porazdelitev konvergira k normalni porazdelitvi.

Za $K \geq 1024$ so za naključno izbrano strukturo izračunane vrednosti z veliko verjetnostjo zelo blizu povprečnih vrednosti, zato za njihovo določitev zadostuje že izračun za samo nekaj naključnih struktur. S $K \rightarrow \infty$ površinsko povprečje $\langle \underline{t} \rangle$ konvergira k statističnemu povprečju $E(\underline{t})$ v L^2 normi s produktno mero verjetnostne in površinske mere [1], [2]. V limiti zveza

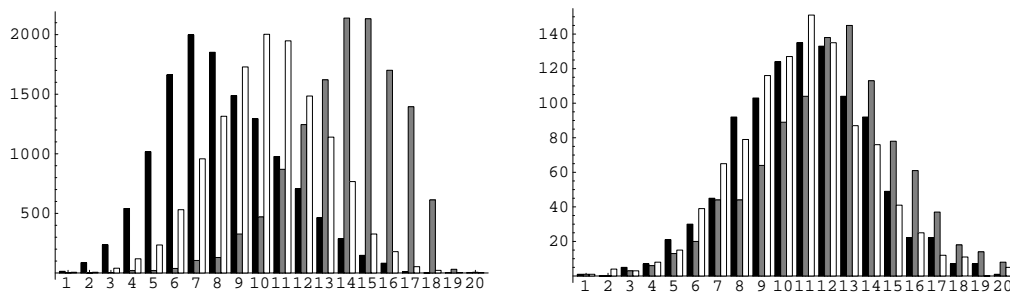
$${}^2 \langle \underline{t} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{t} dO$$

³ Za izračun teh vrednosti je potrebna razširjena aritmetika z natančnostjo 20 oziroma 330 decimalnih mest.

$\langle \underline{t} \rangle = \underline{C}^* \langle \underline{e} \rangle$ določa efektivni elastični tenzor. Aproximacijo efektivnega elastičnega tenzorja tako moremo dobiti z izračunom $\langle \underline{t} \rangle$ za dovolj velik K , glej Tabelo 2. Kot vidimo, je v primeru enakega števila osnovnih celic obeh vrst material izotropičen. Odstopanje od izotropije v Tabeli 2 je mera za natančnost aproksimacije.



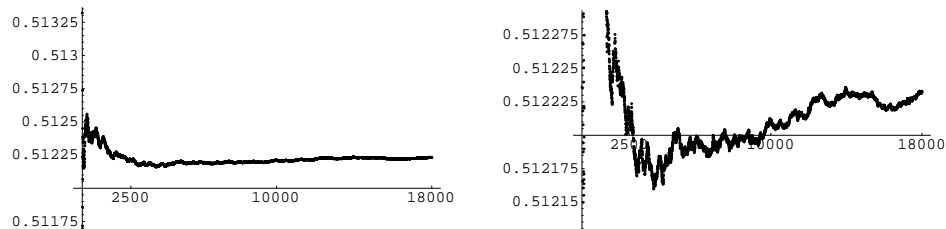
Slika 1 : Razporeditev števila realizacij na ekvidistančne intervale med spodnjo in zgornjo mejo povprečnih vrednosti komponent napetostnega tenzorja za enosno deformacijo v smeri osi x ; t_{xx} prvi stolpec (črni), t_{yy} drugi stolpec (sivi), t_{xy} tretji stolpec (beli). Levo $K = 9$, desno $K = 16$.



Slika 2 : Levo $K = 64, S = 6000$; desno $K = 256, S = 1000$.

Literatura

- [1] A. Bourgeat, A. Piatnitski, *Approximation of effective coefficients in stochastic homogenization*, Ann. de l'Institut Henri Poincar (B) Probability and Statistics, 40, 153–165, 2004.
- [2] K. Golden, G. Papanicolaou, *Bounds for effective parameters of heterogeneous media by analytic continuation*, Commun. Math. Phys. 90, 473–491, 1983.
- [3] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, D. Jeulin, *Determination of the size of the RVE for random composites*, Int. J. Solids Struct. 40, 3647–3679, 2003.
- [4] G. Mejak, *Two scale finite element method*, poslano v objavo IJNME.



Slika 3 : Populacijska povprečna vrednost $\langle t_{xx} \rangle$ pri enoosni deformaciji v smeri osi x v odvisnosti od velikosti vzorca. Levo celotni razpon fluktuacije [0.511491,0.51332], desno razpon pod drobnogledom.

Tabela 1 : Statistična analiza.

		X-enoosni			Strig		
		$\langle t_{xx} \rangle$	$\langle t_{yy} \rangle$	$\langle t_{xy} \rangle$	$\langle t_{xx} \rangle$	$\langle t_{yy} \rangle$	$\langle t_{xy} \rangle$
$K = 9$ $S = 126$	max	0.55647	0.09906	0.00181	0.00244	0.00275	0.15993
	max - min	0.02843	0.02164	0.00360	0.00489	0.00551	0.01343
	E	0.54122	0.09313	0.00000	0.00000	0.00000	0.15340
	σ	0.00710	0.04437	0.00064	0.00082	0.00092	0.00362
$K = 16$ $S = 12870$	max	0.54424	0.10081	0.00234	0.00253	0.00253	0.15425
	max - min	0.04055	0.03157	0.00456	0.00507	0.00508	0.01682
	E	0.51946	0.09053	0.00000	0.00000	0.00000	0.14686
	σ	0.00558	0.00389	0.00059	0.00073	0.00073	0.00287
$K = 64$ $S = 6000$	max	0.52564	0.09376	0.00102	0.00137	0.00173	0.14188
	max - min	0.02523	0.01742	0.00221	0.00310	0.00321	0.00932
	E	0.51220	0.08619	-0.00006	-0.00005	0.00004	0.13750
	σ	0.00303	0.00233	0.00030	0.00042	0.00042	0.00129
$K = 256$ $S = 1000$	max	0.51306	0.08694	0.00051	0.00088	0.00070	0.13499
	max - min	0.01062	0.00781	0.00107	0.00157	0.00142	0.00397
	E	0.50802	0.08368	0.00000	-0.00001	0.00002	0.13317
	σ	0.00156	0.00123	0.00016	0.00024	0.00024	0.00060

Tabela 2 : Efektivni materialni koeficienti.

K	E_{xx}	E_{yy}	ν_{xy}	ν_{yx}
64	$0.49767E + 11$	$0.49958E + 11$	0.16934	0.16999
256	$0.49255E + 11$	$0.49616E + 11$	0.16319	0.16438
1024	$0.49170E + 11$	$0.49374E + 11$	0.16312	0.16380
4096	$0.49079E + 11$	$0.49140E + 11$	0.15984	0.16004
16384	$0.49166E + 11$	$0.49236E + 11$	0.15745	0.15768



Lindstedt-Poincarejeva metoda za dinamične sisteme z velikimi nelinearnostmi

M. Oblak¹ in R. Pušenjak²

Lindstedt-Poincare method for dynamical systems with high non-linearities

Povzetek. V članku je predstavljena modifikacija Lindstedt-Poincarejeve metode, v kateri dinamični sistem z veliko nelinearnostjo in veliko vrednostjo parametra v potenčni vrsti pretvorimo v ekvivalentni nelinearni dinamični sistem z majhnim perturbacijskim parametrom. Uporaba modificirane L-PM je prikazana na primeru nosilca, togo vpetega na enem in členkasto vpetega na drugem koncu. Resonančne krivulje nosilca so izračunane z uporabo rekurzivnega simboličnega računanja. Primerjava s klasično L-PM kaže prednosti modificirane metode, pri čemer ugotovimo, da L-PM ne zagotavlja verodostojnih rezultatov v dinamičnih sistemih z velikimi nelinearnostmi.

Abstract. The paper presents an extension of the Lindstedt-Poincare method, where the highly non-linear dynamical system, which depends on a large valued parameter in the power series is transformed into an equivalent non-linear dynamical system with small perturbation parameter. The application of the modified L-PM is described in the example of clamped-hinged beam. Resonance curves of the beam are computed by means of recursive symbolic computation. The comparison with standard L-PM shows advantages of the modified method, where it is concluded that standard L-P method does't guarantee the reliable results in dynamical systems with high nonlinearities.

1 Uvod

Standardna Lindstedt-Poincarejeva metoda (L-PM) je namenjena analizi dinamičnih sistemov z majhnimi nelinearnostmi, ki jih lahko izrazimo v obliki potenčnih vrst majhnega

¹ Red. prof. dr. Maks Oblak, Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

² Izr. prof. dr. Rudolf Pušenjak, Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

perturbacijskega parametra. Številni avtorji [1] so skušali uporabnost metode razširiti na sisteme z velikimi nelinearnostmi, pri čemer so se omejevali bodisi na sisteme z eno prostostno stopnjo, bodisi na sisteme brez dušenja, ali pa so od nelinearnosti sistema zahtevali določene lastnosti, npr. lih ali sod funkcijski potek. V tem članku bomo predstavili modifikacijo L-PM s posplošitvijo na sisteme z več prostostnimi stopnjami in kubičnimi nelinearnostmi. Uporabnost metode bomo prikazali s konstrukcijo različnih resonanc nosilca s členkasto-togim vpetjem, pri čemer bomo rezultate izračunov primerjali s standardno L-PM. Za razliko od drugih avtorjev bomo upoštevali tudi viskozno dušenje.

2 Modificirana Lindstedt-Poincarejeva metoda (ML-PM)

Praktični razlogi zahtevajo, da se pri analizi nelinearnih nihanj dinamičnih sistemov s kubičnimi nelinearnostmi omejimo na N modalnih načinov nihanja, ki jih opišemo z enačbo:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + c_n \frac{du_n}{dt} + \omega_{L_n}^2 u_n - \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \Gamma_{nmpq} u_m u_p u_q = p_n \cos \alpha t, \quad n=1,2,\dots,N \quad (1)$$

Prav tako kot v [2] lahko Lindstedt-Poincarejevo metodo uporabimo, če velja:

$$c_n = \varepsilon \tilde{c}_n, \quad \Gamma_{nmpq} = \varepsilon \tilde{\Gamma}_{nmpq}, \quad p_n = \varepsilon \tilde{p}_n, \quad (2)$$

in je ε majhen (pozitivni) parameter. V tem članku bomo obravnavali periodična nihanja, pri katerih zadošča ena časovna skala:

$$\tau = \omega t \quad (3)$$

tako da lahko enačbo (1) prepisemo na obliko:

$$\omega^2 \frac{d^2 u_n}{d\tau^2} + \varepsilon \tilde{c}_n \omega \frac{du_n}{d\tau} + \omega_{L_n}^2 u_n - \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{\Gamma}_{nmpq} u_m u_p u_q = \varepsilon \tilde{p}_n \cos \tau, \quad n=1,2,\dots,N, \quad (4)$$

pri tem pa dopustimo, da sme ε zavzeti velike vrednosti. Bistveni korak v ML-PM je razvoj ω^2 v potenčno vrsto namesto običajnega razvoja ω :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k, \quad (5)$$

kjer vpeljemo nov parameter α s pomočjo enačbe:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_0^2 \delta_k \alpha^k}{(1-\alpha)} = \omega_0^2 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k \alpha^k}{(1-\alpha)} \right] = \frac{\omega_0^2}{(1-\alpha)} \left(1 - \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \alpha^k \right). \quad (6)$$

V enačbi (6) izberemo $\delta_1 = 1$ in dobimo:

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{(1-\alpha)} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \delta_k \alpha^k \right) \quad (7)$$

s primerjavo enačb (5) in (6) pa:

$$\varepsilon \omega_1 = \omega_0^2 \alpha / (1-\alpha), \quad \varepsilon^2 \omega_2 = \omega_0^2 \delta_2 \alpha^2 / (1-\alpha), \dots \quad (8.a,b)$$

oziroma:

$$\alpha = \frac{\varepsilon\omega_1}{\omega_0^2 + \varepsilon\omega_1}, \quad \varepsilon = \frac{\omega_0^2\alpha}{\omega_1(1-\alpha)}. \quad (9.a,b)$$

Iz enačbe (9.a) sledi, da je parameter $\alpha < 1$ za vsak $\omega_1 > 0$, ne glede na to kako velik je parameter ε . Ko je α izračunan, lahko iz enačbe (8.b) izračunamo δ_2 in tako naprej. Za linearne frekvence nedušenega prostega nihanja ω_{L_n} približno velja celoštevilčno razmerje (npr. $\omega_{L_1} : \omega_{L_2} \approx \lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 3$). To lastnost izrazimo z uvedbo razglasitev σ_n v obliki:

$$\omega_{L_n}^2 = \omega_0^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 + \varepsilon\sigma_n = \omega_0^2 \left[\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 + \frac{\alpha\sigma_n}{\omega_1(1-\alpha)} \right], \quad (10)$$

kjer je λ_i celo število, ki ustreza eni od lastnih frekvenc ω_{L_n} , λ_n pa celo število, ki ustreza lastni frekvenci zelene osnovne resonance. Rešitev enačbe (1) tedaj lahko iščemo v obliki potenčne vrste:

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk} \alpha^k. \quad (11)$$

Z uvrstitvijo enačbe (7), pripadajočo razvrstitvijo za ω , z uvrstitvijo enačb (9.b) in (11) ter izenačevanjem členov ob potencah parametra α dobimo:

$$\alpha^0: \quad \frac{d^2 u_{n0}}{d\tau^2} + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 u_{n0} = 0, \quad (12)$$

$$\alpha^1: \quad \frac{d^2 u_{n1}}{d\tau^2} + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 u_{n1} = \frac{\tilde{p}_n}{\omega_1} \cos \tau - \frac{\omega_0}{\omega_1} \tilde{c}_n \frac{du_{n0}}{d\tau} + \left[\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\sigma_n}{\omega_1} \right] u_{n0} + \frac{1}{\omega_1} \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{f}_{nmpq} u_{m0} u_{p0} u_{q0} \quad (13)$$

$$\alpha^2: \quad \frac{d^2 u_{n2}}{d\tau^2} + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 u_{n2} = -\frac{\omega_0}{\omega_1} \tilde{c}_n \frac{du_{n1}}{d\tau} + \left[\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\sigma_n}{\omega_1} \right] u_{n1} - \delta_2 \frac{d^2 u_{n0}}{d\tau^2} - \frac{\omega_0}{2\omega_1} \tilde{c}_n \frac{du_{n0}}{d\tau} + \frac{1}{\omega_1} \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (\tilde{f}_{nmpq} + \tilde{f}_{nmqp} + \tilde{f}_{nqpm}) u_{m0} u_{p0} u_{q1} \quad (14)$$

Pri simboličnem reševanju s programskim orodjem *Mathematica*[®] dobimo splošno rešitev enačbe (12) v obliki:

$$u_{n0} = A_{n0} \cos \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_i} \tau - \Phi_{n0} \right], \quad (15)$$

ki jo rekurzivno uporabimo pri reševanju enačbe (13). Pri tem nastanejo sekularni členi, če se frekvence členov desne strani ujemajo z eno od linearnih frekvenc ω_{L_n} na levi strani enačbe. Sekularni členi povzročajo neomejeno naraščanje amplitud nelinearnega nihanja, zato jih moramo odpraviti. Z združitvijo vseh sekularnih členov in njihovo izenačitvijo z nič dobimo pogoje rešljivosti za posamezne vrste resonanc. V tem članku pogoje rešljivosti določamo avtomatično s pomočjo simboličnega računanja.

3.1 Pogoji rešljivosti pri osnovni resonanci

Zaradi preglednosti splošnega postopka določanja pogojev rešljivosti se omejimo na nelinearne dinamične sisteme z dvema prostostnima stopnjama ($N=2$), pri čemer lahko nastopita dve osnovni resonanci. Pri prvi velja $\omega \approx \omega_{10}$, pri drugi pa $\omega \approx \omega_{20}$. Hkrati obravnavajmo še vpliv notranje resonance z upoštevanjem razmerja $\lambda_1:\lambda_2 = 1:3$, ki v praksi nastopa pri upogibnih nihanjih nosilca s togo-členkastim vpetjem.

3.1.1 Prva osnovna resonanca, $\omega \approx \omega_{10}$

V tem primeru v enačbo (7) vstavimo $\omega_0 = \omega_{10}$ in v enačbi (10) upoštevamo, da je $\lambda_i = \lambda_1$ in $\sigma_1 = 0$. Odstranitev sekularnih členov iz enačbe (13) dosežemo, če so izpolnjeni pogoji:

$$4\tilde{p}_1 + A_{10} \left[-4\omega_{10}\tilde{c}_1 \sin \Phi_{10} + 4\omega_1 \cos \Phi_{10} + A_{10}^2 \beta_{1111} \cos \Phi_{10} + 2A_{20}^2 \beta_{1122} \cos \Phi_{10} + A_{10} A_{20} \beta_{1121} \cos(2\Phi_{10} - \Phi_{20}) \right] = 0, \quad (16.a)$$

$$A_{10} \left[4\omega_{10}\tilde{c}_1 \cos \Phi_{10} + 4\omega_1 \sin \Phi_{10} + A_{10}^2 \beta_{1111} \sin \Phi_{10} + 2A_{20}^2 \beta_{1122} \sin \Phi_{10} - A_{10} A_{20} \beta_{1121} \sin(2\Phi_{10} - \Phi_{20}) \right] = 0, \quad (16.b)$$

$$-12\omega_{10}\tilde{c}_2 A_{20} \sin \Phi_{20} + \left(36\omega_1 - 4\sigma_2 + 2A_{10}^2 \beta_{2121} + A_{20}^2 \beta_{2222} \right) A_{20} \cos \Phi_{20} + \frac{1}{3} A_{10}^3 \beta_{2111} \cos 3\Phi_{10} = 0, \quad (16.c)$$

$$12\omega_{10}\tilde{c}_2 A_{20} \cos \Phi_{20} + (36\omega_1 - 4\sigma_2) A_{20} \sin \Phi_{20} + A_{10}^3 \beta_{2111} \sin 3\Phi_{10} + 2A_{10}^2 A_{20} \beta_{2121} \sin \Phi_{20} + A_{20}^3 \beta_{2222} \sin \Phi_{20} = 0, \quad (16.d)$$

kjer velja:

$$\beta_{nmpq} = \tilde{\Gamma}_{nmpq} + \tilde{\Gamma}_{nmqp} + \tilde{\Gamma}_{npmq} \quad (17)$$

V sistemu brez dušenja je $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$, kar ima za posledico, da sta z $\Phi_{10} = \Phi_{20} = 0$ enačbi (16.b) in (16.d) avtomatično izpolnjeni, enačbi (16.a) in (16.c) pa se poenostavita:

$$4\tilde{p}_1 + A_{10} \left(4\omega_1 + A_{10}^2 \beta_{1111} + A_{10} A_{20} \beta_{1121} + 2A_{20}^2 \beta_{1122} \right) = 0, \quad (18.a)$$

$$(36\omega_1 - 4\sigma_2) A_{20} + \frac{1}{3} A_{10}^3 \beta_{2111} + 2A_{10}^2 A_{20} \beta_{2121} + A_{20}^3 \beta_{2222} = 0. \quad (18.b)$$

Postopek reševanja enačb (16.a-d) oziroma (18.a,b) se razlikuje v tem, da lahko enačbe (16.a-d) rešimo le numerično, z Newton-Raphsonovim postopkom, enačbi (18.a,b) pa lahko rešimo algebrajsko (z uporabo *Mathematice*[®]). V obeh primerih izračun pričnemo tako, da z znano vrednostjo parametra ε izračunamo parameter σ_2 in si izberemo vrednost A_{10} . Zatem izračunamo $\omega_1, A_{20}, \Phi_{10}, \Phi_{20}$ iz enačb (16.a-d) oziroma ω_1, A_{20} iz enačb (18.a,b) v sistemu brez dušenja. S pomočjo enačbe (9.a) določimo parameter α .

Splošno rešitev enačbe (13) iščemo v obliki:

$$u_{n1} = \sum_{l=1}^5 B_{n,2l-1} \cos[(2l-1)\tau] \quad (19)$$

Z uvrstitvijo nastavka (19) v enačbo (13) za $n=1$ spoznamo, da mora biti $B_{1,1} = 0$, sicer rešitev neomejeno narašča. Pri podobni uvrstitvi za $n=2$ koeficienta $B_{2,3}$ ne moremo določiti, izračunamo ga lahko šele ob odpravi sekularnih členov iz enačbe (14). Ostale koeficiente $B_{n,2l-1}$ določimo s primerjavo členov na levi in desni strani enačbe (13). Odprava sekularnih členov iz enačbe (14) nam da pogoje rešljivosti, iz katerih izračunamo koeficienta $B_{2,3}$ in δ_2 . Na koncu izračunamo frekvenco ω tako, da v potenčni vrsti (7) upoštevamo le prva dva člena. Celotni postopek nato ponavljamo pri novi vrednosti A_{10} .

3.1.2 Druga osnovna resonanca, $\omega \approx \omega_{20}$

Pri drugi osnovni resonanci v enačbo (7) vstavimo $\omega_0 = \omega_{20}$ in v enačbi (10) upoštevamo, da je $\lambda_i = \lambda_2$ in $\sigma_2 = 0$. Odstranitev sekularnih členov iz enačbe (13) dosežemo, če so izpolnjeni pogoji:

$$A_{10} \left[-3\omega_{20}\tilde{c}_1 \sin \Phi_{10} + (\omega_1 - 9\sigma_1) \cos \Phi_{10} + \frac{9}{4} \left[A_{10}^2 \beta_{1111} \cos \Phi_{10} + 2A_{20}^2 \beta_{1122} \cos \Phi_{10} + A_{10}A_{20}\beta_{1121} \cos(2\Phi_{10} - \Phi_{20}) \right] \right] = 0, \quad (20.a)$$

$$A_{10} \left[3\omega_{20}\tilde{c}_1 \cos \Phi_{10} + (\omega_1 - 9\sigma_1) \sin \Phi_{10} + \frac{9}{4} \left[A_{10}^2 \beta_{1111} \sin \Phi_{10} + 2A_{20}^2 \beta_{1122} \sin \Phi_{10} - A_{10}A_{20}\beta_{1121} \sin(2\Phi_{10} - \Phi_{20}) \right] \right] = 0, \quad (20.b)$$

$$4\tilde{p}_2 - 4\omega_{20}\tilde{c}_2 A_{20} \sin \Phi_{10} + 4\omega_1 A_{20} \cos \Phi_{20} + \frac{1}{3} A_{10}^3 \beta_{2111} \cos 3\Phi_{10} + A_{20}^3 \beta_{2222} \cos \Phi_{20} + 2A_{10}^2 A_{20} \beta_{2121} \cos \Phi_{20} = 0, \quad (20.c)$$

$$4\omega_{20}\tilde{c}_2 A_{20} \cos \Phi_{20} + 4\omega_1 A_{20} \sin \Phi_{20} + \frac{1}{3} A_{10}^3 \beta_{2111} \sin 3\Phi_{10} + A_{20}^3 \beta_{2222} \sin \Phi_{20} + 2A_{10}^2 A_{20} \beta_{2121} \sin \Phi_{10} = 0. \quad (20.d)$$

V sistemu brez dušenja, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ sta enačbi (20.b) in (20.d) avtomatično izpolnjeni, če je $\Phi_{10} = \Phi_{20} = 0$. Upoštevanje te rešitve v enačbah (20.a) in (20.c) nam da:

$$A_{10} \left[\omega_1 - 9\sigma_1 + \frac{9}{4} \left(A_{10}^2 \beta_{1111} + 2A_{20}^2 \beta_{1122} + A_{10} A_{20} \beta_{1121} \right) \right] = 0, \quad (21.a)$$

$$4\tilde{p}_2 + 4\omega_1 A_{20} + \frac{1}{3} A_{10}^3 \beta_{2111} + A_{20}^3 \beta_{2222} + 2A_{10}^2 A_{20} \beta_{2121} = 0. \quad (22.b)$$

Splošno rešitev enačbe (13) iščemo pri drugi osnovni resonanci v obliki:

$$u_{n1} = \sum_{l=1}^5 B_{n,2l-1} \cos \left[\frac{1}{3} (2l-1) \tau \right], \quad (23)$$

postopek konstrukcije resonančne krivulje pa je enak kot pri prvi osnovni resonanci.

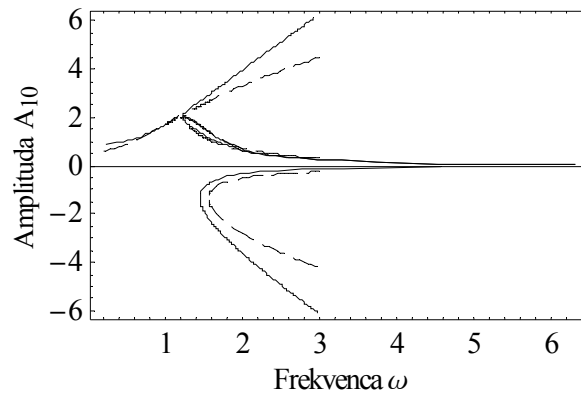
4 Resonančne krivulje pri nosilcu s togo-členkastim vpetjem

4.1 Osnovne enačbe

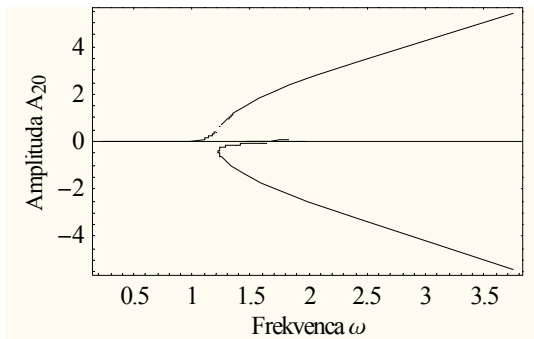
Enačbi (1) oziroma (4) pri nosilcu s togo-členkastim vpetjem opisujeta prečna upogibna nihanja. Izpeljani sta v [2], kjer je podan tudi izračun koeficientov \tilde{T}_{nmpq} . V nadaljevanju jih bomo uporabili pri izračunu upogibnih nihanj za prvi dve nihajni obliki (modalna načina). Vse ostale enačbe v tem članku in celotni postopek lahko pri nosilcu s togo-členkastim vpetjem neposredno uporabimo. V vseh prikazanih izračunih izberemo vrednost parametra $\varepsilon = 1$, ki s svojo (veliko) vrednostjo kaže, da obravnavamo velike kubične nelinearnosti. Vsi izračuni so opravljeni z lastnim računalniškim programom, ki uporablja zmožnosti simboličnega računanja v programskem okolju *Mathematice*[®].

4.2 Resonančne krivulje nedušenega nosilca pri prvi osnovni resonanci, $\omega \approx \omega_{10}$

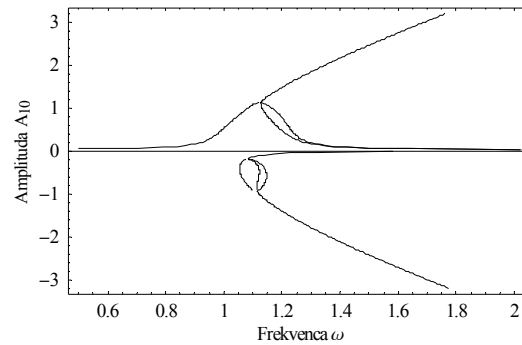
Resonančni krivulji amplitud A_{10} in A_{20} nedušenega nosilca, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ z vzbujanjem $\tilde{p}_1 = 1$ in $\tilde{p}_2 = 0$ prikazujeta sliki 1 in 2. Na obeh slikah se pojavljata dve ločeni veji rešitev, ki pripadata sofazni, oziroma protifazni resonanci. Na sliki 1 se nad osjo ω pojavlja zanka, sestavljena iz dveh krivulj, ki pripadata sofazni resonanci, pod osjo ω pa poteka krivulja, ki pripada protifazni resonanci. Sofazne resonance imajo vselej obliko zank zaradi delovanja notranje resonance, protifazne resonance pa oblikujejo zanke zaradi vpliva notranje resonance v odvisnosti od velikosti vzbujevalne amplitude. Na obeh slikah protifazna resonanca ne oblikuje nobene zanke zaradi velike vrednosti \tilde{p}_1 , zaradi česar notranja resonanca nima vpliva. Če vzbujevalno amplitudo \tilde{p}_1 zmanjšamo na vrednost $\tilde{p}_1 = 0.03$ se zaradi notranje resonance pojavijo zanke tako pri sofazni kot protifazni resonanci (slika 3). Na sliki 1 vidimo tudi primerjavo med rezultati, dobljenimi po ML-PM in standardni L-PM. Razlike so precejšnje in bi se še povečale, če bi izbrali večjo vrednost ε . Odtod lahko sklepamo, da moramo pri velikih nelinearnostih uporabljati ML-PM. O pravilnosti rezultatov ML-PM se prepričamo z uporabo metode koračnega harmonskega ravnovesja [3].



Slika 1: Primerjava resonančnih krivulj $\omega - A_{10}$. — ML-P metoda, --- L-P metoda.



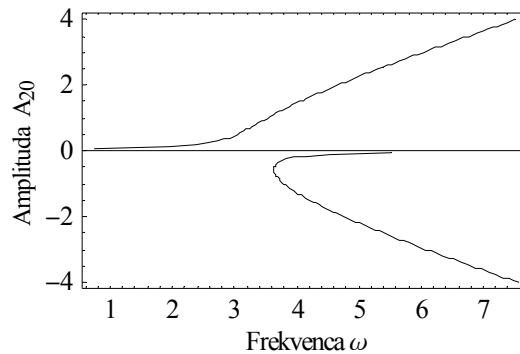
Slika 2: Resonančna krivulja $\omega - A_{20}$



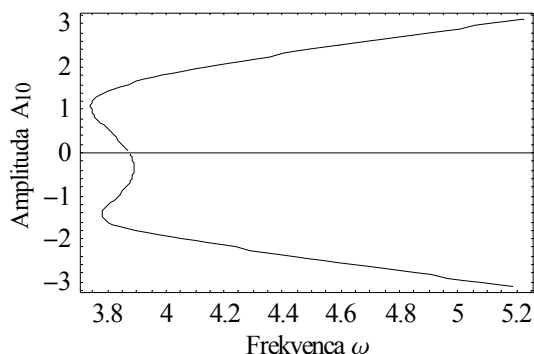
Slika 3: Pojav zank v sofazni in protifazni resonanci

4.3 Resonančne krivulje nedušenega nosilca pri drugi osnovni resonanci, $\omega \approx \omega_{20}$

Resonančne krivulje nedušenega nosilca pri drugi osnovni resonanci in vrednostih vzbujevalnih amplitud $\tilde{p}_1 = 0$ in $\tilde{p}_2 = 1$ prikazujeta sliki 4 in 5.



Slika 4: Resonančni potek pri drugi osnovni resonanci v primeru, da je $A_{10} = 0$.



Slika 5: Resonančni potek pri drugi osnovni resonanci v primeru, da $A_{10} \neq 0$.

Slika 4 kaže prvo možnost, ki jo ponuja enačba (21.a), ko je odziv A_{10} zatrt ($A_{10} = 0$) in niha le druga prostostna stopnja, na sliki 5 pa je prikazan odziv v primeru, ko $A_{10} \neq 0$. Ker je \tilde{p}_2 večji od takoimenovane kritične vrednosti, notranja resonanca ne nastopi in resonančna krivulja ne vsebuje nobenih zank.

5 Zaključek

V članku je izpeljana ML-PM za splošne dinamične sisteme z več prostostnimi stopnjami in poljubno velikimi kubičnimi nelinearnostmi. Poljubno velik perturbacijski parameter prvotnega sistema enačb je preveden na nov perturbacijski parameter z vrednostjo, manjšo od enote. Uporaba ML-PM je prikazana na primeru študija osnovnih resonanc prvih dveh nihajnih oblik prečnih upogibnih nihanj nosilca s togo-členkastim vpetjem. ML-PM lahko brez težav uporabimo tudi pri drugih vrstah nelinearnosti.

6 Zahvala

Zahvaljujemo se MŠZŠ Slovenije, ki je omogočilo nastanek pričujočega dela v okviru raziskovalnega programa "Numerična in eksperimentalna analiza nelinearnih mehanskih sistemov", ki ga izvaja raziskovalna skupina P2-0137.

Literatura

- [1] Y.K.Cheung, S.H. Chen and S.L.Lau, *A modified Lindstedt-Poincare method for certain strongly non-linear oscillators*, Int. J. for Non-linear Mech., **26**, 367—378, 1991.
- [2] R. Pušenjak, M. Oblak, *Lindstedt-Poincarejeva metoda z več časovnimi skalami za dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi*, (poslano za objavo v zborniku srečanja *Kuhljevi dnevi '04*, Otočec).
- [3] R. Pušenjak, M. Oblak, *Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities*, Int. j. numer. methods eng., Vol. **59**, No. 2. , 255--292, 2004.



Prenos upogibnih nihanj preko jeklene pletenice

M. Otrin¹ in M. Boltežar²

Transmission of transverse vibration through steel cable

Povzetek. Prispevek obravnava začetno študijo teoretičnega in eksperimentalnega pristopa prenosa vibracij preko tanke, jeklene pletenice. Pletenica je v aksialni smeri neobremenjena, tako da je matematični model osnovan na Euler-Bernoullijevi teoriji za upogibni nosilec in viskoznem modelu disipacije energije. Vnos energije je pri meritvah dosežen preko kinematičnega vzbujanja z elektrodinamičnim stresalnikom. Matematični model smo eksperimentalno preverili tako na primeru nosilca kot na treh enakih pletenicah različnih dolžin. Numerična analiza je narejena s pomočjo metode končnih elementov (MKE). Izkazalo se je, da je model nosilca primeren za modeliranje tanke pletenice brez osne obremenitve, v kolikor želimo napovedati lastne frekvence pletenice. Prenosnost prečne sile je v primeru matematičnega modela v območju lastnih frekvenc pletenice nekoliko povišana, kar pripisujemo predpostavljenemu modelu disipacije energije.

Abstract. In this paper the results of initial theoretical and experimental studies of the dynamical behavior of thin cable are presented. The cable has no axial force so the mathematical model is based on the Euler-Bernoulli beam equation with viscous damping model. For validation of the mathematical model, the simulated results are compared with experimental data for beam sample and three different lengths of cable sample, where the kinematic excitation is achieved with electrodynamical shaker. The numerical analysis is obtained using the finite element method (FEM). The results have shown that the model is suitable for estimation of the natural frequencies of cables. The transmissibility of transverse forces calculated with model indicated, that their amplitudes comparable with experimental results were increased in the vicinity of natural frequencies. Our conclusion was, that this effect is due to chosen viscous damping model.

1 Uvod

Pletenica (ang. cable) se kot strukturni element v večini primerov uporablja za potrebe gradbene infrastrukture (mostovi) in transportnih naprav. Po definiciji je pletenica namenjena prenašanju osnih obremenitev, zato jo avtorji velikokrat obravnavajo kot model strune oziroma nosilca z osno obremenitvijo. Ob odsotnosti osne obremenitve, pa lahko, kot posledica ohlapnosti, plastifikacije in drsenja prepletenih žičk, pride do znatnih nelinearnosti v dinamskem odzivu. Z

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; miha.otrin@fs.uni-lj.si

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana; miha.boltezar@fs.uni-lj.si

večanjem upogibne deformacije pletenice pa so omenjeni vplivi še znatnejši [4].

Problem pri razumevanju upogibnih nihanj pletenice predstavlja poleg izbire ustreznega matematičnega modela tudi izbira modela disipacije energije, ki je v splošnem težko določljiv. Avtor Adhikari [1] v svojem delu navaja nekatere splošne modele disipacije energije, od katerih jih večina temelji na prilagajanju frekvenčne prenosne funkcije izmerjenim vrednostim. V našem delu smo uporabili model proporcionalnega dušenja, matrika dušenja pa je dobljena preko Rayleighovih koeficientov. Slednji so posredno ocenjeni iz meritev lastnega dušenega nihanja. Glavni namen dela je proučiti možnost uporabe Euler-Bernoullijevega modela nosilca kot osnove za obravnavanje upogibnih nihanj jeklene pletenice ob zanemaritvi osne obremenitve, vnos energije pa je dosežen preko kinematičnega vzbujanja.

2 Teoretično ozadje

Obravnavamo upogibna nihanja pletenice brez osne obremenitve. Gibalno enačbo pletenice, ob predpostavki Euler-Bernoullijevega modela nosilca in viskoznega dušenja, zapišemo z diferencialno enačbo [6]

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = P_{ef}(x, t), \quad (1)$$

kjer je EI upogibna togost, ρ gostota, A prerez, c faktor viskoznega dušenja in $P_{ef}(x, t)$ efektivna zunanja obremenitev, ki je posledica kinematičnega vzbujanja. Ob podanem kinematičnem vzbujanju oblike $s_{vz} = S_0 \sin(\omega_{vz} t)$, kjer je S_0 amplituda pomika in ω_{vz} vzbujevalna frekvenca, je efektivna vzbujevalna sila zapisana z izrazom

$$P_{ef}(x, t) = -\rho A \psi(x) \ddot{s}_{vz}. \quad (2)$$

$\psi(x)$ predstavlja Hermiteov polinom, odvisen pa je od izbranih robnih pogojev in mesta vzbujanja. Če predpostavimo vzbujanje na robu in konzolno vpet nosilec na obeh robovih, je $\psi(x)$ enak $\psi(x) = 3(\frac{x}{l})^2 - 2(\frac{x}{l})^3$, kjer je l dolžina pletenice [6].

Celotni odziv pletenice w_{abs} na kinematično vzbujanje predpostavimo v obliki $w_{abs}(x, t) = w(x, t) + w_{st}(x, t)$, kjer sta $w_{st}(x, t) = \psi(x) s_0(t)$ psevdo-statični odziv nosilca, $w(x, t)$ pa je rešitev gibalne enačbe (1).

Za numerično reševanje enačbe (1) smo uporabili MKE metodo reševanja z n prostostnimi stopnjami³. Gibalna enačba je v splošnem oblike

$$\mathbf{M}\ddot{w} + \mathbf{C}\dot{w} + \mathbf{K}w = \mathbf{f}(x, t), \quad (3)$$

kjer so \mathbf{M} , \mathbf{C} in $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ masna, dušilna in togostna matrika, $\mathbf{f}(x, t) \in \mathbb{R}^n$ pa je zunanja efektivna vzbujevalna sila. Vrednosti elementov togostne in masne matrike so v večini primerov poznane, medtem ko so vrednosti elementov matrike dušenja eksplicitno težko določljive. V strukturni dinamiki predstavlja model disipacije energije pomemben faktor pri določitvi celotnega odziva strukture, zato je razvitih veliko število metod identifikacije elementov matrike dušenja. Večina jih temelji na principu iskanja modalnih parametrov sistema, pri čemer je poznavanje matrike \mathbf{M} in \mathbf{K} ter izmerjenih modalnih lastnosti sistema nujno potrebno [2]. Zaradi

³ V vsakem vozlišču sta dve prostostni stopnji: pomik, zasuk.

trenutnega nepoznavanja ustreznega modela dušenja za primer upogibnega nihanja pletenice, smo v začetni fazi predpostavili viskozno dušenje in sicer Rayleighov model proporcionalnega dušenja oblike

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (4)$$

Konstanti α in β predstavljata Rayleighova koeficienta dušenja in sta posredno odvisna od razmernikov dušenja ζ_i in lastnih frekvenc sistema ω_i . Glavna prednost omenjenega modela dušenja je, da po ortogonalni transformaciji enačbe (3) dobimo poleg masne in togostne matrike, diagonalno tudi matriko dušenja [6]. Tako dobimo sistem n nevezanih diferencialnih enačb drugega reda, pri čemer je matrika dušenja po ortogonalni transformaciji oblike

$$\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\zeta_2 \omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & 2\zeta_N \omega_N \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Matrika Φ predstavlja modalno matriko sistema⁴. Izkaže se, da lahko za Rayleighov model proporcionalnega dušenja element matrike $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ zapišemo kot [3]

$$c_{ii} = \alpha + \beta \omega_i^2. \quad (6)$$

Izhajajoč iz enačbe (6) in (5) lahko izpeljemo enačbo za izračun razmernikov dušenja v odvisnosti od lastnih frekvenc in koeficientov α in β . Za i -ti mod je enačba oblike

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2}, \quad (7)$$

iz česar je razvidno, da je razmerik dušenja proporcionalen z lastnimi frekvencami sistema [3].

3 Eksperiment in primerjava rezultatov z numeričnimi

Cilj eksperimentalnega pristopa je v prvi fazi preveriti korektnost matematičnega modela, nato pa njegovo ustreznost preveriti na primeru tanke, jeklene pletenice. V ta namen smo v začetni fazi izvedli testno merjenje na enostavnem, obojestransko vpetem nosilcu prereza $A = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, gostote $\rho = 7300 \text{ kgm}^{-3}$, dolžine $l = 0.545 \text{ m}$ in upogibne togosti $EI = 0.010125 \text{ Nm}^2$.

3.1 Analiza upogibnega nihanja nosilca

3.1.1 Lastne frekvence nosilca

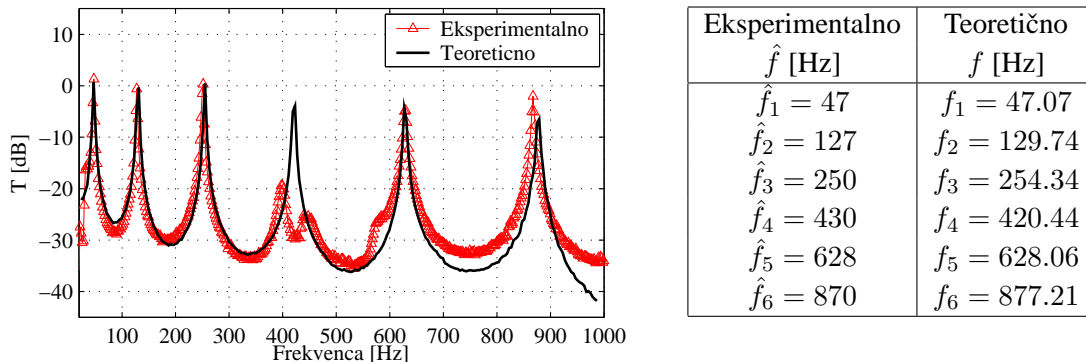
Za določitev lastnih frekvenc smo sistem, v frekvenčnem območju od 20 Hz do 1000 Hz, vzbudili z belim šumom, odziv pa zasledovali na dinamometru, ki v fizikalnem modelu predstavlja konzolno vpetje nosilca oziroma kasneje tudi pletenice. Prenosnost med amplitudo

⁴ Pri večjih sistemih lahko zaradi hitrejšega izračuna število uporabljenih lastnih vektorjev prilagodimo območju vzbujanja.

prečne sile na mestu konzolnega vpetja in amplitudo vzbujevalnega pospeška je v frekvenčnem prostoru definirana z enačbo

$$T(\omega) = \frac{F(\omega)}{X(\omega)}, \quad (8)$$

kjer sta $F(\omega)$ in $X(\omega)$ amplitudi Fourierovih transformirank izhodnega (sila) in vhodnega (pospešek) signala. Izmerjena ter teoretična krivulja prenosnosti sta prikazani na sliki 1.



Slika 1 : Grafa eksperimentalno in teoretično ocenjenih prenosnosti med amplitudo sile in amplitudo pospeška. V tabeli so prikazani izmerki in teoretično izračunane lastne frekvence nosilca.

Opravljen je bila analiza merilne negotovosti meritve lastnih frekvenc in amplitude pospeškov, kjer se je izkazalo, da so ključnega pomena za povečano negotovost robni pogoji, ki jih zagotavljamo pri eksperimentu.

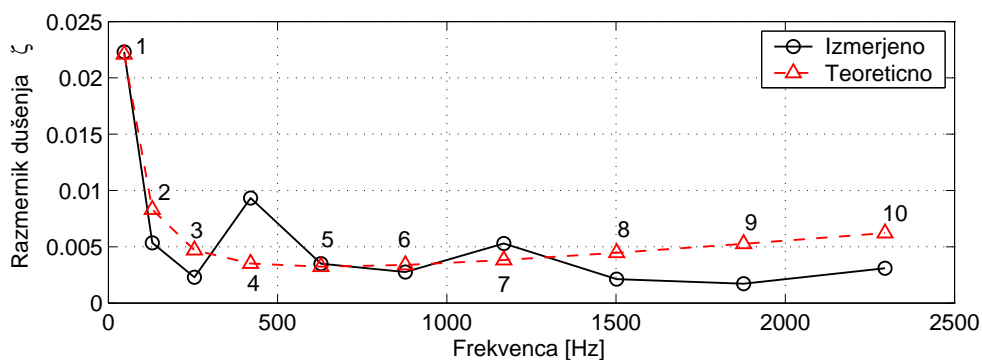
V tej fazi je za nas zanimiva merilna negotovost pri meritvi amplitude sile v dinamometru. Ocenjena je na osnovi večkrat ponovljenih meritev ter ocen merilne negotovosti elementov merilne verige in znaša $u_F = 5.52\%$. [5]

3.1.2 Identifikacija dušenja nosilca

V modelu smo predpostavili Rayleighov model proporcionalnega dušenja. Za identifikacijo razmernikov dušenja ζ_i smo uporabili dve metodi in sicer Smithovo metodo identifikacije modalnih parametrov [8] in metodo identifikacije dušenja z zvezno valčno transformacijo [7]. Pri omenjenih metodah je vhodni podatek odziv lastnega dušenega nihanja sistema, izhodni podatek pa razmernik dušenja pri ustrezni lastni frekvenci. Metoda z valčno transformacijo je identificirala nekoliko nižje vrednosti razmernikov dušenja kot pa Smithova metoda, vendar so bili rezultati v okviru merilne negotovosti. Srednje vrednosti razmernikov dušenja v odvisnosti od lastnih frekvenc so prikazane na sliki 2.

Teoretična krivulja je dobljena na osnovi prilagajanja funkcije (7) eksperimentalno določenim razmernikom dušenja. Grafa na sliki 2 nakazujeta, da je v prvem delu frekvenčnega spektra sprememba razmernikov dušenja nelinearna (v primeru nosilca do pete lastne frekvence), pri višjih frekvencah pa je sprememba skoraj linearna.

Identificirana Rayleighova koeficienta za nosilec, ki smo ju upoštevali v matematičnem modelu, sta $\alpha = 13$ in $\beta = 8 \cdot 10^{-7}$.



Slika 2 : Razmerniki dušenja v odvisnosti od lastnih frekvenc. Diagram je prikazan za Smithovo metodo identifikacije razmernikov dušenja, točke (cifre) pa označujejo lastne frekvence nosilca.

3.2 Analiza upogibnega nihanja pletenice

Pletenica je kot strukturni element prvenstveno namenjena prenašanju osnih obremenitev, tako da upogibna togost EI v večini primerov ni poznana. Konvencionalen test statičnega upogiba za



Slika 3 : Merilni sistem in geometrijski podatki za pletenico.

določitev upogibne togosti v primeru obravnavanja pletenice ni primeren, saj prihaja pri prečnih obremenitvah do drsenja med žicami znotraj pletenice. Wei [9] navaja možnost ocene modula elastičnosti E za kompozitne strukture s pomočjo resonančne tehnike. Izhaja iz predpostavke, da so resonančne frekvence sistema (materialov) funkcije elastičnih lastnosti, dimenzij in mase. Relacija med modulom elastičnosti in resonančnimi frekvencami je definirana z enačbo

$$E = CW f_i^2, \quad (9)$$

kjer je W teža pletenice, f_i izmerjena resonančna frekvenca in C faktor, ki je odvisen od dimenzij in lastne oblike strukture. Zapišemo ga kot

$$C = \frac{4\pi^2 l^3}{gm^4 I}, \quad (10)$$

kjer so g gravitacijski pospešek, l dolžina pletenice, m faktor v odvisnosti od lastne oblike (za prvo lastno obliko je $m = 4.73$) in I vztrajnostni moment. V našem primeru je pletenica okroglega prereza, tako da se enačba (9) lahko preoblikuje v obliko

$$E = 1.261886 \frac{\rho l^4}{d^2} f_1^2. \quad (11)$$

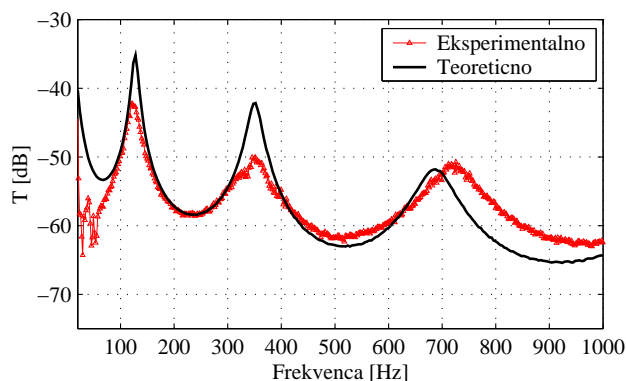
V enačbi (11) f_1 predstavlja prvo izmerjeno resonančno frekvenco pletenice. Za pletenico dolžine $l = 0.415$ m, gostoto $\rho = 7720 \text{ kgm}^{-3}$ in premerom $d = 0.003$ m je ocenjeni modul elastičnosti $E = 52.67$ GPa. Prva lastna frekvenca je odčitana iz diagrama prenosnosti na sliki 6 in znaša $f_1 = 39$ Hz. Za določitev celotnega odziva sta potrebna še podatka za vztrajnostni moment $I = 3.57 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$ in prerez $A = 7.24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

3.2.1 Identifikacija lastnih frekvenc in dušenja.

Da bi preverili ustreznost matematičnega modela, smo analizirali tri enake jeklene pletenice različnih dolžin: $l_1 = 0.227$ m, $l_2 = 0.321$ m in $l_3 = 0.415$ m. V matematičnem modelu smo predpostavili proporcionalno dušenje, koeficienta α in β pa smo določili na enak način kot v primeru analize nosilca. Diagrami spreminjanja razmernikov dušenja v odvisnosti od lastnih frekvenc pletenice so za tri analizirane pletenice prikazani na slikah 7(a),(b) in (c), medtem ko je na sliki 7(d) prikazano spreminjanje koeficientov α in β v odvisnosti od dolžine pletenice. Za identifikacijo lastnih frekvenc smo izmerili prenosnost med amplitudo sile in amplitudo pospeška v frekvenčnem prostoru. Diagrami za dolžine pletenic l_1 , l_2 in l_3 so prikazani na slikah 4, 5 in 6.

4 Zaključek

V prispevku smo obravnavali upogibna nihanja pletenice z Euler-Bernoullijevim modelom nosilca, brez osne obremenitve. Predpostavljeni model dušenja je viskozno proporcionalen. Razmernike dušenja smo identificirali iz meritev lastnega dušenega nihanja pletenice in sicer po Smithovi metodi in metodi, ki za algoritem uporablja valčno transformacijo. Iz meritev prenosnosti smo ocenili lastne frekvence pletenice, ter izmerili prenosnost prečne sile preko pletenice. Matematični model je dober za napoved tako lastnih frekvenc nosilca kot prenosnosti prečne sile po nosilcu. V primeru pletenice se izkaže, da obstoječi model dobro napove lastne frekvence pletenice, pri zasledovanju prenosnosti prečne sile pa so ojačanja teoretičnih rezultatov v območju lastnih frekvenc pletenice nekoliko višja v primerjavi z izmerjenimi. To pripisujemo predvsem predpostavljenemu modelu dušenja in možni neenakosti robnih pogojev eksperimenta napram matematičnemu modelu. Disipacija energije je namreč v obstoječem modelu proporcionalna s hitrostjo in ne upošteva notranjega trenja med prepletjenimi žicami v pletenici. Po naši oceni bi bilo v nadaljevanju potrebno izdelati strukturni model dušenja, kjer bi bila disipacija energije odvisna od amplitud pomikov pletenice.

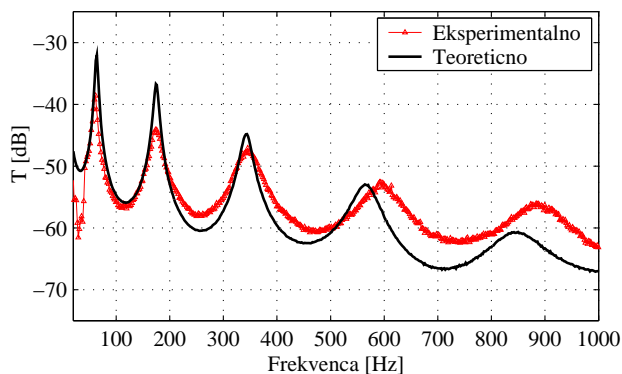


Eksperimentalno \hat{f} [Hz]	Teoretično f [Hz]
$\hat{f}_1 = 127$	$f_1 = 126.80$
$\hat{f}_2 = 350$	$f_2 = 349.51$
$\hat{f}_3 = 702$	$f_3 = 685.19$

$$\alpha = 56$$

$$\beta = 0.00001$$

Slika 4 : Eksperimentalno in teoretično določena prenosnost in lastne frekvence za dolžino pletenice $l_1 = 0.227$ m.

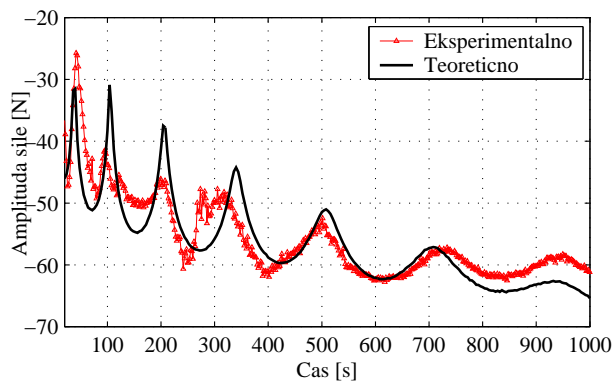


Eksperimentalno \hat{f} [Hz]	Teoretično f [Hz]
$\hat{f}_1 = 63$	$f_1 = 63.41$
$\hat{f}_2 = 175$	$f_2 = 174.78$
$\hat{f}_3 = 344$	$f_3 = 342.64$
$\hat{f}_4 = 585$	$f_4 = 566.41$
$\hat{f}_5 = 870$	$f_5 = 846.14$

$$\alpha = 31$$

$$\beta = 0.000022$$

Slika 5 : Eksperimentalno in teoretično določena prenosnost in lastne frekvence za dolžino pletenice $l_2 = 0.321$ m.

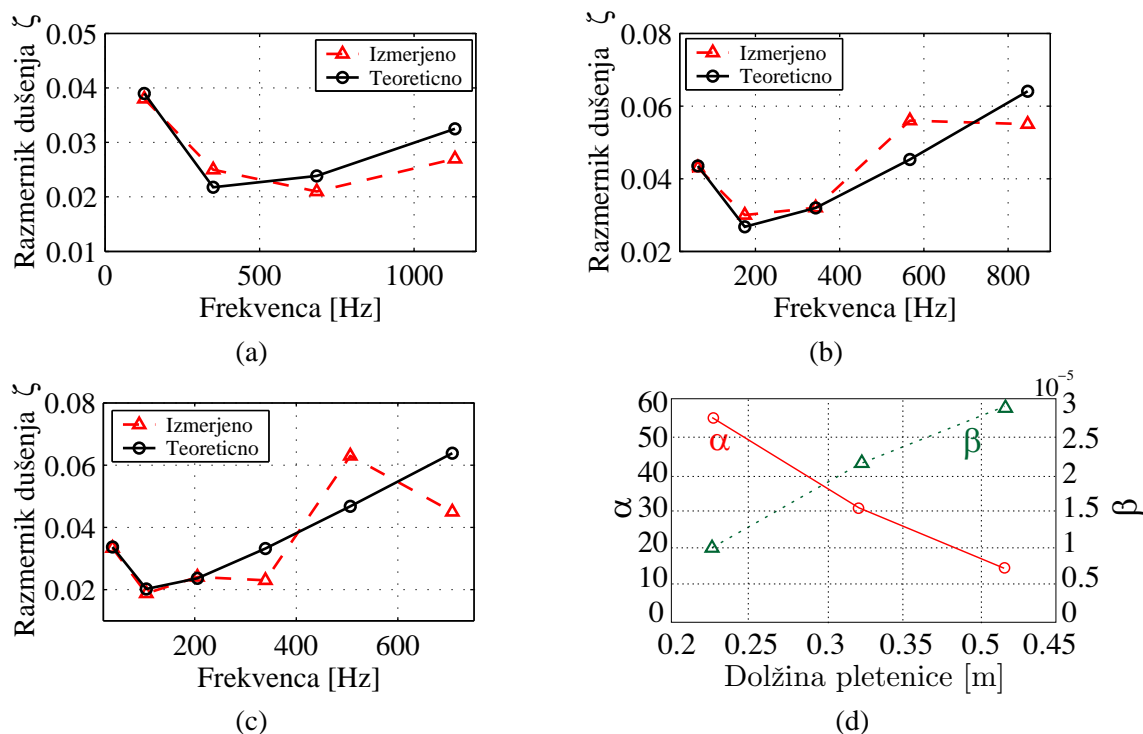


Eksperimentalno \hat{f} [Hz]	Teoretično f [Hz]
$\hat{f}_1 = 39$	$f_1 = 37.94$
$\hat{f}_2 = 99$	$f_2 = 104.58$
$\hat{f}_3 = 204$	$f_3 = 205.01$
$\hat{f}_4 = 324$	$f_4 = 338.90$
$\hat{f}_5 = 502$	$f_5 = 506.26$
$\hat{f}_6 = 720$	$f_6 = 707.12$
$\hat{f}_7 = 950$	$f_7 = 941.49$

$$\alpha = 14.5$$

$$\beta = 0.000028$$

Slika 6 : Eksperimentalno in teoretično določena prenosnost in lastne frekvence za dolžino pletenice $l_3 = 0.415$ m.



Slika 7 : Razmerniki dušenja za pletenico dolžine: (a) $l_1 = 0.227$ m, (b) $l_2 = 0.321$ m in (c) $l_3 = 0.415$ m. (d) Spreminjanje Rayleighovih koeficientov α in β v odvisnosti od dolžine pletenice.

Literatura

- [1] S. Adhikari, *Damping models for structural vibrations*, Ph.D. Thesis, Cambridge University, 2000.
- [2] N. Barbieri, *Dynamical analysis of transmission line cables. Part 2 - damping estimation*, MSSP, 18, 671–681, 2004.
- [3] I. Chowdhury, *Computation of Rayleigh Damping Coefficients for large System*, Indian Institute of technology, India.
- [4] P.D. Gosling, E.A. Korban, *A bandable finite element for the analysis of flexible cable structures*, Finite elements in analysis and design, 38, 3785–3792, 2000
- [5] H.W. Coleman, W. Glenn Steele, *Experimentation and uncertainty analysis for engineers*, Mississippi State University, John Wiley & Sons
- [6] J.L. Humar, *Dynamics of structures*, Prentice Hall, 1999
- [7] J. Slavič, M. Boltežar, *Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data*, JSV, 262, 291–307, 2003
- [8] W. Smith, *Least-square time-domain method for simultaneous identification of vibration parameters from multiple free-response records.*, AIAA Paper 81-0530, 194–201, 1981.
- [9] C.Y. Wei, S.N. Kukureka, *Evaluation of damping and elastic properties of composite and composite structures by the resonance technique*, JMS, 35, 45–63, 2001



Lindstedt-Poincarejeva metoda z več časovnimi skalami za dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi

R. Pušenjak¹ in M. Oblak²

Lindstedt-Poincare method with multiple scales for dynamical systems with cubic non-linearities

Povzetek. Članek obravnava periodično vzbujane dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi in več prostostnimi stopnjami s pomočjo Lindstedt-Poincarejeve metode, razširjene z uvedbo več časovnih skal. Ob uporabi rekurzivnega simboličnega računanja metoda omogoča izračun aproksimacij višjih redov. Metoda je uporabljena pri izračunu skoraj periodičnih prostih nihanj nedušenega ter pri konstrukciji notranje in kombinacijske resonance dušenega nosilca, ki je v obeh primerih togo vpet na enem koncu in členkasto vpet na drugem koncu. Pojav obračalnih točk je razrešen z metodo sledenja po ločni dolžini.

Abstract. The paper treats periodically excited dynamical systems with cubic non-linearities and multi-degrees of freedom through Lindstedt-Poincare method, which is extended by multiple time scales. By application of recursive symbolic computation, the method is capable to calculate higher order approximations. The method is applied for computation of almost periodic free oscillations of undamped and construction of internal and combination resonance of damped clamped-hinged beam. The appearance of turning points is resolved by using the arc-length method.

1 Uvod

Lindstedt-Poincarejeva metoda (L-PM) je bila v svoji izvorni obliki razvita za proučevanje periodičnih gibanj nebesnih teles v astronomiji [1]. V tem članku smo pri implementaciji L-PM uporabili lastnosti zmogljivega programskega orodja *Mathematica*[®] za simbolično računanje. Simbolično računanje omogoča analitično reševanje problemov, čeprav zaradi kompleksnosti rešitev samih ne dobimo v zaključeni obliki. Prav tako omogoča tudi avtomatično izločanje sekularnih členov, s čemer je odpravljena ena od večjih ovir, ker izločanje sekularnih členov po klasični poti zahteva veliko izkušenj in zamudnega dela.

¹ izr. prof. dr. Rudolf Pušenjak, Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

² red. prof. dr. Maks Oblak, Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

Namen tega članka je prikazati, da lahko z razširitvijo metode, v kateri uvedemo več časovnih skal, povečamo razred problemov na tako imenovana skoraj periodična nihanja, ki vsebujejo nekomenzurne frekvence. Taka nihanja so v praksi veliko bolj pogosta od periodičnih nihanj, vprašanje stabilnosti teh nihanj, njihove razvejitve in s tem povezani prehodi v kaos pa so vprašanja, ki na mnogih področjih stojijo v ospredju sodobnih raziskovalnih prizadevanj. V tem članku bomo omenjeno razširitev L-PM z več časovnimi skalami uporabili za dinamične sisteme z več prostostnimi stopnjami in kubičnimi nelinearnostmi, pri čemer bomo obravnavali dve vrsti problemov in sicer 1. problem izračuna skoraj periodičnega nihanja, ki vsebuje nekomenzurne frekvence pri avtonomnem sistemu kot posledico notranje resonance in 2. konstrukcijo kombinacijske resonance pri zunanem vzbujanju, sestavljenem iz kombinacijskih frekvenc. Obe vrsti problemov bomo obravnavali v primeru upogibnih nihanj nosilca, ki je na enem koncu toga, na drugem pa členkasto vpet. Pri konstrukciji kombinacijske resonance dušenega nosilca, vzbujenega s harmonično upogibno silo spremenljive frekvence se v bifurkacijskem diagramu pojavi vrsta obračalnih točk zaradi katerih resonančna krivulja vsebuje več zank. Pojav zank je posledica večličnih rešitev. Algoritem za konstrukcijo resonančnih krivulj lahko avtomatično sledi takim potekom le v primeru, če je opremljen z ustreznim prediktorjem. V ta namen izvedemo parametrizacijo resonančne krivulje z metodo ločne dolžine [2,3].

3 Gibalne enačbe nosilca

Deformacija nosilca zaradi upogibnih nihanj poteka z deformacijsko hitrostjo $\partial \hat{w} / \partial \hat{t}$, kjer so s strešicami nad simboli označene prvotne spremenljivke za razliko od brezdimenzijskih spremenljivk, ki jih bomo v nadaljevanju označevali brez strešic. Kinetična energija nosilca je

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right)^2 d\hat{x} \quad (1)$$

Celotna potencialna energija nosilca je:

$$V = V_D + V_A + V_E \quad (2)$$

kjer je:

$$V_D = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right)^2 d\hat{x}, \quad (3)$$

potencialna energija zaradi upogibne deformacije,

$$V_A = \frac{EA}{4L} \int_0^L \left(\int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x}, \quad (4)$$

potencialna energija zaradi deformacije v aksialni smeri, in

$$V_E = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \hat{P}(\hat{t}) d\hat{x} \quad (5)$$

dotatna potencialna energija zaradi delovanja zunanje aksialne sile $\hat{P}(\hat{t})$. Pri tem pomenijo: ρ gostoto nosilca, A prerez nosilca, L dolžino nosilca, E Youngov modul in I moment vztrajnosti prereza nosilca. Z uporabo razširjenega Hamiltonovega načela:

$$\int_{\hat{t}_1}^{\hat{t}_2} \left[\delta(T-V) + \int_0^L \left[F(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{c} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} \right] \delta \hat{w} d\hat{x} \right] d\hat{t} = 0, \quad (6)$$

kjer je $\hat{F}(\hat{x}, \hat{t})$ porazdeljena upogibna obremenitev in \hat{c} koeficient viskoznega dušenja, izpeljemo gibalno enačbo upogibnih nihanj nosilca:

$$\rho A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + \hat{c} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(EI \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} - \hat{P}(\hat{t}) \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} = \hat{F}(\hat{x}, \hat{t}) \quad (7)$$

3.1 Nosilec s togo-členkastim vpetjem, obremenjen s harmonično upogibno silo

Obravnavajmo sedaj nosilec s togo-členkastim vpetjem, ki je brez aksialne obremenitve $\hat{P}(\hat{t})=0$, obremenjen je le s harmonično upogibno silo $\hat{F}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{f}(\hat{x}) \cos \hat{\omega} \hat{t}$. Če je $EI = konst$, gibalno enačbo nosilca zapišemo v obliki:

$$\rho A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} + \hat{c} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + EI \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} = \hat{f}(\hat{x}) \cos \hat{\omega} \hat{t} \quad (8)$$

skupaj z robnimi pogoji:

$$\hat{w}(0, \hat{t}) = 0, \quad \partial \hat{w}(0, \hat{t}) / \partial \hat{x} = 0 \quad \text{pri } \hat{x} = 0, \quad (9.a)$$

$$\hat{w}(L, \hat{t}) = 0, \quad \partial^2 \hat{w}(L, \hat{t}) / \partial \hat{x}^2 = 0 \quad \text{pri } \hat{x} = L \quad (9.b)$$

Enačbe (8-9) prevedemo na brezdimenzijsko obliko z uvedbo brezdimenzijske koordinate $x = \hat{x}/L$, tako da interval $0 \leq \hat{x} \leq L$ prevedemo na interval $0 \leq x \leq 1$, z vitkostjo nosilca $r = \sqrt{I/A}$ uvedemo brezdimenzijsko upogibno deformacijo $w = \hat{w}/r$, čas \hat{t} in krožno frekvenco $\hat{\omega}$ pa prevedemo na brezdimenzijski čas $t = \hat{t} \sqrt{EI/\rho AL^4}$ in brezdimenzijsko frekvenco $\omega = \hat{\omega} \sqrt{\rho AL^4/EI}$. Brezdimenzijska oblika gibalne enačbe nosilca je s tem:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = f(x) \cos \omega t, \quad (10)$$

kjer je:

$$c = \hat{c} L^2 / \sqrt{\rho AEI}, \quad f(x) = \hat{f}(\hat{x}) L^4 \sqrt{A} / (E \sqrt{I^3}) = \hat{f}(Lx) L^4 \sqrt{A} / (E \sqrt{I^3}), \quad (11)$$

robni pogoji pa se prevedejo na obliko:

$$\hat{w}(0, t) = 0, \quad \partial \hat{w}(0, t) / \partial x = 0 \quad \text{pri } x = 0 \quad (12.a)$$

$$\hat{w}(L, t) = 0, \quad \partial^2 \hat{w}(L, t) / \partial x^2 = 0 \quad \text{pri } x = 1 \quad (12.b)$$

3.1.1 Rešitev gibalne enačbe nosilca s togo-členkastim vpetjem

Rešitev enačbe (10) iščemo z nastavkom:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)\phi_m(x), \quad (13)$$

kjer so $\phi_m(x)$ lastne funkcije enačbe $\phi_m^{(iv)}(x) - \lambda_m^4 \phi_m(x) = 0$, $\lambda_m^4 = \omega_{L_m}^2$, ki pripadajo linearni parcialni diferencialni enačbi nedušenega prostega nihanja $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$. Lastne vrednosti $\lambda_m = \sqrt{\omega_{L_m}}$ določimo z rešitvijo enačbe $\tanh \lambda_m = \tan \lambda_m$. Prvi trije od nič različni koreni so $\lambda_1 = 3.9266$, $\lambda_2 = 7.0686$, $\lambda_3 = 10.21018$ in pripadajoče linearne krožne frekvence nedušenega lastnega nihanja so $\omega_{L_1} = 15.4182$, $\omega_{L_2} = 49.9649$ in $\omega_{L_3} = 104.25$. Linearni krožni frekvenci prvih dveh nihajnih oblik sta v približnem razmerju 1:3 (natančneje 1:3.240644) zaradi česar nastanejo pogoji za nastop notranje resonance. Lastne funkcije $\phi_m(x)$ dobimo z rešitvijo enačbe $\phi_m^{(iv)}(x) - \lambda_m^4 \phi_m(x) = 0$ v obliki $\phi_m(x) = A_m [(\cosh \lambda_m x - \cos \lambda_m x)(\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m) - (\sinh \lambda_m x - \sin \lambda_m x)(\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m)]$, kjer določimo konstante A_m tako, da so lastne funkcije ortonormalne:

$$\int_0^1 \phi_m \phi_n dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (14)$$

Z uvrstitvijo nastavka (13) v enačbo (10), množenja s lastnimi funkcijami ϕ_n in integriranja členov na intervalu $0 \leq x \leq 1$ dobimo:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 u_m}{dt^2} \int_0^1 \phi_m \phi_n dx + c \sum_{m=1}^{\infty} \frac{du_m}{dt} \int_0^1 \phi_m \phi_n dx + \sum_{m=1}^{\infty} u_m \int_0^1 \frac{d^4 \phi_m}{dx^4} \phi_n dx - \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m \int_0^1 \frac{d^2 \phi_m}{dx^2} \phi_n dx \right) \int_0^1 \left(\sum_{p=1}^{\infty} u_p \frac{d\phi_p}{dx} \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} u_q \frac{d\phi_q}{dx} \right) dx = f \cos \omega t \int_0^1 \phi_n dx \quad (15)$$

z upoštevanjem ortonormalnosti lastnih funkcij pa:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + c \frac{du_n}{dt} + \omega_{L_n}^2 u_n - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma_{nmpq} u_m u_p u_q = p_n \cos \omega t, \quad n=1,2,\dots,\infty, \quad (16)$$

kjer je:

$$\Gamma_{nmpq} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d^2 \phi_m}{dx^2} \phi_n dx \int_0^1 \frac{d\phi_p}{dx} \frac{d\phi_q}{dx} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\phi_m}{dx} \frac{d\phi_n}{dx} dx \int_0^1 \frac{d\phi_p}{dx} \frac{d\phi_q}{dx} dx, \quad p_n = \int_0^1 f(x) \phi_n dx \quad (17)$$

Koeficienti Γ_{nmpq} imajo lastnost:

$$\Gamma_{nmpq} = \Gamma_{nmqp} = \Gamma_{pqnm} = \Gamma_{mnpq} \quad (18)$$

3.2 Razširjena Lindstedt-Poincarejeva metoda z več časovnimi skalami za dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi

V enačbi (16) indeks n iz praktičnih razlogov omejimo. Enačbo lahko obravnavamo splošno kot enačbo nelinearnih nihanj dinamičnih sistemov z več (N) prostostnimi stopnjami in kubičnimi nelinearnostmi, če koeficient dušenja c zamenjamo z modalnim dušenjem c_n . Za reševanje te enačbe lahko uporabimo razširjeno L-PM z več časovnimi skalami, če je dušenje majhno in če so majhni koeficienti kubičnih nelinearnosti. V ta namen vpeljemo majhen perturbacijski parameter ε in enačbo (16) zapišemo v obliki:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \varepsilon \tilde{c}_n \frac{du_n}{dt} + \omega_{L_n}^2 u_n - \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{\Gamma}_{mpq} u_m u_p u_q = p_n \cos \omega t, \quad n=1,2,\dots,N \quad (19)$$

kjer velja:

$$c_n = \varepsilon \tilde{c}_n, \quad \Gamma_{nmpq} = \varepsilon \tilde{\Gamma}_{nmpq}. \quad (20)$$

Namesto brezdimenzijskega časa t uvedemo časovne skale:

$$\tau_n = \eta \omega_n t, \quad n=1,2,\dots,N, \quad (21)$$

kjer je η subharmonični faktor, ki ima vrednost $\eta=1$ pri glavnih in superharmoničnih resonancah, pri subharmoničnih resonancah pa je neko ulomljeno število. S pomočjo časovnih skal izrazimo argument harmoničnega vzbujanja:

$$\omega t = \sum_{i=1}^N a_i \tau_i. \quad (22)$$

Rešitev enačbe (19) iščemo v obliki potenčne vrste perturbacijskega parametra ε :

$$u_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{nk}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) \varepsilon^k, \quad (23)$$

pri čemer v potenčno vrsto razvijemo tudi nelinearne frekvence ω_n :

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{nk} \varepsilon^k \quad (24)$$

in amplitude zunanega vzbujanja p_n :

$$p_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} \varepsilon^k \quad (25)$$

Odvoda $\frac{du_n}{dt}$ in $\frac{d^2 u_n}{dt^2}$ zapišemo v obliki:

$$\frac{du_n}{dt} = \sum_{i=1}^N \eta \omega_i \frac{\partial u_n}{\partial \tau_i} = \sum_{i=1}^N \eta \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{k+l} \omega_{ik} \frac{\partial u_{nl}}{\partial \tau_i}, \quad (26.a)$$

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \omega_i \omega_j \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau_i \partial \tau_j} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{k+l+m} \omega_{ik} \omega_{jl} \frac{\partial^2 u_{nm}}{\partial \tau_i \partial \tau_j}. \quad (26.b)$$

Z uvrstitvijo enačbe (22), potenčnih vrst (23),(25) in (26.a,b) v enačbo (19) ter izenačevanjem členov enačbe pri istih potencah ε^k dobimo:

$$\varepsilon^0: \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \omega_{i0} \omega_{j0} \frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \omega_{L_n}^2 u_{n0} = p_{n0} \cos\left(\sum_{i=1}^N a_i \tau_i\right), \quad n=1,2,\dots,N \quad (27)$$

$$\varepsilon^1: \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \omega_{i0} \omega_{j0} \frac{\partial^2 u_{n1}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \omega_{L_n}^2 u_{n1} = p_{n1} \cos\left(\sum_{i=1}^N a_i \tau_i\right) \\ - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \left[(\omega_{i0} \omega_{j1} + \omega_{i1} \omega_{j0}) \frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right] - \tilde{c}_n \sum_{i=1}^N \eta \omega_{i0} \frac{\partial u_{n0}}{\partial \tau_i} + \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \tilde{I}_{mpq} u_{m0} u_{p0} u_{q0} \quad (28)$$

$$\varepsilon^2: \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \omega_{i0} \omega_{j0} \frac{\partial^2 u_{n2}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \omega_{L_n}^2 u_{n2} = p_{n2} \cos\left(\sum_{i=1}^N a_i \tau_i\right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \eta^2 \left[(\omega_{i0} \omega_{j1} + \omega_{i1} \omega_{j0}) \frac{\partial^2 u_{n1}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \right. \\ \left. (\omega_{i0} \omega_{j2} + \omega_{i1} \omega_{j1} + \omega_{i2} \omega_{j0}) \frac{\partial^2 u_{n0}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right] - \tilde{c}_n \sum_{i=1}^N \eta \left(\omega_{i0} \frac{\partial u_{n1}}{\partial \tau_i} + \omega_{i1} \frac{\partial u_{n0}}{\partial \tau_i} \right) + \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N (\tilde{I}_{mpq} + \tilde{I}_{mp} + \tilde{I}_{mpq}) u_{m0} u_{p0} u_{q0} \quad (29)$$

Enačbe (27-29) rešujemo simbolično v programskem okolju *Mathematica*[®]. Pri tem se nekoliko razlikujeta algoritma za reševanje avtonomnih in neavtonomnih sistemov. Splošna rešitev enačbe (27) je:

$$u_{n0} = A_{n0} \cos(\tau_n - \Phi_{n0}) + B_{n0} \cos\left(\sum_{i=1}^N a_i \tau_i\right), \quad (30)$$

s pripadajočo rešitvijo homogene enačbe $A_{n0} \cos(\tau_n - \Phi_{n0})$ in partikularno rešitvijo $B_{n0} \cos\left(\sum_{i=1}^N a_i \tau_i\right)$. Pri avtonomnih sistemih je $p_{n0} = 0$ in zato tudi $B_{n0} = 0$. Pri neavtonomnih sistemih je:

$$B_{n0} = p_{n0} / \left[\omega_{L_n}^2 - \eta^2 \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \omega_{i0} \omega_{j0} \right) \right] \quad (31)$$

Z uvrstitvijo rešitve $A_{n0} \cos(\tau_n - \Phi_{n0})$ v homogeno enačbo dobimo vrednosti reda ε^0 v potenčni vrsti (25) neznanih nelinearnih krožnih frekvenc ω_n :

$$\omega_{n0} = \omega_{L_n} / \eta. \quad (32).$$

Vrednosti amplitud A_{n0} moramo v avtonomnih sistemih predpisati. Odprava sekularnih členov iz enačbe reda ε^1 skupaj z rešitvijo enačbe reda ε^0 določa tako imenovane pogoje rešljivosti iz katerih lahko konstruiramo različne resonance. Doslej smo te pogoje za sisteme s kvadratičnimi nelinearnostmi in parametričnim vzbujanjem določili z zamudnim ročnim postopkom, sedaj pa jih lahko določimo avtomatično.

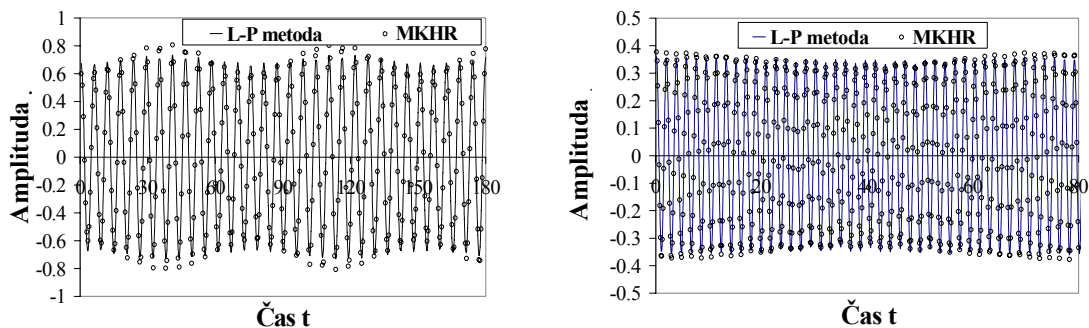
4 Nelinearna nihanja in resonance nosilca s togo-členkastim vpetjem

Uporabimo enačbo (19) za prvi dve modalni obliki nelinearnega upogibnega nihanja nosilca s togo-členkastim vpetjem ($N = 2$). Dobimo:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \varepsilon \tilde{c}_n \frac{du_n}{dt} + \omega_{L_n}^2 u_n - \varepsilon \sum_{m=1}^2 \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 \tilde{F}_{nmpq} u_m u_p u_q = p_n \cos \omega t, \quad (n=1,2) \quad (33)$$

4.1 Skoraj periodična upogibna nihanja nedušenega nosilca s togo-členkastim vpetjem

Pri nedušenih avtonomnih nihanjih nosilca s togo-členkastim vpetjem je $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ in $p_1 = p_2 = 0$, pri čemer zanemarimo strižne deformacije in vztrajnost v vzdolžni smeri. Kot sledi iz razdelka 3.2, moramo amplitudi A_{n0} predpisati ($A_{10} = 0.7, A_{20} = 0.35$ v zgledu). Rezultate primerjamo z rezultati, dobljenimi z metodo koračnega harmonskega ravnovesja (MKHR) [3]. Prosta upogibna nihanja nedušenega nosilca so zaradi notranje resonance skoraj periodična, kljub temu da nosilec ni zunanje vzbujan. Neznane nelinearne frekvence avtonomnih nihanj so nekomenzurne, zato je uporaba več časovnih skal nujna. Na sliki 1 sta prikazani prva in druga oblika skoraj periodičnih avtonomnih nihanj nosilca s primerjavo rezultatov L-P metode reda ε^1 in MKHR.



Slika 1: Skoraj periodično avtonomno nihanje nosilca za prvo in drugo nihajno obliko s primerjavo med L-P metodo in MKHR

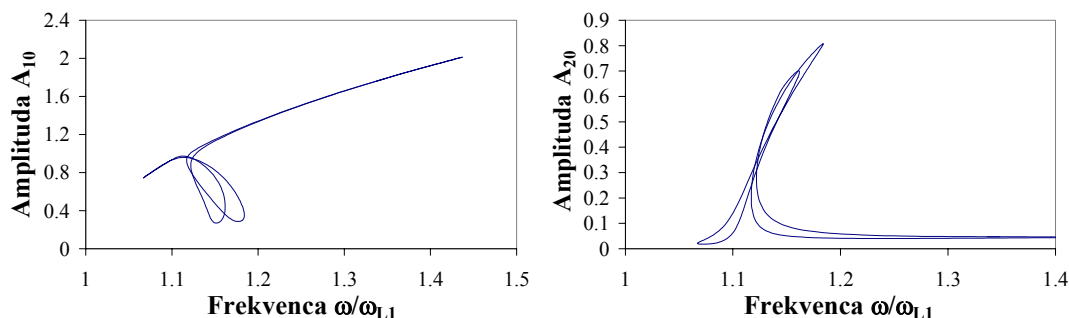
Tabela 1: Primerjava nelinearnih frekvenc ω_1 in ω_2

	L-P metoda	MKHR
ω_1	1.0854	1.08485
ω_2	3.33764	3.33815

Izračunani nelinearni frekvenci ω_1 in ω_2 se po obeh metodah zelo dobro ujemata, vidne pa so majhne razlike med maksimalnimi in minimalnimi vrednostmi amplitud. Če hočemo boljše ujemanje, moramo red aproksimacije zvišati na ε^2 ali višje.

4.2 Kombinacijska resonanca dušenega nosilca s togo-členkastim vpetjem

Predloženo metodo lahko uporabimo tudi pri izračunu kombinacijskih resonanc dušenega nosilca. Za zgled vzemimo dušeni nosilec s koeficientoma $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0.001$, ki ga vzbujamo z zunanjo obremenitvijo tako, da je $p_{10} = p_{20} = 0.5$ in spreminjajmo vzbujevalno frekvenco ω okrog vrednosti $(\omega_{L_1} + \omega_{L_2})/2$. Argument ωt v enačbi (34) izrazimo s pomočjo časovnih skal v obliki $\omega t = (\tau_1 + \tau_2)/2$. Ker nas v tem primeru zanimajo periodične rešitve, velja zaradi notranje resonance $\tau_2 = 3\tau_1$, to se pravi $\omega t = 2\tau_1$. Resonančno krivuljo sedaj lahko konstruiramo s spreminjanjem vrednosti $2\omega_1$, kot sledi iz enačbe $\omega t = 2\tau_1 = 2\omega_1 t \Rightarrow \omega = 2\omega_1$. Slika 2 prikazuje potek amplitud prvega (A_{10}) in tretjega harmonika (A_{20}) kombinacijske resonance nosilca ob istočasnem vplivu notranje resonance, iz katerih vidimo zapleteno zankasto obliko resonančnih krivulj kot posledice dušenja. Zaradi večlične narave rešitev je potrebno izvesti predikcijo rešitev s sledenjem po parametru ločne dolžine [2,3].



Slika 2: Resonančni krivulji prvega (A_{10}) in tretjega harmonika (A_{20}) kombinacijske resonance dušenega nosilca.

5 Zaključek

V delu je predstavljena razširitev L-PM z več časovnimi skalami za splošne dinamične sisteme s kubičnimi nelinearnostmi, ki omogoča izračun aperiodičnih nihanj avtonomnih in neavtonomnih sistemov. Obe vrsti problemov sta izpeljani in analizirani v primeru prečnih upogibnih nihanj nosilca s togo-členkastim vpetjem.

Literatura

- [1] C. Hayashi, *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. 1964 McGraw-Hill, New York.
- [2] R. Pušenjak, *Razvejitev pri Van der Pol-Duffingovem nihalu*, Stroj. vestnik 49, št. 7/8, 370--384, 2003.
- [3] R. Pušenjak, M. Oblak, *Incremental harmonic balance method with multiple time variables for dynamical systems with cubic non-linearities*, Int. j. numer. methods eng., Vol. 59, No. 2., 255--292, 2004



Večobmočna metoda robnih elementov za $k - \varepsilon$ turbulentne modele

Matjaž Ramšak¹

Multidomain boundary element method for $k - \varepsilon$ turbulence models

Povzetek. Prispevek obravnava večobmočno metodo robnih elementov ('MRE') za reševanje posplošenih difuzivno konvektivnih prenosnih pojavov s spremenljivo difuzivnostjo. Medtem ko je MRE dobro uveljavljena za laminarne tokove, je to prvi primer, kjer je omenjena metoda uporabljena za reševanje kompleksnejših primerov s k-e turbulentnim modelom. Rezultati modeliranja turbulentnega toka čez stopnico se zelo dobro ujemajo z rezultati direktne numerične simulacije.

Abstract. The paper presents the multidomain boundary element method ('BEM') for solving a general diffusion convective transport problems using variable diffusivity. While the BEM is widely accepted for laminar flows this is the first case, where this method is applied for a complex flow problems using k-e turbulence model. The results of turbulent flow over a backward step are in good agreement with the results of direct numerical simulation.

1 Uvod

Praktično vsi inženirski problemi mehanike tekočin so turbulentne narave. Metoda robnih elementov (nadalje MRE) je v svetu že dobro uveljavljena za reševanje laminarnega toka, kar za turbulentni tok ne moremo trditi. V literaturi zasledimo nekaj primerov uporabe numeričnega modela MRE za reševanje turbulentnih tokov, vendar so predstavljene le relativno enostavne rešitve tokov v kanalih z uporabo algebraskih in enoenačbnih turbulentnih modelov, Škerget 1990, Alujevič 1991. Omenimo še delo avtorja Wu 1978, v katerem je uporabil numerični algoritem MRE za rešitev kinematike toka, medtem ko je kinetika toka, ki predstavlja pri turbulentnih tokovih težavnejši del, rešena z metodo končnih elementov. V delu so predstavljene rešitve ravninskih primerov turbulentnega Couettovega toka in toka vzdolž plošče z obzidnim dvoenačbnim modelom.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

V inženirski praksi so dvoenačbni turbulentni modeli najpogosteje uporabljeni, saj predstavljajo najboljše razmerje med kvaliteto rezultatov in ekonomičnostjo izračuna. Z numeričnega vidika je modeliranje turbulentnega toka z dvoenačbnimi modeli mnogo zahtevnejše kot rešitev laminarnega toka. Nelinearnemu sistemu vodilnih enačb laminarnega toka dodamo dve nelinearni prenosni enačbi, ki povečujeta nelinearnost sistema preko turbulentne viskoznosti. V primeru k-e modela imamo v obeh prenosnih enačbah zelo neugodne nelinearne izvore, ki enačbi dodatno povezuje in otežujeta konvergenco rešitve. Dodatne težave nastopijo v bližini zidov, kjer je transportna enačba zaradi izvornih členov postane nedefinirana. Iz tega smemo sklepati, da je dober numerični algoritem za reševanje laminarnega toka potreben pogoj in izhodišče za razširitev na turbulenco.

2 Vodilne enačbe tokovno vrtnične formulacije za splošni obzidni dvoenačbni turbulentni model

Tokovno vrtnična formulacija Navier-Stokesovih enačb je pogosto uporabljena za obravnavo ravninskega laminarnega toka. Omenimo nekaj najbolj pogosto citiranih del. Referenčni rezultati gnanega toka v zaprti kotanji avtorja Ghia 1982. Delo avtorja Davis 1983 velja za referenčno rešitev za primere naravne konvekcije v zaprti kotanji. Njene dobre lastnosti so enostavnost, stabilnost in ekonomičnost. Glavna pomanjkljivost je omejitev na ravninski tok.

Tokovno vrtnično formulacijo in turbulenco smo zasledili samo v treh člankih. V delu avtorjev Cortella, Manzan in Comini 2001 so jo uporabili skupaj z algebrasko metodo velikih vrtljev in metodo končnih elementov. V delih avtorjev Elkaim 1992 in Abib 1993 je predstavljena tokovno vrtnična formulacija in dvoenačbni turbulentni model z metodo kontrolnih volumnov. Zapišimo tokovno vrtnično formulacijo Navier-Stokesovih enačb za dinamiko ravninske turbulentne nestisljive tekočine.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_i} = -\omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + v_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right), \quad (2)$$

kjer so vse funkcije polja povprečne vrednosti. Od vodilnih enačb laminarnega toka se gornje enačbe razlikujejo le v v_T turbulentni viskoznosti. Dodajmo še vodilni enačbi za k in ε

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P - \varepsilon - D + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(v + \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

kjer turbulentno viskoznost izračunamo kot:

$$v_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (5)$$

2.1 Fan-Lakshminarayana-Barnettov model ('FLB')

Fan-Lakshminarayana-Barnettov model je bil razvit leta 1993. Razvit je bil za uporabo v primerih neustaljenih turbulentnih tokov. Modeliranje dušilnih funkcij je asimptotično konsistentno, kljub temu pa niso odvisne od strižne hitrosti. Dušilne funkcije in robni pogoji so:

$$\begin{aligned}
 f_{\mu} &= 0.4 \frac{f_w}{\sqrt{R_T}} + \left(1 - 0.4 \frac{f_w}{\sqrt{R_T}}\right) \left(1 - e^{-R_y/42.63}\right)^3, \\
 f_1 &= 1, \\
 f_2 &= \left(1 - \frac{0.4}{1.8} e^{-(R_T/6)^2}\right) f_w^2, \\
 f_w &= 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{R_y}}{2.30} + \left(\frac{\sqrt{R_y}}{2.30} - \frac{R_y}{8.89}\right) \left(1 - e^{-R_y/20}\right)^3\right), \\
 D &= 0, \\
 E &= 0, \\
 C_{\varepsilon 1} &= 1.39, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.80, \quad C_{\mu} = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3, \\
 k &= 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad \text{pri } y = 0.
 \end{aligned}$$

2.2 Chienov model ('CH')

Avtor je Chien 1982.

$$\begin{aligned}
 f_{\mu} &= 1.0 - \exp(-0.0115y^+), \\
 f_1 &= 1, \\
 f_2 &= 1 - 0.222 \exp\left(-\left(\frac{R_T}{6}\right)^2\right), \\
 D &= 2\nu \frac{k}{y^2}, \\
 E &= -2\nu \left(\frac{\varepsilon}{y^2}\right) \exp(-0.5y^+), \\
 C_{\varepsilon 1} &= 1.35, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.8, \quad C_{\mu} = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_{\varepsilon} = 1.3. \\
 k &= 0, \quad \varepsilon = 0 \quad \text{pri } y = 0.
 \end{aligned}$$

2.3 Robni pogoji

Robni pogoji prenosne enačbe tokovne funkcije in vrtinčnosti turbulentnega toka se ne razlikujejo od robnih pogojev za laminarni tok. Robni pogoji za $k - \varepsilon$ prenosni enačbi določimo kot je definirano v turbulentnem modelu.

Zaradi celovitosti poglavja povzemimo robne pogoje za vsako enačbo posebej. Na stenah in na vstopu predpišemo Diricletove robne pogoje za tokovno funkcijo

$$\Psi = \bar{\Psi} \quad (6)$$

in vrednosti odvoda v smeri normale na steno

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \bar{v}_i \quad (7)$$

kjer je \bar{v}_i znana tangentna hitrost. Robne vrtinčnosti izračunamo implicitno s pomočjo prenosne enačbe tokovne funkcije (1), saj imamo znane zidne vrednosti tokovne funkcije Ψ in odvode v smeri normale $d\Psi/dn$ kot robni pogoj ter tako iz sistema enačb (1) izračunamo neznane vrednosti robnih vrtinčnosti.

Pri obzidnih turbulentnih modelih za turbulentno kinetično energijo k predpišemo nične zidne vrednosti

$$k = 0.$$

Robni pogoj za hitrost disipacije ε na zidu je odvisna od turbulentnega modela. Poznamo dva primera. Večina modelov zahteva nično vrednost disipacije

$$\varepsilon = 0,$$

oziroma pri FLB modelu predpišemo nično vrednost odvoda disipacije v smeri normale na zid

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0.$$

V primeru izstopnih robnih pogojev predpišemo $d\Psi/dn = 0$, $d\omega/dn = 0$, $dk/dn = 0$ in $d\varepsilon/dn = 0$.

3 Numerični postopek večobmočne metode robnih elementov

Numerično shemo reševanja posplošene difuzivno - konvektivne enačbe smo že večkrat podrobno predstavili na Kuhljevih dnevih in tudi v Ramšak in Škerget 1999. Omenimo samo da smo uporabili linearne mešane elemente. Torej funkcijo aproksimiramo z linearnimi elementi, odvod v smeri normale na element pa s konstantnimi elementi. Zaradi tehnike podobmočij nastane predimenzionirana sistemska matrika z več enačbami kot z neznankami, ki jo rešimo v smislu najmanjših kvadratov.

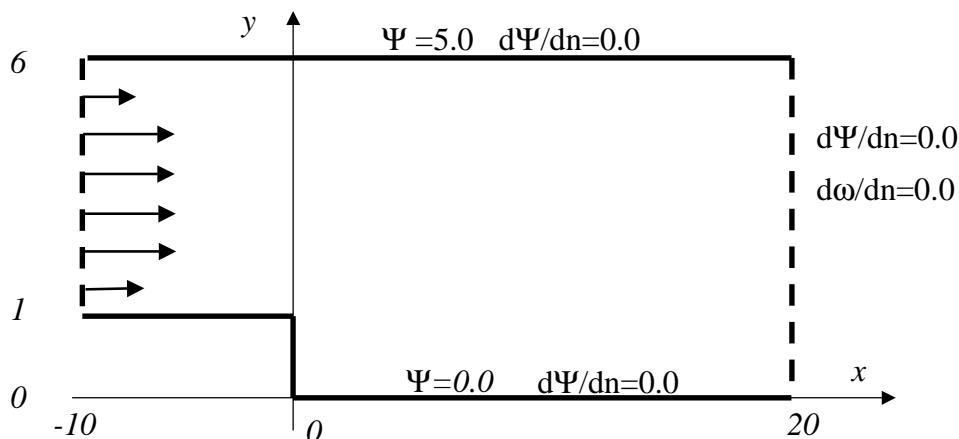
Ena izmed glavnih omejitev MRE za simulacijo turbulentnih tokov je omejitev Greenovih funkcij na linearne parcialne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti. Problem lahko zopet rešimo s tehniko podobmočij, kjer v vsakem podobmočju uporabimo konstantno difuzivnost. Nadalje lahko v posameznem podobmočju spremenljivo difuzivnost razdelimo na konstanten in variabilen del.

4 Turbulentni tok tekočine v kanalu s stopnico

Pričujoči primer je eden izmed najpopularnejših testov turbulentnih modelov in numeričnih metod kakor tudi za študij fizike separacijskih tokov. Definicijo problema smo povzeli po Hanjalić & Jakirlić 1998. Omenjena avtorja sta primer izračunala s turbulentnim modelom drugega reda, oz. Reynoldsovim napetostnim modelom ('RSM'). V tem prispevku so podane tudi primerjave z meritvami in rezultati DNS.

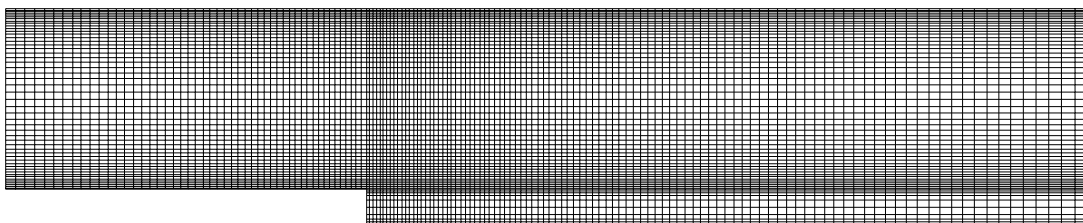
Reynoldsovo število na osnovi povprečne hitrosti na vstopu in velikosti stopnice H znaša 5000. Geometrija in robni pogoji so enaki kot v referenčnem primeru in so podani na sliki 1. Na vstopu smo podali razviti hitrostni profil, ki smo ga prej izračunali na kanalu dolžine $L/H=80$. Prav tako smo iz teh rezultatov podali vstopni profil k -ja in ε -a.

Izstopni del stopnice je prekratek, da bi se hitrostni profil popolnoma razvil, vendar po trditvah Hanjalića in Jakirlića 1998 nadaljnje podaljševanje kanala ne vpliva bistveno na recirkulacijsko dolžino. Gostota računskih mrež znaša v primeru A 8.500, B 34.000 in C 76,500 elementov.



Slika 1 : Turbulentni tok čez stopnico. Geometrija in robni pogoji.

Širši del stopnice je torej diskretiziran s približno 100×60 elementi pri mreži A, 200×120 za B in 300×180 za C, pri čemer znaša razmerje najdaljši/najkrajši element 5. Vrednost y^+ na izstopu znašajo 10, 5 in 2.5 pri najgostejši mreži. V recirkulacijskem območju je torej ta vrednost še dosti manjša.



Slika 2 : Turbulentni tok čez stopnico. Najredkejša mreža z 8500 elementi.

Za začetni približek smo uporabili rezultate laminarnega toka Reynoldsovega števila 100. Časovni korak je znašal $10e16$. Vse vrednosti podrelaksacij so znašale 0.01, razen za prenosno enačbo tokovne funkcije kjer nove vrednosti tokovne funkcije nismo podrelaksirali. Zaustavitveni konvergenčni kriterij spremembe rešitve smo podali na $1e-4$.

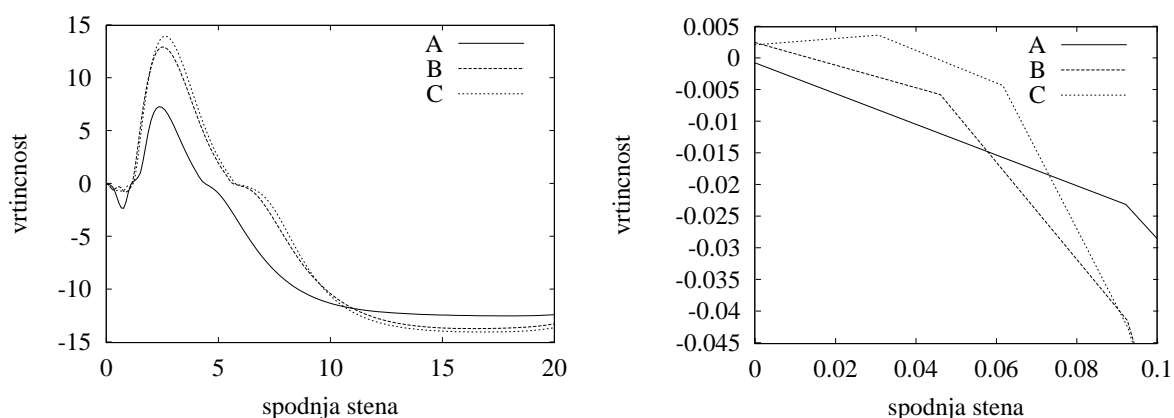
Recirkulacijske dolžine smo podali v tabeli 1. Iz tabele in slike 3 je razvidno, da z gostitvijo mreže naši rezultati konvergirajo k določeni rešitvi. Nadalje je potrebno določiti referenčno rešitev. Pri mehaniki je praviloma eksperiment referenčna rešitev. Splošno znano je tudi, da je vprašljivo primerjati numerične rezultate ravninskih simulacij z eksperimentom, ki je vedno prostorske narave. Tako nam ostanejo samo numerične rešitve. Najboljša in tudi računsko najzahtevnejša je rešitev DNS. Sledi rešitev RSM in nato ostale rešitve $k - \epsilon$ modelov. Namen pričujočega dela je potrditev pravilnosti MRE numeričnega algoritma, zato je najprimernejša primerjava z enakim turbulentnim modelom in drugačno numerično metodo. V tem primeru se naši rezultati MRE CH ujemajo bolje kot 1 % z rezultati Bredberga 2001, ki je uporabil enak model in MKV.

Tabela 1 : Turbulentni tok čez stopnico. Vpliv diskretizacije in primerjava recirkulacijskih dolžin vrtincev.

	primarni	sekundarni	tercialni
CFX LS N=8,500	4.61	0.36	-
CFX LS N=34,000	5.27	0.97	-
MRE FLB N=8,500	3.07	0.16	-
MRE FLB N=34,000	4.52	0.30	-
MRE CH N=8,500	4.28	1.21	-
MRE CH N=34,000	5.72	1.14	0.014
MRE CH N=76,500	5.81	1.19	0.045
CH Bredberg 2001	5.86	?	?
RSM Hanjalić 1998	6.38	1.55	0.042
DNS Le 1997	6.28	1.76	0.040
eksp Jović 1994	6.10	-	-

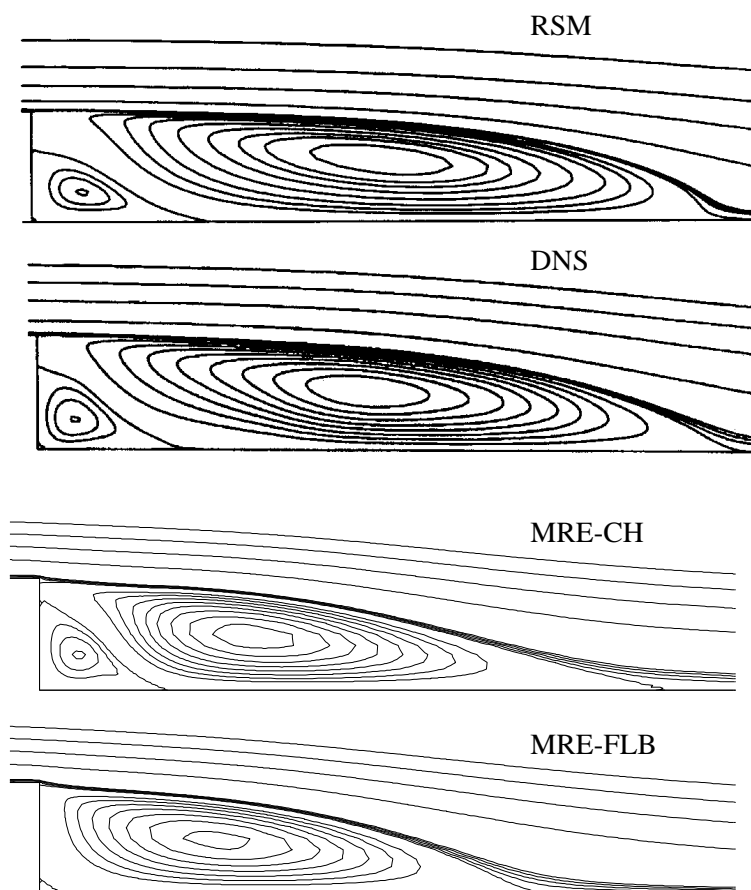
Tudi v tem numeričnem primeru smo potrdili, da ima na kvaliteto rezultatov zelo velik vpliv izbira turbulentnega modela. Najboljše rezultate dobimo s CH modelom, sledi LS model in nazadnje FLB model.

V skladu s pričakovanji je recirkulacijska dolžina $k - \epsilon$ modelov manjša od DNS rešitve, medtem ko je RSM rešitev celo večja. Eksperimentalno izmerjena recirkulacijska dolžina je najbližja rešitvi DNS +0.18, sledi CH z -0.25, RSM +0.28 nato pa ostale rešitve $k - \epsilon$ modelov.

**Slika 3** : Turbulentni tok čez stopnico, CH model. Potek vrtinčnosti na spodnji steni za različne mreže (levo). Vokalni "mehurček"(desno).

Kvalitativna primerjava recirkulacijskega območja je najlepše razvidna iz poteka tokovnic, slika 4. Referenčni DNS rešitvi je pričakovano najbolj podobna rešitev RSM Reynoldsovega napetostnega modela. Sledijo MRE CH rezultati, ki imajo jasno izražen sekundarni recirkulacijski vrtinec in se na splošno zelo dobro ujemajo z DNS in RSM rešitvijo. MRE FLB ni uspel zajeti v popolnosti sekundarnega vrtinca. Prisoten je, vendar je mnogo premali. Obstoj tercialnega vrtinca v spodnjem vogalu stopnice potrjuje slika 3, kjer je prikazan potek vrtinčnosti na spodnji

steni za MRE CH rezultate. Pri mrežah B in C le-ta blizu vogala seka vrednost nič. Tudi dolžina vrtinca je praktično enaka kot pri RSM in DNS. Hanjalič in Jakirlič sta ta vrtinec poimenovala vogalni mehurček (angl. 'corner bubble').



Slika 4 : Turbulentni tok čez stopnico. Primerjava tokovnic recirkulacijskega območja.

5 Zaključki

V pričujočem prispevku smo predstavili numerično shemo večobmočne MRE za reševanje ustaljenih ravninskih turbulentnih tokov s tokovno - vrtinčno formulacijo in dvoenačbnimi turbulentnimi modeli.

Testni primer je turbulentni tok tekočine v kanalu s stopnico, ki je eden izmed najpopularnejših testov turbulentnih modelov in numeričnih metod kakor tudi za študij fizike separacijskih tokov. Kvalitativna primerjava recirkulacijskega območja je najlepše razvidna iz poteka tokovnic, slika 4. Referenčni DNS rešitvi je pričakovano najbolj podobna rešitev Reynoldsovega napetostnega modela avtorja Hanjalića 1998. Sledijo MRE rezultati Chienovega modela, ki vsebujejo vse tri recirkulacijske vrtince. Simulacija tokovnega polja s FLB modelom ne vsebuje vseh vrtincev. Kvantitativna primerjava dolžin recirkulacijskih vrtincev daje enak vrstni red, tabela 1. Pre-

senetljivo dajejo RSM rezultati malenkost večjo dolžino recirkulacijskega vrtinca v primerjavi z DNS, medtem ko smo z dvoenačbnimi modeli izračunali krajše dolžine, kar je dobro znana lastnost vseh dvoenačbnih modelov. Odlično ujemanje recirkulacijske dolžine, manj kot 1 %, kaže primerjava MRE in MKV avtorja Bredberga 2001 z enakim turbulentnim modelom.

Literatura

- [1] Abib A.H. and Jaluria Y.: Generation of stable thermal stratification by turbulent flows in a partially open enclosure. *ASME Fundamentals of Natural Convection*, 264, 127-140, 1993
- [2] Alujevič, A., Kuhn, G. and Škerget, L.: Boundary elements for the solution of Navier-Stokes equations, *Comp. Meth. in App. Mech. and Engin.*, 91, 1187-1201, 1991
- [3] Bredberg J.: On Two-equation Eddy-Viscosity Models. Internal report 01/8, Chalmers University, Göteborg, Sweden 2001
- [4] Chien, K.Y.: Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model. *AIAA Journal*, Vol. 20, 1982, 33-38
- [5] Cortella C., Manzan M. and Comini G.: CFD simulation of refrigerated display cabinets, *Int.J.of Refrigeration* 24, 250-250, 2001
- [6] Davis, G.D.V. Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution. *Int.J.Num.Meth.Fluids*, 1983, 3, 249-264.
- [7] Elkaim D., Reggio M. and Camarero R.: Simulating a two-dimensional turbulent flow using the $k - \epsilon$ model and the vorticity-streamfunction formulation. *Int.J.Num.Meth.Fluids* 14, 961-980, 1992
- [8] Fan, S., Lakshminarayana, B. and Barnett, M.: Low-Reynolds-Number $k - \epsilon$ Model for Unsteady Turbulent Boundary Layer Flows.. *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 10, 1993, pp.1777-1784
- [9] Ghia, U., Ghia, K.N. in Shin, C.T.. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *J.Com.Phys.*, 1982, 48, 387-411.
- [10] Hanjalič, K. Jakirlić: Contribution towards the second-moment closure modelling of separating turbulent flows. *Computers & Fluids* Vol. 27, pp.137-156, 1998
- [11] Ramšak, M. in Škerget, L.: Mixed Boundary Elements for laminar flows. *Int.Jour.Numer.Meth.Fluids*, 31, 1999, 861-877
- [12] Škerget, L., Alujevič, A., Žagar, I. and Rek Z.: Boundary element method for laminar and turbulent flow of incompressible viscous fluid. *YU Term 90 proceedings*, 35-50, 1990
- [13] Wu J.C. and Sugavanam A.: Method for the numerical solution of turbulent flow problems. *AIAA* 16, 948-955, 1978



Diskretna valčna transformacija za metodo robnih elementov v mehaniki tekočin

J. Ravnik¹, L. Škerget² in M. Hriberšek³

Discrete Wavelet Transform for Boundary Element Method in Fluid Dynamics

Povzetek. V prispevku podajamo izpeljavo diskretne valčne transformacije z Daubechies valčki za vektorje poljubnih dolžin. Transformacijo smo preverili z reševanjem linearnih sistemov enačb, ki jih dobimo z uporabo metode robnih elementov na Navier-Stokesovih enačbah v hitrostno-vrtinčnem zapisu. Ugotovili smo, da je napaka, ki jo povzroči uporaba valčne transformacije, eksponentno odvisna od števila zanemarjenih elementov v sistemski matriki. Napaka narašča s povečevanjem nelinearnosti primera (večje Ra , Re število) in se zmanjšuje s povečevanjem gostote računske mreže.

Abstract. A derivation of discrete wavelet transform with Daubechies wavelets for vectors of arbitrary length is presented. Usage of the transform was checked on linear systems of equations resulting from BEM discretization of the fluid kinematics equation. It was shown, that the error, caused by usage of wavelets, grows exponentially with the number of thresholded elements in the system matrix. The error also grows with increasing nonlinearity of the problem (higher Re , Ra numbers). On the other hand higher mesh density decreases the error.

1 Uvod

Ena glavnih težav, s katero se spopadamo pri uporabi metode robnih elementov, je reševanje velikih linearnih sistemov enačb. Diskretizacija vodilnih nelinearnih parcialnih enačb vodi do velikih, nesimetričnih in polnih sistemskih matrik. Numerična rešitev toka viskoznihi tekočin zahteva zelo veliko število robnih elementov in notranjih celic za zadosten opis celotne fizike pojava. Žal reševanje velikih sistemov enačb zahteva dolge računske čase in veliko računalniškega spomina. Čeprav hiter razvoj informacijskih tehnologij omogoča reševanje bolj in bolj zahtevnih primerov, ostaja velik del, predvsem inženirsko zanimivih primerov, nerešljiv.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

³ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

Valčna transformacija je matematično orodje namenjeno zmanjševanju zahtevnosti algoritmov po računalniškem spominu in času. Pogosto jo uporabljajo za stiskanje slik, obdelavo signalov in tudi za pospešitev delovanja metode robnih elementov (Bucher in sod. [2]). Pospeševanje reševanja velikih linearnih sistemov enačb temelji na predpostavki, da po absolutni vrednosti majhne elemente v valčnem prostoru zapisane systemske matrike lahko zanemarimo. Izpraznjeno matriko zapišemo v zapisu strnjenih vrstic in tako prihranimo računalniški spomin. Iterativni solver pa občutno hitreje reši sistem, saj ne opravlja nepotrebnih operacij z ničlami.

Robno-območna integralska metoda (ROIM, Škerget in sod. [6]) rešuje sklopljen sistem enačb kinematike, prenosa vrtničnosti in prenosa energije. Zaradi lastnosti metode ROIM ni mogoče neodvisno določati velikosti systemskih matrik za posamezne enačbe. Diskretna valčna transformacija pa zahteva, da je število enačb v sistemu potenca števila dva. Algoritem diskretne valčne transformacije smo nadgraditi tako, da lahko deluje na vektorjih poljubne dolžine. Izpeljava je podrobneje prikazana v poglavju 2, kjer smo zapisali tudi algoritem za pospeševanje reševanja linearnih sistemov enačb s pomočjo valčne transformacije.

Ob koncu smo prikazali uporabnost metode na primerih reševanja pojava notranje konvekcije v kvadratni kotanji in gnane kotanje.

2 Diskretna valčna transformacija

Valčki so ortogonalne bazne funkcije za prostor v kvadratu integrabilnih funkcij $L^2(\mathfrak{R})$. Vsako funkcijo f , $f \in L^2(\mathfrak{R})$, lahko zapišemo kot uteženo vsoto baznih funkcij, valčkov. Uteži, s katerimi so pomnoženi valčki v vsoti, so koeficienti valčne transformacije. Z diskretno transformacijo lahko po baznih funkcijah razvijemo tudi vektorje. Koeficiente, ki jih izračunamo s postopkom valčne transformacije, shranimo v nov *valčno transformiran* vektor.

Družin valčkov, ki so bazne funkcije za prostor, je več. Za vse je značilno, da jih dobimo s pomočjo krčenja in pomikanja valčka prototipa oz. materinskega valčka. Materinski valček je valček ničtega reda. Označimo ga s $\psi_{0,1}$. Valčke višjih redov označimo s $\psi_{k,l}$, kjer je k red valčka, l pa njegov položaj. Poleg materinskega valčka in valčkov višjih redov spada v družino še merilni valček, navadno označen s $\phi_{0,1}$. Merilni valček skrbi za enako merilo oz. red velikosti med funkcijo, ki jo transformiramo, in valčki. V k -tem redu je 2^k valčkov na $l = 1, \dots, 2^k$ položajih. Skupno pa je število valčkov do k -tega reda 2^{k+1} . Diskretna valčna transformacija deluje na vektorjih dolžine 2^n , za kar uporabimo valčke do $n - 1$ reda. Za izvedbo transformacije moramo vedno uporabiti celotne rede valčkov, zato morajo biti dolžine vektorjev, ki jih transformiramo, potence števila dva.

2.1 Hitra valčna transformacija

Algoritem za hiter izračun diskretne valčne transformacije (Beylkin in sod. [1]) uporablja piramidalno shemo za transformacijo vektorja v valčni prostor. Uporablja valčke z omejeno podporo (Daubechies [3]) z M ničelnimi momenti. Vsako družino valčkov opišemo z $2M$ valčnimi koeficienti (h_i, g_i) . Prva jih je do $M = 10$ zapisala Ingrid Daubechies [3], po njej se tudi imenujejo. Posebno preprosti so Haarovi valčki ($M = 1$), katere odlikuje konstantna merilna funkcija in ne-prekrivajoča podpora. Hitro valčno transformacijo na vektorju s komponentami

$s_k^0; k = 1, \dots, N = 2^{n+1}$ izvedemo tako, da rekurzivno uporabimo spodnji formuli:

$$s_k^j = \sum_{l=1}^{l=2M} h_l s_{l+2k-2}^{j-1}, \quad d_k^j = \sum_{l=1}^{l=2M} g_l s_{l+2k-2}^{j-1}, \quad (1)$$

kjer uporabimo s_k^j in d_k^j kot periodična niza s periodo 2^{n-j} . Formuli (1) preslikata koeficiente s_k^{j-1} s $k = 1, \dots, 2^{n-j+1}$ v s_k^j in d_k^j s $k = 1, \dots, 2^{n-j}$. Obratno transformacijo dosežemo z

$$s_k^{j-1} = \sum_{k=1}^{k=M} h_{2k} s_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^{k=M} g_{2k} d_{n-k+1}^j, \quad d_k^{j-1} = \sum_{k=1}^{k=M} h_{2k-1} s_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^{k=M} g_{2k-1} d_{n-k+1}^j. \quad (2)$$

Z rekurzivno uporabo formul (1) za vse $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, 2^{n-j}$ začenši s $s_k^0, k = 1, \dots, N$ lahko izračunamo vse s_k^j in d_k^j s številom operacij, ki je sorazmerno z N . Valčna transformacija vektorja so d_k^j in en edini element v s_1^n . Obratno transformacijo naredimo z rekurzivno uporabo formule (2) za $j = n, n-1, \dots, 0$.

2.2 Diskretna valčna transformacija za vektorje poljubne dolžine

ROIM rešuje sklopljen sistem nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb kinematike, prenosa vrtničnosti in prenosa energije. Število enačb v sistemu je število robnih vozlišč za enačbo kinematike in število robnih in notranjih vozlišč za prenosni enačbi. Hkrati metoda potrebuje več matrik integralov, med njimi tudi matrike pravokotne oblike. Podrobnosti o metodi so zapisane v [6]. Diskretno valčno transformacijo bomo nadgradili tako, da bo lahko delovala na vektorjih poljubne dolžine (in s tem na poljubnih matrikah, saj matrike transformiramo stolpec za stolpcem).

Naj ima vektor \vec{s}^0 poljubno število komponent $s_k^0, k = 1, \dots, L$ in naj bo prva potenca števila 2 večja od L enaka N . Vektor bomo razširili z $K = N - L$ dodatnimi komponentami x_i na tak način, da bo zadnjih K valčnih koeficientov d_k^1 enakih nič. Valčna transformacija razširjenega vektorja je:

$$(s_1^0, s_2^0, \dots, s_{L-K+1}^0, x_1, s_{L-K+2}^0, x_2, \dots, s_L^0, x_K) \rightarrow (s_1^n, d_1^n, \dots, d_1^2, \dots, d_{2^{n-2}}^2, d_1^1, \dots, d_{N/2-K}^1, 0, \dots, 0), \quad (3)$$

kjer je K ničel in L neničelnih valčnih koeficientov. Enačba (1) določa vrednosti d_k^1 . Zapišimo jo za $j = 1$:

$$d_k^1 = \sum_{l=1}^{l=2M} g_l s_{l+2k-2}^0, \quad k = 1, 2, \dots, N/2. \quad (4)$$

Tu so s_i^0 koeficienti razširjenega vektorja, definirani na levi strani enačbe (3). Želimo, da bi bilo zadnjih K valčnih koeficientov enakih nič; $d_k^1 = 0$. To dosežemo, če so x_i rešitev naslednjega sistema enačb:

$$d_k^1 = \sum_{l=1}^{l=2M} g_l s_{l+2k-2}^0 = 0, \quad k = N/2 - K, \dots, N/2 \quad (5)$$

kjer $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_{L-K+1}^0, x_1, s_{L-K+2}^0, x_2, \dots, s_L^0, x_K)$. Sistem (5) ima K enačb za x_k ($k = 1, \dots, K$) neznank. Sistemski matrika sistema (5) ima polnih samo M zgornjih diagonal. Za $M = 3$ in $K = 6$ je sistem tak:

$$\begin{pmatrix} g_2 & g_4 & g_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & g_4 & g_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & g_4 & g_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_2 & g_4 & g_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \vec{R}, \quad (6)$$

kjer je vektor na desni strani \vec{R} enak

$$R_k = \begin{cases} -\sum_{i=1}^M g_{2i-1} s_{N-2K-1+k+i}^0 & k \leq K - (M - 1) \\ -\sum_{i=1}^{\alpha} g_{2i-1} s_{N-2K-1+k+i}^0 - \sum_{i=2\alpha+1}^{2M} g_i s_{i-2\alpha}^0 & k > K - (M - 1) \end{cases}, \quad (7)$$

in $\alpha = M - [k - \{K - (M - 1)\}]$. Rešitev sistema (5) najlažje dobimo rekurzivno, če začnemo z enačbo za x_K . Uporabimo spodnjo formulo:

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{g_2} \{R_k - \sum_{i=2}^M g_{2i} x_{k+i-1}\} & k \leq K - (M - 1) \\ \frac{1}{g_2} \{R_k - \sum_{i=1}^{K-k} g_{2i+2} x_{k+i}\} & k > K - (M - 1) \end{cases}. \quad (8)$$

za $k = K, K - 1, \dots, 1$. Rešitev (8) sistema (5) je posebno preprosta za Haarove valčke ($M = 1, g_1 = -g_2$), namreč

$$x_k = s_{L-K+k}^0, \quad k = 1, \dots, K; M = 1. \quad (9)$$

Ocenimo velikosti koeficientov x_k za Daubechies valčke ($M > 1$). Ker formulo (8) uporabljamo rekurzivno, velja približno $x_{k-1} \approx \frac{x_k}{g_2}$. To pomeni, da je red velikosti $O(x_1) \approx (\frac{1}{g_2})^K$. Absolutna vrednost valčnega koeficienta $g_2 = 0.22$ za $M = 2$ in se hitro zmanjšuje, ko M narašča (Daubechies [3]). Torej je x_1 zelo veliko število, za skoraj vsako kombinacijo K and $M > 1$. Vrednosti so tako velike, da jih ne moremo zapisati z dvojno natančnostjo. Daubechies valčke ($M > 1$) lahko uporabljamo samo, če je K dovolj majhen. V praksi to pomeni, da lahko vektor podaljšamo s samo nekaj dodatnimi koeficienti. Pri Haarovih valčkih ($M = 1$) te omejitve ni, saj so dodatni koeficienti kar enaki obstoječim komponentam vektorja (enačba (9)).

2.3 Haarova valčna transformacija za vektorje poljubnih dolžin

Piramidalen algoritem, opisan v zgornjem poglavju, je pripraven za hitro računanje diskretne valčne transformacije. Ker je valčna transformacija linearna operacija, jo lahko zapišemo tudi v matrični obliki. Naj bo H matrika Haarove valčne transformacije in zato $H\vec{f}$ valčna transformacija vektorja \vec{f} . Tudi podaljševanje vektorja po enačbi (9) je linearna operacija, predstavimo jo z matriko E . Ko naredimo $HE\vec{f}$ dobimo vektor valčnih koeficientov, ki ima zadnje komponente enake 0. Vpeljimo še linearen matrični operator C , ki naj vektorju odreže ničle. Matrični produkt CHE je kvadratna matrika s številom elementov, ki je enako kvadratu števila komponent vektorja \vec{f} . Haarova valčna transformacija za vektorje poljubnih dolžin je

$$\hat{f} = CHE\vec{f}. \quad (10)$$

Obratna transformacija pa je

$$\vec{f} = (CHE)^{-1} \hat{f} = E^{-1} H^T C^T \hat{f}, \quad (11)$$

kjer je E^{-1} matrika, ki skrajša vektor, H^T transponirana Haarova valčna matrika in C^T transponirana C matrika, ki podaljša vektor z dodajanjem ničel. Matrike C, C^T, E in E^{-1} so identitete, če je dolžina vektorja \vec{f} potenca števila dva.

CHE transformacija je v osnovi še vedno Haarova transformacija. Pred klasično Haarovo transformacijo prekratek vektor podaljšamo (enačba (9)) tako, da je ravno pravo število valčnih koeficientov po transformaciji enakih nič. Ker ničel ne shranjujemo, CHE transformacija lahko deluje na vektorju poljubne dolžine in vrne samo isto število valčnih koeficientov.

2.4 Reševanje linearnih sistemov enačb s CHE transformacijo

Metoda ROIM prevede reševanje nelinearnih parcialnih enačb na rešitev velikih sistemov linearnih enačb. Simbolično imamo

$$\underline{a}\vec{x} = \vec{b}, \quad (12)$$

kjer so neznanke $\vec{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$. Vektor na desni strani $\vec{b} = b_1, b_2, \dots, b_n$ in sistemsko matriko \underline{a} z elementi a_{ij} pa poznamo. Pomnožimo enačbo (12) na obeh straneh z matrikami CHE in dobimo

$$CHE\underline{a}\vec{x} = CHE\vec{b}. \quad (13)$$

Izraz $(CHE)^{-1}(CHE)$ je identiteta, zato ga lahko vstavimo na levo stran enačbe (13) da dobimo

$$CHE\underline{a}(CHE)^{-1}CHE\vec{x} = CHE\vec{b}. \quad (14)$$

Določimo novo sistemsko matriko

$$\hat{\underline{a}} = CHE\underline{a}(CHE)^{-1} = CHE\underline{a}E^{-1}H^T C^T. \quad (15)$$

Produkt $CHE\underline{a}$ je valčna transformacija vseh stolpcev v matriki \underline{a} , medtem ko $(CHE\underline{a})(CHE)^{-1}$ transformira vse vrstice v produktu $CHE\underline{a}$. Tako je zaradi lastnosti valčne transformacije večina informacije o sistemu shranjena v po absolutni vrednosti velikih elementih $\hat{\underline{a}}$, medtem ko informacijo v majhnih elementih lahko zanemarimo. Razlika med velikimi in majhnimi elementi za matrike, ki jih srečujemo v ROIM, je več redov velikosti.

Vektorja \vec{x} in \vec{b} v enačbi (14) transformiramo po enačbi (10). Končno imamo nov sistem enačb

$$\hat{\underline{a}}\hat{x} = \hat{b}, \quad (16)$$

ki ga odlikuje nova sistemsko matrika $\hat{\underline{a}}$. Ko sistem rešimo za \hat{x} , dobimo končni rezultat z obratno valčno transformacijo (enačba (11)) $\vec{x} = (CHE)^{-1}\hat{x}$.

Glavna prednost tega postopka je v tem, da neznan vektor \hat{x} novega sistema enačb sestavljajo valčni koeficienti neznanega vektorja \vec{x} originalnega sistema enačb. Čeprav \hat{x} izračunamo nepravilno, obratna transformacija poskrbi, da je $(CHE)^{-1}\hat{x}$ zelo dober približek rešitve originalnega sistema enačb \vec{x} .

Zapišimo algoritem reševanja sistemov enačb s pomočjo valčne transformacije. Privzamemo, da s pomočjo ROIM (ali s katerokoli drugo numerično shemo) napolnimo sistemsko matriko \underline{a} in izračunamo vektor na desni strani \vec{b} .

1. Izračunamo valčno transformacijo vektorja na desni strani $\hat{b} = CHE\vec{b}$.

2. Izračunamo novo sistemsko matriko $\hat{a} = CHEaE^{-1}H^T C^T$. Čeprav uporabimo hitro piramidalno shemo Beylkina in sod. [1], nam ta produkt vzame veliko računalniškega časa.
3. Elemente z majhnimi absolutnimi vrednostmi v novi sistemski matriki \hat{a} postavimo na nič. Elemente smo zane-marjali na podlagi primerjave s povprečno vrednostjo absolutnih vrednosti vseh elementov.
4. Izpraznjeno sistemsko matriko \hat{a} zapišemo z metodo strnjenih vrstic (Žunič, [7]).
5. Rešimo $\hat{a}\hat{x} = \hat{b}$ za \hat{x} namesto $a\vec{x} = \vec{b}$ za \vec{x} .
6. Izračunamo obratno valčno transformacijo $\vec{x} = (CHE)^{-1}\hat{x}$ in dobimo rešitev.

Ko rešujemo sistem brez uporabe valčne transformacije naredimo samo korak 5. v algoritmu. Torej je ključnega pomena, da za korake 1. do 4. in 6. porabimo manj računalniškega časa, kot ga pridobimo s hitrejšo rešitvijo sistema v koraku 5. Pokaže se (Beylkin in sod. [1]), da navkljub uporabi piramidalnega algoritma za izračun valčne transformacije in ob uporabi hitrih iterativnih solverjev za reševanje sistema, ni mogoče doseči pridobitve časa s samo eno rešitvijo sistema enačb. Ker pa z enako sistemsko matriko enačbe kinematike v iterativnem postopku ROIM rešujemo sistem za različne vektorje na desni strani, pa je pridobitev časa znatna. Uporabljali smo direktni solver s predhodno LU dekompozicijo. Pri največji praznosti smo čas za rešitev sistema zmanjšali za do 20 krat. Za enačbi kinetike ta algoritem vsaj iz stališča pridobitve časa ni primeren, saj se sistemski matriki spreminjata vsako iteracijo.

3 Uporaba na primerih

Uporabo valčne transformacije smo preizkušali z metodo ROIM na enačbi kinematike za numerično rešitev tokovnih razmer pri pojavu naravne konvekcije v kotanji in v gnani kotanji. Pri pojavu naravne konvekcije je vzgon razlog za konvektivni prenos. Enačba ohranitve notranje energije je prek vzgonskega člena povezana z enačbo prenosa vrtinčnosti. Kotanja je kvadratna, levo steno držimo pri stalni temperaturi T_1 , desno pa pri T_0 . Spodaj in zgoraj je kotanja izolirana, tako da skozi steni ni toplotnega toka. Zemeljski pospešek deluje navzdol. Ta primer je temeljito obdelal Davies [4]. Za kvantitativno primerjavo smo uporabili Nusseltovo število $Nu = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial n} dy$ za srednjo vertikalno ravnino. V gnani kotanji je tekočina izotermna, zato izračun temperaturnega polja z enačbo ohranitve notranje energije ni potreben. Vzgonski člen v enačbi prenosa vrtinčnosti odpade. Iterativno rešujemo samo dve sklopljeni enačbi: enačbo kinematike toka, ki povezuje hitrostno in vrtinčno polje in enačbo kinetike toka, ki opisuje prenos vrtinčnosti. Podobno kot v primeru naravne konvekcije smo si tudi tu zamislili kvadratno kotanjo. Zgoraj predpišemo stalno hitrost v horizontalni smeri $\vec{v} = \vec{v}_x$, medtem ko je na ostalih stenah hitrost enaka nič. Za primerjavo rezultatov smo uporabili Ghia [5] referenčne hitrostne profile.

Zanimali so nas predvsem vpliv stopnje zanemarjanja elementov v sistemski matriki na točnost izračuna pri različnih gostotah mreže in pri različnih Reynoldsovih in Rayleighovih številih.

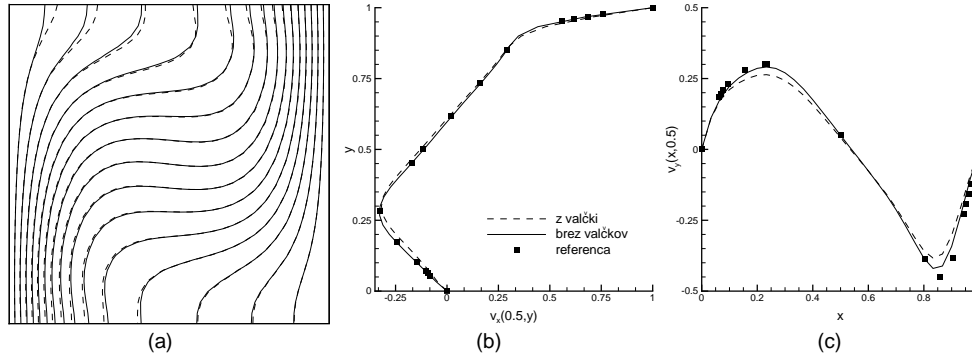
3.1 Praznost matrike

Enačbo kinematike smo z ROIM opisali z linearnim sistemom 120 enačb. Pojav naravne konvekcije v kotanji smo rešili pri $Ra = 10^4$, gnano kotanjo pa pri $Re = 400$. Za kvantitativno oceno razlike med polji veličine v kotanji smo izbrali RMS razliko med poljem izračunanim s

pomočjo valčne transformacije in brez nje. Rezultati so prikazani v tabeli 1 in grafično na sliki 1. Vidimo, da RMS razlika narašča eksponentno z naraščajočo praznostjo sistemske matrike.

Tabela 1 : RMS razlika med polji izračunanimi s pomočjo reševanja enačbe kinematike z in brez valčkov. Nusseltovo število Nu_b je povzeto po Davies [4]. Praznost je delež neničelnih elementov v sistemske matriki, CPU pa razmerje med časom za rešitev enačbe kinematike z in brez valčkov.

Praznost	naravna konvekcija, $Ra = 10^4$				gnana kotanja, $Re = 400$		
	$RMS(T)$	Nu	Nu_b	CPU	$RMS(\vec{v}_x)$	$RMS(\vec{v}_y)$	CPU
0.109	$3.62 \cdot 10^{-6}$	2.24502	2.243	1.16	$1.02 \cdot 10^{-6}$	$1.10 \cdot 10^{-6}$	1.03
0.387	$2.42 \cdot 10^{-5}$	2.24515	2.243	1.31	$6.14 \cdot 10^{-5}$	$8.92 \cdot 10^{-5}$	1.32
0.710	$0.90 \cdot 10^{-4}$	2.24512	2.243	1.69	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$	1.53
0.883	$1.78 \cdot 10^{-3}$	2.24971	2.243	2.20	$9.38 \cdot 10^{-3}$	$1.37 \cdot 10^{-2}$	2.05
0.987	$0.76 \cdot 10^{-2}$	2.26865	2.243	18.9	$7.58 \cdot 10^{-2}$	$1.05 \cdot 10^{-1}$	16.4



Slika 1 : (a) Izoterme pri pojavu naravne konvekcije ($Ra = 10^4$), horizontalna (b) in vertikalna (c) hitrostna profila v gnani kotanji ($Re = 400$) brez (polna črta) in z uporabo valčkov (praznost=0.987, črtkana črta). Ghia [5] referenčni hitrostni profili so prikazani s kvadrati.

3.2 Reynoldsovo in Rayleighovo število

Vpliv Ra in Re števil na RMS razliko smo ocenili za enačbo kinematike zapisano s sistemom 120 linearnih enačb. Sistemsko matriko smo izpraznili do 0.9822. Rezultati so predstavljeni v tabeli 2. Pri večjem Ra številu imamo v kotanji močnejši konvektivni prenos in s tem višje hitrosti in hitrostne gradiente. Zato imajo napake v rešitvi enačbe kinematike, ki jih povzročimo z uporabo valčne transformacije, večji vpliv na rešitev prenosnih enačb in s tem na končno rešitev. Povečevanje Reynoldsovega in Rayleighjevega števila torej povečuje napako, ki jo povzroči uporaba valčne transformacije.

3.3 Gostota mreže

Enačbo kinematike smo z ROIM zapisali s sistemi linearnih enačb različnih velikosti. Pri enaki praznosti, Ra in Re številu smo primerjali vpliv gostote mreže (oz. števila linearnih enačb) na

Tabela 2 : Napaka v odvisnosti od Ra in Re števil. Nu_0 je Nusseltovo število rešitve brez uporabe valčkov. Ostale oznake so enake kot na tabeli 1.

Naravna konvekcija					Gnana kotanja		
Ra	$RMS(T)$	Nu	Nu_0	Nu_b	Re	$RMS(\vec{v}_x)$	$RMS(\vec{v}_y)$
10^3	$2.239 \cdot 10^{-3}$	1.124	1.118	1.118	100	$3.123 \cdot 10^{-2}$	$6.057 \cdot 10^{-2}$
10^4	$8.666 \cdot 10^{-3}$	2.277	2.245	2.243	400	$4.881 \cdot 10^{-2}$	$6.902 \cdot 10^{-2}$
10^5	$39.42 \cdot 10^{-3}$	4.656	4.539	4.519	1000	$11.61 \cdot 10^{-2}$	$14.48 \cdot 10^{-2}$

RMS razliko. Rezultati smo povzeti v tabeli 3. Vidimo, da RMS razlika pada s povečevanjem gostote mreže. Napaka, ki jo naredimo zaradi uporabe valčne transformacija na enačbi kinematike, se na gostejši mreži milejše odraža na končnem polju.

Tabela 3 : Napaka v odvisnosti od gostote mreže. Oznake so enake kot na tabeli 2.

		Naravna konvekcija, $Ra = 10^4$				Gnana kotanja, $Re = 400$	
Št. en.	Praznost	$RMS(T)$	Nu	Nu_0	Nu_b	$RMS(\vec{v}_x)$	$RMS(\vec{v}_y)$
80	0.9826	$11.82 \cdot 10^{-3}$	2.244	2.248	2.243	$18.26 \cdot 10^{-2}$	$24.31 \cdot 10^{-2}$
120	0.9822	$8.666 \cdot 10^{-3}$	2.277	2.245	2.243	$4.881 \cdot 10^{-2}$	$6.902 \cdot 10^{-2}$
160	0.9792	$4.301 \cdot 10^{-3}$	2.267	2.245	2.243	$2.879 \cdot 10^{-2}$	$3.293 \cdot 10^{-2}$

4 Zaključki

Dokazali smo uporabnost diskretne valčne transformacije s Haarovimi valčki za vektorje poljubnih dolžin. Pokazali smo, da napaka, ki jo vnesemo v iterativni izračun z uporabo valčne transformacije eksponentno narašča s številom zanemarjenih elementov v sistemski matriki, narašča tudi s povečevanjem Re in Ra števil. S povečevanjem gostote mreže, pa se napaka zmanjšuje.

Valčna transformacija je sodobno orodje za zmanjševanje zahtevnosti algoritmov po računalniškem spominu in času. Vgraditi jo je mogoče v najrazličnejše numerične sheme in algoritme.

Literatura

- [1] G. Beylkin, R. Coifman and V. Rokhlin, *Fast wavelet transforms and numerical algorithms*, Comm. Pure Appl. Math. 1991;44:141-183.
- [2] H.F. Bucher, L.C. Wrobel, J.M. Mebe and C. Magluta, *A Novel Approach to Applying Fast Wavelet Transforms in Boundary Element Method*; El. J. of Bound. Elements. 2002;BETEQ 2001(2):187-195.
- [3] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 1988;41:909-996.
- [4] G.D.V Davies, *Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution* International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1983;3:249-264.
- [5] U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shin, *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*, J. Comput. Phys. 1982;48:387-411.
- [6] L. Škerget, M. Hriberšek, G. Kuhn, *Computational Fluid Dynamics by Boundary Domain Integral Method*; Int. J. Num. Meth. Eng. 1999;46:1291-1311.
- [7] Z. Žunič, *Direktne metode za reševanje sistemov enačb v robno-območni integralni metodi*, Kuhljevi dnevi '98, Slovensko društvo za mehaniko, 1998;233-240.



Toplotna analiza konstrukcije naftnega rezervoarja v primeru požara bližnjega rezervoarja

A. Rebec¹, P. Plešec¹, U. Bohinc¹, B. Brank²

Thermal analysis of an oil container in case of fire accident at a nearby container

Povzetek. Opisujemo modeliranje prenosa toplote od gorečega naftnega rezervoarja do in po sosednjem, nepoškodovanem rezervoarju. Hipotetično predpostavimo takšen dogodek v skladišču naftnih rezervoarjev v Srminu pri Luki Koper. Plamen požara modeliramo kot sivo telo, ki difuzno seva v okolico. Ob upoštevanju absorptivnosti zraka, vidnostnih faktorjev in absorptivnosti materiala rezervoarja, izračunamo časovno odvisni toplotni tok, ki prihaja v sosednji rezervoar zaradi požara. Za izračun prenosa toplote po konstrukciji rezervoarja uporabimo komercialni računalniški program: časovna diskretizacija enačb se naredi s končnimi diferencami, prostorska pa z lupinastimi končnimi elementi. Prikazani so nekateri rezultati parametrične študije: toplotno stanje v sosednjem rezervoarju je bilo namreč analizirano pri različnih hitrostih vetra, medsebojnih oddaljenostih obeh rezervoarjev in polnosti nepoškodovanega rezervoarja.

Abstract. Modelling of heat transfer from an oil container in fire towards and across a neighbour undamaged container is presented. Hypotetically we assume such an accident in a container storage in Srmin at Koper Port. The flame body is modelled as a gray body, which radiates diffusively into surroundings. By taking into account air absorptivity, view factors and absorptivity of material of the container, a heat flux absorbed by the neighbour container is calculated. To analyse a heat transfer across the container a commercial computer programme is used: temporal discretization of equations is performed by finite differences and the spatial discretization is performed by shell finite elements. Some results of a parametric study are presented, since thermal state in the neighbour container was analysed with respect to varied wind velocity, distance between the two containers and fillness of the neighbour undamaged container.

1 Opis problema

Problem, ki ga obravnavamo, je naslednji: predpostavimo, da v skladišču velikih naftnih rezervoarjev pride do požara na enem izmed njih - zanima nas, kakšne so toplotne razmere v nosilni konstrukciji bližnjega nepoškodovanega sosednjega rezervoarja. Za primer vzamemo skupino rezervoarjev, ki stojijo v Srminu pri Luki Koper; od tam privzamemo podatke o geometriji rezervoarja (slika 1) ter o materialu, iz katerega je konstrukcija izdelana (tabela

¹ Zavod za gradbeništvo Slovenije (ZAG)

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

1); za kupolo sta uporabljeni dve vrsti aluminija, za spodnji, valjasti del rezervoarja pa posebno jeklo.

Tabela 1: Toplotna prevodnost in specifična toplota uporabljene aluminijeve zlitine in jekla.

	Temperatura T (K)			
	273	373	473	573
Toplotna prevodnost aluminija k (W/mK)	190	197	204	211
Toplotna prevodnost jekla k (W/mK)	53	50	47	44
Specifična toplota aluminija c (J/kgK)	903	944	985	1026
Specifična toplota jekla c (J/kgK)	440	500	530	570

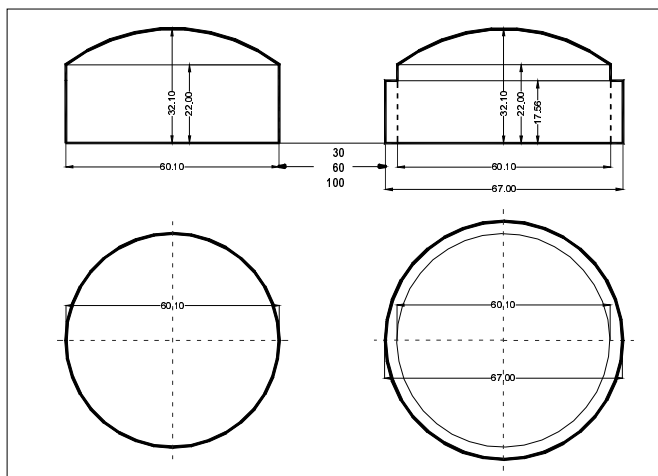
2 Enačbe prenosa toplote po lupinasti konstrukciji

Variacijska oblika energijskega ravnotežja za telo z začetnim volumnom V in začetno površino S je pri nekem času t enaka (če se telesu dovaja/odvaja toploto samo v obliki toplotnega toka na enoto površine)

$$\int_V \delta T \rho \dot{U} dV + \int_V \frac{\partial \delta T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} dV - \int_S \delta T q dS = 0, \quad (1)$$

kjer je ρ začetna gostota snovi, $U=U(T)$ je notranja energija telesa (predpostavimo, da sta toplotni in mehanski del problema nepovezana, tako da je notranja energija odvisna le od

temperature), $T=T(\mathbf{x},t)$ je temperatura snovi, $q=q(\mathbf{x},T)$ je toplotni tok na enoto površine, ki prihaja v telo ali odhaja iz telesa, $\mathbf{k}=k(T)\mathbf{I}$ je toplotna prevodnost za izotropno snov, \mathbf{x} je lega materialne točke in δT je virtualna temperatura. Velja konstitutivna enačba $dU/dT=c(T)$, kjer je c specifična toplota, tako da imamo $\dot{U} = c(T)\dot{T}$.

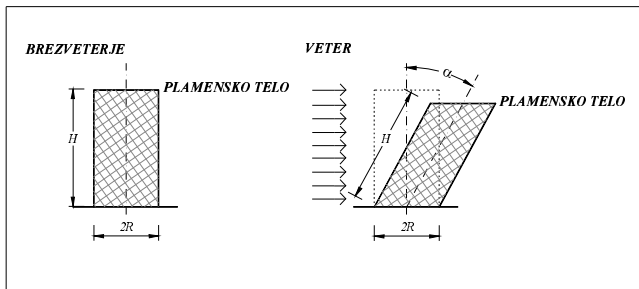


Slika 1.

Geometrija gorečega (levo) in sosednjega (desno) rezervoarja, ki ima zaščitni obroč.

Robni pogoji so podani ali v obliki predpisane temperature $T(\mathbf{x},t)=\bar{T}$ na delu površine $S_T \subset S$ ali v obliki predpisanega površinskega toplotnega toka q na delu površine $S_q \subset S$, pri čemer velja $S_T \cup S_q = S$ in je q vsota iz okolja dovedenega toplotnega toka q_F in toplotnega toka zaradi radiacije in konvekcije na površini S_q

$$q = q_F - q_R - q_K = q_F - \varepsilon \sigma [T^4 - T_A^4] - \hat{h}(T - T_A) \quad \hat{h} = \hat{h}(\mathbf{x}, T). \quad (2)$$



V enačbi (2) je ε emisivnost površine S_q , s σ je označena Stefan-Boltzmanova konstanta, T_A je temperatura oddaljenega okoliškega zraka in \hat{h} je koeficient toplotne prestopnosti.

Slika 2.

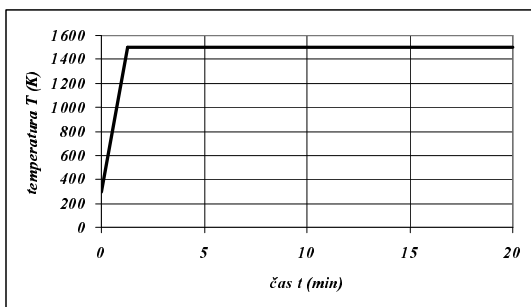
Geometrija modela plamena.

Če iščemo rešitev enačbe (1) v diskretnih časih, $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots$ in za časovno diskretizacijo uporabimo končne diference (v našem primeru »backward Euler« shemo), lahko (1) izrazimo v času t_{n+1} kot

$$\frac{1}{\Delta t} \int_V \delta T \rho c_{n+1} (T_{n+1} - T_n) dV + \int_V \frac{\partial \delta T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}_{n+1} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right)_{n+1} dV - \int_S \delta T q_{n+1} dS = 0, \quad (3)$$

kjer je $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, $T_{n+1} = T(t_{n+1})$ in $f_{n+1} = f(T_{n+1})$. Ker modeliramo prenos toplote po lupinasti konstrukciji, za prostorsko diskretizacijo enačbe (2) uporabimo lupinaste končne elemente (KE), ki interpolirajo temperaturo po območju KE Ω na naslednji način

$$\Omega: T(s_1, s_2, s_3, t) = N^N(s_1, s_2) M^P(s_3) T^{NP}(t) \quad N = 1, 2, \dots, N_V \quad P = 1, 2, 3. \quad (4)$$

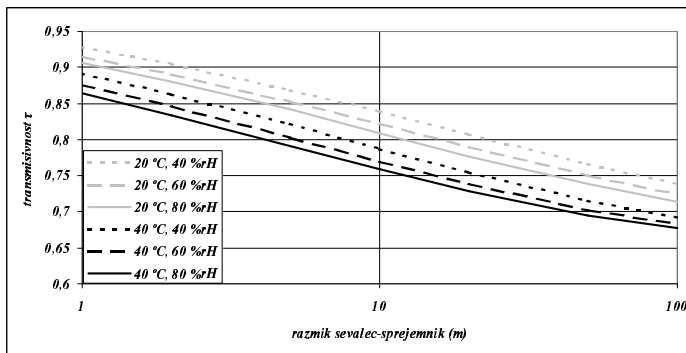


V enačbi (4) sta s_1 in s_2 krivočrtni koordinati središčne ploskve lupine, s_3 pa je ravna koordinata v smeri debeline lupine; $s_3 \in [-h/2, h/2]$, kjer je h začetna debelina lupine. N^N so standardne interpolacijske funkcije uporabljenega lupinastega KE.

Slika 3.

Temperatura plamena v odvisnosti od časa.

N_V je število vseh vozlišč KE, ki ležijo pri nekem fiksnem s_3 - npr. na središčni ploskvi. M^P so interpolacijske funkcije v smeri debeline, pri čemer je potek temperature po debelini interpoliran v obliki kvadratne parabole. Vsak lupinasti KE ima torej $N_V \cdot 3$ vozlišč in prav toliko prostostnih stopenj za temperaturo. Variacije temperatur interpoliramo kot



Slika 4. Transmisivnost zraka.

$$\Omega: \delta T(s_1, s_2, s_3) = N^N(s_1, s_2) M^P(s_3) \delta T^{NP} \quad N = 1, 2, \dots, N_V \quad P = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Z vstavitvijo interpolacij (4) in (5) v (3), dobimo za vsak KE sistem nelinearnih enačb z neznanimi vozliščnimi temperaturami v času t_{n+1}

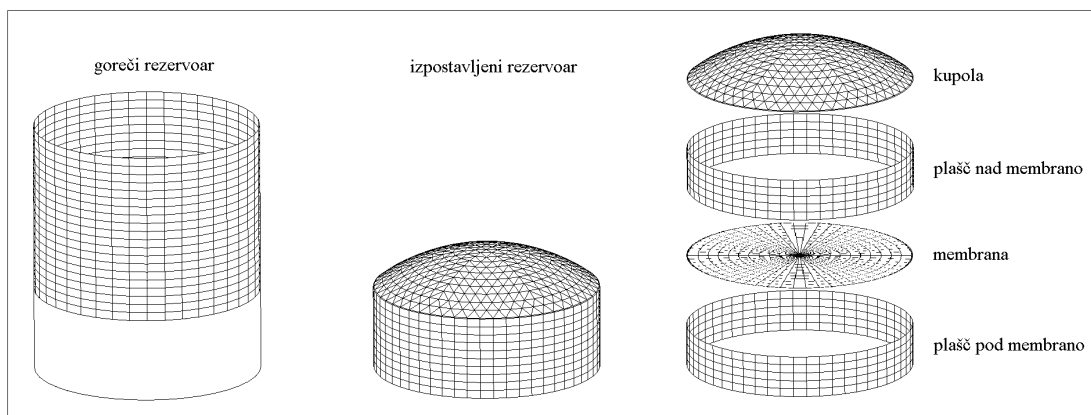
$$\frac{1}{\Delta} \int_A N^N N^M \left[\int_{-h/2}^{h/2} M^P M^Q \rho c_{n+1} (T_{n+1}^{MQ} - T_n^{MQ}) ds_3 \right] dA + \int_A (\boldsymbol{\beta}^N)^T \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\boldsymbol{\gamma}^P)^T \mathbf{k}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\gamma}^Q ds_3 \right] \boldsymbol{\beta}^M T_{n+1}^{MQ} dA - \int_A N^N \left(I^{PA} (q_{n+1}^A)_{s_3=h/2} + I^{PB} (q_{n+1}^B)_{s_3=-h/2} \right) dA = 0. \quad (6)$$

V (6) je A središčna ploskev lupinastega KE, I^{PA} je 1, če je vozlišče NP na zgornji površini KE, drugače je 0 in I^{PB} je 1, če je vozlišče NP na spodnji površini KE, drugače je 0. Do drugega integrala v (6) smo prišli z odvajanjem (4) in (5) po lokalnih Kartezijevih koordinatah y_i , ki so definirane tako, da sta koordinati y_1 in y_2 tangentni na središčno ploskev, $y_3 = s_3$ pa ima smer normale na središčno ploskev. Odvodi (4) po lokalnih koordinatah so

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^P & 0 \\ 0 & 0 & M^P \\ \frac{dM^P}{dy_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N^N \\ \frac{\partial N^N}{\partial y_1} \\ \frac{\partial N^N}{\partial y_2} \end{Bmatrix} T^{NP} = \boldsymbol{\gamma}^P \boldsymbol{\beta}^M T^{NP}, \quad (7)$$

pri čemer smo uporabili transformacijo med Kartezijevimi koordinatami y_i in krivočrtnimi koordinatami s_i , $\partial / \partial y_j = [\partial y_j / \partial s_i]^{-1} \partial / \partial s_i$. S standardnim združevanjem enačb KE (6), dobimo enačbo konstrukcije za prenos toplote. Tako dobljen nelinearen sistem enačb \hat{G} , kjer so neznanke vozliščne temperature pri času t_{n+1} , rešimo z Newtonovo metodo

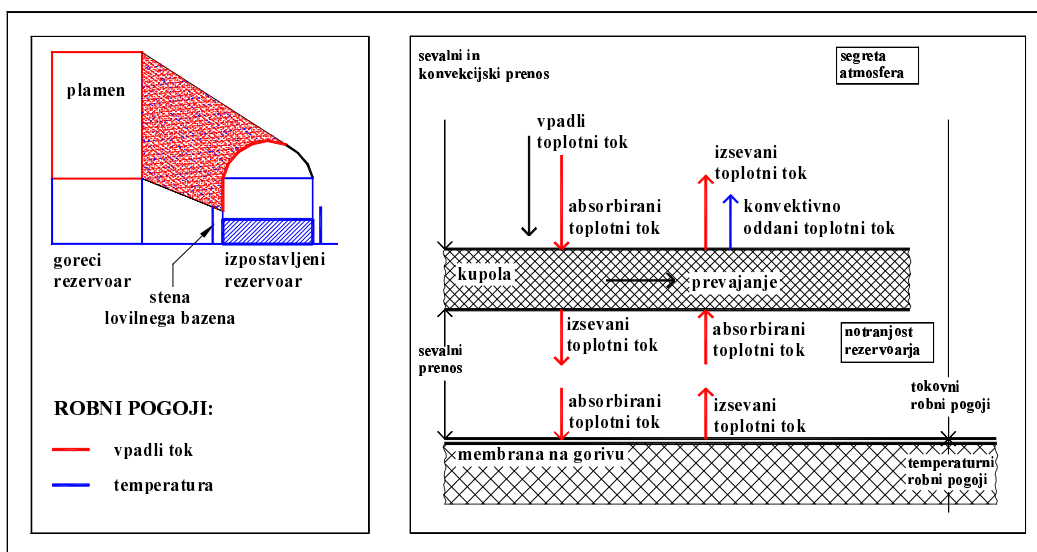
$$\frac{d\hat{G}(T_{n+1}^{MQ})}{dT_{n+1}^{MQ}} \Big|_{T_{n+1}^{NP,i}} \Delta T_{n+1}^{MQ,i} = -\hat{G}(T_{n+1}^{MQ,i}) \quad T_{n+1}^{MQ,i+1} = T_{n+1}^{MQ,i} + \Delta T_{n+1}^{MQ,i} \quad (8)$$



Slika 5. Uporabljene mreže KE.

2 Modeliranje problema

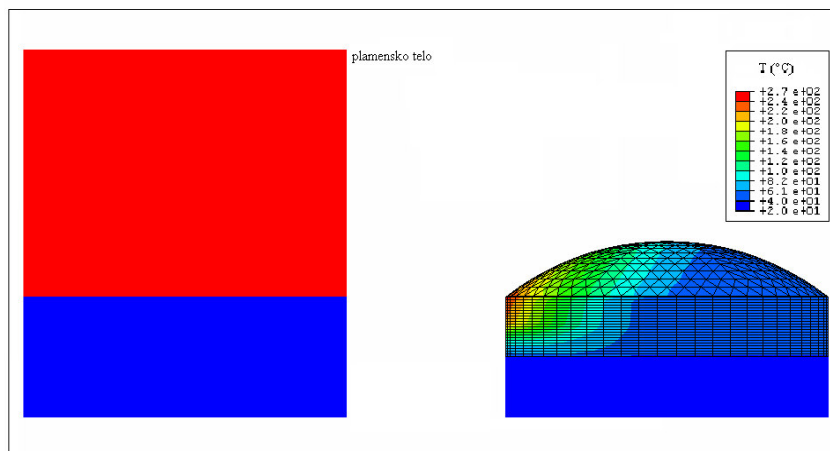
Plamensko telo, ki bi nastalo kot posledica požara na naftnem rezervoarju, modeliramo kot valj s premerom $D=2R=60$ m in višino H . V primeru vetra je valj nagnjen (slika 2). V našem primeru je H enak (glej [1]): 45 m (pri hitrosti vetra 0 m/s); 41.4 m (3 m/s), 37.2 m (5 m/s), 25.8 m (30 m/s). Predpostavimo, da se prenaša toplota iz plamenskega telesa na okoliška telesa le z difuznim sevanjem. Emisivnost plamenskega telesa, ki bi nastal pri požaru naftnega rezervoarja v Srminu, je ocenjena na $\varepsilon=0.243$ (po $\varepsilon=-0.00414*(2R-10)+0.45$, glej [1]). Njegova ocenjena temperatura v odvisnosti od časa pa je prikazana na sliki 3 (glej [1]). Del sevane toplote se med prenosom do sosednjega rezervoarja absorbira v atmosferi. Kolikšen je ta del, je odvisno od več faktorjev; na sliki 4 so podane krivulje, določene na podlagi [2], ki prikazujejo transmisivnost atmosfere v odvisnosti od temperature okoliškega zraka, relativne vlažnosti in oddaljenosti od plamenskega telesa. V našem primeru upoštevamo $T_A=20^\circ\text{C}$ in 60%rH ($\tau=0.9211 * L^{-0.0522}$), kjer je L oddaljenost od točke sevanja v m. Iz krivulj na sliki 4 je očitno, da se na razdalji 10 m od plamenskega telesa v atmosferi že »izgubi« od 16 do 24 odstotkov tistega toplotnega toka, ki je zapustil plamensko telo.



Slika 6. Robni pogoji pri analizi prenosa toplote pri rezervoarju.

Tabela 2. Parametri pri posameznih numeričnih simulacijah.

numerična simulacija	hitrost vetra (ms^{-1})				medsebojna oddaljenost (m)				polnost rezervoarja (%)		
	0	3	5	30	30	60	100	100	75	50	
1.	x				x			x			
2.		x			x			x			
3.			x		x			x			
4.				x	x			x			
5.	x					x		x			
6.	x						x	x			
7.	x				x			x			
8.	x				x				x		
9.	x				x					x	

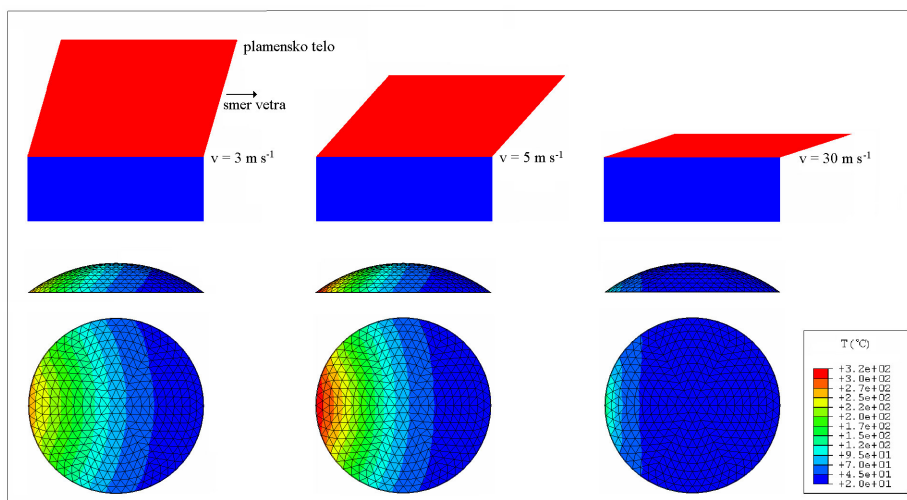


Slika 7. Temperatura po rezervoarju v stacionarnem stanju (9. numerična simulacija).

Za analizo prenosa toplote od plamenskega telesa do sosednjega rezervoarja in po njem, diskretiziramo z lupinastimi KE plamensko telo, streho rezervoarja, spodnji, valjasti del rezervoarja in membrano, ki plava na gladini vskladiščene nafte. Uporabljena mreža KE je podana na sliki 5. Toplotni tok, ki pada s plamenskega telesa na površino j -tega KE sosednjega rezervoarja \hat{q}_j (predpostavimo, da je konstanten po celem KE) in absorbirani toplotni tok q_{Tj} , ki dejansko prestopi skozi zunanjo površino rezervoarja, sta določena kot

$$\hat{q}_j = \varepsilon \sigma T_F^4 \frac{1}{A_j} \sum_i A_i F_{ij} \tau_{ij} \quad q_{Tj} = \alpha \hat{q}_j, \quad (9)$$

kjer je A_i površina i -tega KE, ki diskretizira plamensko telo, T_F je temperatura plamena (slika 3), F_{ij} je prostorski vidni koeficient med i -tim KE plamenskega telesa in j -tim KE sosednjega rezervoarja, τ_{ij} je transmisivnost atmosfere med i -tim in j -tim KE (slika 4), $\alpha=0.4$ pa je absorptivnost aluminija, glej [1], [4], ki jo v našem primeru vzamemo kot neodvisno od temperature.

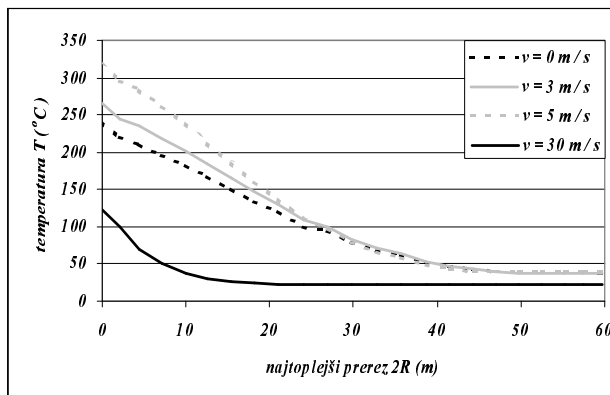


Slika 8. Temperature po kupoli v stacionarnem stanju (2., 3. in 4. numerična simulacija).

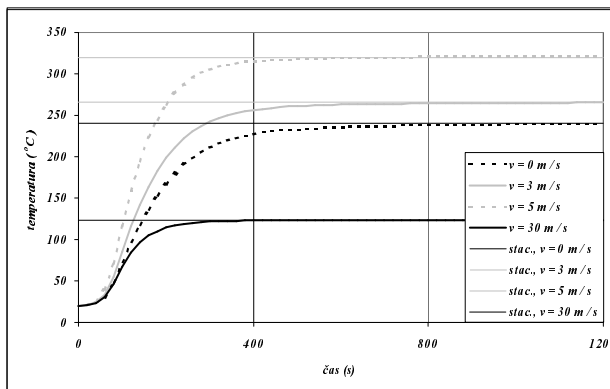
Ko po (9) določimo toplotni tok, ki ga absorbira zunanja površina vsakega KE, s katerim diskretiziramo sosednji rezervoar, uporabimo za analizo prevajanja toplote računalniški program Abaqus [3]. Predpisani robni pogoji so podani na sliki 6, pri čemer smo vzeli za temperaturo zunanje atmosfere $T_A=30^\circ\text{C}$, za temperaturne robne pogoje (predpisana je bila temperatura membrane) $T=30^\circ\text{C}$, za emisivnost kupole, membrane in jeklenega dela rezervoarja pa $\varepsilon=0.75$ (glej [1]). Koeficient \hat{h} iz enačbe (2) smo določili po [5] (poglavje 7, stran 395), in sicer (v $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$): 0.2 (pri hitrosti vetra 0 m/s); 1.0 (3); 1.3 (5); 3.3 (30). Izkaže se, da je prispevek membrane k temperaturnemu stanju v konstrukciji rezervoarja zanemarljiv [1], zato pri večini numeričnih simulacij (tabela 2), membrane (slika 5) nismo upoštevali. Takrat smo predpostavili temperaturo v notranjosti rezervoarja $T_A=50^\circ\text{C}$. Robni pogoj v notranjosti kupole zaradi medsebojne radiacije posameznih KE postane kompleksen. Toplotni tok zaradi radiacije na i -ti KE (ki vidi vse j -te KE) je tako

$$q_{Ri} = \frac{\sigma \varepsilon_i}{A_i} \sum_j \varepsilon_j \sum_k F_{ik} C_{kj}^{-1} (T_j^4 - T_i^4) \quad C_{ij} = \delta_{ij} - \frac{(1 - \varepsilon_i)}{A_i} F_{ij}, \quad (10)$$

kjer sta ε_i in ε_j emisivnosti i -tega in j -tega KE, A_i je površina i -tega KE, F_{ij} so vidnostni koeficienti, T_i in T_j pa sta temperaturi i -tega in j -tega KE.



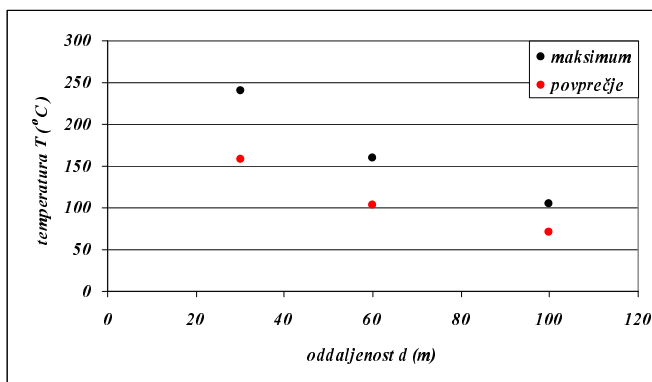
Slika 9. Porazdelitev temperature v najtoplejšem prerezu za prve štiri numerične simulacije.



Slika 10. Časovni razvoj temperature v najtoplejši točki kupole.

5 Nekateri rezultati numeričnih analiz

Na slikah 7-10 prikazujemo nekatere rezultate numeričnih analiz. Na sliki 7 je prikazan razpored temperatur po konstrukciji rezervoarja za 9. numerično simulacijo iz tabele 2, na sliki 8 pa razpored temperatur po kupoli pri različnih hitrostih vetra v stacionarnem stanju. Vidi se, da so največje temperature v kupoli pri hitrosti vetra 5 m/s, najmanjše pa pri največji hitrosti vetra, saj se takrat višina plamena precej zmanjša. Podobno se opazi tudi na sliki 9,



kjer je prikazano stacionarno temperaturno stanje v najtoplejšem prerezu kupole za prve štiri numerične simulacije iz tabele 2. Največja izračunana temperatura v kupoli je 320°C.

Slika 11.

Največje in povprečne temperature v kupoli v odvisnosti od medsebojne oddaljenosti rezervoarjev.

Na sliki 10 je prikazano spreminjanje temperatura najtoplejše točke kupole v odvisnosti od časa za prve štiri numerične simulacije. Razvidno je, da se temperaturna porazdelitev približa stacionarnemu stanju najkasneje po približno desetih minutah. Na sliki 11 so prikazane maksimalne in povprečne temperature (v najtoplejšem prerezu) kupole v odvisnosti od medsebojne oddaljenosti rezervoarjev.

6 Zaključek

Analizirali smo vpliv požara bližnjega rezervoarja nafte na konstrukcijo sosednjega enakega objekta. Pri tem smo najprej predpostavili devet mogočih požarnih scenarijev in določili vpliv vsakega izmed njih na toplotno stanje v konstrukciji obravnavanega rezervoarja. Izkaže se, da dobimo največje temperature v konstrukciji pri razmeroma nizki hitrosti vetra (5 m/s). Prostorska diskretizacija obravnavane konstrukcije je bila dokaj natančna. Izkaže se, da je eden od večjih problemov pri takšni analizi zanesljiva določitev robnih pogojev v obliki toplotnega toka.

Literatura

- [1] A. Rebec. Doktorsko delo v pripravi.
- [2] B. Leckner. Spectral and Total Emissivity of Water Vapor and Carbon Dioxide, Combustion and Flame, 19, 33-48 (1972).
- [3] ABAQUS User's Manual, version 6.1, Hibbitt, Karlsson & Sorensen Inc., 2000.
- [4] F. Kreith, The CRC Handbook of Thermal Engineering, CRC & Springer, 2000.
- [5] F.P. Incropera, D.P. DeWitt, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, Fourth edition, Wiley, 1996.



Integracija klasične hypoelastične konstitutivne zveze; 1.del: zvezna formulacija

T. Rojc¹

Integration of classical hypoelastic constitutive equation, Part 1. Continuum formulation

Povzetek. Podana je izpeljava enačb, primernih za numerično integracijo klasične hypoelastične konstitutivne zveze, običajno uporabljene v aditivni teoriji elastoplastičnih materialov.

Abstract. Derivation of equations, appropriate for numerical integration of classical hypoelastic constitutive equation, usually used in additive elastoplastic theory at large strains, is given.

1 Uvod

Pri izpeljavi algoritma za numerično integracijo elastoplastičnih konstitutivnih zvez v časovnem koraku $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ je potrebno rešiti tudi problem integracije hypoelastične zveze med Jaumannovo hitrostjo Cauchyjevega napetostnega tenzorja, $\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}}$, in Eulerjevim tenzorjem hitrosti deformacije \mathbf{d} . Rezultat te integracije je t.i. poiskusna elastična napetost $\boldsymbol{\sigma}^E$, ki jo v primeru, da je kršen pogoj tečenja, $f > 0$, po ustrezni metodi vrnemo na ploskev tečenja. V tem prispevku se torej ne bomo ukvarjali s celotno metodo reševanja elastoplastičnih konstitutivnih zvez, temveč samo z določitvijo poiskusne elastične napetosti $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^E$ na koncu časovnega koraka t_{n+1} . Ta faza predstavlja v primeru aditivnega pristopa k obravnavi elastoplastičnih konstitutivnih zvez v nekaterih primerih osrednji problem, ki ga lahko rešimo na različne načine. Tu si bomo zaenkrat ogledali samo metodo, podano v članku Hughesa in Wingeta [1], in sicer z vidika integracije naslednje hypoelastične zveze izotropne snovi:

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \mathbf{d}, \quad \text{ali v komponentni obliki} \quad \overset{\vee}{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} d_{kl}. \quad (1)$$

Zgoraj pomeni \mathbf{L} izotropni tenzor elastičnih modulov (poznano iz linearne teorije):

$$\mathbf{L} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G (\mathbf{I} - 1/3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad \text{ali} \quad L_{ijkl} = K \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G [1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 1/3 \delta_{ij} \delta_{kl}], \quad (2)$$

¹ LNMS, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

kjer sta K in G kompresijski in strižni modul ($K=E/(3(1-2\nu))$, $G= E/(2(1+\nu))$, E je modul elastičnosti, ν je Poissonov količnik), \mathbf{d} pa je definiran kot simetrični del gradienta hitrosti delca $\dot{\mathbf{x}}$, t.j.:

$$\mathbf{I} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}}, \text{ ali drugače zapisano } \mathbf{I} = \dot{\mathbf{x}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}, \text{ ali } \mathbf{I} = \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}, \quad (3)$$

kjer je $\nabla_{\mathbf{x}}$ gradientni operator v trenutno opazovani legi delca, označeni z \mathbf{x} , pika nad simbolom pa označuje materialni odvod, $\dot{\mathbf{x}} = \partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) / \partial t$. V nadaljevanju bo uporabljena prva oblika, mestoma pa tudi druga.

Tenzor \mathbf{I} je v splošnem nesimetričen in ga razdelimo na simetrični, t.j. zgoraj omenjeno hitrost deformacijskega tenzorja \mathbf{d} , in nesimetrični del \mathbf{w} , poznan kot spin tenzor. Vsi trije tenzorji imajo jasno fizikalno razlago (spin in trenutno hitrost deformacije materialnih smeri delca). Torej:

$$\mathbf{I} = \mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{I}^T), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}^T) \quad (4)$$

Navedimo še izraz za Jaumannovo hitrost Cauchyjevega napetostnega tenzorja, $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$, ki spada med t.i. objektivno materialne količine:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}. \quad (5)$$

in prepišimo zvezo (1) v obliko:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} : \mathbf{d} + \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}. \quad (6)$$

kjer je $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ materialna hitrost Cauchyjevega napetostnega tenzorja.

2 O materialni objektivnosti količin

Materialna hitrost Cauchyjevega napetostnega tenzorja, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, ni materialno objektivna, t.j. ni količina, ki bi jo lahko neposredno uporabili v konstitutivni zvezi s hitrostjo deformacije, ki pa je že po definiciji materialno objektivna količina (glej en., (1)). Pojem *materialna objektivnost* je namreč vezan na zahtevo, da mora biti količina, ki jo uporabljamo v konstitutivnih zvezah invariantna za opazovalčev (togo gibajoči) koordinatni sistem. Taki zahtevi ustrezajo samo skalarne količine, *tenzorske pa morajo zadostiti ustrezne transformacijske zakone*. Če teh zakonov ne izpolnjujejo, potem je taka tenzorska količina materialno neobjektivna. Na primer: razdalje med delci in koti med materialnimi vlakni so materialno objektivne količine, vektor hitrosti delca pa ne, saj ga lahko različni opazovalci zaznajo drugače kot to zahteva pripadajoči transformacijski zakon. Pri nekaterih količinah pomaga, da jih relativiziramo glede na materialne smerne vektorje zato, da bodo njihove hitrosti zadostile zahtevi materialne objektivnosti. Tak primer je npr. napetostni tenzor.

OPOMBA 1: Za primer vzemimo palico palične konstrukcije. Osnova sila in pripadajoče napetosti so v vseh deformiranih legah palice definirani glede na vzdolžno os deformirane palice. Tako definirana sila, napetost in njena hitrost so materialno objektivne količine.

Pri 3D telesu je definicija 'materialnega' koordinatnega sistema precej bolj zapletena in je odvisna tudi od njegovega materiala. Načelno bi lahko vsakemu delcu telesa priredili nek korotacijski materialni sistem na naslednji način. Izberimo tri točke v telesu, ki so medseboj infinitezimalno oddaljene, in ne smejo ležati na premici. Dve točki določata v začetni legi delca diferencialni vektor $d\mathbf{X}$, ki mu priredimo vektorsko enoto $\mathbf{N} = d\mathbf{X}/|d\mathbf{X}|$. Po deformaciji preide infinitezimalni vektor $d\mathbf{X}$ v $d\mathbf{x}$, ki definira novi smerni vektor \mathbf{n} . Jasno je, da lahko definiramo še dve vektorski enoti v \mathbf{X} in \mathbf{x} tako, da dobimo enotski triad medseboj pravokotnih vektorjev v začetni legi delca in drugega v končni. Oba triada medseboj povežemo z rotacijskim tenzorjem $\boldsymbol{\rho}$ z ortogonalno lastnostjo $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}^T = \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}$. Ta tenzor bi lahko definirali na celotni poti delca iz \mathbf{X} v \mathbf{x} in bi na ta način dobili tenzor, ki je odvisen od časa t . Zvezo med vektorskima enotama \mathbf{N} in \mathbf{n} lahko potem zapišemo takole:

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}^T = \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathbf{1} \quad (7)$$

Vektorska enota \mathbf{n} je funkcija časa t in trenutne lege delca, \mathbf{x} , \mathbf{N} je funkcija začetne lege delca, \mathbf{X} , ni pa funkcija časa. Glede na zgornjo zvezo je rotacijski tenzor $\boldsymbol{\rho}$ očitno t.i. dvotočkovni, od časa t odvisen, tenzor. Če vpeljemo prostorski pravokotni koordinatni sistem in z \mathbf{e}_i , $i=1:3$, označimo bazne vektorje v točki \mathbf{X} , z \mathbf{e}_i , $i=1:3$, pa bazne vektorje v \mathbf{x} , lahko en. (7) zapišemo takole:

$$n_i \mathbf{e}_i = (\rho_{il} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (N_J \mathbf{e}_J) = \rho_{il} N_I \mathbf{e}_i, \quad \text{ali v komponentni obliki} \quad n_i = \rho_{il} N_I.$$

OPOMBA 2: Vzemimo vektorsko enoto $\tilde{\mathbf{N}} = d\tilde{\mathbf{X}}/|d\tilde{\mathbf{X}}|$ v legi \mathbf{X} , ki ne označuje tiste materialne smeri $d\mathbf{X}$, ki smo jo uporabili za definicijo ortogonalnega rotacijskega tenzorja $\boldsymbol{\rho}$. Z enačbo (7) bi v tem primeru v legi \mathbf{x} dobili vektorsko enoto $\tilde{\mathbf{n}}$, ki v splošnem ne sovпада z vektorsko enoto \mathbf{n} , ki jo določimo na enak način kot prej, t.j. iz deformiranega materialnega vektorja $d\tilde{\mathbf{x}}$, ki povezuje ista dva delca telesa kot ju povezuje vektor $d\tilde{\mathbf{X}}$ v njuni začetni legi, torej $\tilde{\mathbf{n}} = d\tilde{\mathbf{x}}/|d\tilde{\mathbf{x}}|$. Oba vektorja, $\tilde{\mathbf{n}}$ in \mathbf{n} imata isto prijemališče toda različne smeri. Razlika v njihovih smereh je posledica spremembe kota med diferencialnima vektorjema $d\tilde{\mathbf{x}}$ in $d\mathbf{x}$, ki jo pripisujemo deformaciji delca v ožjem pomenu besede in ne njegovi togi rotaciji. V kolikor se delec na poti iz začetne lege \mathbf{X} v končno lego \mathbf{x} ne bi deformiral, bi vektorska enota $\tilde{\mathbf{n}}$ sovpadala z \mathbf{n} . Velja seveda tudi obratna trditev. Če izberemo materialni vektor $d\tilde{\mathbf{x}}$ v končni legi \mathbf{x} opazovanega delca in definiramo vektorsko enoto $\tilde{\mathbf{n}} = d\tilde{\mathbf{x}}/|d\tilde{\mathbf{x}}|$, ki jo s pomočjo enačbe (7) neutraliziramo za togo rotacijo, dobimo

$$\tilde{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\rho}^T \cdot \tilde{\mathbf{n}}. \quad (8)$$

V začetni legi \mathbf{X} smo s tem definirali vektorsko enoto $\tilde{\mathbf{N}}$, ki se po smeri razlikuje od začetne materialne smeri \mathbf{N} samo za spremembo kota med diferencialnima vektorjema $d\tilde{\mathbf{X}}$ in $d\mathbf{X}$, ki je zopet posledica deformacije v ožjem pomenu besede. Če primerjamo vektorsko enoto $\tilde{\mathbf{N}}$, ki je preko zveze (8) definirana v začetni legi delca \mathbf{X} , z vektorsko enoto \mathbf{N} v enačbi (7), je prva časovno odvisna druga pa ne, toda ta odvisnost je izključno posledica "čiste deformacije" delca.

OPOMBA 3: Iz predhodnih izvajanj ni težko presoditi, da lahko togo rotacijo delca definiramo z različnimi rotacijskimi tenzorji. Tudi ni nujno, da jo definiramo na način, ki smo ga opisali zgoraj. Lep primer za to trditev je rotacijski tenzor glavnih smeri. Slednje namreč v različnih trenutkih ne sovpadajo z isto trojico diferencialnih (materialnih) vektorjev, temveč, v splošnem, v vsakem trenutku t sovpadajo z drugo trojico med seboj pravokotnih materialnih vektorjev. Drugi primer pa je predmet obravnave.

Na osnovi zgornjih ugotovitev lahko odnos (7) privzamemo kot pravilo za rotacijsko neutralizacijo vektorjev, ki imajo določen geometrijski, ali fizikalni pomen za opazovani delec telesa, in ga prepišimo v obliko[†]:

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\rho} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (9)$$

kjer \mathbf{n} predstavlja vektor v trenutni legi delca, ali z drugimi besedami v *osnovnem prostoru*, $\underline{\mathbf{n}}$ pa isti vektor v *rotacijsko neutraliziranem prostoru*, ki ga lahko definiramo v katerikoli legi istega delca v izbranem (referenčnem) času $t_R < t$, oziroma v *referenčni konfiguraciji* opazovanega telesa, $\boldsymbol{\rho}$ pa je ustrezeni rotacijski tenzor (zgoraj smo za referenčno konfiguracijo privzeli začetno nedeformirano lego telesa). Pri tem sta obe konfiguraciji povezani z deformacijskim tenzorjem $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{X}_R), t)$.

Rotacijski tenzor $\boldsymbol{\rho}$ lahko uporabimo za nevtralizacijo toge rotacije tudi pri drugih količinah. Oglejmo si vektor površinske obtežbe \mathbf{t} , ki v trenutku t učinkuje na ploskvico pravokotno na vektorsko enoto \mathbf{n} . Ta vektor lahko povežemo s Cauchyevim napetostnim tenzorjem $\boldsymbol{\sigma}$ na znani način

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

Izrazimo zdaj oba vektorja \mathbf{t} in \mathbf{n} v (10) z rotacijsko neutraliziranimi vektorjema $\underline{\mathbf{t}}$ in $\underline{\mathbf{n}}$ skladno z enačbo (9):

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\rho} \cdot \underline{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\rho} \cdot \underline{\mathbf{t}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \underline{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (11)$$

in po množenju zadnje enačbe z $\boldsymbol{\rho}^T$ ter vpeljavi nove količine, t. j. *korotacijskega napetostnega tenzorja*:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\rho}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}, \quad (12)$$

preide enačba (11c) v obliko:

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (13)$$

Z materialnim odvajanjem zveze (12) po času in ustrezno preureditvijo dobimo:

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{\rho}^T \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\rho} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \boldsymbol{\rho}^T) \cdot \boldsymbol{\rho} \quad (14)$$

Produkt $\dot{\boldsymbol{\rho}} \cdot \boldsymbol{\rho}^T$ pripada družini antisimetričnih tenzorjev, kar se lahko prepričamo, če odvajamo en. (7b) po času t (materialno odvajanje). Torej:

[†] V nadaljevanju bodo rotacijsko neutralizirane količine označene s podčrtanim simbolom. V en. (7) je bila uporabljena velika črka

$$\dot{\rho} \cdot \rho^T + \rho \cdot \dot{\rho}^T = \mathbf{0}, \quad (15)$$

označimo

$$\omega = \dot{\rho} \cdot \rho^T \quad (16)$$

in prepišimo en.(15) v

$$\omega + \omega^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\omega^T. \quad (17)$$

Izraz v oklepaju en. (14) predstavlja nek hitrostni tenzor, oziroma *napetostni fluks*, kot ga imenujejo v literaturi [2]. Tu ga označimo z $\dot{\sigma}$. Ob upoštevanju definicije (16) in lastnosti (17) lahko omenjeni tenzor zapišemo takole:

$$\dot{\sigma} = \dot{\underline{\sigma}} - \omega \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \omega \quad (18)$$

enačbo (14) pa v bolj jedrnati obliki

$$\dot{\underline{\sigma}} = \rho^T \cdot \dot{\sigma} \cdot \rho. \quad (19)$$

Oglejmo si količine v zadnji enačbi. Na levi strani stoji materialni odvod rotacijsko neutraliziranega Cauchyjevega napetostnega tenzorja, $\underline{\sigma}$. Če je funkcijska odvisnost hitrosti $\dot{\underline{\sigma}}$ od časa t znana, lahko z integracijo $\dot{\underline{\sigma}}$ po času izračunamo napetostni tenzor $\underline{\sigma}$ v kateremkoli času t in ga nato lahko preko relacije (12) vrnemo v osnovni prostor, v katerem opazujemo fizikalni pojav. Ker je tenzor $\underline{\sigma}$ prost toge rotacije delca, je jasno, da je odvisen samo od deformacije delca telesa v ožjem pomenu besede. Zato lahko njegovo hitrost, t.j. $\dot{\underline{\sigma}}$, uporabimo v hypoelastičnem konstitutivnem zakonu z ustrezno definirano hitrostjo deformacije (angleško: strain rate). Podajmo še eno ugotovitev. Če ne poznamo tenzorja rotacije ρ na celotni poti deformacije delca temveč samo pri določenih časih, lahko vsaj v teh časih izračunamo tudi pravi napetostni tenzor $\underline{\sigma}$. Enačba (19) predstavlja v bistvu transformacijski zakon za tenzorje 2. reda, kot ga predstavlja tudi enačba (12). Obe enačbi ohranjata svojo zgradbo tudi v smislu materialno objektivnostnih zahtev, ki smo jih omenili na začetku (ne pa podali). Zato lahko tenzorje $\underline{\sigma}$, ali $\underline{\sigma}$ in $\dot{\underline{\sigma}}$, ali $\dot{\underline{\sigma}}$ uvrščamo med materialno objektivne količine. To pomeni, da lahko v hypoelastičnem konstitutivnem zakonu osnovnega prostora uporabimo tenzor $\dot{\underline{\sigma}}$, definiran z en. (18).

V matematični teoriji mehanike deformabilnih teles so za opisovanje materialnih zakonov in dinamičnih procesov v okviru klasične mehanike postavili definicijo *objektivne ekvivalentnosti* ([2], Seminar mehanika, 24. april 2003: predavanje G. Mejaka: Materialna objektivnost):

Definicija 1: Dve gibanji $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ in $\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$ sta objektivno ekvivalentni samo tedaj, če med njima velja naslednja zveza

$$\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(t) \cdot [\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}] + \mathbf{c}(t), \quad (\text{D-1})$$

kjer je \mathbf{o} neka fiksna točka v prostoru, $\mathbf{P}(t)$ in $\mathbf{c}(t)$ pa sta toga rotacija in premik, ki sta funkciji samo časa, pri čemer za \mathbf{P} velja pogoj ortogonalnosti

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1}. \quad (\text{D-2})$$

Iz zgornje definicije je razvidno, da mora biti zveza med gibajočima točkama $\underline{\mathbf{x}}$ in \mathbf{x} taka, da se ohranjata oddaljenost in kot glede na drugi par gibajočih točk. Če zapišemo zgornjo definicijo nekoliko drugače

$$\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{c}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot [\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{o}],$$

ali

$$\underline{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{X}, t), \quad (\text{D-3})$$

kjer sta \mathbf{a} in $\underline{\mathbf{a}}$ vektorja, ki pripadata opazovanim gibanjem, dobimo transformacijski zakon objektivnosti za vektorje, ki prapadajo objektivno ekvivalentnima gibanjima. Če definiramo nek tenzor drugega reda kot tenzorski produkt dveh vektorjev $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, lahko generiramo transformacijski zakon za tenzorje drugega reda:

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T, \quad (\text{D-4})$$

itd.. Definicijo (D-1) lahko tolmačimo kot opazovanje istega gibanja deformabilnega telesa s strani dveh opazovalcev, katerih gibanje se med seboj razlikuje le za togo rotacijo in pomik. Ker je v (D-2) rotacija \mathbf{P} lahko poljubna, jo lahko pri opazovanju fizikalnega pojava v izbrani točki telesa izenačimo tudi s poljubno definiranim materialnim rotacijskim tenzorjem \mathbf{q}^T , s katerim lahko neutraliziramo togo rotacijo količin.

Opozorilo: Zgoraj pomeni \mathbf{P} transformacijsko matriko in ne tenzorja. Če zamenjamo transformacijo \mathbf{P} z rotacijskim tenzorjem, npr. \mathbf{q} , potem velja $\mathbf{P} = \mathbf{q}^T$.

Vrnimo se na začetek, k desni strani izraza Jaumannove hitrosti Cauchyjevega napetostnega tenzorja, $\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}}$, en.(5), in ga primerjajmo z (18). Razlika je le v spin tenzorju, \mathbf{w} v (5) in $\boldsymbol{\omega}$ v (18). Glede na zgornja izvajanja lahko sklepamo, da je spin tenzor \mathbf{w} rezultat drugačne definicije ortogonalnega tenzorja $\boldsymbol{\rho}$. Zato lahko upravičeno postavimo naslednjo enačbo (primerjaj z en.(16)):

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}^T, \quad (20)$$

kjer je \mathbf{q} ortogonalni tenzor, ki bi ga načelno lahko poiskali z rešitvijo zgornje diferencialne enačbe.

Zgornja razmišljanja so osnova mnogim algoritmom za numerično integracijo elastooplastičnih konstitutivnih zvez, temelječih na aditivnem pristopu. V nadaljevanju bodo uporabljena pri konstruiranju numeričnega postopka, objavljenega v prej omenjenem članku [1].

3 Integracija hypoelastične konstitutivne enačbe

Tu bodo izpeljani ustrezni izrazi za kasnejšo numerično integracijo konstitutivne enačbe (1), ali (6), v časovnem inkrementu $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, t.j. za izračun napetostnega odziva poljubnega delca sistema pri premiku iz ravnotežne lege \mathbf{x}_n v času t_n v lego \mathbf{x}_{n+1} v času t_{n+1} , pri čemer so poznane vse mehanske količine telesa na začetku inkrementa in polje hitrosti na poti iz začetne lege \mathbf{x}_n v času t_n v končno lego \mathbf{x}_n v času t_{n+1} .

To nalogo lahko rešimo na dva načina. En način je rešitev robnega problema podanega s sistemom nehomogenih diferencialnih enačb (6), drugi način, ki bo obravnavan v nadaljevanju, pa je, da v skladu z ugotovitvami prejšnjega razdelka transformiramo en. (6) (ali en.(1)) v rotacijsko neutralizirani prostor in dobimo obliko, ki omogoča direktno integracijo po parametru t . Toda ta način zahteva izračun rotacijskega tenzorja $\hat{\mathbf{Q}}$, t. j. rešitev naslednjega robnega problema (glej (20)):

$$\mathbf{w}(t) = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^T, \quad \hat{\mathbf{Q}} \equiv \hat{\mathbf{Q}}(t), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad \hat{\mathbf{Q}}(t_n) = \mathbf{1}, \quad \hat{\mathbf{Q}}(t_{n+1}) = \mathbf{Q}. \quad (21)$$

Zgoraj pomeni $\hat{\mathbf{Q}}$ trenutni rotacijski tenzor, ki je od časa t odvisna količina, \mathbf{Q} je inkrementni rotacijski tenzor, t. j. od časa neodvisna količina, $\mathbf{w}(t)$ pa spin tenzor v osnovnem prostoru. Enačba (1) dobi v opazovanem časovnem inkrementu Δt po transformaciji naslednjo obliko, (primerjaj z (19)):

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot [\mathbf{L} : (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^T)] \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{L} : \underline{\mathbf{d}}, \quad (22)$$

kjer smo upoštevali ortogonalnost rotacijskega tenzorja $\hat{\mathbf{Q}}$, (7b), in zvezo

$$\underline{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{Q}}, \quad (23)$$

ki sledi iz osnovne definicije za \mathbf{d} , t.j. (4) in (3), uporabe pravila (9) za vektorje ter definicije inkrementnega deformacijskega tenzorja $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t)$ v časovnem inkrementu $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Torej:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_n \Rightarrow \dot{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{F}}, \quad \dot{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{F}}}, \text{ upoštevamo zadnji zvezi v } \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{I}^T), \text{ kjer je}$$

$$\mathbf{I} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \text{ ter še zvezo (21a), t.j. } \mathbf{w} = \dot{\hat{\mathbf{Q}}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^T, \text{ in končno sledi zgornja zveza med } \mathbf{d} \text{ in } \underline{\mathbf{d}}.$$

Oblika konstitutivne zveze (22) omogoča direktno integracijo in zato lahko glede na zastavljeno nalogo, pri kateri je potrebno opraviti integracijo samo po danem inkrementu, pišemo

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dt = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_n + \Delta \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (24)$$

kjer smo upoštevali, da velja (glej (21)) $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_n = \hat{\mathbf{Q}}^T(t_n) \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \hat{\mathbf{Q}}(t_n) = \boldsymbol{\sigma}_n$. Napetostni inkrement $\Delta \underline{\boldsymbol{\sigma}}$ lahko zaradi izotropnosti in časovne neodvisnosti tenzorja elastičnih modulov \mathbf{L} pišemo:

$$\Delta \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L} : \underline{\mathbf{d}} dt = \mathbf{L} : \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{\mathbf{d}} dt = \mathbf{L} : \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{Q}} dt, \quad (25)$$

Iz (25) je razvidno, da je v pričujočem primeru za izračun inkrementa napetostnega tenzorja v t.i. korotacijskem sistemu potrebno integrirati samo rotacijsko neutralizirano hitrost deformacije $\underline{\mathbf{d}}(t)$ po časovnem inkrementu Δt . Glede na obliko integranta je rezultat verjetno nek inkrementni deformacijski tenzor logaritmске vrste. V eno-dimenzionalnem primeru je namreč integral funkcije (3) točno naravni logaritem osnovne spremenljivke. Označimo omenjeni integral v (25) z $\Delta \underline{\mathbf{e}}$ in ga poimenujmo *inkrement naravnega deformacijskega tenzorja* v rotacijsko neutraliziranem prostoru, torej:

$$\Delta \underline{\mathbf{e}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{\mathbf{d}} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \underline{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{Q}} dt \quad (26)$$

Ob upoštevanju (26) in (25) v (24), lahko korotacijski napetostni tenzor izrazimo takole:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_n + \mathbf{L} : \Delta \underline{\mathbf{e}}. \quad (27)$$

in po vrnitvi v prvotni prostor opazovanja, t. j. $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{Q}$, končno dobimo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{L} : \Delta \mathbf{e}, \quad \text{kjer je } \Delta \mathbf{e} = \mathbf{Q} \cdot \Delta \underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (28)$$

Z $\Delta \mathbf{e}$ smo označili inkrement naravnega deformacijskega tenzorja v osnovnem prostoru:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{Q} \cdot \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \underline{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{Q}} dt \right) \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (29)$$

Ta deformacijski tenzor se zagotovo razlikuje od naslednje količine, prav tako definirane v osnovnem prostoru:

$$\Delta \mathbf{e}^* = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{\mathbf{d}}(t) dt, \quad (30)$$

Integrirajmo po delih integral (26) in ga z upoštevanjem zgornje zveze in relacij (21) izrazimo takole:

$$\Delta \underline{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}^T \cdot \Delta \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{Q} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot (\Delta \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t) \cdot \Delta \mathbf{e}^*) \cdot \hat{\mathbf{Q}} dt. \quad (31)$$

S tem smo končno izpeljali vse potrebne enačbe za oblikovanje algoritma numerične integracije podane hypoelastične enačbe, kar pa je predmet drugega prispevka [3].

Literatura

- [1] T.J.R. Hughes and J. Winget, *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis*. Inter. J. Numer. Meths. Engrg. vol. 15, p.1862-1867, 1980.
- [2] A. C. Eringen, *Nonlinear theory of continuous media*. McGraw-Hill Series in Engineering Sciences, 1962.
- [3] T. Rojc, *Integracija klasične hypoelastične konstitutivne zveze; 2. del: numerična integracija*. Zbornik srečanja Kuhljevi dnevi 2004, SDM, Otočec, 2004.



Integracija klasične hypoelastične konstitutivne zveze; 2.del: numerični postopek

T. Rojc¹

Integration of classical hypoelastic constitutive equation, Part 2. Computational aspect

Povzetek. Podana je izpeljava algoritma za numerično integracijo klasične hypoelastične konstitutivne zveze, običajno uporabljene v aditivni teoriji elastoplastičnih teles pri velikih deformacijah.

Abstract. Derivation of algorithm for numerical integration of classical hypoelastic constitutive equation, usually used in additive elastoplastic theory at large strains, is given.

1 Uvod

V prvem delu prispevka [2] so bili izpeljani ustrezni izrazi za neposredno oblikovanje algoritma za numerično integracijo naslednje hypoelastične konstitutivne zveze:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}:\mathbf{d}. \quad (1)$$

Algoritm je bil prvič predstavljen, ne pa tudi izpeljan, v članku Hughesa in Wingeta [1] iz leta 1980, ki je v kasnejši literaturi postal eden izmed najpogosteje citiranih objav. V tem prispevku bo podana numerična aproksimacija izrazov, izpeljanih v [2], končno oblikovanje algoritma iz [1] in prikazana bo uspešnost algoritma na dveh analitično rešenih problemih v območju velikih deformacij.

2 Izpeljava algoritma

Posplošeno pravilo o sredinski točki (PPST): To pravilo predstavlja osnovo za enokoračno aproksimacijo odvodov in integralov tenzorskih količin po časovnem parametru t . Vzemimo tenzor 2. reda \mathbf{A} , ki je odvedljiva funkcija časa in katerega vrednosti poznamo na robovih nekega časovnega inkrementa $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, torej:

¹ LNMS, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

$$t=t_n \Rightarrow \mathbf{A}(t_n)=\mathbf{A}_n, \quad t=t_{n+1} \Rightarrow \mathbf{A}(t_{n+1})=\mathbf{A}_{n+1}$$

in ocenimo prvi odvod te količine v neki vmesni točki z najmanjšo napako. V ta namen vpeljimo parameter α z lastnostjo:

pri $t = t_n$ naj bo $\alpha=0$ in pri $t=t_{n+1}$ $\alpha=1$:

$$\alpha = \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \Rightarrow dt = d\alpha \Delta t, \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n. \quad (2)$$

Razvijmo \mathbf{A}_n in \mathbf{A}_{n+1} okoli vmesne točke $0 < \alpha < 1$ v Taylorjevo vrsto in poiščimo najboljšo oceno materialnega odvoda $d\mathbf{A}/dt$ v neki vmesni točki parametra α . Izkaže se, da je najboljša ocena dobljena pri $\alpha=1/2$ (z napako reda velikosti Δt^2):

$$\dot{\mathbf{A}}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad \text{ali} \quad \dot{\mathbf{A}}_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n) \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{A}} dt. \quad (3)$$

Če na intervalu Δt predpostavimo konstanten materialni odvod funkcije, $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{C}$, lahko \mathbf{A} znotraj tega intervala aproksimiramo z linearno funkcijo (in napako reda velikosti Δt):

$$\mathbf{A}_{n+\alpha} = \mathbf{A}_n + \alpha (\mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n). \quad (4)$$

Lotimo se najprej aproksimacije integrala (en. (30) in (4) v [2]):

$$\Delta \mathbf{e}^* = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{d}(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{l}(t) + \mathbf{I}^T(t)) dt, \quad (5)$$

od koder je razvidno, da je potrebno oceniti samo integral gradienta hitrosti \mathbf{l} po inkrementu. Ker sta znani samo robni legi (konfiguraciji telesa) opazovanega delca, \mathbf{x}_n in \mathbf{x}_{n+1} , lahko pot delca med tema legama predpostavimo skladno s PPST po en. (4). Gibanje telesa v časovnem koraku $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ bomo obravnavali zato kot časovno linearno družino konfiguracij, [1]:

$$\mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + \alpha \Delta \mathbf{u}, \quad \text{ali} \quad \mathbf{x}_{n+\alpha} = (1-\alpha) \mathbf{x}_n + \alpha \mathbf{x}_{n+1}, \quad (6)$$

kjer je

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \quad (7)$$

inkrement pomika. Hitrost poljubnega delca telesa je na predpostavljjeni poti konstantna:

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha} = (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) / \Delta t = \Delta \mathbf{u} / \Delta t, \quad (8)$$

toda njen gradient,

$$\mathbf{l}_{n+\alpha} \equiv \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \mathbf{G}_\alpha, \quad \text{ali} \quad \mathbf{l}_{n+\alpha} \equiv \frac{\partial \Delta \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \mathbf{G}_\alpha, \quad (9)$$

pa zagotovo ni, saj je trenutna lega delca $\mathbf{x}_{n+\alpha}$ (konfiguracija telesa) odvisna od parametra α . Zato smo v (9) parcialni odvod inkrementa pomika $\Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$ po $\mathbf{x}_{n+\alpha}$, t.j.:

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}} \equiv \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha}}, \quad (10)$$

opremili z indeksom α , ki označuje, da je ta tenzorska količina funkcija parametra α (ali t). Če izvrednotimo \mathbf{G}_α v določeni konfiguraciji, npr. $\alpha = \underline{\alpha}$, potem lahko $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_{\underline{\alpha}}$ iz en. (9) v smislu PPST, (3), tolmačimo kot aproksimacijo integrala gradienta hitrosti $\mathbf{I}(t)$ po časovnem inkrementu Δt , ali kot najboljšo oceno povprečne vrednosti gradienta hitrosti $\mathbf{I}(t)$ pomnožene z Δt (možni sta obe razlagi):

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}_{\underline{\alpha}} \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{I}(t) dt = \int_{\alpha=0}^1 \mathbf{I}(\alpha) d\alpha \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{\alpha=0}^1 \mathbf{G}_\alpha d\alpha, \quad (11)$$

t.j. $\mathbf{I}_{n+\underline{\alpha}}$ v sredinski točki $\underline{\alpha} = 1/2$. Glede na definicijo Eulerjevega tenzorja hitrosti deformacije \mathbf{D} in spin tenzorja \mathbf{W} , (glej en. (4) v [2]), lahko na enak način tolmačimo tudi simetrični in anti-simetrični del gradienta $\mathbf{G}_{\underline{\alpha}}$, torej:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{d}(t) dt = \int_{\alpha=0}^1 \mathbf{d}(\alpha) d\alpha \equiv \frac{1}{2\Delta t} \int_{\alpha=0}^1 (\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{G}_\alpha^T) d\alpha, \quad \underline{\alpha} = 1/2, \quad (12)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{G} - \mathbf{G}^T) \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{w}(t) dt = \int_{\alpha=0}^1 \mathbf{w}(\alpha) d\alpha \equiv \frac{1}{2\Delta t} \int_{\alpha=0}^1 (\mathbf{G}_\alpha - \mathbf{G}_\alpha^T) d\alpha, \quad \underline{\alpha} = 1/2. \quad (13)$$

Zaradi (10) lahko \mathbf{D} in \mathbf{W} izrazimo tudi z gradientom inkrementa pomika glede na srednjo konfiguracijo v inkrementu Δt :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\underline{\alpha}}} \right) + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\underline{\alpha}}} \right)^T \right], \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\underline{\alpha}}} \right) - \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{n+\underline{\alpha}}} \right)^T \right], \quad \underline{\alpha} = 1/2. \quad (14)$$

Glede na enačbo (5) predstavlja količina \mathbf{D} v izrazu (12) očitno aproksimacijo tenzorja $\Delta \mathbf{e}^*$ (primerjaj (12) z (5)), količina $\frac{1}{\Delta t} \mathbf{W}$ pa glede na en. (13) povprečno vrednost spina \mathbf{w} v inkrementu. Zato lahko enačbo en. (31) v [2] prepisemo v:

$$\Delta \underline{\mathbf{e}} \approx \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}) \cdot \hat{\mathbf{Q}} dt. \quad (15)$$

Označimo izraz v oklepaju zgornjega integrala z \mathbf{M} in v njem upoštevajmo (12) in (13):

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{4} [(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{G}^T) - (\mathbf{G} - \mathbf{G}^T) \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)] = \frac{1}{2} (\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T) \quad (16)$$

Produkta $\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$ in $\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T$, ki sta neodvisna od časa t , predstavljata simetrična tenzorja drugega velikostnega reda glede na gradient inkrementa pomika $\nabla_{n+1/2}(\Delta \mathbf{u})$. Očitno je, da je količina v oklepaju majhnega velikostnega reda, integral v izrazu za oceno naravnega deformacijskega tenzorja, (15), pa verjetno zanemarljiv v primerjavi s prvim členom. O tem se lahko prepričamo, če ponovno uporabimo integracijo po delih, upoštevamo zvezo $\mathbf{w}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t)$ (glej

en. (21a) v[2]) in aproksimacijo $^{1/\Delta t}\mathbf{W}$ za $\mathbf{w}(t)$, torej $\dot{\mathbf{Q}}(t) \approx ^{1/\Delta t}\mathbf{W} \mathbf{Q}(t)$, ter na ta način znižamo velikostni red novega integrala za eno stopnjo ($\mathbf{Q}(t) \equiv \hat{\mathbf{Q}}$):

$$\Delta \underline{\mathbf{e}} \approx \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{Q}^T \cdot \Delta t \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q} + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\dot{\mathbf{Q}}^T \cdot (\Delta t \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot (\Delta t \mathbf{M}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right] dt ,$$

$$\Delta \underline{\mathbf{e}} \approx \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q} + \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\dot{\mathbf{Q}}^T \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}) \cdot \hat{\mathbf{Q}} \right] dt . \quad (17)$$

Če zanemarimo nelinearne člene gradienta $\nabla_{n+1/2}(\Delta \mathbf{u})$, t.j. količino \mathbf{M} in integral, lahko oceno za $\Delta \underline{\mathbf{e}}$ in, zaradi $\Delta \mathbf{e} = \mathbf{Q} \cdot \Delta \underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{Q}^T$ (en. (28b) v [2]), tudi oceno za $\Delta \mathbf{e}$ zapišemo takole:

$$\Delta \underline{\mathbf{e}} \approx \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}, \quad \Delta \mathbf{e} \approx \mathbf{D}. \quad (18)$$

Z upoštevanjem (18b) v $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{L} : \Delta \mathbf{e}$ (glej en. (28a) v [2]) dobimo končno tudi oceno za napetostni tenzor $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{L} : \mathbf{D}, \quad (19)$$

Poiščimo zdaj še oceno inkrementa rotacijskega tenzorja \mathbf{Q} . V ta namen v smislu PPST, en.(3) in (4), aproksimiramo diferencialno enačbo (21a) iz [2]:

$$\mathbf{w}(t) = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^{-1}, \text{ ali } \mathbf{w}(t) \cdot \hat{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{Q}} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} \mathbf{W} \cdot [(\mathbf{Q} - \mathbf{1})\alpha + \mathbf{1}] = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{Q} - \mathbf{1}). \quad (20)$$

Iz zgornje aproksimacije diferencialne enačbe sledi:

$$\mathbf{W} \cdot [(\mathbf{Q} - \mathbf{1})\alpha + \mathbf{1}] - (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad \text{in nadalje}$$

$$(\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1} - \alpha \mathbf{W} + \mathbf{W} \quad (21)$$

Tenzor $(\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W})$ je pozitivno definiten, kar dokažemo s pomočjo lastnosti kvadratne forme, [1]. Torej $\mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W})^T \cdot \mathbf{x} = s \Rightarrow 2 \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{x} = 2s$, kjer je \mathbf{x} poljuben vektor z dolžino $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$. Zaradi $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$ iz zadnje zveze sledi $s = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x} > 0$. Torej tenzor $(\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W})$ je pozitivno definiten in ima tudi inverzno obliko. Zato iz (21) sledi ocena za \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}, \quad (22)$$

v kateri je potrebno iz pogoja ortogonalnosti, $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$, določiti še vrednost parametra α :

$[\mathbf{1} + (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}] \cdot [\mathbf{1} + (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}]^T = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{W} + \alpha \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} + \alpha \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$, in nadalje $2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1/2$. Ocena za inkrementni rotacijski tenzor, (22), dobi končno naslednjo obliko:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + (\mathbf{1} - 1/2 \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W} = (\mathbf{1} - 1/2 \mathbf{W})^{-1} \cdot (\mathbf{1} + 1/2 \mathbf{W}), \quad (23)$$

ali zaradi relacije: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, lahko (23) v nekaj korakih zapišemo še takole:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{21} - \mathbf{1} - 1/2 \mathbf{W})^{-1} \cdot (\mathbf{1} + 1/2 \mathbf{W}) = [-(\mathbf{1} + 1/2 \mathbf{W})^{-1} \cdot (\mathbf{1} + 1/2 \mathbf{W} - \mathbf{21})]^{-1} = (\mathbf{1} + 1/2 \mathbf{W}) \cdot (\mathbf{1} - 1/2 \mathbf{W})^{-1}. \quad (24)$$

S pomočjo obeh oblik, (23) in (24), in $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$, se lahko prepričamo, da velja $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$.

3 Analiza natančnosti ocene kinematičnih količin

Kljub oceni natančnosti deformacijske in rotacijske količine, \mathbf{D} in \mathbf{Q} , ki sledi iz PPST, t.j. prva je reda natančnost Δt^2 , druga pa Δt , bo v tem razdelku opravljena analiza natančnosti še na dveh standardnih primerih, za katera bo izpeljana tudi analitična rešitev, to je primer homogene čiste deformacije in primer homogenega striga.

3.1 Primer homogene čiste deformacije

Obravnavajmo kocko s stranicami dolžine l_0 , ki ima eno osnovno ploskev nepomično podprto, na štirih stranskih ploskvah pa je podprta tako, da se delci lahko gibljejo samo v ravninah teh ploskev. Šesto ploskev vlečemo v smeri normale na to ploskev tako, da se kocka deformira v času t v kvader z dolžino stranice l in da je hitrost deformacije \mathbf{d} v vsaki točki telesa enaka. Hitrost deformacije je torej samo funkcija časa. Izberimo kartezijev koordinatni sistem tako, da je X os vzporedna smeri raztegovanja kvadra.

V opisanem primeru je torej od nič različna samo komponenta hitrosti deformacije $d_{xx} = \dot{\mathbf{d}}x / \mathbf{d}x$. Ker je ta hitrost konstantna po telesu lahko komponente elementarnega vektorja $\mathbf{d}x$ zamenjamo z vektorjem, ki je usmerjen vzdolž koordinatne osi od nepomično podprte osnovne ploskve proti gibajoči drugi mejni ploskvi telesa in ki ima v času t dolžino l :

$$d_{xx} = \frac{\dot{\mathbf{d}}x}{\mathbf{d}x} = \frac{l^*}{l}. \quad (25)$$

Edino od nič različno komponento naravnega deformacijskega tenzorja \mathbf{e} dobimo z integracijo zgornje količine po času t (glej npr. en.(29) v [2] pri pogoju $\mathbf{Q}(t)=1$). Če izvedemo to integracijo v intervalu od t_0 do t dobimo:

$$e_{xx} = \int_{t_0}^t \frac{l^*}{l} d\tau = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln(l) \Big|_{l_0}^l = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + u}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon), \quad (26)$$

kjer smo z u označili raztezek stranice kocke, z $\varepsilon = u/l_0$ pa t.i. inženirsko deformacijo. Izračunajmo aproksimacijo naravne deformacije e_{xx} še po računskem postopku, izpeljanem v prejšnjem razdelku, torej D_{xx} (glej (18b) in (14a)):

$$D_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{l_{1/2}} + \frac{u}{l_{1/2}} \right) = \frac{u}{l_{1/2}} = \frac{2(l - l_0)}{(l + l_0)} = \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon/2}. \quad (27)$$

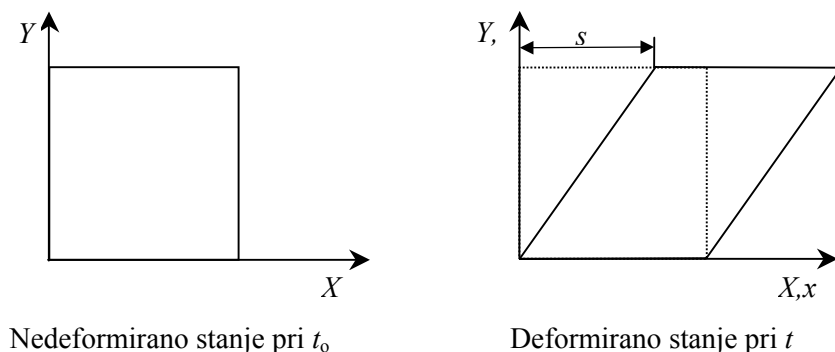
Pri tem smo skladno s postopkom za u in $l_{1/2}$ upoštevali $u = l - l_0$ in $l_{1/2} = l_0 + \frac{1}{2}(l - l_0) = \frac{1}{2}(l + l_0)$. Zaradi lažje medsebojne primerjave količin, e_{xx} in D_{xx} , razvijmo oba izraza, (26) in (27), v potenčno vrsto:

$$e_{xx} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \dots, \quad D_{xx} = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{4} - \frac{\varepsilon^4}{8} + \dots, \quad (28)$$

od koder je razvidna razlika šele od tretjega člena dalje. Torej, v primeru homogene čiste deformacije je napaka algoritma reda velikosti ε^3 . Glede na dejstvo, da je to napaka enega inkrementa, lahko sklepamo, da algoritem v primeru globalnega časovnega območja izkazuje kvadratno konvergenco (t.j. za eno stopnjo nižjo natančnost kot je natančnost enega časovnega inkrementa).

3.2 Primer homogenega striga

Ta primer je za analizo natančnosti algoritma veliko bolj objektiven kot prejšnji, saj sta tu, poleg diagonalnih komponent deformacijskega tenzorja, prisotna tako vpliv strižnih komponent deformacije kot tudi vpliv toge rotacije. Podobno kot v prejšnjem primeru je tu obravnavan kvader, ki se skozi čas deformira v telo s poševnimi robovi v navpičnih ravninah tako, kot kaže spodnja slika. Problem obravnavamo kot ravnisko deformacijsko stanje.



Slika 1: Primer homogene striga

Višina poševnega kvadra je ves čas konstantna $H=1$, hitrost zgornje ploskve pa je $v_x = \dot{s}$. Primer spada med t.i. začetne probleme, saj je poznana samo začetna konfiguracija, ki je določena z naslednjim območjem polja \mathbf{X}_0 :

$$\mathbf{X}_0 = \{X, Y\}^T, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad (29)$$

in hitrostjo delcev v vseh ostalih konfiguracijah:

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\dot{x}, 0\}^T \equiv \{\dot{s}y, 0\}^T. \quad (30)$$

Gradient hitrosti \mathbf{l} , en. (9a), je:

$$\mathbf{l} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Eulerjeva hitrost deformacije, en. (4b), in spin, en. (4c) iz [2]:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{s} \\ \dot{s} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{s} \\ -\dot{s} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Enačba definicije rotacijskega tenzorja, en. (20) v [2], in začetni pogoj za rotacijski tenzor \mathbf{q} , t.j. $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}^T$, ali $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{q}$ in $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{1}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{xX} & \dot{q}_{xY} \\ \dot{q}_{yX} & \dot{q}_{yY} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dot{s} \\ -\dot{s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{xX} & q_{xY} \\ q_{yX} & q_{yY} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_{xX} & \dot{q}_{xY} \\ \dot{q}_{yX} & \dot{q}_{yY} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{s} q_{yX} & \dot{s} q_{yY} \\ -\dot{s} q_{xX} & -\dot{s} q_{xY} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Matrični zapis (33) predstavlja sistem štirih linearnih diferencialnih enačb, v katerih so neznane komponente rotacijskega tenzorja q_{il} funkcije časa t , ali, kot je razvidno iz nadaljevanja, parametra s . Zaradi homogenosti gradienta hitrosti \mathbf{l} je ta problem torej sorazmerno enostaven. V primeru nehomogenega stanja bi namreč dobili sistem parcialnih diferencialnih enačb, katerega reševanje pa je gotovo precej bolj zahtevna naloga. Torej:

$$\dot{q}_{xX} = \frac{1}{2} \dot{s} q_{yX}, \quad \dot{q}_{yX} = -\frac{1}{2} \dot{s} q_{xX}, \quad \dot{q}_{yY} = -\frac{1}{2} \dot{s} q_{xY}, \quad \dot{q}_{xY} = \frac{1}{2} \dot{s} q_{yY}. \quad (34)$$

Vzemimo, da so q_{il} funkcije s , skalar s pa funkcija časa t , t.j. $\dot{q}_{il} = q'_{il} \dot{s}$, kjer je $q'_{il} = dq_{il}/ds$, in prepisimo sistem enačb (34) v obliko:

$$q'_{xX} = \frac{1}{2} q_{yX}, \quad q'_{yX} = -\frac{1}{2} q_{xX}, \quad q'_{yY} = -\frac{1}{2} q_{xY}, \quad q'_{xY} = \frac{1}{2} q_{yY}. \quad (35)$$

Splošna rešitev zgornjega sistema je:

$$\begin{aligned} q_{xX} &= C_1 \sin \frac{s}{2} - C_2 \cos \frac{s}{2}, & q_{yX} &= C_1 \cos \frac{s}{2} + C_2 \sin \frac{s}{2} \\ q_{yY} &= C_3 \cos \frac{s}{2} - C_4 \sin \frac{s}{2}, & q_{xY} &= C_4 \cos \frac{s}{2} + C_3 \sin \frac{s}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Integracijske konstante C_1, C_2, C_3 in C_4 izračunamo iz začetnega pogoja $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{1}$ in končno dobimo rešitev za komponente rotacijskega tenzorja \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{s}{2} & \sin \frac{s}{2} \\ -\sin \frac{s}{2} & \cos \frac{s}{2} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Izračunajmo sedaj korotacijsko hitrost deformacije, (glej npr. (23) v [2]):

$$\underline{\mathbf{d}} = \mathbf{q}^T \cdot \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \dot{s} \begin{bmatrix} -\sin s & \cos s \\ \cos s & \sin s \end{bmatrix} \quad (38)$$

in z integracijo te hitrosti po času τ v mejah od t_0 do t dobimo korotacijski naravni deformacijski tenzor, (glej npr. en. (26) v [2]):

$$\underline{\mathbf{e}} = \int_{t_0}^t \underline{\mathbf{d}} d\tau = \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \begin{bmatrix} -\sin s & \cos s \\ \cos s & \sin s \end{bmatrix} ds = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos s - 1 & \sin s \\ \sin s & 1 - \cos s \end{bmatrix}, \quad (39)$$

kjer smo podobno kot zgoraj namesto časa τ uporabili parameter s , torej $ds = \dot{s} d\tau$. Z vrnitvijo zgornjega tenzorja s pomočjo rotacije \mathbf{q} v času t v prvotni prostor, dobimo končno naravni deformacijski tenzor \mathbf{e} v osnovnem prostoru, (glej npr. en. (28b) v [2]):

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} \cdot \underline{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{q}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{s}{2} & \sin \frac{s}{2} \\ -\sin \frac{s}{2} & \cos \frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos s - 1 & \sin s \\ \sin s & 1 - \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{s}{2} & -\sin \frac{s}{2} \\ \sin \frac{s}{2} & \cos \frac{s}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \frac{s}{2} & \frac{1}{2} \sin s \\ \frac{1}{2} \sin s & -\sin^2 \frac{s}{2} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Izraza (37) in (40) predstavljata končni rešitvi zastavljenega začetnega problema za \mathbf{q} in \mathbf{e} ($t=t_0$, ali $s_0=0$: $\mathbf{q}=\mathbf{1}$ in $\mathbf{e}=\mathbf{0}$). Oba bosta v nadaljevanju služila za kontrolo natančnosti algoritma, izpeljanega v prejšnjem razdelku.

V enokoračnem računskem postopku sta tenzorja \mathbf{q} in \mathbf{e} aproksimirana s količinama \mathbf{Q} in \mathbf{D} , t.j. (23), ali (24) in (18b). Zaradi verodostojnosti primerjave izpeljimo še izraza obeh aproksimativnih količin \mathbf{Q} in \mathbf{D} skladno s predstavljenim algoritmom. Začnimo s količino \mathbf{G} , en.

(10), ki v primeru, da je izvrednotena v sredinski konfiguraciji, $\alpha=1/2$, predstavlja aproksimacijo integrala gradienta hitrosti \mathbf{l} po inkrementu $\Delta t=t-t_0$. Torej $\mathbf{G}=\partial\Delta\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}_{n+1/2}$ in upoštevajmo, da zaradi $\mathbf{x}=\{x+sy, y\}^T = \{X+sY, Y\}^T$, $0 \leq x, X \leq 1$, $0 \leq y, Y \leq 1$ velja

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_0 = \{sY, 0\}^T \quad \text{in} \quad \mathbf{x}_{n+1/2} = \{X + 1/2 sY, Y\}^T \quad (41)$$

in izračunajmo \mathbf{G} takole:

$$\mathbf{G} = \frac{\partial\Delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}_0} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{x}_{n+1/2}}{\partial\mathbf{X}_0} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Z uporabo zgornje zveze pa iz (14b), (23) in (14a) izračunamo še količino \mathbf{W} in aproksimaciji \mathbf{Q} in \mathbf{D} za rotacijski tenzor \mathbf{q} in deformacijo \mathbf{e} .

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \left(1 + \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 - (s/2)^2 & s \\ -s & 1 - (s/2)^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & s/2 \\ s/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Primerjava analitične rešitve za \mathbf{q} in \mathbf{e} , (37) in (40) z zgornjo oceno \mathbf{Q} in \mathbf{D} , ki jo lahko izvršimo na enak način kot v podrazdelku 3.1, privede do ugotovitve, da je napaka algoritma v inkrementu parametra s reda velikosti njegovega kvadrata, kar se ujema s predvidevanjem po PPST. Zato inkrementna metoda, ki uporablja ta algoritm, izkazuje linearno konvergenco.

4 Sklep

Prikazana je bila izpeljava algoritma, objavljenega v članku Hughesa in Wingeta [1] in opravljena je bila analiza njegove napake. V zvezi z njim je potrebno poudariti, da temeljni na integrirani obliki konstitutivne enačbe, (glej (24) in (25) v [2]), in ne na njeni hypoelastični zvezi (en. (22) v [2]). S tem je algoritem izgubil nekoliko na svoji natančnosti, je pa zato pridobil na zmanjšanju števila računskih operacij, potrebnih za izračun inkrementa napetosti. Namreč, oblika enačbe za izračun napetosti na koncu inkrementa je v primeru podanega algoritma naslednja, (19):

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{L} : \mathbf{D}, \quad (44)$$

v primeru algoritma, temelječega na hypoelastični zvezi, ki je nekoliko 'točnejši', pa:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_{n+1/2}^T \cdot (\mathbf{L} : \mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}_{n+1/2} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \text{ali} \quad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{Q}^T + \tilde{\mathbf{Q}}_{n+1} \cdot (\mathbf{L} : \mathbf{D}) \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_{n+1}^T \quad (45)$$

kjer $\tilde{\mathbf{Q}}_{n+1/2}$ označuje tenzor rotacije iz sredinske v končno konfiguracijo telesa. To rotacijo pa lahko ocenimo po enakem postopku kot je ocenjena rotacija \mathbf{Q} , vendar je zato potreben še izračun gradienta polovičnega inkrementa pomika glede na 'tričetrtinsko' konfiguracijo.

Literatura

- [1] T.J.R. Hughes and J. Winget, *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis*. Inter. J. Numer. Meths. Engrg. vol. 15, p.1862-1867, 1980.
- [2] T. Rojc, *Integracija klasične hypoelastične konstitutivne zveze; 2. del: numerična integracija*. Zbornik srečanja Kuhljevi dnevi 2004, SDM, Otočec, 2004.



Ropot Eulerjevega diska

M. Saje in D. Zupan¹

The Rattling of Euler's Disk

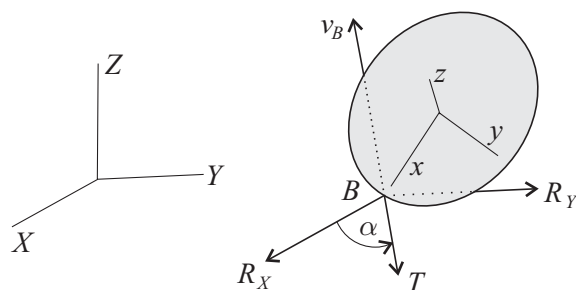
Povzetek. V članku iščemo razloge za ropot učnega pripomočka, imenovanega Tangent Toy disk [1], med gibanjem po ravnini. Naši rezultati kažejo, da postane normalna sila podlage velika, kadar je disk zelo nagnjen. Naklon diska se s časom spreminja, zato dobimo izrazite lokalne ekstreme normalne sile. Ti pa se izredno dobro ujemajo z ekstremi pri zvočnem zapisu gibanja.

Abstract. The reasons for rattling sound heard during the motion of the commercially available Tangent Toy disk [1] are discussed. The present results show that the normal contact force becomes very large whenever the inclination of the disk becomes small. As the inclination of the disk oscillates with time, the time-graph of the normal contact force exhibits periodical peaks, which correlate well with the peaks in the recorded sound response.

1 Uvod

Enačbe gibanja diska smo opisali že v članku [4], podrobnosti pa so predstavljene tudi na spletni strani [5]. V tem besedilu se osredotočimo na rezultate numerične analize. Zaradi preglednosti najprej naštejmo količine, ki nastopajo pri gibanju diska: X_T, Y_T, Z_T so prostorske koordinate težišča diska; V_X, V_Y, V_Z so komponente hitrosti težišča v smereh X, Y, Z ; ψ, ϑ, φ so Eulerjevi koti, ki določajo zasuk izbranega koordinatnega sistema glede na prostorskega; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ so komponente kotne hitrosti ploščice glede na izbrani koordinatni sistem x, y, z ; R_X, R_Y, R_Z so komponente kontaktne sile na stiku ploščice s podlago v smereh X, Y, Z ; T je rezultantna sila trenja v ravnini kotaljenja; α je kot, ki ga oklepa rezultantna sila trenja s koordinatno osjo X ; v_B je velikost hitrosti dotikališča. Nekatere izmed količin so prikazane na sliki 1.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo



Slika 1 : Lega diska v prostoru.

2 Začetni problem

Celoten nabor enačb predstavlja začetno nalogo za sistem navadnih diferencialnih enačb, ki smo jo reševali s programom Matlab [3]. Uporabili smo vgrajeni metodi Runge–Kutta ode45 in ode15s. Pri reševanju smo zahtevali zelo majhno relativno napako $\text{RelTol}=10^{-8}$ in še manjšo absolutno napako $\text{AbsTol}=10^{-10}$ pri vsakem lokalnem koraku metode. Zaznavanje prehoda med gibanjem brez v gibanje s podrsavanjem je bilo natančno na šestnajst decimalnih mest. Uporabili smo Matlabovo funkcijo Events.

Za račun vzemimo podatke Eulerjevega diska [1]: polmer $a = 3.755$ cm in maso $m = 0.4387$ kg. Debelino diska zanemarimo. Za statični in dinamični koeficient trenja privzamemo realistični vrednosti $\mu_{st} = 0.2$ in $\mu_d = 0.115$. Začetne podatke povzemamo po članku [2]. Disk nagnemo glede na vodoravno ravnino in poženemo s kotno hitrostjo 1 okrog lokalne osi x , ki kaže v smeri od težišča proti dotikališču diska s podlago:

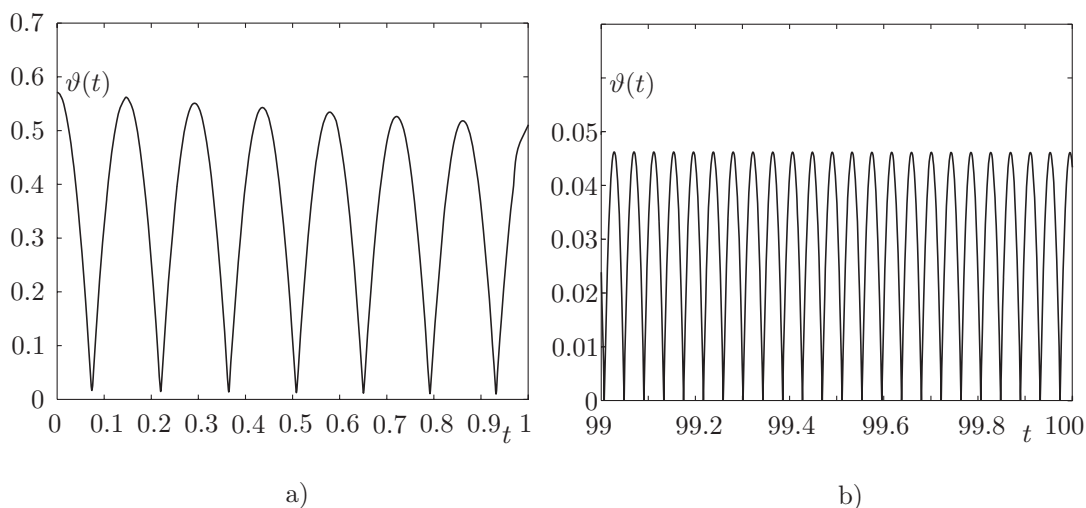
$$\begin{array}{lll}
 X_0 = 0 & Y_0 = 0 & Z_0 = a \sin \vartheta_0 \\
 V_X^0 = 0 & V_Y^0 = 0 & V_Z^0 = 0 \\
 \psi_0 = 0 & \vartheta_0 = \frac{\pi}{2} - 1 & \varphi_0 = 0 \\
 \Omega_x^0 = 1 & \Omega_y^0 = 0 & \Omega_z^0 = 0.
 \end{array}$$

3 Numerični rezultati

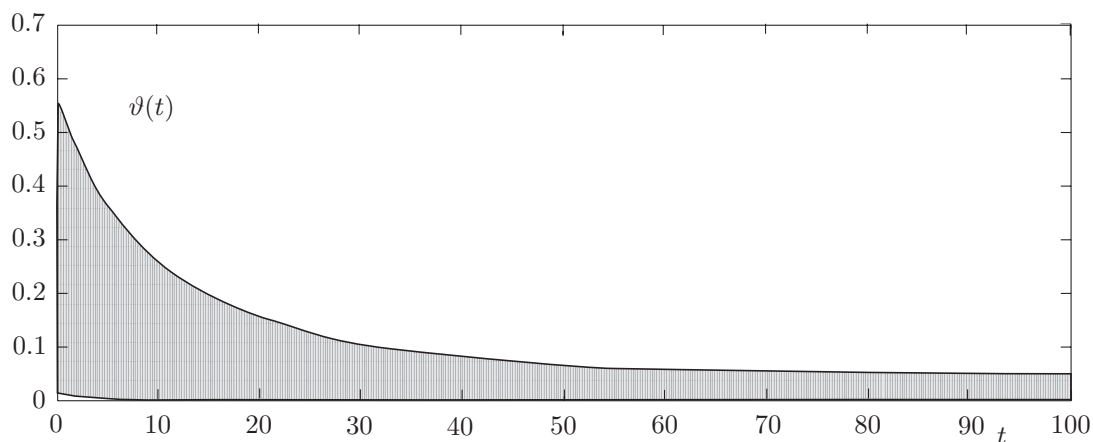
Numerične rezultate prikazujemo za prvih sto sekund gibanja. Zaradi oscilacij so rezultati količin na celotnem časovnem območju predstavljeni z ovojnicami njihovih grafov, natančno pa prikazujemo grafe znotraj prvega in zadnjega sekundnega intervala. Disk začne takoj na začetku podrsavati, med gibanjem pa se izmenjujeta gibanji z in brez podrsavanja. Disk se med gibanjem ves čas giblje po podlagi. Pojavov odlepitve in trka s podlago za ta računski primer ni, zato je “trkajoči” zvok pri gibanju modela toliko bolj presenetljiv. Poskusi z Eulerjevim diskom [1] to potrjujejo; pri eksperimentu se disk nikoli ne odlepi od podlage.

Naklonski kot diska ϑ glede na vodoravno ravnino se s časom spreminja, kot kaže slika 2a za prvo sekundo gibanja in slika 2b za gibanje po 99 sekundah. Na sliki 3 je prikazana ovojnica največjih in najmanjših naklonov diska za prvih 100 sekund gibanja. Iz slik lahko razberemo

hitro manjšanje naklona diska na začetku. V drugi polovici gibanja se naklon diska le počasi manjša; največji nakloni ostajajo zelo blizu konstantni vrednosti 0.05 rad. Pojav majhnih, a dolgo trajajočih in približno enako velikih največjih naklonov diska opazimo tudi pri dejanskem gibanju Eulerjevega diska [1].



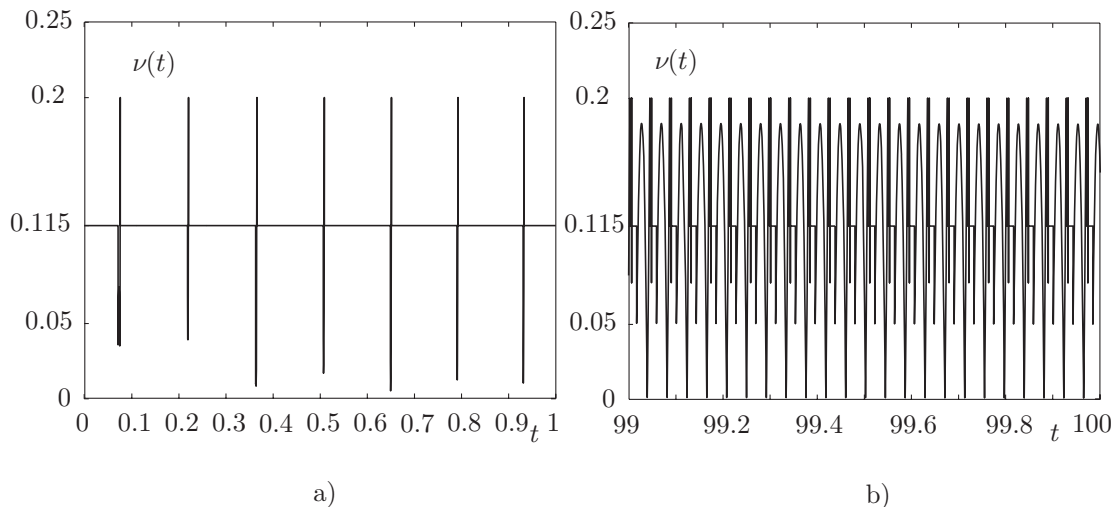
Slika 2 : Naklon diska $\vartheta(t)$ na časovnem območju (a) $[0, 1]$ s in (b) $[99, 100]$ s.



Slika 3 : Ovojnica lokalnih ekstremov naklona diska (ϑ) na časovnem območju $[0, 100]$ s.

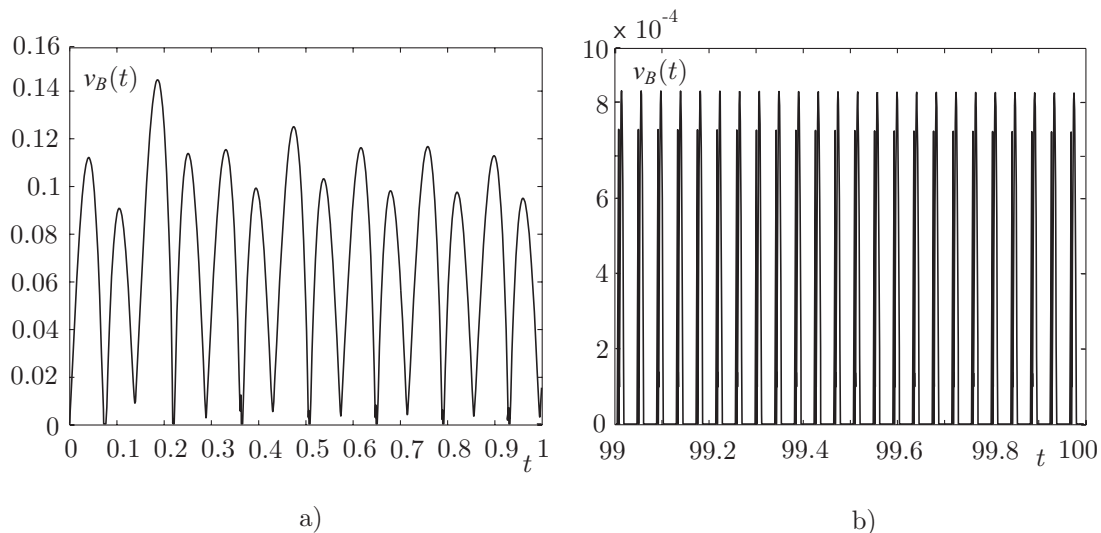
Razmerje med silo trenja in normalno silo podlage $\nu = T/R_Z$ prikazujeta grafa na sliki 4. Grafa sta v skladu z modelom trenja po Coulombu, uporabljenim v [4]. Kadar se disk giblje s podrsavanjem, je to razmerje konstantno in velja $\nu = \mu_d$. Pri gibanju brez podrsavanja se lahko to razmerje spreminja, vendar le, dokler je manjše od μ_{st} . Kadar postane $\nu = \mu_{st}$, nastopi zdrs. Na začetku prevladuje podrsavanje (slika 4a), vmes pa se pojavljajo krajši intervali gibanja brez podrsavanja. V drugi polovici gibanja (slika 4b) se podrsavanje in gibanje brez

podrsavanja izmenjujeta pogosteje. Skoki na sliki 4 so posledica različnega dinamičnega in statičnega koeficienta trenja.



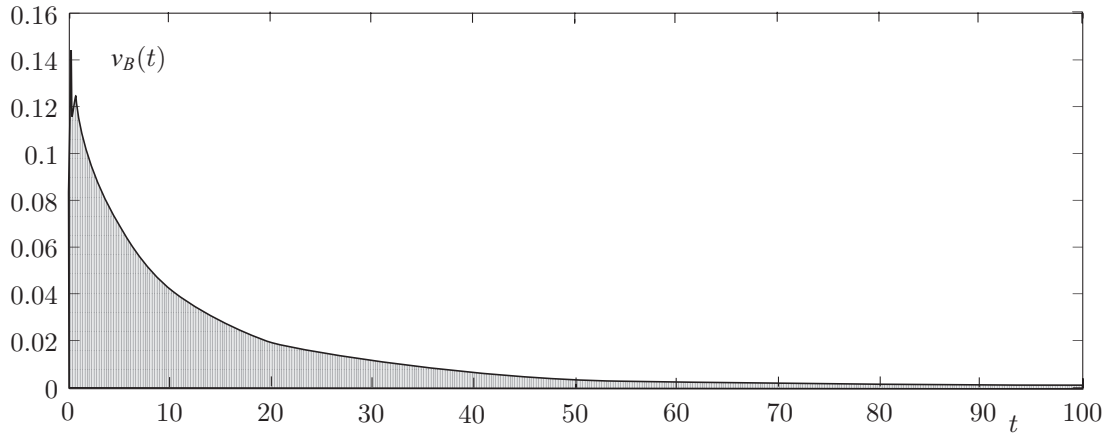
Slika 4 : Razmerje med silo trenja in normalno silo podlage $\nu(t)$ na časovnem območju (a) $[0, 1]$ s in (b) $[99, 100]$ s.

Hitrost dotikališča predstavljamo na slikah 5 in 6. Na začetku gibanja ponovno ugotavljamo, da prevladuje podrsavanje, največje hitrosti dotikališča pa so precejšnje. Kadar je $v_B = 0$, imamo gibanje brez podrsavanja. Iz slike 5b je razvidno, da v drugi polovici gibanja prevladuje gibanje brez podrsavanja, vmes pa so kratki zdrsi. Hitrost dotikališča postane v drugi polovici gibanja zelo majhna (največ $8 \cdot 10^{-4}$ m/s), kar je tesno povezano z majhnimi koti diska glede



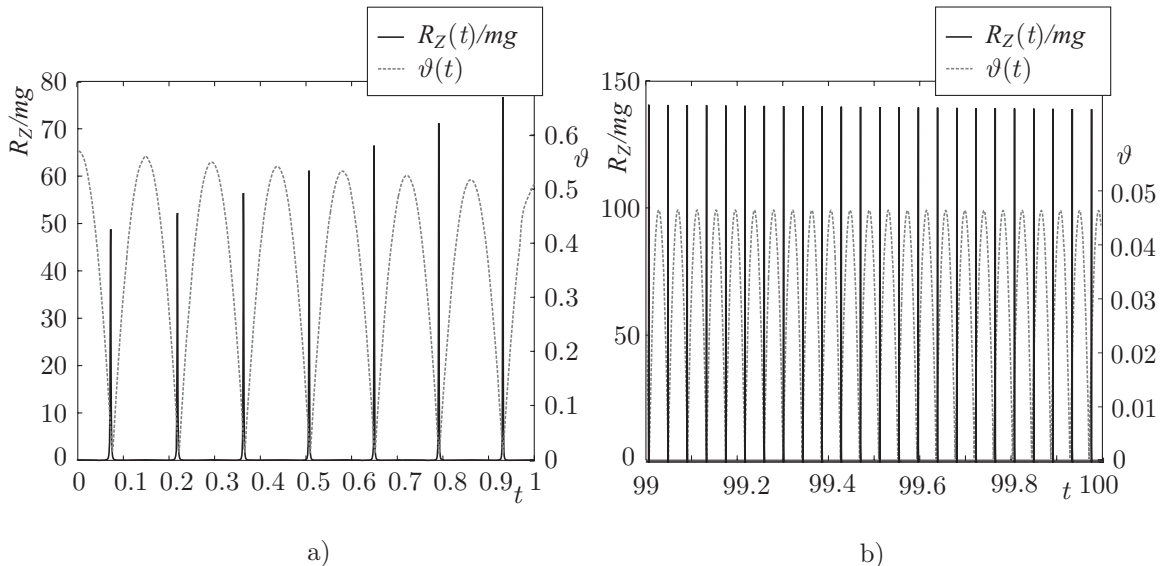
Slika 5 : Velikost hitrosti dotikališča $v_B(t)$ na časovnem območju (a) $[0, 1]$ s in (b) $[99, 100]$ s.

na ravnino. Zdrs se pojavljajo kljub majhnemu naklonu diska zaradi zelo majhnega statičnega koeficienta trenja.



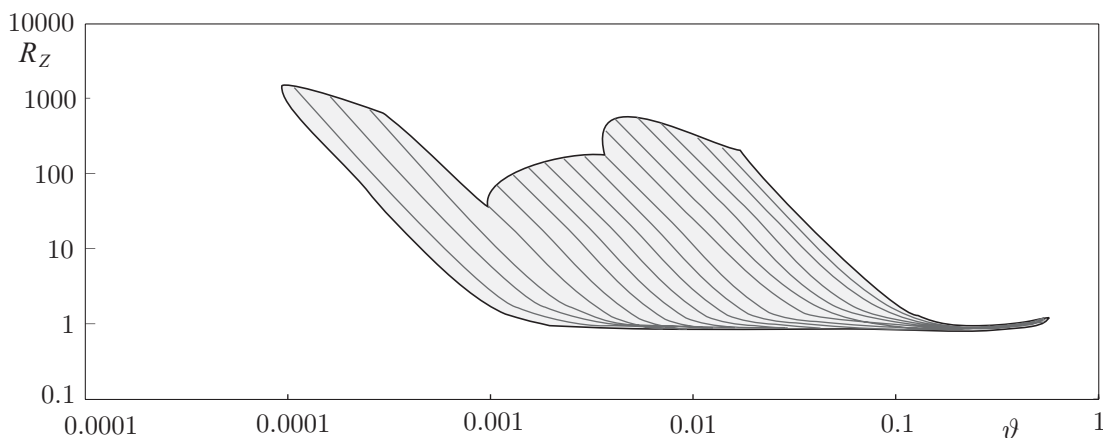
Slika 6 : Ovojnica največjih hitrosti dotikališča na časovnem območju [0, 100] s.

Reducirano normalno silo podlage R_Z/mg na časovnih območjih [0, 1] s in [99, 100] s prikazujemo na sliki 7 hkrati z grafom naklona diska ϑ . Razvidno je, da se normalna sila podlage in naklon diska spreminjata z enako frekvenco; ta je 44 s^{-1} na intervalu [0, 1] s (slika 7a) in 149 s^{-1} na intervalu [99, 100] s (slika 7b). Normalna sila podlage je majhna, kadar je ϑ velik, in obratno, ko se naklon diska manjša, se normalna sila podlage večja. V območju najmanjših naklonov je naraščanje sile izredno strmo, kar se na grafih na sliki 7 odraža v obliki izrazitih lokalnih



Slika 7 : Normalizirana sila podlage $R_Z(t)/mg$ in naklon diska $\vartheta(t)$ na časovnem območju (a) [0, 1] s in (b) [99, 100] s.

“konic”. Ovojnica zveze med naklonom diska in normalno silo podlage v *logaritemskem merilu* je prikazana na sliki 8. Zaradi različnih dejavnikov pri gibanju diska se zveza med normalno silo in naklonom ne ohranja s časom, vseskozi pa lahko razberemo pojav naraščanja normalne sile ob manjšanju kota.



Slika 8 : Ovojnica in nekaj krivulj odvisnosti R_Z od ϑ na območju [1, 100] s.

4 Zveza med normalno silo podlage in naklonom diska

Periodični pojav lokalnih visokih ekstremov normalne sile podlage pri najmanjših naklonih diska na sliki 7 je nekoliko presenetljiv. Vendar lahko z analitičnimi izpeljavami dokažemo, da ti ekstremi niso posledica napak pri numeričnem računanju. V tem poglavju prikažemo analitične zveze med R_Z , ϑ , Ω_x , Ω_y in Ω_z . Ker sta vpliv vetra in zračnega upora pri Eulerjevem disku zanemarljiva, ju pri izpeljavah zanemarimo. Izraze moramo izpeljati posebej za gibanje brez in posebej za gibanje s podrsavanjem.

Pri gibanju brez podrsavanja izločimo odvod \dot{V}_Z iz enačbe $R_Z = m(\dot{V}_Z + g)$ s pomočjo enačb v [4, okno 1]. Po krajši izpeljavi dobimo

$$\frac{R_Z}{mg} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sin \vartheta}, \quad (1)$$

kjer sta

$$\alpha_1 = \frac{a \cos \vartheta}{g(ma^2 + A)} [(C + ma^2)\Omega_x\Omega_z - mga \cos \vartheta] - \frac{a\Omega_y^2 \sin \vartheta}{g} + 1$$

$$\alpha_2 = \frac{aA\Omega_x^2}{g(ma^2 + A)} \cos^2 \vartheta$$

in z A in C označimo glavna masna vztrajnostna momenta diska okrog osi y in z . α_1 in α_2 sta omejeni funkciji ϑ za poljubno izbiro kotnih hitrosti Ω_x , Ω_y in Ω_z . Zaradi izraza $\sin \vartheta$ v imenovalcu (1) bo normalna sila rastle čez vse meje, ko se bo naklon diska bližal vrednosti

0 (ali enakovredno π). Pokazali smo torej, da normalna sila podlage za majhne naklone ϑ raste proti neskončnosti. Opozorimo na možnost, da se velike vrednosti R_Z ne pojavijo kljub majhnemu naklonu. Ker je α_2 sorazmeren Ω_x^2 , ni lokalizacije normalne sile, kadar je $\Omega_x = 0$ za majhne vrednosti naklona; vendar pri Eulerjevem disku ta možnost ne nastopi.

Pri gibanju s podrsavanjem je analitična rešitev oblike

$$\frac{R_Z}{mg} = \alpha_3 + \frac{\alpha_4}{\sin \vartheta}, \quad (2)$$

kjer sta

$$\alpha_3 = \frac{A}{\beta_0} \left[1 - \frac{a\Omega_y^2}{g} \sin \vartheta \right] + \frac{aC\Omega_x\Omega_z}{g\beta_0} \cos \vartheta$$

$$\alpha_4 = \frac{aA\Omega_x^2}{g\beta_0} \cos^2 \vartheta$$

in z β_0 označimo

$$\beta_0 = ma^2 \cos \vartheta [\mu_d \cos(\alpha - \psi) \sin \vartheta + \cos \vartheta] + A.$$

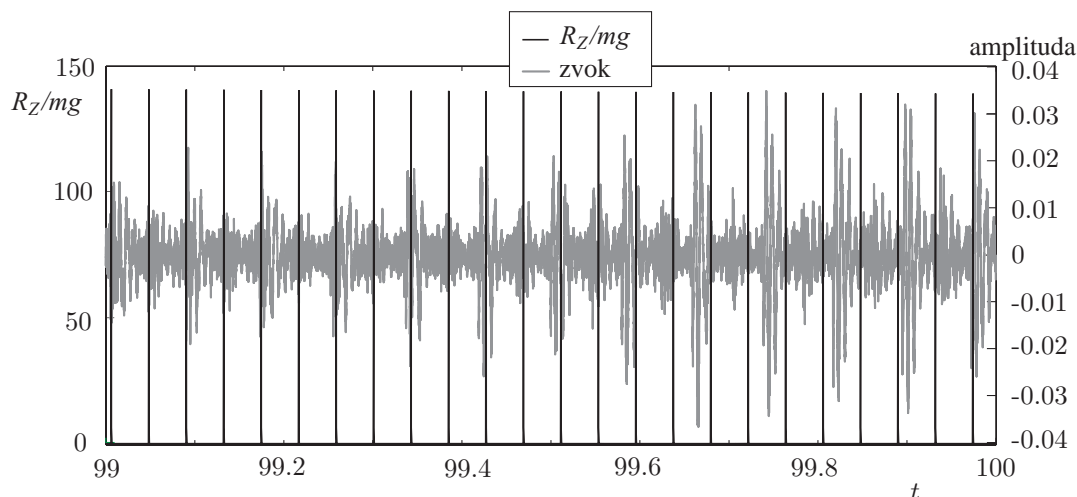
Kot pri gibanju brez podrsavanja sta količini α_3 and α_4 omejeni. Numerični rezultati za β_0 pa kažejo, da ta količina med gibanjem ni nikoli (blizu) nič. Normalna sila podlage zato strmo raste, ko se ϑ bliža 0 ali π .

Analitični izrazi (1) in (2) se povsem ujemajo z numeričnimi rezultati na slikah 7 in 8. Torej je pojav velikih lokalnih ekstremov resnično prisoten. Ogromne vrednosti normalne sile so tudi posledica računskega modela, ki ne upošteva deformabilnosti podlage. Menimo, da bi se pojavili lokalizmi normalne sile, tudi če podlaga ne bi bila neskončno toga, le ekstremne vrednosti bi bile manjše.

5 Zvok pri gibanju diska

Niz kratkih in močnih odzivov podlage na gibanje diska je lahko vzrok zvoku, ki ga slišimo pri eksperimentih z Eulerjevim diskom [1]. To domnevo lahko zlahka preverimo, saj imamo na voljo zvočni zapis gibanja [1]. Zvočni zapis primerjamo z grafom R_Z/mg na sliki 9. Na sliki 9 prikazujemo amplitude zvočnega zapisa, normirane v skladu s standardnimi elektronskimi zapisi zvoka na interval $[-1, 1]$, v časovnem območju ene sekunde približno 4 do 5 sekund pred koncem gibanja diska. Numerično izračunane vrednosti reducirane normalne sile podlage R_Z/mg so prikazane za območje [99, 100]s. Frekvence posnetega zvoka in frekvence normalne sile podlage se skoraj povsem ujemajo. Frekvenca udarcev pri zvočnem zapisu je 154s^{-1} , frekvenca izračunanih lokalnih ekstremov normalne sile pa je 149s^{-1} .

Dobljeni rezultati za spreminjanje normalne sile s časom se povsem razlikujejo od rezultatov, ki sta jih predstavila Kessler and O'Reilly [2]. Predstavljeni rezultati se kljub temu zdijo fizikalno opravičljivi, dobro ujemanje z eksperimentom pa to dodatno potrjuje. Različni rezultati so lahko le delno posledica razlik v modeliranju diska, velik vpliv pa ima zaradi zahtevnosti enačb numerično reševanje. Težavnost problema zahteva še natančnejše modele in veliko previdnost pri numeričnem reševanju enačb.



Slika 9 : Primerjava zvočnega zapisa in numerično izračunane normalne sile podlage v zaključni fazi gibanja diska.

6 Sklep

Če učni pripomoček “Eulerjev disk” [1] zavrtimo po ravnini okrog osi med težiščem in dotikališčem, se disk po določenem času “umiri”. Tako gibanje spremljajo majhni, na videz “konstantni” koti med diskom in podlago ter izrazito “impulzno” ropotanje. Zaradi zahtevnosti problema povezava med gibanjem diska in zvokom, ki pri tem nastaja, ni jasna. Iz naših rezultatov je moč sklepati, da so izraziti lokalni maksimumi normalne sile podlage v tesni zvezi z ropotom diska. Ujemanje računskih rezultatov z eksperimentom to potrjuje.

Literatura

- [1] J. Bendik, The official Euler’s disk website, <http://www.eulerdisk.com>, Tangent Toy Co., Sausalito, CA, <http://www.tangenttoy.com>.
- [2] P. Kessler, O. M. O’Reilly, The ringing of Euler’s disk, *Regular and Chaotic dynamics*, **7**, No. 1, 49–60, 2002.
- [3] The MathWorks, Inc., *MATLAB, Using MATLAB*, Natick, <http://www.mathworks.com>, 1999.
- [4] M. Saje, D. Zupan, *Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini: vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. 1. del: Osnove*, Kuhljevi dnevi 2002, Ribno, 26.–27.9.2002, Zbornik del, str. 1–8, 2002.
- [5] M. Saje, D. Zupan, *Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini*, Uradna stran predmeta Kinematika in dinamika, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, <http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/KiD/KD.htm>.



Točna analiza troslojnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa

S. Schnabl, I. Planinc, B. Čas, M. Saje, G. Turk¹

Exact solution of three-layered continuous beams with interlayer slip

Povzetek. V članku je predstavljena točna analiza mehanskega obnašanja troslojnih ravninskih kontinuirnih nosilcev. Formulacija posameznega sloja ravninskega slojevitega nosilca je osnovana na geometrijsko linearni teoriji nosilcev. Konstitucijski modeli posameznega sloja in zveze med zdrsom in strižnimi napetostmi v stičnih ploskvah so linearno elastične. Pomiki, rotacije in deformacije so po velikosti majhne količine. Predstavljena analiza je zelo splošna in relativno preprosta. Kot ilustracija je prikazana točna rešitev napetostnega in deformacijskega stanja troslojnega kontinuirnega nosilca preko dveh polj, ki je obtežen z enakomerno linijsko obtežbo. Točno izračunane kinematične in statične količine, so primerjane s približnimi vrednostmi, ki so jih predstavili Goodman in Popov [11] ter evropski predpisi za lesene konstrukcije Evrokod 5 [5]. Primerjava rezultatov pokaže, da so točni rezultati skoraj identični rezultatom, ki jih dobimo po Evrokodu 5. Rezultati po metodi, ki sta jo predstavila Goodman in Popov [11], pa so podcenjeni. Podrobna parametrična analiza je pokazala, da togost posameznega sloja in togost stika odločujoče vplivata na togost troslojnih elastičnih kontinuirnih nosilcev.

Abstract. This paper presents exact analysis of mechanical behaviour of geometrically and materially linear continuous three-layered composite planar beams. The formulation of each layer of composite planar beam is based on geometrically linear beam theory. Constitutive models of layers and relationship between interlayer slip and shear stresses at the interface are linear elastic. The presented procedure is very general and relatively easy to comprehend which is illustrated by the exact analysis of mechanical behaviour of three-layered continuous beam over two spans. In numerical examples, kinematic and static quantities, specifically vertical deflections of composite beams are calculated by the present procedure and compared to those obtained by Goodman and Popov [11] and the European code for timber structures Eurocode 5 [5]. Comparison of various methods show that the results obtained by the present analytical method and those obtained by the European code for timber structures are in the case of uniform load almost identical, whereas the results obtained by Goodman and Popov [11] underestimate actual displacements. Furthermore, it is shown that the stiffness of each layer and the stiffness of interlayer slip between layers have great influence on static and kinematic quantities of composite beams.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

1 Uvod

Slojeviti kompozitni sistemi so v gradbeništvu pogosto uporabljeni konstrukcijski elementi. Uporabljajo se pri montažni gradnji, pri ojačitvah in sanacijah že obstoječih konstrukcijskih elementov oziroma zgradb in podobno. Kompozitni ali slojeviti sistemi so sestavljeni iz dveh ali več komponent enakega ali različnega materiala, ki so z veznimi sredstvi povezane v enovito celoto. Posamezne komponente so vgrajene na mesta v konstrukciji kjer le-te obremenitve najboljše prenašajo. Značilni primeri takih konstrukcij v gradbeništvu so armiranobetonske in sovprežne konstrukcije. Mehansko obnašanje večslojnih kompozitnih konstrukcij je v največji meri odvisno od uporabljenih veznih sredstev oziroma od načina povezanosti posameznih slojev. Toga vezna sredstva zagotavljajo popolnoma togo povezanost slojev kompozitnih elementov, podajna vezna sredstva pa le delno povezano delovanje posameznih slojev. Posledica podajne povezave je medsebojni zdrs slojev kompozitnih elementov. Ker ima zdrs zelo velik vpliv na mehansko obnašanje slojevitih konstrukcij, ga moramo biti pri analizi takih konstrukcij upoštevati.

Ker so eksperimenti, s katerimi analiziramo obnašanje slojevitih konstrukcij zelo zahtevni in dragi, je bistvenega pomena razvoj preprostih in učinkovitih numeričnih postopkov za analizo tovrstnih konstrukcij. Trend razvoja teh računskih postopkov je modelirati materialno in geometrijsko nelinearne pojave z upoštevanjem zdrsa med sloji kompozitnega nosilca [2, 3, 4, 6, 7, 13, 19, 20]. Natančnost oziroma pravilnost ter učinkovitost teh postopkov je najpreprosteje preveriti s primerjavo med rezultati numerične in točne analize.

Točna rešitev mehanskega obnašanja elastičnega prostoležečega kompozitnega nosilca je v literaturi dobro znana [1, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 21]. Ni pa zaslediti točne rešitve kompozitnih kontinuirnih nosilcev preko dveh ali več polj. Zato v članku predstavimo točno rešitev mehanskega obnašanja geometrijsko in materialno linearnih kontinuirnih troslojnih nosilcev preko dveh polj z upoštevanjem zdrsa med sloji. Predstavljena točna rešitev kompozitnih nosilcev je zasnovana na naslednjih predpostavkah: (1) materialni model vseh slojev je lahko različen, vendar mora biti linearno elastičen, (2) pomiki, zasuki in deformacije so po velikosti majhne količine, (3) strižno deformiranje nosilca zanemarimo (teorija nosilcev po Eulerju in Bernoulliju), (4) potek deformacij po višini prečnega prereza je linearen za vsak sloj (Bernoullijeva hipoteza), (5) konstanten koeficient togosti stika med sloji, (6) trenje med sloji ne upoštevamo, (7) psevdoukrivljenost referenčne osi je enaka za vse sloje kompozitnega nosilca, (8) število slojev je enako tri, posplošitev za poljubno število slojev pa je preprosta, (9) prečni prerezi so simetrični glede na ravnino deformiranja in se po obliki in velikosti med deformiranjem ne spreminjajo, ter (10) sosednja sloja kompozitnega nosilca lahko drsita drug po drugem, ne moreta pa se razmakniti.

Veljavnost predstavljenega računskega postopka za določitev točne rešitve posplošenih ravnotežnih enačb ilustriramo z numeričnimi primeri. Točne kinematične in statične količine primerjamo s približnimi, ki sta jih predstavila Goodman in Popov [11] in tistimi, ki jih predpisuje Evrokodu 5 [5]. Primerjave rezultatov pokažejo odlično ujemanje med točnimi rezultati in rezultati, dobljenimi po Evrokodu 5 [5], medtem ko so rezultati dobljeni z rešitvijo Goodmana in Popova [11], nižji od točnih rezultatov, predstavljenih v članku.

2 Osnovne enačbe troslojnega nosilca z upoštevanjem zdrsa ter postopek reševanja

Predstavljena formulacija modela troslojnega nosilca z upoštevanjem zdrsa med sloji je osnovana na lineariziranih Reissnerjevih enačbah kinematično točnega modela ravninskega nosilca. Glede na prej omenjene predpostavke je mehansko obnašanje troslojnega nosilca z upoštevanjem zdrsa med sloji določeno z dvema ločenima sistemoma algebrajsko – diferencialnih enačb. Sestavljajo jih kinematične, ravnotežne, konstitucijske in vezne enačbe ter pripadajoči statični in kinematični robni pogoji za vsak sloj kompozitnega nosilca posebej. Enačbe in pomen oznak v njih so detajlno predstavljene v [4], zato jih tu samo povzamemo:

$$u^{a'} - \varepsilon^a = 0, \quad u^{b'} - \varepsilon^b = 0, \quad u^{c'} - \varepsilon^c = 0, \quad (1)$$

$$w' + \varphi = 0, \quad \varphi' - \kappa = 0, \quad (2)$$

$$\mathcal{N}^{a'} - p_t^{ab} = 0, \quad \mathcal{N}^{b'} + p_t^{ab} - p_t^{bc} = 0, \quad \mathcal{N}^{c'} + p_t^{bc} + p_x = 0, \quad (3)$$

$$(Q^a + Q^b + Q^c)' + p_z = 0 \rightarrow Q' + p_z = 0, \quad (4)$$

$$(\mathcal{M}^a + \mathcal{M}^b + \mathcal{M}^c)' - (Q^a + Q^b + Q^c) + m_y = 0 \rightarrow \mathcal{M}' - Q + m_y = 0, \quad (5)$$

$$\mathcal{N}^a = \mathcal{N}_c^a = C_{11}^a \varepsilon^a + C_{12}^a \kappa, \quad (6)$$

$$\mathcal{N}^b = \mathcal{N}_c^b = C_{11}^b \varepsilon^b + C_{12}^b \kappa, \quad (7)$$

$$\mathcal{N}^c = \mathcal{N}_c^c = C_{11}^c \varepsilon^c + C_{12}^c \kappa, \quad (8)$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_c^a + \mathcal{M}_c^b + \mathcal{M}_c^c \rightarrow \mathcal{M} = C_{21}^a \varepsilon^a + C_{21}^b \varepsilon^b + C_{21}^c \varepsilon^c + (C_{22}^a + C_{22}^b + C_{22}^c) \kappa, \quad (9)$$

$$\Delta^{ab} = u^a - u^b, \quad \Delta^{bc} = u^b - u^c, \quad (10)$$

$$p_t^{ab} = K^{ab} \Delta^{ab}, \quad p_t^{bc} = K^{bc} \Delta^{bc} \quad (11)$$

in

$$x + u^a = x^* + u^b \rightarrow x^* = x + \Delta^{ab}, \quad (12)$$

$$x^* + u^b = x^{**} + u^c \rightarrow x^{**} = x^* + \Delta^{bc}, \quad (13)$$

$$Q^{a'} + p_n^{ab} = 0, \quad Q^{b'}(x) - p_n^{ab} + p_n^{bc} = 0 \quad (14)$$

$$\mathcal{M}^{a'} - Q^a = 0, \quad \mathcal{M}^{b'} - Q^b = 0, \quad (15)$$

$$\mathcal{M}^a = \mathcal{M}_c^a = C_{21}^a \varepsilon^a + C_{22}^a \kappa, \quad \mathcal{M}^b = \mathcal{M}_c^b = C_{21}^b \varepsilon^b + C_{22}^b \kappa, \quad (16)$$

$$Q = Q^a + Q^b + Q^c, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}^a + \mathcal{M}^b + \mathcal{M}^c. \quad (17)$$

Sistem (1)–(11) sestavlja 18 enačb za 18 neznanih funkcij $u^a, u^b, u^c, w, \varphi, \varepsilon^a, \varepsilon^b, \varepsilon^c, \kappa, \mathcal{N}^a, \mathcal{N}^b, \mathcal{N}^c, Q, \mathcal{M}, \Delta^{ab}, \Delta^{bc}, p_t^{ab}, p_t^{bc}$, medtem ko sestavlja sistem (12)–(17) 10 enačb za 10 neznanih funkcij $x^*, x^{**}, Q^a, Q^b, Q^c, \mathcal{M}^a, \mathcal{M}^b, \mathcal{M}^c, p_n^{ab}, p_n^{bc}$. Glede na preprostost sistema enačb (1)–(11) je reševanje le tega preprosto.

Najprej z integriranjem rešimo ravnotežne enačbe, v nadaljevanju s konstitucijskimi enačbami izrazimo deformacijske količine v odvisnosti od statičnih začetnih vrednosti nosilca. Nato z dobljenimi izrazi za deformacije z integriranjem rešimo kinematične enačbe. Tako izrazimo statične začetne vrednosti nosilca v odvisnosti od kinematičnih robnih količin. Ker je kontinuirni nosilec sestavljen iz nosilcev, na koncu iz ravnotežja vozlišč med nosilci (enačba konstrukcije) izračunamo neznane robne kinematične količine posameznega nosilca.

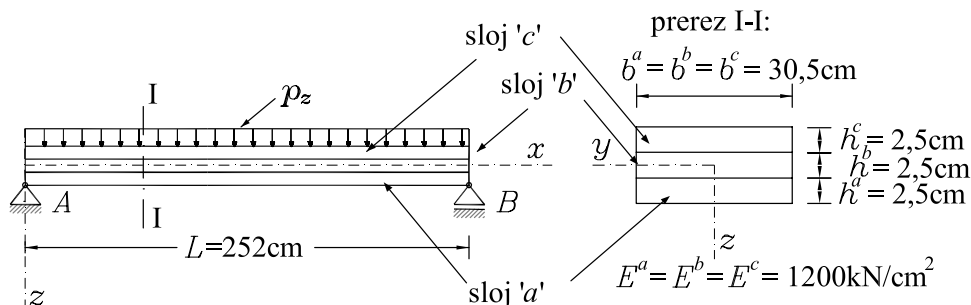
3 Računski primeri

Za ilustracijo učinkovitosti predstavljenega računskega postopka za točno analizo troslojnih kontinuirnih nosilcev obravnavamo dva računska primera: (i) troslojni prostoležeči nosilec; (ii) kontinuirni troslojni nosilec preko dveh polj.

3.1 Troslojni prostoležeči nosilec

Geometrijsko in materialno linearno točno rešitev kompozitnega prostoležečega nosilca pogosto zasledimo v literaturi [1, 4, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 21, 19]. Rešitev je običajno podana za dvoslojne nosilce. Edino nam znano rešitev za troslojni nosilec sta podala Goodman in Popov [11].

Da prikažemo učinkovitost našega računskega postopka za točno analizo troslojnih nosilcev, najprej primerjamo točne rešitve z rešitvami Goodmana in Popova [11]. Rezultate primerjamo za dva različna obtežna primera in sicer: (i) nosilec je obremenjen s točkovno silo P na sredini razpona in (ii) nosilec je obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo p_z . Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi so prikazani na sliki 1.



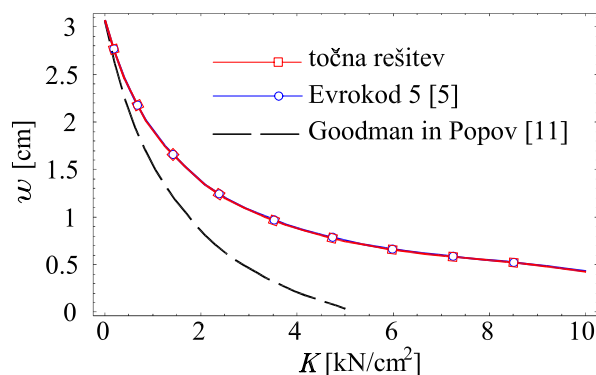
Slika 1 : Geometrija, obtežba in materialne karakteristike enostavno podprtega troslojnega prostoležečega nosilca.

Primerjava med točnimi navpičnimi pomiki na sredini razpona nosilca in približnimi po Goodmanu in Popovu [11] ter Evrokodu 5 [5], je za različne togosti stikov. Glede na to, da je rešitev, ki sta jo predstavila Goodman in Popov [11], dobljena s predpostavko, da so upogibni momenti in osne sile v vseh slojih enake, je razumljivo veliko odstopanje rezultatov. Rezultati so primerljivi samo v primeru linijsko obteženega nosilca in za relativno podajne stike med sloji ($K < 1 \text{ kN/cm}^2$). Nekoliko bolj natančni so rezultati, ki jih predpisujejo EC5 [5]. Opazimo, da so navpični pomiki v primeru enakomerne linijske obtežbe nosilca praktično točni, medtem ko so navpični pomiki v primeru točkovne obtežbe nosilca napačni ne glede na podajnost stika med sloji.

Tabela 1 : Prispevek zaradi zdrsa k navpičnim na sredini troslojnega prostoležečega nosilca.

K [kN/cm ²]	točkovna sila $P = 1$ kN			enak. linijska obtežba $p_z = 1$ kN/m		
	Goodman [11]	EC 5 [5]	toč. rešitev	Goodman [11]	EC 5 [5]	toč. rešitev
0.01	6.340*	1.953	11.643	3.063	3.069	3.069
0.1	6.012*	1.852	9.738	2.852	2.908	2.907
0.5	4.889	1.499	5.860	2.131	2.357	2.355
1	3.974	1.212	4.128	1.541	1.906	1.902
2	2.887	0.877	2.839	0.851	1.378	1.373
3	2.273	0.686	2.312	0.462	1.079	1.073
4	1.882	0.564	2.031	0.212	0.887	0.881
5	1.603	0.479	1.860	0.038	0.753	0.747
10	0.933	0.273	1.488	–	0.429	0.423
100	0.115*	0.031	1.143	–	0.049	0.048

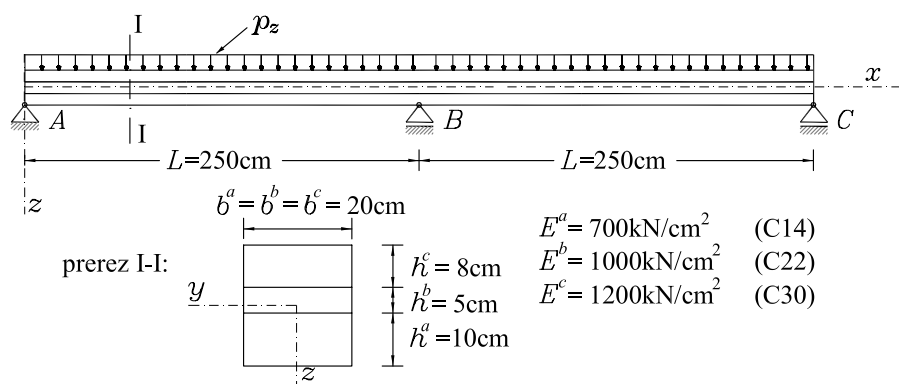
* slaba pogojenost, – ni rezultata



Slika 2 : Prostoležeči troslojni nosilec obremenjen z enakomerno linijsko obtežbo. Primerjava prispevkov zaradi zdrsa k točnim navpičnim pomikom na sredini nosilca in pomikom po Goodmanu in Popovu [11], $K = K^{ab} = K^{bc}$.

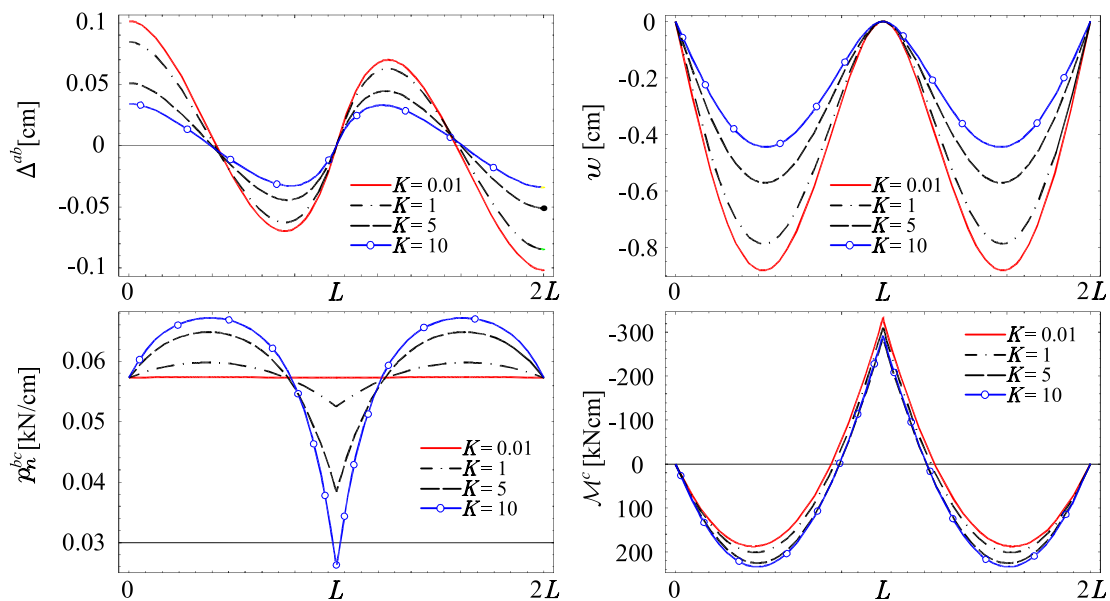
3.2 Troslojni kontinuirni nosilec preko dveh polj

Na koncu prikažemo točne rešitve za napetostno in deformacijsko stanje kontinuirnega troslojnega nosilca preko dveh polj. Posamezni sloji so izdelani iz lesa različne kakovosti. Označeni so s trdnostnimi razredi skladno z EC5 [5]. Kontinuirni nosilec je obremenjen v obeh poljih z enakomerno linijsko vertikalno obtežbo $p_z = 0.01$ kN/cm. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi so podani na sliki 3.



Slika 3 : Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi kontinuirnega nosilca.

Spreminjanje zamika med slojema a in b (Δ^{ab}), navpičnega pomika (w), normalne komponente kontaktne napetosti med slojema b in c (p_n^{bc}) ter upogibnega momenta sloja c (\mathcal{M}^c) vzdolž referenčne osi v odvisnosti od togosti stika prikazujemo na sliki 4. Iz slike 4 je tudi očitno, da ima koeficient togosti stika pomemben vpliv na statične in kinematične količine. Δ^{ab} in w sta manjša za večje koeficiente zdrs K , medtem ko sta p_n^{bc} in \mathcal{M}^c za večje koeficiente zdrs med sloji, večja.



Slika 4 : Spreminjanje Δ^{ab} , w , p_n^{bc} in \mathcal{M}^c vzdolž osi v odvisnosti od togosti stika $K = K^{ab} = K^{bc}$ kontinuirnega troslojnega nosilca.

4 Zaključek

V članku smo predstavili računski postopek za točno analizo mehanskega obnašanja geometrijsko in materialno linearnih troslojnih kontinuirnih nosilcev. Učinkovitost prikazanega postopka je ilustriрана z dvema računskima primeroma. Z njima smo analizirali natančnost poenostavljenih postopkov skladno z Goodmanom in Popovim [11] ter EC5 [5]. Primerjava rezultatov je pokazala, da je natančnost računskega postopka po EC5 ustrezna samo za troslojni prostoležeči nosilec, ki je obtežen z enakomerno linijsko obtežbo, medtem ko se točne rešitve in rešitve skladno z Goodmanom in Popovim [11] zelo razlikujejo.

Literatura

- [1] U. O. Adekola, *Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam*, International Journal of Solids and Structures, 4, 1125–1135, 1968.
- [2] A. Ayoub, *A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams*, Finite Elements in Analysis and Design, 37, 929–959, 2001.
- [3] B. Čas, M. Saje, I. Planinc, *Nonlinear finite element analysis of composite planar frames with inter-layer slip*, Computers and Structures, sprejeto v objavo.
- [4] B. Čas, *Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji*, doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2004.
- [5] Eurocode 5, *Design of timber structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings*, ENV 1995-1-1, 1993.
- [6] G. Fabbrocino, G. Manfredi, E. Cosenza, *Modelling of continuous steel-concrete composite beams: computational aspects*, Computers and Structures, 80, 2241–2251, 2002.
- [7] C. Faella, E. Martinelli, E. Nigro, *Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: 'exact' analytical expression of the stiffness matrix and applications*, Computers and Structures, 80, 1001–1009, 2002.
- [8] N. Gatessco, *Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection*, Journal of Constructional Steel Research, 52, 195–218, 1999.
- [9] U. A. Girhammar, V. K. A. Gopu, *Composite beam-columns with inter-layer slip—exact analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 199(4), 1265–1282, 1993.
- [10] U. A. Girhammar, D. Pan, *Dynamic analysis of composite member with inter-layer slip*, International Journal of Solids and Structures, 30(6), 797–823, 1993.
- [11] J. R. Goodman, E. P. Popov, *Layered beam systems with inter-layer slip*, Journal of Structural Division, ASCE, 94(11), 2535–2547, 1968.
- [12] J. R. Goodman, E. P. Popov, *Layered wood systems with inter-layer slip*, Wood Science, 1(3), 148–158, 1969.

- [13] M. V. Linden, *Timber-concrete composite beams*, HERON, 44(3), 215–239, 1999.
- [14] N. M. Newmark, C. P. Siest, C. P. Viest, *Test and analysis of composite beams with incomplete interaction*, Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, 9, 238–246, 1970.
- [15] G. Ranzi, M. A. Bradford, B. Uy, *A general method of analysis of composite beams with partial interaction*, Steel and Composite Structures, 3(3), 169–184, 2003.
- [16] H. Y. Rassam, J. R. Goodman, *Design of layered wood columns with inter-layer slip*, Wood Science, 3(3), 149–155, 1971.
- [17] E. Reissner, *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*, Journal of Applied Mechanics and Physics (ZAMP), 23, 795–804, 1972.
- [18] J. Silfwerbrand, “*Stresses and strains in composite concrete beams subjected to differential shrinkage*”, ACI Structural Journal, 94(4), 347–353, 1997.
- [19] E. G. Thompson, J. R. Goodman, M. D. Vanderbilt, *Finite element analysis of layered wood systems*, Journal of the Structural Division, ASCE, 101(ST12), 2659–2672, 1975.
- [20] D. L. Wheat, J. M. Calixto, *Nonlinear analysis of two-layered wood members with inter-layer slip*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 120(6), 1909–1929, 1994.
- [21] S. T. Smith, J. G. Teng, *Interfacial stresses in plated beams*, Engineering Structures, 23, 857–871, 2001.



Nizkociklično utrujanje konstrukcijskega jekla

P. Skuber¹, D. Beg¹, J. Korelc¹

Low cycle fatigue assessment of structural steel

Povzetek. Predstavljen je numerični model za opis nizkocikličnega utrujanja jeklenih konstrukcij. Za opis odziva konstrukcijskega jekla S275 na ciklično obremenjevanje v plastičnem področju je uporabljen elasto-plastični materialni model, ki združuje kinematično in izotropno utrjevanje z mehaniko poškodb trdnega telesa. Določen je z 22 materialnimi parametri, dobljenimi s pomočjo enoosnih cikličnih testov. Materialni model je vgrajen v tridimenzionalni končni element za velike deformacije. Ustreznost končnega elementa je potrjena z dobrim ujemanjem s eksperimenti. Predstavljeni so rezultati numerične analize nizkocikličnega utrujanja značilnih spojev v jeklenih konstrukcijah.

Abstract. A numerical model of cyclic plasticity and low cycle fatigue damage of the steel structures, combining kinematic and isotropic hardening with continuum damage mechanics is presented. Cyclic plasticity of the structural steel S275 is described with an elastic-plastic material model, defined with 22 material parameters. Material parameters for structural steel were defined using uniaxial cyclic tests. A three-dimensional finite element for large strain is developed, exhibiting a good agreement with the experiments. The results of the numerical analysis of low-cycle fatigue of the typical connections are shown.

1 Uvod

Jeklene konstrukcije na potresno nevarnih območjih projektiramo tako, da so določeni elementi izpostavljeni cikličnemu obremenjevanju v plastičnem področju. Do sedaj se je uveljavil pristop, ki v povezavi s Palmgren-Minerjevim pravilom linearne akumulacije poškodb omogoča napoved števila ciklov do porušitve pri poljubni zgodovini cikličnega obremenjevanja. Velika pomanjkljivost metode je, da je potrebno za deformacijski parameter izbrati neko globalno deformacijsko količino. Običajno izberemo plastično rotacijo v spoju ali plastičnem členku. Najpomembnejša pomankljivost metode pa je, da razen za posamezne primere, nizkociklične preiskave spojev niso na voljo.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Za izhodišče novega modela smo uporabili Pedersen-Tvergaard-ov [4] elasto-plastičen materialni model, ki je bil izdelan za analizo orodnih jekel in za male deformacije. Zaradi posebnih lastnosti mehkih konstrukcijskih jekel je bilo potrebno osnovni model nadgraditi. Na osnovi lastnih eksperimentalnih raziskav (Skuber [5]) smo v konstitucijske enačbe za izotropično utrjevanje in za razvoj poškodb vgradili dodatne funkcije.

2 Numerično modeliranje cikličnega utrujanja

Mehanika poškodb predstavlja praktično orodje za opis procesov pri razvoju poškodb v materialu in v konstrukcijah na makroskopskem nivoju trdnega telesa. Na makronivoju združuje več heterogenih mikroprocesov, ki se dogajajo med deformiranjem materiala in konstrukcije. Razporejene poškodbe v materialu ne vodijo samo do nastanka makrorazpoke in do končne porušitve, ampak povzročajo tudi utrujanje materiala, ki se lahko meri v zmanjšanju nosilnosti, togosti, žilavosti, stabilnosti in v preostali življenjski dobi (Skuber [6]). Izbran je pristop, kjer za opis poškodovanega volumna uporabimo homogeno zvezno telo, ki je enakovredno poškodovanemu (Lemaitre [3]). V tem primeru mikroskopske procese opišemo s spremenljivkami stanja vezanih na materialno točko. Parameter za opis poškodb D predstavlja delež praznin na referenčnem volumnu.

2.1 Konstitucijske enačbe

Za numerično analizo je bil izbran model, ki upošteva materialno in geometrijsko nelinearnost. Vpliv temperature in hitrosti deformacij na mehanske lastnosti v izbranem materialnem modelu ni upoštevan.

2.1.1 Elastični del

Za opis elastičnega odziva materiala je v modelu uporabljena hiperelastična Neo-Hookova funkcija deformacijske energije:

$$\Pi^*(\mathbf{B}_e) = (1 - D) \frac{\Lambda}{2} (\sqrt{\det \mathbf{B}_e} - 1)^2 + \mu \left(\frac{\text{tr} \mathbf{B}_e - 3}{2} - \text{Log}(\sqrt{\det \mathbf{B}_e}) \right), \quad (2)$$

kjer sta Λ in μ Lamjevi elastični konstanti. Kirchhoff-ov napetostni tenzor $\boldsymbol{\tau}$ in elastični levi Cauchy-jev tenzor deformacij \mathbf{B}_e sta podana z:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_e &= \mathbf{F} \mathbf{C}_{\text{pl}}^{-1} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} &= 2\mathbf{B}_e \frac{\partial \Pi^*(\mathbf{B}_e)}{\partial \mathbf{B}_e}, \end{aligned} \quad (1)$$

kjer je $\mathbf{C}_{\text{pl}}^{-1}$ simetrični inverzni plastični desni Cauchy-jev deformacijski tenzor in \mathbf{F} deformacijski gradient.

Ker je plastična deformacija nestisljiva je $J = \det \mathbf{F} = 1$. Iz tega izhaja, da je Cauchy-jev tenzor napetosti enak Kirchhoff-ovemu tenzorju napetosti ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$).

2.1.2 Plastični del

Evolucija plastičnega desnega Cauchy-jevega deformacijskega tenzorja \mathbf{C}_{pl}^{-1} je podana z enačbo:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_{pl}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T + \frac{2}{3} \cdot \dot{\lambda} \cdot \text{tr}(\mathbf{B}_e) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

kjer je λ plastični množitelj.

V izbranem modelu je uporabljena Misses-ova površina tečenja z upoštevanjem izotropnega in kinematičnega utrjevanja ter razvoja poškodb.

Površina tečenja je določena z enačbo: $f(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\sigma}_e - (R + k) = 0$, (4)

kjer je napetostno stanje opisano z efektivno napetostjo $\tilde{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{S}}}$, (5)

$\tilde{\mathbf{S}}$ je efektivni deviator napetosti $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{I}$, (6)

“ k ” je konstanta in predstavlja napetost na meji tečenja na začetku obremenjevanja, R pa spremenljivka stanja.

Iz principa enakosti deformacij sledi, da lahko tenzor napetosti $\boldsymbol{\sigma}$ zamenjamo z efektivnim tenzorjem napetosti

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D} - \mathbf{X}, \quad (7)$$

kjer je D skalar, ki opisuje velikost poškodb v materialni točki. Kinematično utrjevanje je vodeno preko tenzorja napetosti \mathbf{X} , ki predstavlja trenutni položaj središča površine tečenja v napetostnem prostoru.

Evolucija spremenljivk stanja R , \mathbf{X} in D bo podana v nadaljevanju.

2.1.3 Evolucijske enačbe

Izotropno utrjevanje

Ciklično utrjevanje je lastnost materiala, kjer površina tečenja narašča z večanjem števila ciklov zaradi akumulirane plastične deformacije.

Glavna razlika v obnašanju konstrukcijskega jekla v primerjavi z orodnimi jekli, za katere je bil razvit Pedersen-Tvegaard-ov model, se kaže v hitrosti naraščanja izotropnega utrjevanja. Eksperimentalni rezultati kažejo na to, da je hitrost naraščanja izotropnega utrjevanja v prvih nekaj ciklih večja kot v kasnejših ciklih, kjer je opazno linearno naraščanje. Linearno naraščanje je bilo opazno vse do porušitve preizkušanca z izjemo testa z obremenjevanjem z

naj večjo amplitudo deformacij 5%, kjer je po nekaj ciklih opaziti padanje nosilnosti zaradi razvoja poškodb. Pri orodnih jeklih je naraščanje eksponentno in se že po nekaj ciklih ustavi.

V konstrukcijskem jeklu je prisoten vpliv zgodovine velikosti deformacij (angl. strain range memory). Pojav opazimo v primeru večanja in manjšanja amplitud deformacij (slika 1c); odziv materiala, ki je bil predhodno obremenjen z velikimi deformacijami, je pri nadaljnjih, manjših deformacijah spremenjen. Zgodovina obremenjevanja je zapisana z $\varepsilon_{p,max}$, ki predstavlja največjo ekvivalentno plastično deformacijo, doseženo med cikličnim obremenjevanjem. Evolucijska enačba spremenljivke stanja R , odvisna od največje ekvivalentne plastične deformacije $\varepsilon_{p,max}$ in prirastka ekvivalentne plastične deformacije $\dot{\lambda}$, je tako podana z enačbo:

$$\dot{R} = b_0(b_1 \cdot \lambda + R_\infty(\varepsilon_{p,max}) - R)\dot{\lambda} + b_1 \cdot \dot{\lambda} \quad (8)$$

$$b_1 = 1 - e^{-s_0 \varepsilon_{p,max}} \quad (9)$$

$$R_\infty = R_{\infty,s} (1 + (\alpha - 1)e^{-\zeta \varepsilon_{p,max}}) \quad (10)$$

kjer so b_0 , s_0 , $R_{\infty,s}$, α in ζ materialni parametri, ki se določijo z numerično simulacijo enoosnega simetričnega cikličnega eksperimenta s konstantno amplitudo vodenih deformacij. Funkcija $b_1(\varepsilon_{p,max})$ predstavlja obliko naraščanja izotropnega utrjevanja z večanjem števila ciklov. $R_\infty(\varepsilon_{p,max})$ določa zgornjo mejo izotropnega utrjevanja v odvisnosti od največje plastične deformacije. $R_{\infty,s}$ je mejna vrednost cikličnega utrjevanja in velja $0 \leq R \leq R_\infty \leq R_{\infty,s}$. Vrednosti $R_{\infty,s}$ material nikoli ne doseže zaradi razvoja poškodb, ki v diagramu napetost-deformacija povzročijo padanje napetosti.

Kinematično utrjevanje

Kinematično utrjevanje opisuje potovanje središča površine tečenja po napetostnem prostoru. Potovanje je določeno s tenzorjem napetosti \mathbf{X} , ki določa središče trenutne površine tečenja. Kinematično utrjevanje opisuje Bauschinger-jev efekt. V našem primeru smo izbrali

model kinematičnega utrjevanja, ki je sestavljen iz treh krivulj: $\mathbf{X} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{X}^{(n)}$, (11)

$n = 1, 2, 3$. $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, $\mathbf{X}^{(3)}$ so tenzorji spremenljivk stanja, katerih evolucija je določena z:

$$\dot{\mathbf{X}}^{(n)} = \frac{2}{3} \gamma^{(n)} X_\infty^{(n)} (I - D) \dot{\mathbf{E}}^p - \left(\frac{X_e^{(n)}}{X_\infty^{(n)}} \right)^{m_n} \mathbf{X}^{(n)} \gamma^{(n)} \dot{\lambda}. \quad (12)$$

$X_e^{(n)}$ je efektivni tenzor napetosti

$$X_e^{(n)} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{X}^{(n)} : \mathbf{X}^{(n)}} \quad (13)$$

in $\dot{\mathbf{E}}^p$ prirastek Green-Lagrange-ovega tenzorja plastičnih deformacij.

Materialne parametre $X_\infty^{(n)}$ in $\gamma^{(n)}$, $n = 1, 2, 3$, določimo neposredno iz eksperimentalnih rezultatov. Izberemo vrsto enoosnih cikličnih testov s konstantno amplitudo deformacij, ki se med seboj razlikujejo po velikosti izbrane amplitude.

Poleg Baushingerjevega efekta model kinematičnega utrjevanja opisuje tudi pojav, ki ga poznamo pod imenom »padanje srednje vrednosti napetosti«, ki ga kontrolirajo materialni parametri m . Določimo jih s pomočjo numerične simulacije nesimetričnih enoosnih cikličnih testov, kjer preizkušane ciklično obremenjujemo s konstantno amplitudo deformacij okoli začetne vsiljene deformacije. V našem primeru je vpliv zanemarljivo mali.

Mehanika poškodb trdnega telesa

Poškodovanost D je določena kot padanje naklona histereznih zank z večanjem števila ciklov. Materialne parametre določimo v cikličnih testih z vodenimi deformacijami s konstantno amplitudo. Definicija poškodovanosti je podana z enačbo (14)

$$\tilde{\mathbf{E}} = (1-D) \mathbf{E}, \quad (14)$$

kjer je \mathbf{E} elastični modul in $\tilde{\mathbf{E}}$ trenutni naklon histereznih zank.

Nepovratni razvoj poškodb opisuje skalar D , ki je vgrajen v konstitutivne enačbe. Za nepoškodovan material je $D = 0$. Ko akumulirana efektivna plastična deformacija p doseže prag p_d , kjer se začnejo razvijati mikropoškodbe, začne vrednost D naraščati do mejne, kritične vrednosti D_c , ki pomeni nastanek makrorazpoke. Evolucija efektivne plastične

deformacije je podana z:

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \quad (15)$$

Makrorazpoka pelje v hitro porušitev konstrukcijskega elementa. Skalarja p_d in D_c sta poškodbeni materialni parametra, ki se določita iz eksperimenta. V našem primeru predpostavljamo, da se razvoj poškodb začne takoj, ko nastopijo plastične deformacije.

Meritev poškodovanosti preko padanja naklona histerezne zanke se je za konstrukcijsko jeklo izkazalo za težko merljivo. Iz naklona histerezne zanke v prvem ciklu in v ciklu pred poružitvijo se je dalo dobiti dovolj dobro oceno za kritično poškodovanost, medtem ko so bili vmesni izmerjeni nakloni histereznih zank nenatančni. Zato je bila evolucijska enačba, ki opisuje poškodovanost, nadgrajena tako, da je mogoč dober opis razvoja poškodb kljub omenjenim težavam z meritvami.

Ker imamo pri orodnih jeklih opravka z malimi deformacijami, običajno manjšimi od 1 %, pri jeklenih konstrukcijah pa z velikimi deformacijami, 5 % in več, evolucijske enačbe za

račun poškodovanosti, ki jo predlaga Pedersen, za konstrukcijska jekla ni bilo mogoče uporabiti. Prirastek poškodbe je v našem primeru tako še dodatno odvisen od največje ekvivalentne plastične deformacije $\varepsilon_{p,max}$ dosežene med cikličnim obremenjevanjem. Evolucija poškodovanosti je tako podana z enačbo:

$$\dot{D} = \left[\frac{Y}{S} \right] (1 + S_a \varepsilon_{p,max} + S_n \varepsilon_{p,max}^2) \dot{p} \alpha(p), \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{če je } p \geq p_d, \\ 0 & \text{če je } p < p_d \end{cases} \quad (16)$$

kjer je Y elastična energija

$$Y = \frac{\tilde{\sigma}_e^2 R_v}{2E(1-D)^2} \quad (17)$$

Efektivna napetost je označena s $\tilde{\sigma}_e$ in jo določimo z enačbo (3). Troosno napetostno polje

je zajeto v parametru

$$R_v = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left[\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}}{3\tilde{\sigma}_e} \right]^2 \quad (18)$$

S , S_a in S_n so materialni parametri, določeni s pomočjo numerične simulacije eksperimenta.

3 Formulacija končnega elementa

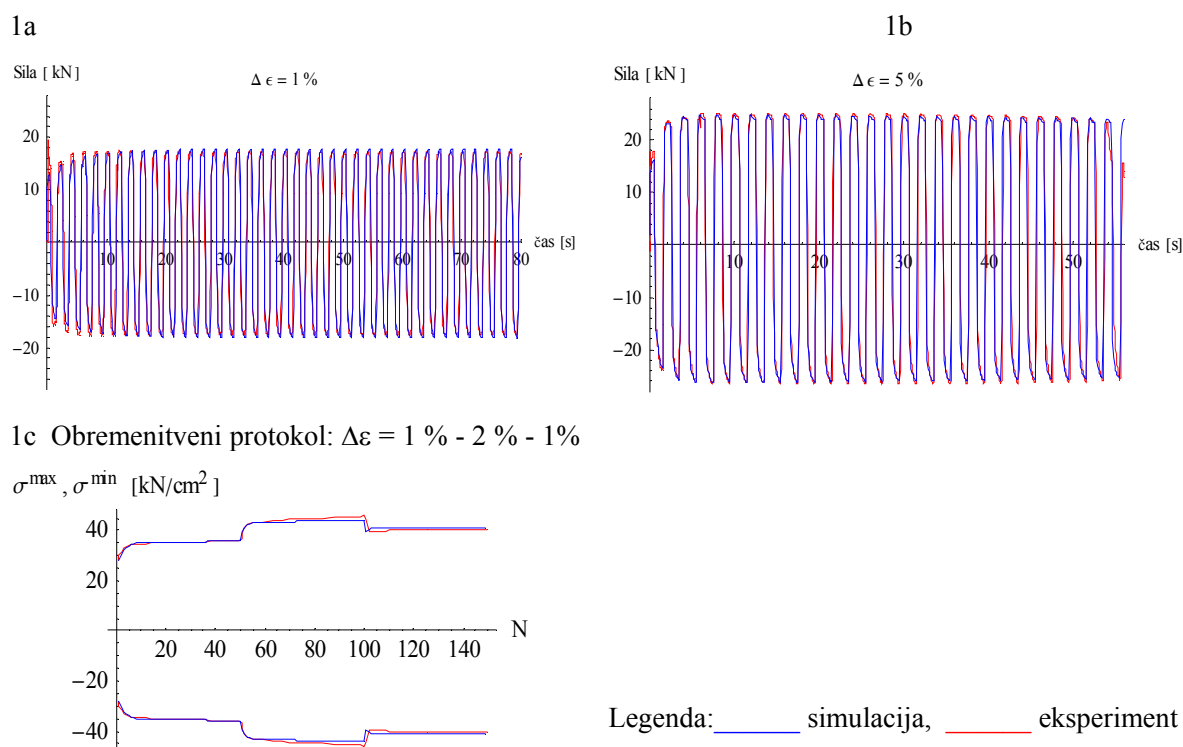
Za formulacijo mehanskega problema in izdelavo numerične kode je uporabljen pristop s uporabo simbolno-algebralnega sistema za avtomatično izdelavo končnih elementov (Korelc [2]). Končni element je osemvozliščni z dodatnimi notranjimi prostostnimi stopnjami. Izdelan je po metodi »Enhanced Strain« (Wriggers in Korelc [8]).

Za formulacijo elasto-plastičnega problema v območju velikih deformacij je bila uporabljena standardna »J₂-flow« teorija (Simo [7]). Teorija predpostavlja hiperelastični izotropni odziv ter multiplikativno dekompozicijo deformacijskega gradienta \mathbf{F} na elastični in plastični del, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$. Opis elasto-plastičnega problema zahteva poleg globalnih spremenljivk tudi spremenljivke stanja, ki so definirane v vsaki numerični integracijski točki. Spremenljivke stanja našega problema so naslednje: simetrični inverzni plastični desni Cauchy-jev deformacijski tenzor \mathbf{C}_{pl}^{-1} , plastični množitelj λ , trije simetrični tenzorji kinematičnega utrjevanja $\mathbf{X}^{(1)}$, $\mathbf{X}^{(2)}$, $\mathbf{X}^{(3)}$, spremenljivka izotropnega utrjevanja R , akumulirana plastična deformacija p , indeks poškodovanosti D . Časovne odvode spremenljivk stanja smo nadomestili s končnimi diferencami. Na ta način dobimo sistem 28 nelinearnih algebrskih enačb za vsako integracijsko točko. Pridružene nelinearne evolucijske enačbe smo rešili z dodatno Newton-Raphson-ovo iteracijsko zanko za vsako integracijsko točko. Končni element smo uporabili za numerično simulacijo eksperimenta, s pomočjo katere smo modificirali Pedersen-Tvegaard-ov materialni model in določili vrsto materialnih parametrov, za katere ne obstajajo analitični izrazi, ki bi jih lahko izvrednotili neposredno iz rezultatov eksperimenta.

3 Numerična simulacija eksperimentov

Do lokalizacije deformacij je v eksperimentu prišlo šele tik pred poružitvijo. Zato smo za simulacijo izbrali en pravokotni končni element, dolžine 10 mm, ki je enaka merilni razdalji na preizkušancu, z enako površino prereza kot preizkušanec.

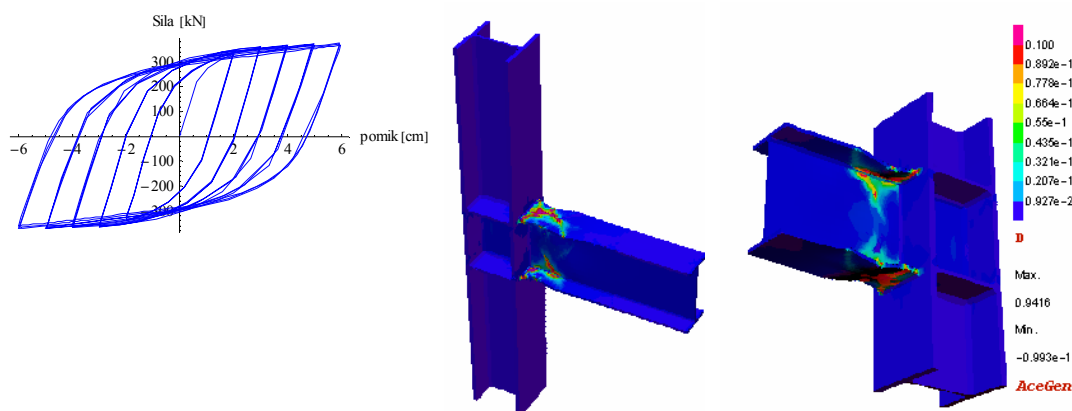
Na sliki 1a in 1b je prikazan odziv sila-čas, ki ga dobimo z numerično simulacijo cikličnih enoosnih testov pri različnih amplitudah vodenih deformacij $\Delta\epsilon$. Na sliki 1c pa je prikazan odziv (največje in najmanjše napetosti v posameznem ciklu N), ki ga dobimo z numerično simulacijo enoosnih cikličnih simetričnih testov s spreminjanjem amplitude vsakih 50 ciklov.



Slika 1: Primerjava med eksperimentom in numerično simulacijo

4 Numerična simulacija značilnih spojev v jeklenih konstrukcijah

Na sliki 2 so predstavljeni rezultati nizkocikličnih testov (Calado [1]). Obremenitev so vsiljeni pomiki na koncu nosilca, ki so bili povečani vsake tri cikle. Rezultat je histerezna zanka celotnega spoja sila-pomik in število ciklov pri poružitvi. Zaradi lokalnega izbočenja so se največje plastične deformacije akumulirale na robu pasnice nosilca, kjer je tudi največja poškodovanost zaradi dodatnega upogiba pločevine. Lokalno izbočenje pasnic nosilca je opazno na histereznih zankah celotnega spoja kot padanje sile.



Slika 2: Rezultati numerične analize nizekocikličnega utrujanja spoja nosilca in stebra

5 Zaključek

Predstavljena numerična simulacija obnašanja realnih jeklenih konstrukcij pomeni nov prispevek k obravnavi splošnega problema potresovarne gradnje. Na osnovi enosnih cikličnih preiskav konstrukcijskega jekla lahko že z relativno majhnim številom preizkušancev določimo vrsto materialnih parametrov, potrebnih za numerični model. Ob predpostavki, da skupina parametrov za opis kinematičnega in izotropnega utrjevanja ter razvoja poškodb velja splošno za vsa konstrukcijska jekla, lahko modeliramo s tridimenzionalnimi končnimi elementi konstrukcijske detajle poljubne geometrije.

Literatura

- [1] Calado, *Influence of column size*, Moment Resistant Connections of Steel Frames in Seismic Areas (Editor F.M. Mazzolani), E&FN SPON, p.p. 343 – 367, 2002.
- [2] Korelc, J. *Multi-language and Multi-environment Generation of Nonlinear Finite Element Codes*, Engineering with Computers. vol. 18, p.p. 312-327, 2002.
- [3] Lemaitre J. *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, 1990.
- [4] Pedersen O.P. *Numerical modeling of cyclic plasticity and fatigue and fatigue damage in cold-forging tools*, International Journal of Mechanical Sciences, vol. 42, p.p. 799-818, 2000.
- [5] Skuber P., Beg D., Korelc J. *Numerično modeliranje nizekocikličnega utrujanja jeklenih konstrukcij z mehaniko poškodb*, Zbornik 25. zborovanja GKS, 233-240, 2003.
- [6] Skuber P., Beg D. *Low-cycle Fatigue of Steel Frames under Seismic Loading*, Steel Structures, vol. 3, pp. 19-27, 2003.
- [7] Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational Inelasticity*, Springer Verlag, New York, 1998.
- [8] Wriggers P., Korelc J. *On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids*, Computational Mechanics, vol. 18, 413-428, 1996.



Dinamika diskretno definiranega sistema togih teles z enostranskimi kontakti

J. Slavič¹ in M. Boltežar²

Multibody dynamics of discrete bodies with unilateral contacts

Povzetek. V delu na kratko predstavljen Pfeiffer-Glockerjev pristop k modeliranju dinamike togih teles z enostranskimi kontakti je prilagojen za diskretno definirana telesa. Kontaktna situacija se preoblikuje na linearni komplementarni problem, ki omogoča reševanje več sočasnih kontaktnih situacij. Predstavljen je dvostopenjski postopek, ki omogoča hitro in natančno zaznavanje kontaktnih točk.

Abstract. The unilateral contacts formulation as introduced by Pfeiffer and Glocker is adapted to discretely defined body shapes. The multi-contact situation is solved as linear complementary problem. By using a two-step collision detection a fast and exact collision detection is achieved.

1 Uvod

V zadnjih desetletjih raziskovalci posvečajo veliko pozornosti matematični formulaciji dinamike sistema togih teles z enostranskimi kontakti. Kljub temu pa je bila potrebna matematično-fizikalna konsistentnost dosežena šele v zadnjem desetletju.

V tem delu se bomo osredotočili na enostranske kontakte zapisane v obliki linearnega komplementarnega problema (linear complementary problem - LCP), tak zapis je prvi uporabil Lötstedt [1]. Med pomembnejše raziskovalce tega področja štejemo še Murty [2], Baraff [3], Panagiotopoulos [4], Moreau [5], Pfeiffer in Glocker [6, 7]. . .

Podrobneje si bomo ogledali enega od bolj obetavnih pristopov k popisu dinamike togih teles z enostranskimi kontakti: to je Pfeiffer-Glockerjev pristop [6]. Njuno delo predstavlja matematično korekten in fizikalno konsistenten pristop k reševanju dinamike togih teles z več sočasnimi kontaktnimi situacijami. Pfeiffer in Glocker kontaktni problem (lepenje, drsenje, sprostitvev kontakta in trk s trenjem) preoblikujeta na pregleden in kompakten zapis v obliki

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, janko.slavic@fs.uni-lj.si

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, miha.boltezar@fs.uni-lj.si

linearnega komplementarnega problema. Raziskovalca sta v svojih raziskavah uvedla novo dekompozicijo trenja, ki v primeru odvisnih koordinat nima težav s singularnostjo in vodi v rešitev tudi v primeru predoločenih sistemov; kot prva sta trk s trenjem predstavila v obliki linearnega komplementarnega problema.

Namen dela je prilagoditev Pfeiffer-Glockerjevega pristopa za diskretno definirana telesa. V ta namen bomo v drugem poglavju na kratko predstavili njun pristop k simuliranju dinamike togih teles, ki temelji na komplementarnosti kontaktnih situacij. V tretjem poglavju bomo predstavili razširitve, ki so potrebne za reševanje diskretno definiranih teles. Zadnje, četrto poglavje podaja zaključke.

2 Dinamika sistema togih teles kot linearni komplementarni problem

Zaradi celovitosti si bomo v tem poglavju na kratko pogledali bistvene ideje Pfeiffer-Glockerjevega pristopa k reševanju sistemov togih teles z enostranskimi kontakti [6, 7, 8].

Gibalne enačbe sistema togih teles s f prostostnimi stopnjami (vključujoč dvostranske kontakte) so:

$$M(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^f, \quad (1)$$

kjer je M masna matrika, \mathbf{q} vektor posplošenih (generaliziranih) koordinat in \mathbf{h} vektor posplošenih aktivnih sil. Če imamo v nekem trenutku množico kontaktnih točk $i \in I_N$, potem se (1) spremeni:

$$M \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} = \sum_{i \in I_N} \mathbf{Q}_i^C \in \mathbb{R}^f, \quad (2)$$

kjer je \mathbf{Q}_i^C posplošena nekonservativna sila (kot posledica kontaktne sile v kontaktu i). Načeloma je potrebno posplošene koordinate prilagajati trenutnim prostostim, ki pa so odvisne od rešitve kontaktnega problema. Kot primer navedimo, da bi za rešitev sistema z n_N kontaktnimi točkami morali najti fizikalno konsistentno rešitev med 3^{n_N} možnimi rešitvami [6]³. Tako iskanje ustrezne rešitve postane hitro praktično nemogoče izvedljivo. Zraven tega pa je iz stališča numeričnega reševanja zelo neprimerno neprestano prilagajanje števila posplošenih koordinat.

Kakor bomo videli pozneje, se tem težavam z uporabo LCP elegantno izognemo, saj bo število posplošenih koordinat vedno enako številu prostosti sistema brez enostranskih kontaktov (2).

Poglejmo si najprej povezavo relativnih kontaktnih sil s posplošenimi kontaktnimi silami. S pomočjo Jacobijeve matrike lahko normalno kontaktno silo $\mathbf{F}_{A,N}$ v točki C_A na telo A (slika 1) zapišemo kot posplošeno silo:

$$\mathbf{Q}_{A,N}^c = \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{r}_{C_A}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{F}_{A,N} = \mathbf{J}_{C_A}^T \cdot {}_I \mathbf{n}_A \cdot \lambda_N \quad (3)$$

in če dodamo še silo na telo B:

$$\mathbf{Q}_N^c = (\mathbf{J}_{C_A}^T {}_I \mathbf{n}_A + \mathbf{J}_{C_B}^T {}_I \mathbf{n}_B) \lambda_N = \mathbf{w}_N \lambda_N. \quad (4)$$

³ Trčne situacije so v podanem primeru izključene; vsaka kontaktna točka je lahko v eni od naslednjih faz: lepenje, drsenje in sprostitve kontakta.

w_N vsebuje kinematične lastnosti kontakta C, λ_N je kontaktna amplituda sile in I označuje inercialen koordinatni sistem.

Analogno zapišemo še tangентno kontaktno silo (indeks T) in izraz (2) preoblikujemo v:

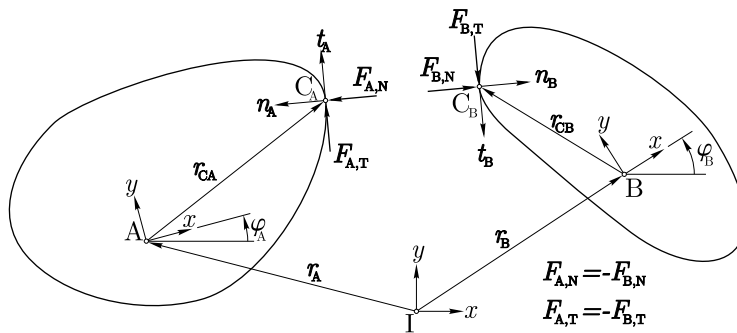
$$M \ddot{q} - h - \sum_{i \in I_N} (w_N \lambda_N + w_T \lambda_T)_i = \mathbf{0} \quad \in \mathbb{R}^f. \quad (5)$$

Z uporabo matričnega zapisa:

$$W_N = \{w_{Ni}\}, \quad W_T = \{w_{Ti}\}, \quad i \in I_N, \quad (6)$$

gibalne enačbe preoblikujemo v:

$$M \ddot{q} - h - (W_N \quad W_T) \begin{pmatrix} \lambda_N \\ \lambda_T \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \in \mathbb{R}^f. \quad (7)$$



Slika 1: Kontaktnе sile.

Kontaktne situacije rešimo v dveh korakih: najprej na nivoju impulzov rešimo nezvezni problem trka s trenjem, nato pa na nivoju sil še lepenje, drsenje ali sprostitvev kontakta. Če ni trčnih situacij, prvi korak odpade.

Preden v nadaljevanju podrobneje spoznamo oba koraka, si pogledjmo množice kontaktnih točk:

$$\begin{aligned} I_G &= \{1, 2, \dots, n_G\} \\ I_S &= \{i \in I_G; g_N = 0\} \quad n_S \text{ elementov,} \\ I_N &= \{i \in I_S; \dot{g}_N = 0\} \quad n_N \text{ elementov,} \\ I_H &= \{i \in I_N; \dot{g}_T = 0\} \quad n_H \text{ elementov.} \end{aligned} \quad (8)$$

Množica I_S vključuje v nekem koraku aktivne kontakte, I_N samo tiste z nično normalno relativno hitrostjo in I_H potencialno lepenе kontakte. Kontaktnе množice se lahko v vsakem časovnem koraku spremenijo.

2.1 Lepenje, drsenje ali sprostitvev kontakta

Lepenje, drsenje (in prehod med njima) in sprostitvev kontakta rešujemo na množici kontaktnih točk. Gibalne enačbe (7) in relativni kontaktni pospeški $\ddot{\mathbf{g}}$ so [6, 7, 9]:

$$M \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h} - \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N + \mathbf{W}_G \bar{\boldsymbol{\mu}}_G & \mathbf{W}_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_H \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \in \mathbb{R}^f, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}_N \\ \ddot{\mathbf{g}}_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_N^T \\ \mathbf{W}_H^T \end{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{w}}_N \\ \bar{\mathbf{w}}_H \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{n_N+n_H}. \quad (10)$$

Indeks N označuje normalno smer in H tangentno smer potencialno lepenih kontaktov iz množice I_H . Indeks G označuje drseče kontakte (tangenta sila je znana iz Coulombovega zakona) iz množice $I_N \setminus I_H$. $\bar{\boldsymbol{\mu}}_G$ je diagonalna matrika koeficientov trenja.

Za vsak aktiven kontakt $i \in I_N$ velja, da je relativna normalna razdalja $g_{Ni} = 0$ in podobno za relativno kontaktno hitrost $\dot{g}_{Ni} = 0$. Zaradi ne-predirljivosti teles velja $g_{Ni} \geq 0$; sledi, da lahko za vsak kontakt v normalni smeri zapišemo komplementarni pogoj:

$$\ddot{g}_{Ni} = 0 \quad \wedge \quad \lambda_{Ni} \geq 0 \quad \text{kontakt se ohranja,} \quad (11)$$

$$\ddot{g}_{Ni} > 0 \quad \wedge \quad \lambda_{Ni} = 0 \quad \text{sprostitvev kontakta,} \quad (12)$$

in tudi $i \in I_N$:

$$\ddot{g}_{Ni} \lambda_{Ni} = 0. \quad (13)$$

Taka komplementarnost je prikazana na sliki 2. Nekaj podobnega lahko ugotovimo za vsak kontakt v tangentni smeri (slika 3a), vendar moramo še prej Coulombov zakon razdeliti na dve veji: ena za pozitivno in ena za negativno smer. Taka dekompozicija in komplementarni prikaz kontaktnega zakona v tangentni smeri je prikazana na sliki 3b. V izogib težavam s singularnostjo smo dejansko uporabili bolj zapleteno dekompozicijo kontakta v tangentni smeri, ki je tukaj zaradi pomanjkanja prostora ne bomo obravnavali [6]. Z zamudno matematično izpeljavo komplementarni problem za vse kontaktne točke v normalni in tangentni smeri hkrati zapišemo v obliki [6]:

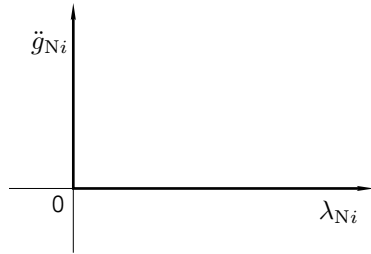
$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (14)$$

$$\mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0, \quad (15)$$

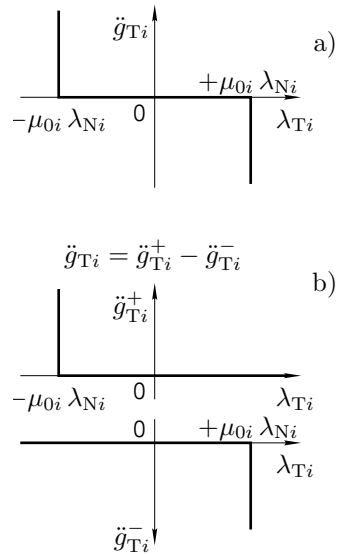
kjer (14) in (15) predstavljata linearni komplementarni problem (LCP) razsežnosti $n_N + 4n_H$ in kot neznanki nastopata vektorja $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}\} \in \mathbb{R}^{n_N+4n_H}$. V komplementarnih pogojih (15) je potrebno zapis $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$ razumeti na nivoju posameznih elementov : $y_i x_i = 0$ za vse i . Vektor \mathbf{y} med drugim vsebuje neznane kontaktne pospeške $\ddot{\mathbf{g}}$ in vektor \mathbf{x} neznane kontaktne sile $\boldsymbol{\lambda}$. Matriki \mathbf{A} in \mathbf{b} sta znani in definirani z masno matriko, vektorjem aktivnih sil, koeficienti trenja in kinematiko kontaktnih točk/obliko teles.

2.2 Trk s trenjem

V trku sodelujejo kontakti iz množice I_S in ga rešujemo na nivoju impulzov, zato moramo gibalno enačbo (7) najprej integrirati [6], nato pa impulz kompresije s *Poissonovim zakonom*



Slika 2: Komplementarnost v normalni smeri.



Slika 3: Komplementarnost v tangentni smeri.

povežemo z impulzom ekspanzije. Pri tem uporabimo naslednje poenostavitve: čas trka je zanemarljivo majhen, lega teles in vse ne-impulzivne sile in kontakti ostanejo med trkom konstantne.

Podobno kakor smo pri lepenju, drsenju in sprostitvi kontakta zapisali komplementarne pogoje, tako lahko tudi za fazo kompresije in ekspanzije zapišemo komplementarne pogoje. Pri čemer pa pri trku v komplementarnem paru namesto sil in pospeškov nastopajo hitrosti in impulzi. Faza kompresije se konča, ko so relativne kontaktne hitrosti v normalni smeri enake nič; takrat se začne faza ekspanzije [6]. Podrobneje tukaj ne bomo šli v zapis LCP. Je pa potrebno izpostaviti, da moramo pri več sočasnih trkih paziti na pogoj ne-predirljivosti. V fazi ekspanzije lahko namreč lokalna ekspanzija v neki točki povzroči prediranje v neki drugi točki; to preprečimo tako, da v komplementarnem pogoju omogočimo impulz ekspanzije večji kakor ga dovoljuje Poissonov zakon, vendar je v tem primeru relativna kontaktna hitrost ob koncu ekspanzije enaka nič. Glocker [7] je pokazal, da je zakon trka v takem primeru globalno dissipativen.

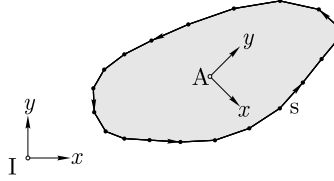
Omeniti velja, da je Pfeiffer-Glockerjeva formulacija ena redkih, ki omogoča simuliranje tudi popolnega reverzibilnega trka v tangentni smeri⁴.

3 Uvod v diskretno definirana telesa

Dokler ne nastopi kontaktna situacija, nam zgoraj predstavljena formulacija omogoča popolnoma analitično reševanje gibalnih enačb (7); ko pa nastopi kontaktna situacija, je potrebno rešiti LCP kontaktni problem. Pri postavitvi LCP kontaktnega problema pa moramo vedeti ki-

⁴ Popolno reverzibilnost v tangentni smeri ima npr. super-elastična žoga; medtem, ko je npr. trk ping-pong žoge v tangentni smeri ne-reverzibilen.

nematične lastnosti kontaktnih točk, ki so popisane z matrikama \mathbf{W}_N in \mathbf{W}_T . Tukaj si bomo pogledali, kako pridemo do kinematičnih lastnosti kontaktnih točk ravninsko definiranih teles (slika 4).



Slika 4: Telo, definirano kot mnogokotnik.

3.1 Kinematične lastnosti kontaktnih točk

Kinematične lastnosti posamezne kontaktne točke opišemo z vektorjema \mathbf{w}_N in \mathbf{w}_T (6). Zunanji rob telesa je definiran z množico točk v protiurni smeri relativno glede na težišče posameznega telesa. Relativni kontaktni pospešek točke C telesa A (slika 1) želimo zapisati s pomočjo Jacobijeve matrike \mathbf{J}_{C_A} in vektorjem $\bar{\mathbf{j}}_{C_A}$, ki popiše od pospeškov neodvisne vrednosti:

$${}^I\ddot{\mathbf{r}}_{C_A} = \mathbf{J}_{C_A} \ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{j}}_{C_A}. \quad (16)$$

Z uporabo koordinat težišča in relativnimi koordinatami zapišemo:

$${}^I\ddot{\mathbf{r}}_{C_A} = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_A + \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{A}_{IA} \mathbf{r}_{CA}). \quad (17)$$

V izrazu (17) je \mathbf{A}_{IA} transformacijska matrika iz relativnega koordinatnega sistema telesa A v inercialen koordinatni sistem I. Jacobijeva matrika za težišče je znana, $\mathbf{J}_{C_A} = \frac{\partial {}^I\ddot{\mathbf{r}}_{C_A}}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}$, k čemur moramo prišteti še vpliv rotacije okoli težišča φ_A :

$$\mathbf{J}_{RA} = \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & -y_{CA} \cos \varphi_A - x_{CA} \sin \varphi_A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & +x_{CA} \cos \varphi_A - y_{CA} \sin \varphi_A & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & j-1 & & j & & j+1 \end{array} \right), \quad (18)$$

kjer je j lega φ_A v vektorju posplošenih koordinat \mathbf{q} in ${}^A\mathbf{r}_{CA} = (x_{CA}, y_{CA})^T$.

Sledi torej, da je:

$$\mathbf{J}_{C_A} = \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_{RA} \quad \bar{\mathbf{j}}_{C_A} = \bar{\mathbf{j}}_A + \bar{\mathbf{j}}_{RA} \quad (19)$$

in:

$$\bar{\mathbf{j}}_{RA} = \left(\begin{array}{c} (-x \cos \varphi_A + y \sin \varphi_A) \dot{\varphi}_A^2 \\ -(y \cos \varphi_A + x \sin \varphi_A) \dot{\varphi}_A^2 \end{array} \right). \quad (20)$$

Na podoben način definiramo kinematiko kontakta kontaktne točke C telesa B (slika 1) in končno izpeljemo:

$$\mathbf{w}_{N,A} = \mathbf{J}_{C_A}^T \cdot {}^I\mathbf{n}_A + \mathbf{J}_{C_B}^T \cdot {}^I\mathbf{n}_B \quad \mathbf{w}_{T,A} = \mathbf{J}_{C_A}^T \cdot {}^I\mathbf{t}_A + \mathbf{J}_{C_B}^T \cdot {}^I\mathbf{t}_B. \quad (21)$$

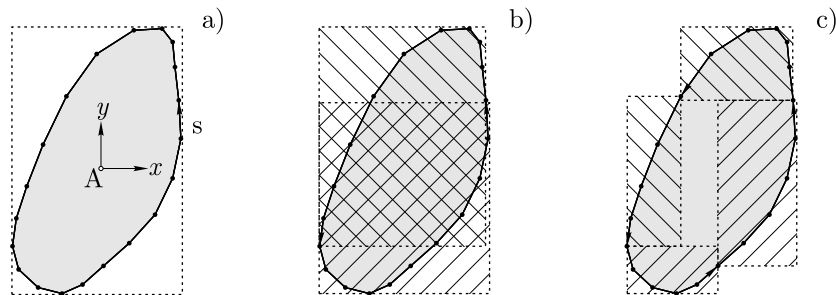
$$\bar{\mathbf{w}}_{N,A} = \bar{\mathbf{j}}_{C_A}^T \cdot {}^I\mathbf{n}_A + \bar{\mathbf{j}}_{C_B}^T \cdot {}^I\mathbf{n}_B \quad \bar{\mathbf{w}}_{T,A} = \bar{\mathbf{j}}_{C_A}^T \cdot {}^I\mathbf{t}_A + \bar{\mathbf{j}}_{C_B}^T \cdot {}^I\mathbf{t}_B. \quad (22)$$

Skalarja \bar{w}_N in \bar{w}_T sta podrobneje obrazložena v [6].

3.2 Zaznavanje kontaktov

Ker je potrebno natančno zaznavanje kontaktnih točk, smo uporabili zaznavanje kontaktnih točk v dveh stopnjah: najprej grobo zaznavanje z uporabo dreves robnih kvadratov (ang. *bounding box*), nato pa še natančno z uporabo vektorske analize. S tem smo združili hitrost in natančnost. Pred začetkom simulacije tako za vsako telo kreiramo t.i. osno orientirano drevo robnih kvadratov - (ang. AABB tree) [10, 11]: Osnovni kvadrat tako zaobjema vse točke, njegova potomca vsak pol; vsak potomec ima spet dva potomca, ki vsak dobita pol točk. S kreiranjem potomcev nadaljujemo dokler ne pridemo do nekega minimalnega števila točk v kvadratu (slika 5).

Ko preverjamo ali se dve telesi prekrivata, najprej preverimo osnovni kvadrat; če obstaja prekrivanje, potem nadaljujemo s testiranjem potomcev. Če najdemo kvadrata brez potomcev, ki se prekrivata, potem obstajajo možnosti za kontaktno situacijo, zato izvedemo natančno zaznavanje kontaktov.



Slika 5: Hierarhija AABB dreves: a) prvi nivo (starši), b) drugi nivo (otroci), c) tretji nivo (otroci otrok).

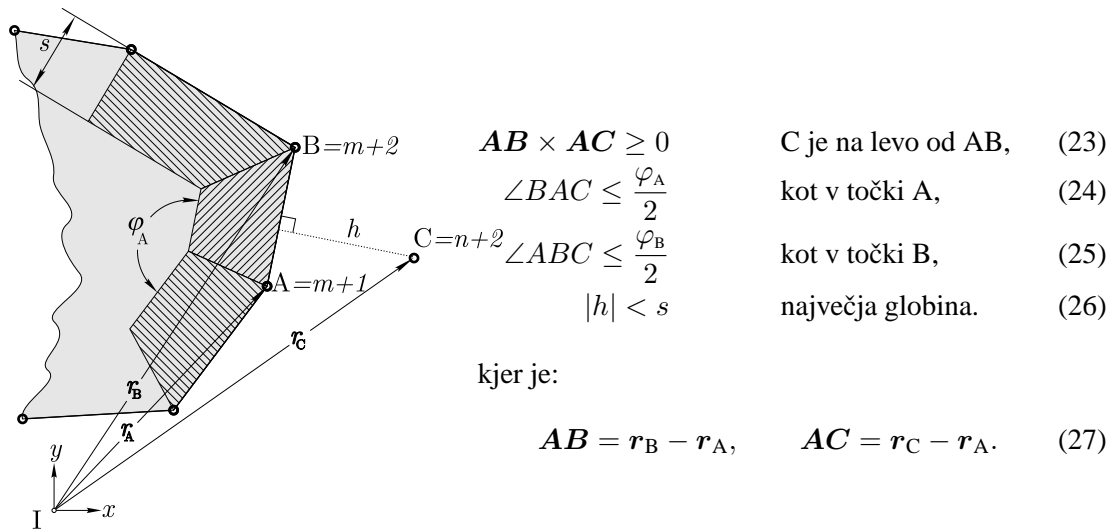
Pri natančnem zaznavanju kontaktov je potrebno preveriti, če katera od točk telesa B predira telo A in tudi obratno.

Primer natančnega zaznavanja je prikazan na sliki 6. Točka C je kandidat za prediranje daljice AB, če izpolnjuje pogoje (23)-(26). Na sliki 6 je s s označena debelina "kože" telesa A, ki bi naj bila nekajkrat večja (10-100 krat), kakor je največja dovoljena globina prediranja. S takim zapisom lahko nadzorujemo primernost časovnega koraka; če je namreč globina prediranja večja od največje dovoljene globine prediranja, je to znak, da moramo zmanjšati časovni korak.

4 Zaključki

Predstavljeni postopki so v prvi vrsti namenjeni za simuliranje analitično zapisanih problemov in jasno izraženih kontaktnih situacij; za take primere lahko kinematične lastnosti kontaktnih točk določimo analitično in v naprej. V primeru diskretno definiranih teles je to težje, sploh če so telesa nepravilnih oblik.

Pri diskretno definiranih telesih predstavlja natančno zaznavanje kontaktnih točk enega od ozkih grl simulacije; predstavljeni pristop z uporabo dvostopenjskega zaznavanja kontaktov se je izkazal hkrati hiter in natančen.



Slika 6: Potencialno predirano telo (potemnjeno) in potencialno predirajoča točka C. Šrafrirano je označena “koža” prediranega telesa.

Literatura

- [1] P. Lötstedt. Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems. *Z. Angewandte Math. Mech.*, 61:605–615, 1981.
- [2] K.G. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Heldermann Verlag, Berlin, 1988. http://ioe.engin.umich.edu/people/fac/books/murty/linear_complementarity_web-book/.
- [3] D. Baraff. *Dynamic Simulations of Non-penetrating Rigid Bodies*. PhD thesis, Cornell University, NY, 1992.
- [4] P.D. Panagiotopoulos. *Hemivariational inequalities: applications in mechanics and engineering*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1993.
- [5] J.J. Moreau. Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certain problèmes d'évolution. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 282:837–840, 1976. Sér. A.
- [6] F. Pfeiffer, C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. John Wiley & Sons, Inc, 1996.
- [7] C. Glocker. *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. PhD thesis, Technische Universität München, 1995.
- [8] F. Pfeiffer. The idea of complementarity in multibody dynamics. *Archive of Applied Mechanics*, 72:807–816, 2003.
- [9] R.I. Leine, C. Glocker and D.H. Van Campen. Nonlinear Dynamics and Modelling of Some Wooden Toys with Impact and Friction. *Journal of Vibration and Control*, 9:25–78, 2003.
- [10] J.T. Klosowski. *Efficient Collision Detection for Interactive 3D Graphics and Virtual Environments*. PhD thesis, Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, 1998.
- [11] G. Zachmann. *Virtual Reality in Assembly Simulation—Collision Detection, Simulation Algorithms, and Interaction Techniques*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2000.



Eksperimentalna in numerična analiza separacije toka na deformabilnem krilu

V. Šajn¹ in F. Kosel²

Experimental and numerical analysis of fluid flow separation on deformable wing

Povzetek. V prispevku je eksperimentalno in numerično analizirana separacija toka na deformabilnem krilu za vrednost Reynoldsovega števila 85000. Eksperiment je izveden v nizkoturbulentnem vetrovniku. Profili povprečnih hitrosti in turbulentnih intenzivnosti so izmerjeni z anemometrom z vročo žičko konstantne temperature. Na zgornjem delu deformabilnega krila je zvišana turbulentna intenzivnost z žičnim turbulatorjem. Tok fluida je simuliran s časovno povprečenimi Navier–Stokesovimi enačbami (RANS) in k – ϵ turbulentnim modelom. Meritve so izvedene za relativno krajšanje $\epsilon = 0.1$ in območje vpadnih kotov $\alpha = 6.0^\circ - 15.0^\circ$. Izmerjeni in izračunani profili hitrosti se dobro ujemajo.

Abstract. The paper presents experimental and numerical study of the fluid flow separation on deformable wing at Reynolds number of 85000. Experiment was carried out in low-turbulence wind tunnel. Filed of mean velocity and turbulent intensity was measured with constant temperature hot-wire anemometer. On the upper side of the deformable wing the turbulence intensity was increased with trip-wire turbulator. Fluid flow is simulated with Reynolds averaged Navier–Stokes (RANS) equations and k – ϵ model of turbulence. Measurements were made for relative shortening $\epsilon = 0.1$ and angles off attack $\alpha = 6.0^\circ - 15.0^\circ$. The measured and calculated velocities are in reasonable agreement.

1 Uvod

V Kuhljevih dnevih 2003 je predstavljen prispevek "Numerična in eksperimentalna analiza toka okrog deformabilnega krila"[5]. Fizikalen pojav je obravnavan kot interakcija med tokom fluida in deformabilnega telesa z majhnimi deformacijami in velikimi premiki [6]. Oblika deformabilnega krila ob obtokanju fluida ni definirana, zato je za opis geometrijskih parametrov

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, viktor.sajn@fs.uni-lj.si

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, franc.kosel@fs.uni-lj.si

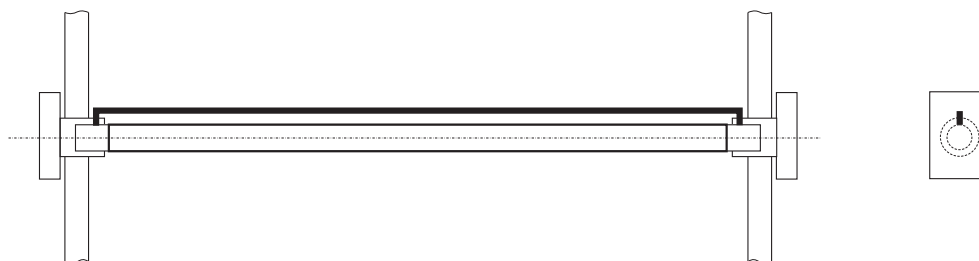
uporabljen modificiran Jean-Marc in Vanden-Broeck [4] popis. Pri numerični simulaciji toka fluida okrog deformabilnega telesa je uporabljen $k-\epsilon$ model turbulence [7], zasnovan na predpostavki o homogenosti turbulence. V primeru separacije toka na ukrivljenih ploskvah turbulenca ni homogena in zato model nepopolno popisuje tok. Največja razlika je v primeru separacije laminarne mejne plasti.

Največji izračunan količnik vzgona deformabilnega krila je $C_y = 2.0$ pri relativnem krajšanju $\epsilon = 0.1$. Čeprav so rezultati izračunov potrjeni z meritvami, bistveno odstopajo od meritev, ki sta jih opravila Cyr in Newman [1, 3]. Eden od vzrokov za razliko v količniku vzgona je v asimetrični pritrditvi membrane na nosilec. S tem smo zmanjšali negativni gradient hitrosti na zgornjem robu krila in s tem odlepljanja mejne plasti. Posledica je tudi bolj intenzivna separacija na spodnjem delu krila, vendar brez značilne izgube vzgona. Naslednji vzrok za večji količnik vzgona je uporaba žičnega turbulatorja nad sprednjim robom deformabilnega krila. Vrtinčna sled za turbulatorjem zviša turbulentno intenzivnost toka v bližini zgornjega toka krila in odloži separacijo. Posledica tega so višji tlačni količniki ter večji količniki vzgona.

V tem prispevku smo za poglobljeno analizo možnih vzrokov večjega vzgonskega količnika izvedli meritve profilov hitrosti na deformabilnem krilu. Rezultate meritev smo primerjali z rezultati izračunov in ugotovili dobro ujemanje. Iz predstavljenih rezultatov predpostavljamo, da je vzrok za ujemanje v povečani stopnji turbulence, doseženi predvsem s turbulatorjem.

2 Model deformabilnega krila s turbulatorjem

Deformabilno krilo je bilo izvedeno v obliki membrane z dvema palicama na sprednjem in zadnjem robu. Z leve in desne strani sta bili plošči, na katerih sta bili vodili za nastavitvev parametrov delovanja. Plošči sta istočasno služili za stransko zapiranje. Tako smo dobili kanaliziran tok znotraj vetrovnika.



Slika 1 : Izvedba turbulatorja na zgornji strani krila

Izmerjena turbulentna intenzivnost v vetrovniku I_T je manjša od 10^{-3} . Tako nizka stopnja turbulentne intenzivnosti je potrebna za vizualizacijo toka. Čeprav je glede na parametre obtekanja Reynoldsovo število 85000, je vhodna stopnja turbulence nizka in se na krilu razvije laminarna mejna plast. Ob povečanih vpadnih kotih pa pride do izrazite separacije laminarne mejne plasti [2]. Za povečanje količnika vzgona krila smo 5mm nad krilom vgradili turbulator v obliki žičke premera 1mm, s katerim smo izvedli prisilno spremembo laminarne mejne plasti v turbulentno. Turbulator ne povzroča lokalne separacije toka, kar je značilno za turbulatorje postavljene na površini krila. Turbulator ne povzroča tranzicije mejne plasti takoj na krilu pod sabo, temveč

okvirno 10mm za turbulatorjem. Na sliki 1 je predstavljena izvedba turbulatorja. Na spodnji strani nismo postavili turbulatorja, saj zaradi sprednjega nosilca vedno pride do lokalne separacije, ki pri večjih vpadnih kotih ne vpliva na rezultat.

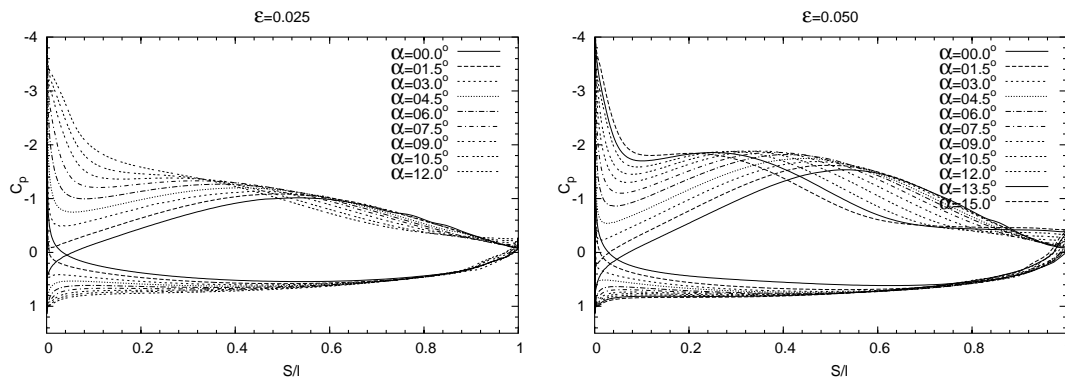
3 Rezultati izračunov in meritev

3.1 Tlačni količnik

Tlak na površini krila je interakcijska veličina, s katero tok fluida deluje na deformabilno krilo. Njegova porazdelitev odločilno vpliva na oblikovanje krivulje profila deformabilnega krila. Tlačni količnik C_p glede na statični tlak p izračunamo po enačbi

$$C_p = \frac{2p}{\rho v_0^2}, \quad (1)$$

kjer je v_0 referenčna hitrost fluida stran od krila in ρ gostota fluida.



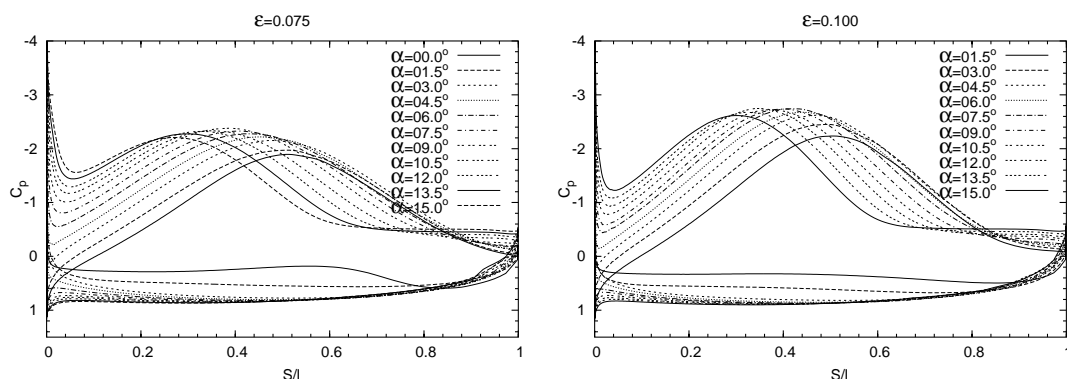
Slika 2 : Porazdelitev tlaka po globini deformabilnega krila za $\varepsilon = 0.025$ in 0.050

Na slikah 2, 3 in 4 so podane porazdelitve izračunanega C_p na zgornjem in spodnjem delu površine krila ter sprednji in zadnji zaokrožitvi. Zgornje krivulje predstavljajo tlak na zgornjem delu deformabilnega krila.

Sunkoviti prirastki ali padci tlaka na prvih 10% dolžine membrane so posledica obtekanja okrog sprednje zaokrožitve. To je posledica neujemanja kotov sprednjega roba deformabilnega krila in vektorja hitrosti zraka v neposredni bližini. Zato nastopijo močni tlačni prirastki, ki pripeljejo do separacije toka na sprednjem robu.

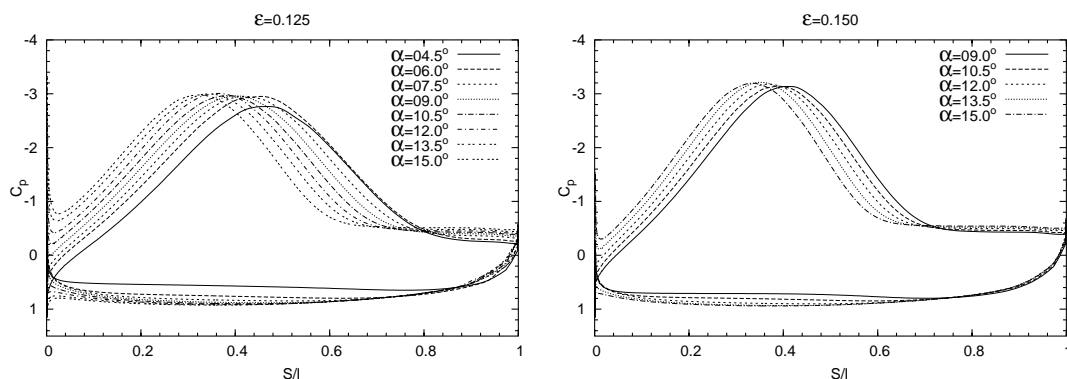
Največji tlačni količnik $C_p = 3.313$ pri $\varepsilon = 0.150$. Tlak ima svoj negativni maksimum v območju 0.36-0.42 glede na dolžino membrane. Nato sledi prirastek, ki se ne konča na zadnjem robu, temveč se prej zaključi. Prekinitev prirastka tlaka je posledica separacije toka, ki nastopi v območju 0.58 – 0.64 dolžine membrane. Podobne rezultate je dobil pri svojih eksperimentih tudi S. Cyr [1] vendar z največjim tlačnim količnikom $C_p = 2.64$.

Na spodnjem delu grafa so krivulje, ki popisujejo porazdelitev tlaka po spodnjem delu profila deformabilnega krila. Pri vpadnem kotu $\alpha = 9^\circ$ ima krivulja v sprednjem delu drugačno



Slika 3 : Porazdelitev tlaka po globini deformabilnega krila za $\epsilon = 0.075$ in 0.100

izbočenost kot pa ostale. To je posledica separacije mejne plasti na spodnji strani profila. Če si ogledamo sprednji del zgornje krivulje vidimo, da se med kotoma $\alpha = 10^\circ - 12.5^\circ$ spremeni zaključek. V tem območju je tudi optimalen kot, pri katerem je sprednji rob deformabilnega krila vzporeden s kotom zraka v njegovi bližini.



Slika 4 : Porazdelitev tlaka po globini deformabilnega krila za $\epsilon = 0.125$ in 0.150

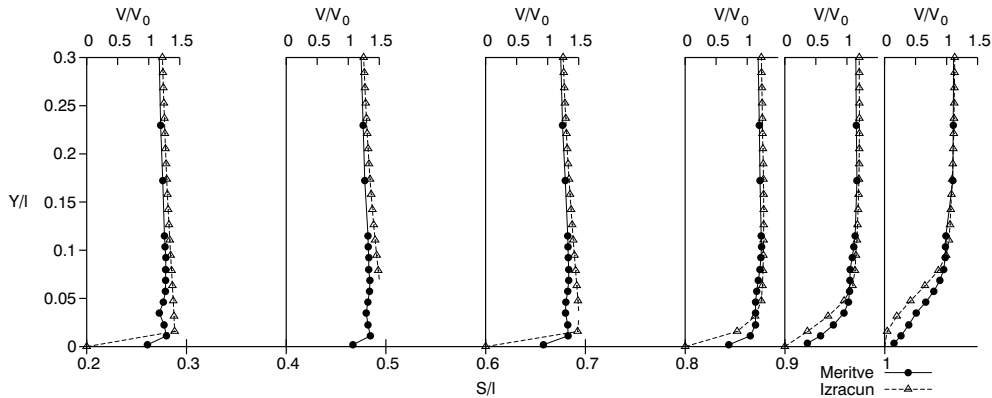
Največji količnik vzgona je sorazmeren velikosti ploskve, ki jo omejujeta spodnja in zgornja krivulja. Za dosego čim večjega količnika vzgona je potrebno zagotoviti čim večjo velikost ploskve, kar dobimo z minimizacijo vseh treh omenjenih separacij.

3.2 Profili povprečnih hitrosti in turbulentnih intenzivnosti

Meritev z anemometrom z vročo žičko konstantne temperature omogoča ugotavljanje profilov hitrosti prečno na tok. Na osnovi profila hitrosti lahko ugotovimo tip mejne plasti, njen razvoj ter področje separacije toka.

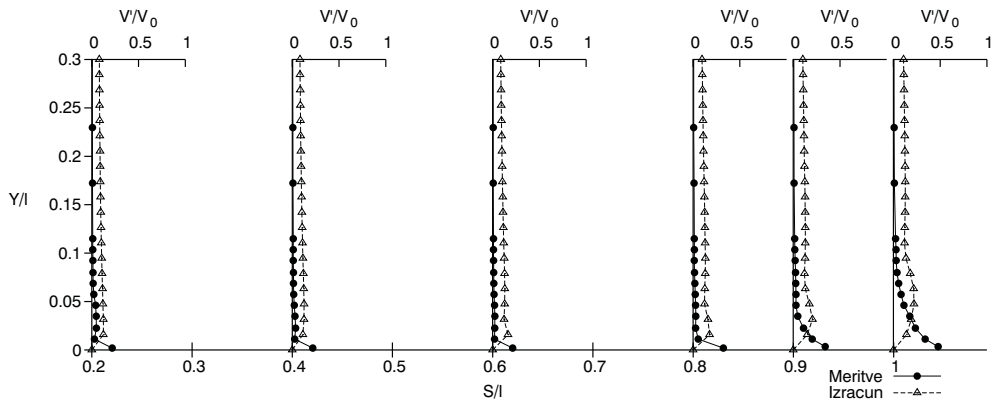
Meritve smo izvedli na zgornji strani deformabilnega krila za količnik pregretja žičke anemometra $\vartheta = 1.8$. Umerjanje smo izpeljali pred in po meritvah. Frekvenčni pas anemometra smo optimirali s Freymuthovim testom odziva na stopničasto motnjo. Pri tem smo dosegli frekvenčni

pas večji od 35kHz , kar je zadoščalo za meritev. Pri ničelni hitrosti je izmerjeno razmerje med signalom in šumom instrumenta $1.6 \cdot 10^{-4}$. Relativna razlika med napetostjo ničlišča pred in po meritvi je znašala $2 \cdot 10^{-3}$. Termalni anemometer je umerjen s tlačnim merilnikom in Pittot-Prandtlovo cevjo. Uporabljena podajalna naprava ima izmerjeno odstopanje 0.2mm .



Slika 5 : Hitrostni profili za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 6.0^\circ$

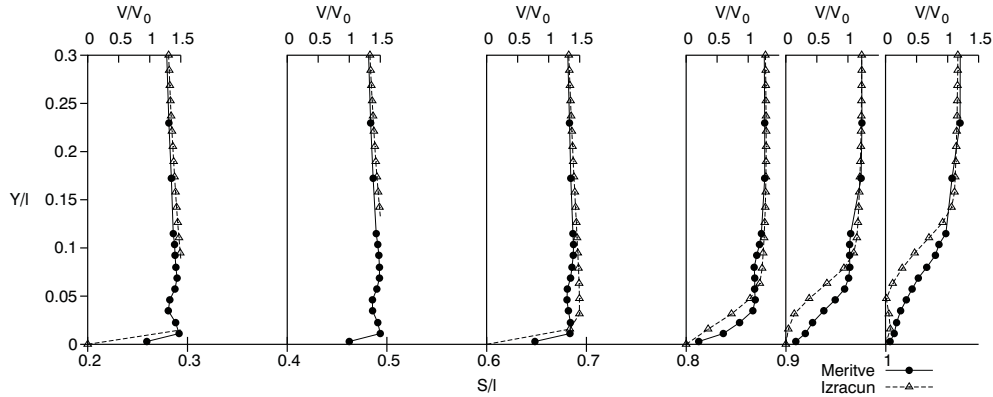
Na sliki 5 so predstavljeni izmerjeni in izračunani profili hitrosti vzdolž profila za relativno krajšanje $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 6.0^\circ$. Kot referenčno dolžino smo privzeli horizontalno projekcijo deformabilnega krila. Vsak graf predstavlja vertikalni prezek meritev. Velikost izmerjene hitrosti je podana relativno glede na referenčno hitrost v_0 izmerjeno stran od deformabilnega krila.



Slika 6 : Profili turbulentne intenzivnosti za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 6.0^\circ$

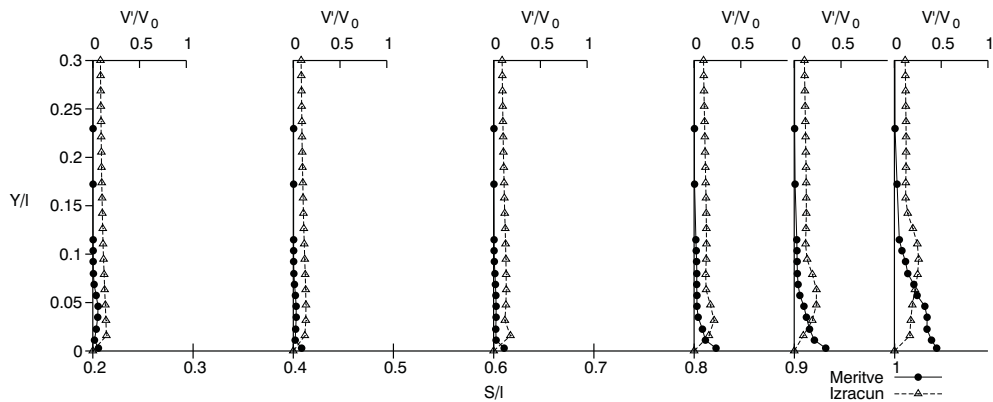
Pri izmerjenem profilu hitrosti pri 20% globine krila je območje zmanjšanja hitrosti pri vrednosti $Y/l = 0.03$. To je posledica sledi, ki se vleče za turbulatorjem. Iz diagrama 6 je razvidno, da je v tem območju povečana turbulentna intenzivnost. Glede na debelino in turbulentno intenzivnost vidimo, da je že prišlo do razvoja turbulentne mejne plasti. Po globini navzdol se mejna plast debeli. Profil hitrosti se značilno spremeni med 80% in 100% globine krila. Mejna plast se nenadno odebeli ter nastopi separacija toka. Na diagramu turbulentne intenzivnosti vidimo, da

je pri 100% globini krila prišlo do večanja turbulentne intenzivnosti tudi z višino, kar potrjuje vdor fluida, ki je tekel ob robu krila v zgornje plasti. To potrjuje separacijo toka.



Slika 7 : Hitrostni profili za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 10.5^\circ$

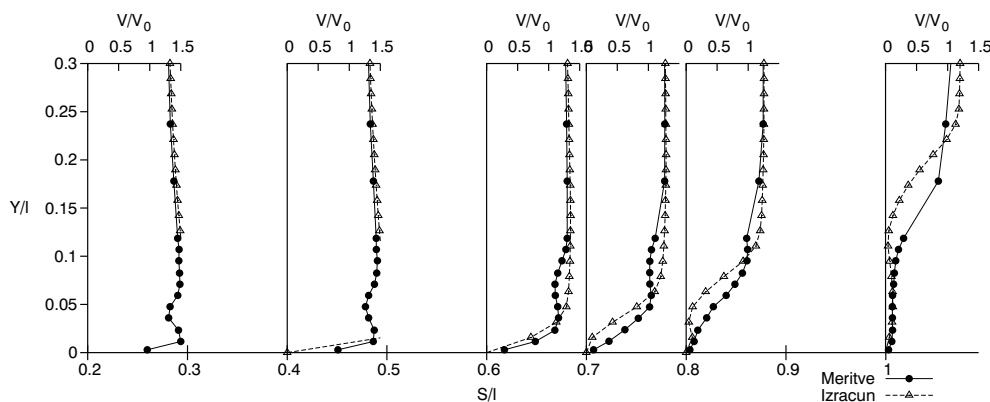
Ujemanje med izmerjenimi in izračunanimi profili je dobro. Le na koncu deformabilnega krila je vidno, da pri izračunu prej pride do bolj intenzivne debelitve mejne plasti kot pri eksperimentu. Pri profilih turbulentne intenzivnosti vidimo značilno odstopanje med izmerjenimi in izračunanimi velikostmi. Pri numeričnem izračunu je kot vstopni pogoj privzeta 5% turbulenca, dočim so meritve izvedene v nizkoturbulentnem vetrovniku, pri katerem smo vnesli turbulenco le v bližini zgornjega dela krila. Geometrijski opis problema in robni pogoji so enaki kot v že predstavljenem prispevku v Kuhljevih dnevih 2003 [5].



Slika 8 : Profili turbulentne intenzivnosti za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 10.5^\circ$

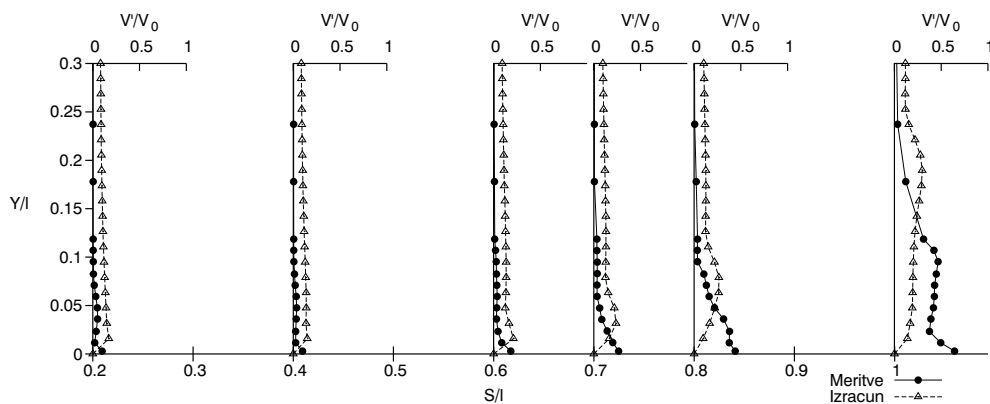
Na sliki 7 je predstavljen graf izmerjenih in izračunanih prečnih prereзов hitrosti za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 10.5^\circ$. Separacija mejne plasti nastopi pred 80%. Enako je razvidno iz grafa turbulentnih intenzivnosti 8. V primeru simulacij nastopi separacija med 70% in 80%. Na izračunanih profilih je razvidno, da separacija nastopi prej kot smo izmerili na modelu. Na grafu turbulentne intenzivnosti vidimo, da je pri 100% globini krila v bližini stene manjši prirastek intenzivnosti. Lahko sklepamo na razvoj vrtinca oz. pojav povratnega toka.

Na sliki 9 je predstavljen graf izmerjenih in izračunanih prečnih profilov hitrosti za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 15.0^\circ$. Separacija toka se pojavi okrog 60%. Vidimo, da se vpliv padca hitrosti za turbulatorjem bolj širi v globino in je opazen do 60%. Pri globini deformabilnega krila 100% je območje povratnega toka višine 10% globine profila, pri katerem je hitrost nizka.



Slika 9 : Hitrostni profili za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 15.0^\circ$

Tudi v tem primeru do separacije toka pride prej pri meritvah kot pri izračunu. Če primerjamo graf turbulentnih intenzivnosti na sliki 10 vidimo, da obstaja območje kjer je turbulentna intenzivnost konstantna. Pri meji pa spet narašča bolj strmo kot pri 60%. Pojav je posledica razvoja sekundarne mejne plasti povratnega toka.



Slika 10 : Profili turbulentne intenzivnosti za $\varepsilon = 0.1$ in $\alpha = 15.0^\circ$

Ujemanje med izmerekjimi in izračunanimi točkami separacij je dobro. Posledica tega je tudi ujemanje porazdelitve tlaka, ki je odvisen od točke separacije. Količnik vzgona je integralni kazatelj porazdelitve tlaka. Razlike med izmerjenimi in izračunanimi količniki vzgona so posledica nedorečenosti eksperimentalnega modela. Sprednja in zadnja palica najbolj izrazito vplivata na obtekanje. Povečan premer pa je potreben zaradi upogibnih napetosti. Pri manjših premerih se je nosilec upognil in značilno spremenil obliko deformabilnega krila.

Sprednja palica povzroča separacijo pri manjših vpadnih kotih in tako zmanjšuje količnik vzgona. Vendar pri kotih, ki so večji od $\alpha = 10.0^\circ$, je separacija lokalnega značaja in ne vpliva več na količnik vzgona. Zato je tudi boljše ujemanje med izračunanimi in izmerjenimi količniki vzgona za vpadne kote večje od $\alpha = 10.0^\circ$.

4 Sklep

Predstavljeni so rezultati meritev in izračunov profilov hitrosti toka fluida ter porazdelitev količnikov tlaka po površini krila glede na različne vpadne kote ϵ in relativna krajšanja α . Pri numeričnih simulacijah smo uporabili model turbulence $k-\epsilon$, ki slabo popisuje separacijo toka predvsem na ukrivljenih ploskvah, ker separacija toka zamuja. To je najbolj vidno pri tokovih z nizko stopnjo turbulentne intenzivnosti. Pri meritvah na modelu deformabilnega krila smo toku nad zgornjo površino krila zvišali turbulentno intenzivnost s žičnim turbulatorjem. S tem smo odložili separacijo mejne plasti ter dosegli večji količnik vzgona krila.

Primerjava med izračunanimi in izmerjenimi vrednostmi govori o dobrem ujemanju kljub uporabi $k-\epsilon$ modela turbulence točneje njegove modifikacije Re-normaliziran grupni model. Modele z dodano viskoznostjo s homogeno turbulenco lahko uporabimo za modeliranje tokov na ukrivljenih ploskvah, vendar ob pogoju visoke turbulentne intenzivnosti toka. To je tudi vzrok za večji izračunan in izmerjen količnik vzgona kot pri drugih avtorjih [1, 3].

Literatura

- [1] S. Cyr and B. G. Newman. Flow past two-dimensional membrane aerofoils with rear separation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 63:1–16, 1996.
- [2] I Hadžić, V Bakić, M Perić, V Šajn, and F Kosel. Experimental and numerical studies of flow around sphere at sub-critical reynolds number. In *5th International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurement*, 2002.
- [3] B.G. Newman and H.T. Low. Two-dimensional impervious sails: experimental results compared with theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 144:445–462, Jul 1984.
- [4] Jean-Marc Vanden-Broeck and Joseph B. Keller. Shape of sail in a flow. *Physics of Fluids*, 24(3):552–553, March 1981.
- [5] Viktor Šajn and Franc Kosel. Numerična in eksperimentalna analiza toka okrog deformabilnega krila. In *Kuhljevi dnevi*, 2003.
- [6] Viktor Šajn, Franc Kosel, and Boris Štok. Numerical simulation of wind flow around and elastic inflated membrane. *International Journal for Engineering Modelling*, 16(3-4), 2003.
- [7] D. C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries, Inc. La Canada, California, 1993.



Simulacija Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti s programom CFX

L. Štrubelj¹, I. Tiselj¹ in I. Bajsić²

Simulation of Kelvin-Helmholtz instability with CFX code

Povzetek. Predstavljena je Kelvin-Helmholtzova nestabilnost ter pogoji za njen nastanek. Primer Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti smo simulirali s računalniškim programom CFX. Izračunane vrednosti smo primerjali s preizkusom. Nestabilnost se je v rezultatih pojavila, ob detajlni analizi pa smo ugotovili, da nestabilnost izvira iz neustreznega modela površinske napetosti v programu CFX5. Model površinske napetosti v programu CFX5 namreč sproži in pospešuje razvoj Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti, kar je v nasprotju z dejansko fizikalno sliko obravnavanega transportnega procesa.

Abstract. Kelvin-Helmholtz instability is presented and conditions for the onset of the instability are derived from the linearized equations. Numerical simulation with computer code CFX has been performed. Simulation results were compared with the results of the experiment. Instability did occur, but with further detailed analysis we found out that instability occurred due to the surface tension model used in CFX5 code. Contrary to the correct physical picture, the surface tension actuated and amplified the Kelvin-Helmholtz instability.

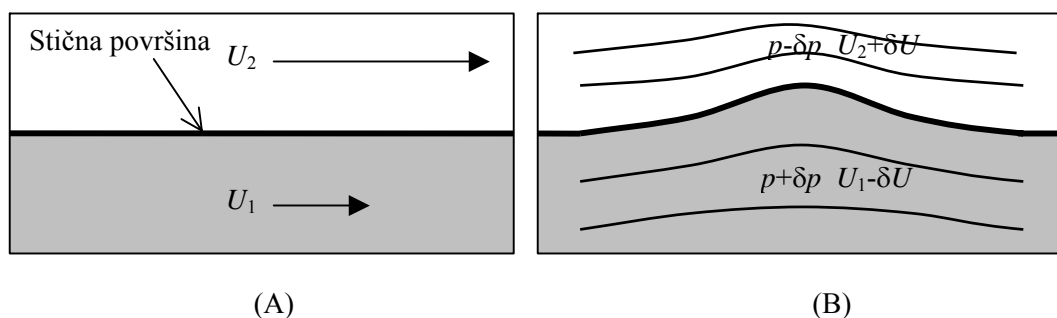
1 Uvod

Kelvin-Helmholtzova nestabilnost je eden najbolj temeljnih pojavov v dvotekočinskih sistemih in je najpogostejši vzrok za mešanje tekočin. V naravi se srečujemo s tem pojavom pri obravnavanju valovanja na morski gladini in pri gibanju zračnih mas. V tehniki pa ga srečamo pri praktično vseh dvotekočinskih tokovih. Tako se srečamo z nestabilnostjo pri uparjanju ter kondenzaciji. Kelvin-Helmholtzova nestabilnost bistveno vpliva na tokovno strukturo in na razvoj prehodnih pojavov. Ta fizikalni pojav so začeli raziskovati eksperimentalno in računsko že v začetku prejšnjega stoletja. Opazoval in opisal ga je Lord Kelvin že leta 1910. Z razvojem in uporabo računalnika ter numeričnih metod se je pokazala tudi dodatna možnost za numerično obravnavanje tega pojava.

¹ Institut "Jožef Stefan"

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

Kelvin-Helmholtzova nestabilnost je pojav, ki se generira v razslojenih dvotekočinskih tokovih. Pri dovolj veliki relativni hitrosti obeh tekočin se na gladini pojavijo površinski valovi, ki vodijo v mešanje obeh tekočin. Vsaka najmanjša motnja v sistemu (slika 1A) povzroči spremembo tokovnega polja. Motnja zmanjša prostor za pretok zgornji tekočini in ga poveča spodnji tekočini (slika 1B). Zaradi veljavnosti kontinuitetne enačbe, se spremeni hitrostno polje. Sprememba v hitrostnem polju spremeni tlak v bližini motnje. Zaradi povečanja hitrosti se tlak zmanjša in obratno, zaradi zmanjšanja hitrosti se tlak poveča (Bernoullijeva enačba). Na motnjo tako deluje sila tlaka, ki skuša motnjo povečati. V nasprotni smeri pa delujeta sila gravitacije, ter sila generirana zaradi površinske napetosti. V kolikor je sila zaradi spremembe tlaka večja od sile gravitacije in sile zaradi površinske napetosti se motnja povečuje in tokovno stanje postane nestabilno. Pojav imenujemo Kelvin-Helmholtzova nestabilnost.



Slika 1: Razslojen dvotekočinski tok, kjer imata tekočini različne hitrosti (A), ter pojav in razvoj motnje (B)

2 Analitičen popis Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti

Analitična obravnava nastanka Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti je mogoča za dovolj poenostavljene geometrije in ob predpostavki zanemarljive viskoznosti. Primer takšne analitične izpeljave je v knjigi »Hydrodynamic and hydromagnetic stability« Chandrasekhar, 1961 [3], tu pa navajamo le glavne rezultate te analitične obravnave.

Ob predpostavki stopničastega hitrostnega profila lahko izračunamo hitrostno razliko ΔU pri kateri se pojavi Kelvin-Helmholtzova nestabilnost:

$$\Delta U^2 \geq 2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) g \sigma} \quad (1)$$

kjer sta ρ_1 in ρ_2 gostoti gostejše in redkejšje tekočine, g težnostni pospešek in σ površinska napetost. Nestabilnost se pojavi s kritičnim valovnim številom k_* , glej enačbo (2), oziroma kritično valovno dolžino $\lambda_* = 2\pi / k_*$.

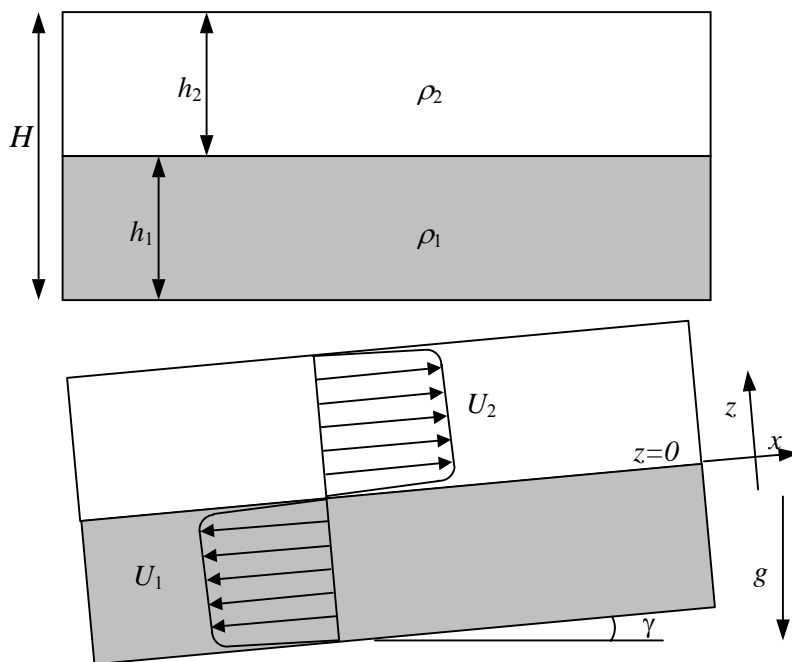
$$k_*^2 = \Delta \rho g / \sigma \quad (2)$$

Preizkus, ki ga obravnavamo v tem prispevku (S. A. Thorpe 1969 [5] - slika 2) je potekal v nagnjenem pretočnem kanalu, kjer se je hitrost obeh tekočin s časom spreminjala. Pretočni kanal je zaprt in do polovice napolnjen z vodo. Preostali prostor v kanalu zapolnjuje mešanica ogljikovega tetraklorida (CCl_4) in parafina namenjenega komercialni uporabi (kerozin). Kanal je prvotno v vodoravni legi in je nato sunkovito nagnjen za določen kot γ . Časovni potek hitrosti po nagnjenju kanala je za neviskozen tok za gostejšo in redkejšo tekočino [4]:

$$U_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gh_2 \sin \gamma}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} t \quad (3)$$

$$U_2 = -\frac{(\rho_1 - \rho_2)gh_1 \sin \gamma}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} t \quad (4)$$

Thorpe je uporabil pretočni kanal dolžine 1,83 m, višine 30 mm in širine 100 mm. Z dovolj veliko širino je zagotovil dvodimenzionalnost tokovnega polja.



Slika 2: Slika koordinatnih osi označb, ter profila hitrosti za nagnjeno cev

3 Simulacija Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti

Pojav smo simulirali numerično s programskim paketom CFX-5.6, ki je namenjen za računalniško simulacijo na področju mehanike tekočin in prenosa toplote. Več o modelih

uporabljenih v programskem paketu CFX dobimo v priročniku CFX [2], model površinske napetosti pa je povzet iz J.U. Brackbill 1992 [1]. Preizkus, ki ga je leta 1969 izvedel S. A. Thorpe [5] je prikazan na sliki 2. Po preteku določenega časa, ko so hitrosti v enačbah (3) in (4) dovolj velike, se pojavi Kelvin-Helmholtzova nestabilnost. Hitrostno polje v cevi sicer ni stacionarno, glej enačbi (3) in (4), vendar to za računalniško simulacijo ne predstavlja posebnih težav. Računski vhodni podatki potrebni za simulacijo so povzeti po prispevku S. A. Thorpe 1969 [5]: $\sin \gamma = 0,072$; $\sigma = 0,04 \text{ N/m}$; $(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2) = 0,124$, $(v_2/v_1)^{1/2}(\rho_2/\rho_1) = 1,07$, $\rho_1 - \rho_2 = 220 \text{ kg/m}^3$. Podatka za vodo sta: gostota $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, ter dinamična viskoznost $\mu_1 = 0,001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Snovne lastnosti za mešanico CCl_4 , ter kerozina smo preračunali iz zgoraj navedenih korelacij in znašajo $\rho_2 = 780 \text{ kg/m}^3$, ter $\mu_2 = 0,0015 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Naklonski kot pretočnega kanala po odmiku iz vodoravne lege znaša $4,13^\circ$.

Kritična valovna dolžina izračunana po enačbi (2), znaša 26,8 mm, upoštevajoč $g \rightarrow g \cos(\gamma)$. Mejna hitrostna razlika, pri kateri se pojavi nestabilnost je izračunana po enačbi (1) in znaša 0,207 m/s, kjer smo prav tako upoštevali korekcijo zemeljskega pospeška. Čas v katerem je dosežena kritična medfazna hitrost izračunamo iz enačb (3) in (4), ter z upoštevanjem korekcije $\sim 0,3 \text{ s}$ potrebnih za spremembo naklona kanala, znaša $\sim 1,5 \text{ s}$. Zaradi neupoštevanja viskoznosti je čas nestabilnosti podcenjen za nekaj desetink sekunde (S. A. Thorpe 1969 [5]), saj se nestabilnost povečuje rahlo drugače.

Pričakovali smo gladko rešitev dokler je hitrostna razlika manjša od mejne, nato pa pojav Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti. V preizkusu, ki ga je izvedel S. A. Thorpe 1969 [5], je čas nastopa nestabilnosti znašal $1,88 \pm 0,07 \text{ s}$. Valovna dolžina ocenjena s posnetkov prikazanih v prispevku znaša od 25 do 45 mm (se razlikuje v različnih ponovitvah preizkusa).

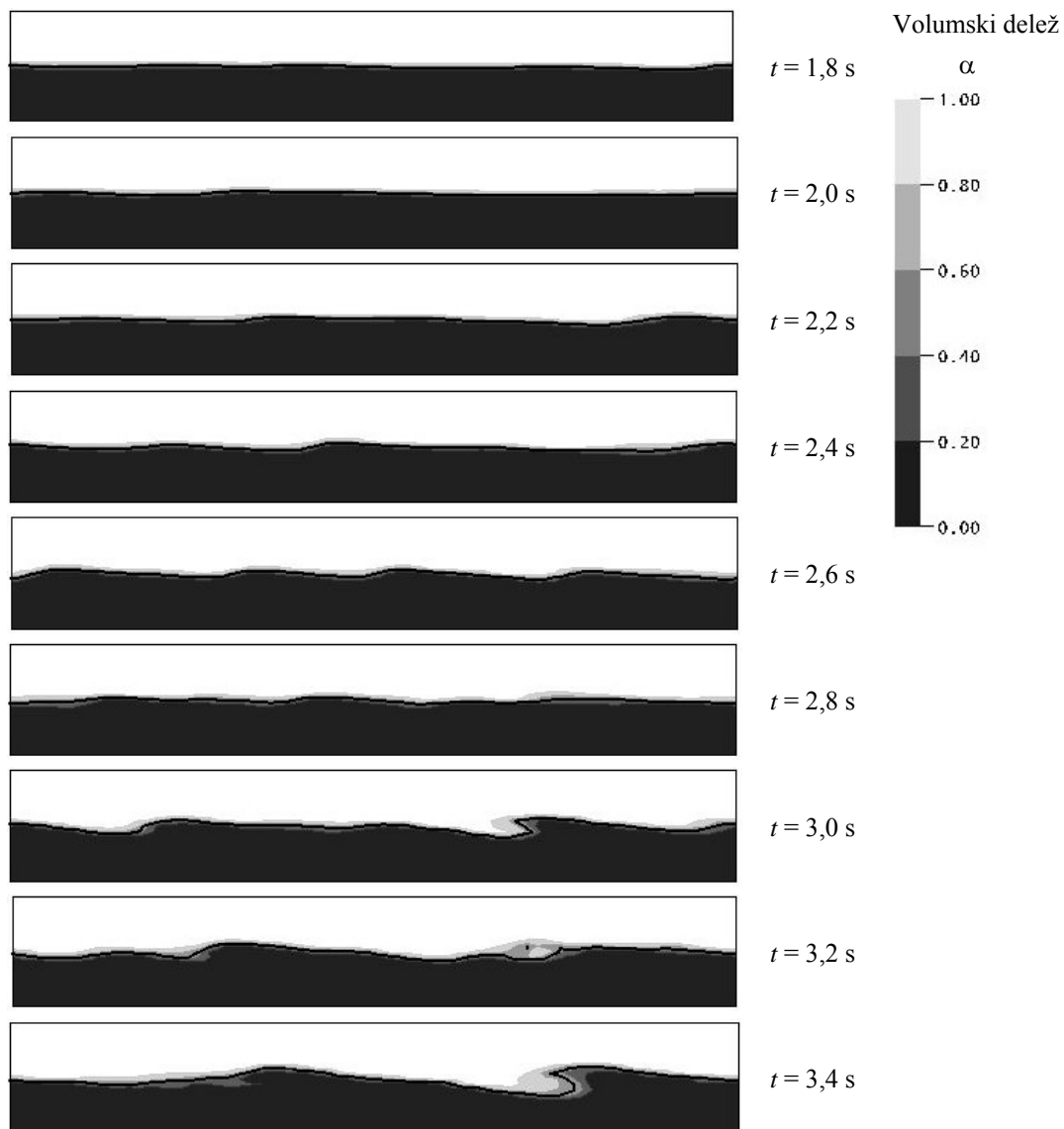
Najprej smo modelirali celoten preizkus po celotni dolžini pretočnega kanala, vendar so bili časi računanja predolgi. Prav tako pa je bila omejena dolžina simulacije, saj sta se tekočini pretočile vsaka na svoj konec. Zato smo za simulacije uporabili takoimenovani reducirani model. Pri reduciranem modelu je na stenah kanala zgoraj in spodaj predpisana hitrost na steni enaka 0, simuliramo v dveh dimenzijah. Modeliramo samo 200 mm kanala, na vstopu in izstopu je pa predpisan periodični robni pogoj. Potrebna je bila vpeljava sile, ki »poganja« tekočini. Sila je predpisana v obliki enačbe (5). Upoštevana je višina gladine, oziroma $h_1 = h_2$, ter $\bar{\rho} = (\rho_1 + \rho_2)/2$.

$$S_M = (\rho(z) - \bar{\rho}) \frac{\rho(z)}{\bar{\rho}} g \sin \gamma \quad (5)$$

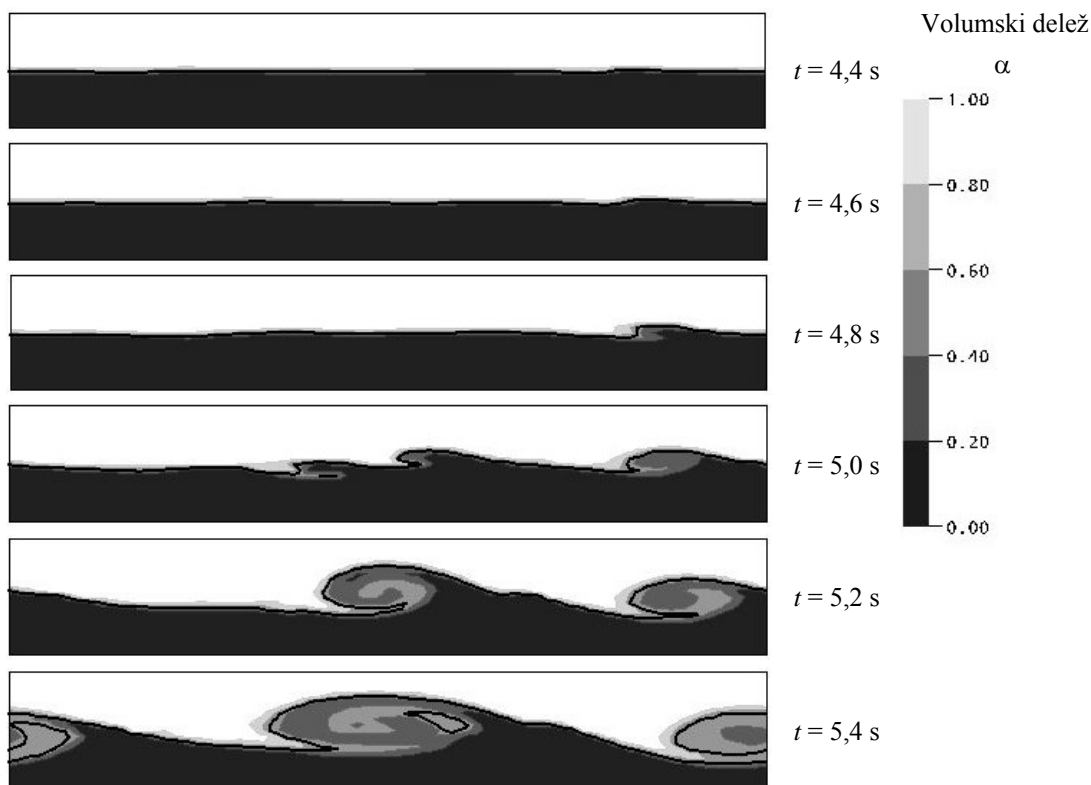
3.1 Rezultati

Primerjali smo rezultate z in brez upoštevanja površinske napetosti. Iz slike 3, ter 4 vidimo da se tokovna motnja pojavi hitreje pri simulaciji z upoštevanjem površinske napetosti, čeprav analitični preračuni napovedo ravno nasprotno. Najbolj zastopana valovna dolžina dobljena s simulacijo, je v primeru s površinsko napetostjo približno 50 mm, brez

upoštevanja površinske napetosti pa okoli 100 mm. Analitično napovedana kritična valovna dolžina znaša 26,8 mm za primer upoštevanja površinske napetosti, za primer brez upoštevanja površinske napetosti pa teorija napoveduje, da so najbolj nestabilne najkrajše valovne dolžine.



Slika 3: Volumski delež tekočine manjše gostote ob različnih časih, preračun z upoštevanjem površinske napetosti

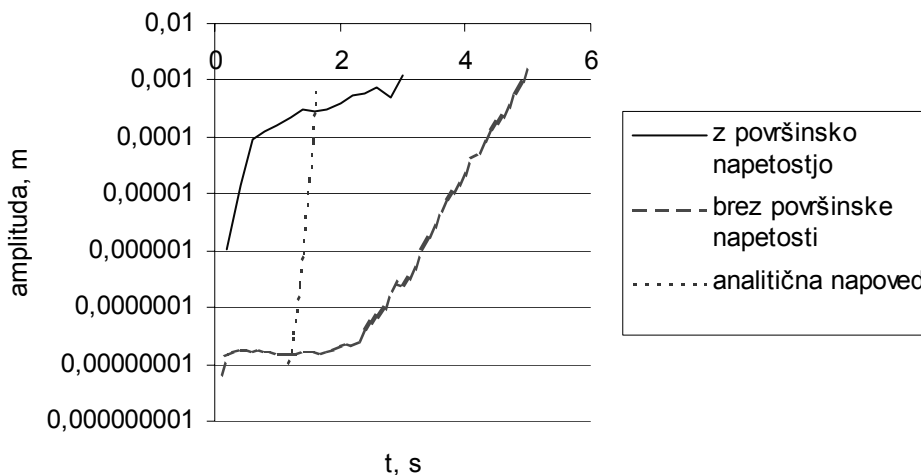


Slika 4: Volumski delež tekočine manjše gostote ob različnih časih, preračun brez upoštevanja površinske napetosti

Teorija in preizkus predvidevata, da se nestabilnost pojavi šele, ko je razlika hitrosti dovolj velika (0,207 m/s), to je ob času 1,5 s, nato pa amplituda valov narašča eksponentno. Take rezultate bi pričakovali pri preračunu z upoštevanjem površinske napetosti, vendar temu ni tako, saj amplitude pričnejo naraščati prehitro (slika 5).

Amplituda pri preračunu brez upoštevanja površinske napetosti pa se obnaša kot predvideva teorija z upoštevanjem površinske napetosti, oz. preizkus. V začetnem času je amplituda približno konstanta, oziroma je enaka 0 (vrednosti zaokrožitvene numerične napake), po določenem času, ki se približno ujema z analitično napovedjo in preizkusom (vendar za primer z upoštevanjem površinske napetosti), pa narašča približno eksponentno, vendar veliko počasneje, kot napoveduje analitična rešitev. Ker se CFX nestabilnost brez upoštevanja površinske napetosti razvija počasneje, je zato tudi najbolj nestabilna valovna dolžina λ večja od pričakovane. Motnje bi se po teoretičnih napovedih morale razviti že zelo zgodaj, najprej z najkrajšimi valovnimi dolžinami, oziroma v simulaciji z valovno dolžino, ki jo še lahko popišemo z izbrano numerično mrežo.

Analitična napoved rasti amplitude velja samo dokler veljajo linearne enačbe, oziroma so amplitude dovolj majhne. V preizkusu ta čas ocenjujemo na eno do dve desetinki sekunde.



Slika 5: Rast amplitude za preračun z upoštevanjem površinske napetosti in brez

4 Sklep

Kelvin-Helmholtzova nestabilnost je eden temeljnih mehanizmov, ki vpliva na obnašanje dvotekočinskega toka. Pogoj za pojav nestabilnosti je dovolj velika relativna hitrost obeh tekočin, ter majhna motnja, ki pa je v realnih primerih vedno prisotna. S pojavom nestabilnosti se spremeni tokovni režim, poveča se velikost stične površine med tekočinama, tako da vpliva tudi na druge transportne procese, kot so prenos toplote in snovi. S pomočjo lineariziranih Navier-Stokesovih enačb je mogoče analitično definirati pogoje za nastop Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti v nevskoznem toku.

Za opazovanje nestabilnosti smo izbrali preizkus, ki ga je 1969 opravil Thorpe [5]. Pri simulaciji preizkusa smo celoten model reducirali, ter s tem pridobili na hitrosti računanja in se obenem izognili omejitvi dolžine simulacije.

Problem smo reševali s programskim paketom CFX, ki rešuje nelinearne transportne enačbe (gibalno enačbo), tako sledimo pojavi tudi v nelinearnem področju. Motnja, ki povzroči nestabilnost v simulaciji, so numerične fluktuacije, ki so dovolj velike, da se razvijejo v Kelvin-Helmholtzovo nestabilnost.

Površinska napetost bi po teoretičnih napovedi morala stabilizirati Kelvin-Helmholtzovo nestabilnost. Preračun pa kaže na to, da površinska napetost, oziroma model površinske napetosti, uporabljen v CFX, nestabilnost še dodatno poveča. Rezultati simulacije s programom CFX so torej nezanesljivi, model za upoštevanje površinske napetosti je po vsej verjetnosti neustrezen ali pa ne deluje računsko pravilno. Brez upoštevanja vpliva površinske napetosti pa je simulacija s programom CFX uspešnejša, a še vedno ne posebej natančna, saj je rast izračunane nestabilnosti precej počasnejša od izmerjene.

Literatura

- [1] J.U. Brackbill, D. B. Kothe and C. Zemach, *A Continuum Method for Modelling Surface Tension*, Journal of Computational Physics 100:335-354, 1992.
- [2] CFX Solver Theory, version 5.6; Ansys Inc., 2003
- [3] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford the Clarendon press, 1961
- [4] L. Štrubelj, *Dvodimenzionalna simulacija Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti*, Diplomaska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2004
- [5] Thorpe, S. A., *Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids*, Journal of Fluid Mechanics, 39, 25-48, 1969



Time averaged governing equations of turbulent generalized Newtonian fluids flow

P. Ternik¹ and J. Marn²

Časovno povprečene vodilne enačbe turbulentnega toka posplošenih newtonskih tekočin

Abstract. In this paper the governing equations of turbulent non-Newtonian fluids flow are presented following the work by Pinho [1]. Momentum equation of generalized Newtonian fluids was starting-point for time averaging and development of transport equation for Reynolds stresses $(-\overline{v_i v_j})$, turbulent kinetic energy (k) and dissipation of turbulent kinetic energy (ϵ). Due to variable viscous function new terms arise in governing equations and equation for the average rate of dissipation of kinetic energy is modified. Order of magnitude analysis results were used for writing down the simplified version of governing equations. Finally, the proposal for modelling with low Reynolds $k - \epsilon$ turbulent model is presented.

Povzetek. V pričujočem prispevku so prikazane vodilne enačbe turbulentnega toka nenevtonskih tekočin povzete po delu Pinha [1]. Gibalna enačba posplošenih newtonskih tekočin je bila izhodišče za časovno povprečenje in izpeljavo prenosne enačbe za Reynoldsove napetosti $(-\overline{v_i v_j})$, turbulentno kinetično (k) energijo in disipacijo turbulentne kinetične energije (ϵ). Zaradi spremenljive viskozne funkcije se v vodilnih enačbah pojavljajo dodatni členi, prav tako je spremenjena enačba povprečne hitrosti disipacije turbulentne kinetične energije. Rezultati analize velikostnega reda posameznih členov v prenosnih enačbah so služili za zapis poenostavljenih vodilnih enačb. Na koncu je prikazan predlog modeliranja z *low Reynolds* $k - \epsilon$ turbulentnim modelom.

¹ University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

² University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

1 Introduction

The fluids customarily used in process engineering as well as in bio-technology, polymer technology and other advanced technologies are usually non-Newtonian. Depending on the type of fluid increase of shear rate can either increase (dilatant or shear-thickening fluids) or decrease (pseudoplastic or shear-thinning fluids) the shear stress in comparison to Newtonian linear increase. In spite of their widespread use and importance, most of the work with non-Newtonian fluids still remains under laminar flow regime. The turbulence as prevalent form of flow in engineering practice is limited to solution of Navier-Stokes equations of Newtonian fluid flow. Most of the work considering turbulent flow of non-Newtonian fluid is done in the field of experimental work with visco-elastic and shear-thinning fluids. Various researchers (Pereira and Pinho [2], Poole and Escudier [3], Poole and Escudier [4], Escudier and Smith [5]) agree:

- non-Newtonian viscous behavior delays the transition from laminar to turbulent flow regime,
- in spite of similar flow behavior (in comparison to Newtonian fluids) in turbulent bulk flow the Reynolds stresses are lower up to 30% and turbulent kinetic energy up to 20% for shear-thinning non-Newtonian behavior,
- non-Newtonian viscous behavior (e.g. visco-elastic effects) in viscous sublayer plays an important role on flow behavior in case of sudden expansion flow problem,
- turbulent non-Newtonian flow behavior exhibits lower friction factor.

Recently, Pinho [1] has derived and proposed governing equations for turbulent flow of generalized Newtonian fluids. Navier-Stokes equations for instantaneous, average and fluctuating velocity were used, along with time averaging procedure and order of magnitude analysis, to write down the simplified form of governing equations. This work tries to repeat the findings of Pinho [1], and is drawing on conclusions presented therein.

In Section 2 the governing equations for turbulent generalized Newtonian fluids flow are derived. Time averaging procedure is used to arrive to exact transport equations for Reynolds stresses, turbulent kinetic energy and rate of dissipation of turbulent kinetic energy. Order of magnitude analysis, Pinho [1], is used to neglect certain terms in those equations and to write down the simplified form of governing equations.

Low Reynolds number $k - \epsilon$ model is presented as an alternative turbulent model to be used for numerical modelling of such a flow in Section 3.

2 Conservation equations of turbulent generalized Newtonian fluids flow

2.1 Momentum equation

Accounting for constitutive model of generalized Newtonian fluids:

$$\tau_{ik} = \eta (|\dot{\gamma}|) \dot{\gamma}_{ik} \quad (1)$$

the transport equation for i -th component of instantaneous velocity can be written as (Ternik and Marn [6]):

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\eta (|\dot{\gamma}|) \dot{\gamma}_{ik}]. \quad (2)$$

The flow variable of ineterest is expressed as the sum of mean (time-averaged) and fluctuating part:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad v_k = \bar{v}_k + v'_k \quad p = \bar{p} + p' \quad \eta = \bar{\eta} + \eta' \quad \dot{\gamma}_{ik} = \bar{\dot{\gamma}}_{ik} + \dot{\gamma}'_{ik} \quad (3)$$

so, after time averaging of individual terms in Equation (2) one arrives to:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\eta} \nabla^2 \bar{v}_i - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \overline{\eta' \dot{\gamma}'_{ik}}}{\partial x_k}. \quad (4)$$

Equation (4) is the momentum equation of turbulent generalized Newtonian fluid flow. Relative to the Newtonian fluid there are two new terms due to the variable viscous function. Term accounting for variable time-averaged viscous function was found to be more important, hence neglecting the term involving fluctuations of viscous function, Pinho [1]. The final, simplified form of momentum transport equation is:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\eta} \nabla^2 \bar{v}_i - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right). \quad (5)$$

2.2 Transport equation for Reynolds stress

The transport equation for Reynolds stress is derived using the following (Wilcox [7]):

$$\overline{v'_i N(v_j)} + \overline{v'_j N(v_i)} = 0, \quad (6)$$

where:

$$N(v_i) = \rho \frac{\partial (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + \rho (\bar{v}_k + v'_k) \frac{\partial (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{\eta} + \eta') (\bar{\dot{\gamma}}_{ik} + \dot{\gamma}'_{ik})], \quad (7)$$

$$N(v_j) = \rho \frac{\partial (\bar{v}_j + v'_j)}{\partial t} + \rho (\bar{v}_k + v'_k) \frac{\partial (\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{\eta} + \eta') (\bar{\dot{\gamma}}_{jk} + \dot{\gamma}'_{jk})] \quad (8)$$

is the Navier-Stokes operator of i -th and j -th component of instantaneous velocity. Considering the Equations (6)-(8) we can write:

$$\begin{aligned} & \overline{\rho v'_j \frac{\partial (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t}} + \overline{\rho v'_i \frac{\partial (\bar{v}_j + v'_j)}{\partial t}} + \overline{\rho v'_j (\bar{v}_k + v'_k) \frac{\partial (\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_k}} + \overline{\rho v'_i (\bar{v}_k + v'_k) \frac{\partial (\bar{v}_j + v'_j)}{\partial x_k}} = \\ & - \overline{v'_j \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i}} - \overline{v'_i \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_j}} + \overline{v'_j \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{\eta} + \eta') (\bar{\gamma}_{ik} + \gamma'_{ik})]} + \overline{v'_i \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{\eta} + \eta') (\bar{\gamma}_{jk} + \gamma'_{jk})]} \end{aligned} \quad (9)$$

and after time averaging arrive at:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} + \overline{\rho v'_j v'_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k}} + \overline{\rho v'_i v'_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k}} + \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k} = - \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \\ & \underbrace{\overline{v'_j \frac{\partial \bar{\eta} \gamma'_{ik}}{\partial x_k}}}_{Ia} + \underbrace{\overline{v'_j \frac{\partial \eta' \bar{\gamma}_{ik}}{\partial x_k}}}_{IIa} + \underbrace{\overline{v'_j \frac{\partial \eta' \gamma'_{ik}}{\partial x_k}}}_{IIIa} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \bar{\eta} \gamma'_{jk}}{\partial x_k}}}_{Ib} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \eta' \bar{\gamma}_{jk}}{\partial x_k}}}_{IIb} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \eta' \gamma'_{jk}}{\partial x_k}}}_{IIIb}. \end{aligned} \quad (10)$$

All non-viscous (non-stationary, convective and pressure gradient) terms in equation above are Newtonian-like, while viscous terms involve Newtonian (contain $\bar{\eta}$) as well as non-Newtonian terms (some of them contain $\bar{\eta}$, all of them contain η').

- Terms with $\bar{\eta}$ and γ'_{ik}

$$(Ia + Ib) = \bar{\eta} \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k^2} - 2 \bar{\eta} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} + v'_j \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} + v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right)$$

- Terms with η' and $\bar{\gamma}_{ik}$

$$(IIa + IIb) = \overline{\eta' v'_j \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2}} + \overline{\eta' v'_i \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_k^2}} + \overline{v'_j \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{v'_i \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right)}$$

- Terms with η' and γ'_{ik}

$$(IIIa + IIIb) = \overline{\eta' \frac{\partial^2 v'_i v'_j}{\partial x_k^2}} - 2 \overline{\eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} + v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right)}$$

Everything can be combined in the exact Reynolds stress transport equation:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} &= -\overline{\rho v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{\rho v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k} - \left(\overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right) + \bar{\eta} \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k^2} - \\
 &2\bar{\eta} \frac{\partial \overline{v'_i} \partial \overline{v'_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}} + \overline{v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j}} \right) + \overline{\eta' v'_j} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} + \overline{\eta' v'_i} \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_k^2} + \\
 &\overline{v'_j \frac{\partial \eta'}{\partial x_k}} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) + \overline{v'_i \frac{\partial \eta'}{\partial x_k}} \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) + \eta' \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k^2} - \eta' \frac{\partial \overline{v'_i} \partial \overline{v'_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \\
 &\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\overline{v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}} + \overline{v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j}} \right). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Order of magnitude analysis (Pinho [1]), relative to dissipative term of Newtonian fluids, has shown that some terms in Equation (11) can be neglected and the simplified Reynolds stress transport equation is:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} &= -\overline{\rho v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{\rho v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j v'_k}}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial \overline{p' v'_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{p' v'_i}}{\partial x_j} \right) + \\
 &\overline{p' \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)} + \bar{\eta} \frac{\partial \overline{v'_i} \partial \overline{v'_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\bar{\eta} \frac{\partial \overline{v'_i} \partial \overline{v'_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \eta' \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k^2} - \\
 &2\eta' \frac{\partial \overline{v'_i} \partial \overline{v'_j}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\overline{v'_j \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}} + \overline{v'_i \frac{\partial v'_k}{\partial x_j}} \right). \tag{12}
 \end{aligned}$$

2.3 Transport equation for turbulent kinetic energy

It is derived using the following time average (Pinho [1]):

$$\overline{(\bar{v}_i + v'_i) N(v_i)} - \bar{v}_i \overline{N(\bar{v}_i)} = 0, \tag{13}$$

where:

$$N(\bar{v}_i) = \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\eta} \bar{\gamma}_{ik} + \overline{\eta' \gamma'_{ik}} - \overline{\rho v'_i v'_k} \right) \tag{14}$$

is the Navier-Stokes operator of i -th component of time-averaged velocity.

Combining Equation (12) and (13), taking the definition of turbulent kinetic energy $k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$, one arrives to the following after time averaging is performed:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{\rho v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{\rho v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \bar{\eta} \bar{\gamma}_{ik}}{\partial x_k}}}_{*} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \eta' \gamma'_{ik}}{\partial x_k}}}_{**} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \eta' \gamma'_{ik}}{\partial x_k}}}_{***}. \tag{15}$$

Last three terms (viscous terms with $\bar{\eta}$ and η') on the right hand side in equation above can be rewritten as follows:

- Term with $\bar{\eta}$ and $\overline{\gamma'_{ik}}$ (*)

$$\overline{v'_i \frac{\partial \bar{\eta} \overline{\gamma'_{ik}}}{\partial x_k}} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\eta} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) - \bar{\eta} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}$$

- Term with η' and $\overline{\gamma'_{ik}}$ (**)

$$\overline{v'_i \frac{\partial \eta' \overline{\gamma'_{ik}}}{\partial x_k}} = \overline{v'_i \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{v'_i \eta'} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2}$$

- Term with η' and $\overline{\gamma'_{ik}}$ (***)

$$\overline{v'_i \frac{\partial \eta' \overline{\gamma'_{ik}}}{\partial x_k}} = \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta' \frac{\partial k'}{\partial x_k} \right) - \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}$$

and combined with Equation (15) to write the exact transport equation for turbulent kinetic energy:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} &= -\rho \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_k v'_i}}{\partial x_k} - \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\eta} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) - \bar{\eta} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \\ &\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_i} + \overline{v'_i \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right)} + \overline{v'_i \eta'} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta' \frac{\partial k'}{\partial x_k} \right) - \\ &\eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (16)$$

The fifth and the tenth term on the right hand side of the equation above can be lumped together to define the dissipation of turbulent kinetic energy $\rho \varepsilon = (\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k}$, while the seventh term is, relative to dissipation ε , neglectible (Pinho [1]).

Diffusion of turbulent kinetic energy k is usually small, except at low Reynolds number and in the proximity of walls, so the contributions due to fluctuating viscosity η' is smaller and neglected in comparison to contributions due to time-averaged viscosity $\bar{\eta}$.

Consequently, the simplified transport equation for turbulent kinetic energy is:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\rho \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \rho \varepsilon - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_k v'_i}}{\partial x_k} - \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\eta} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_i}. \quad (17)$$

In comparison to (Pinho [1]):

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\rho \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - \rho \varepsilon - \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_k v'_i}}{\partial x_k} - \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\eta} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right), \quad (18)$$

there is an extra term $\left(\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_i} \right)$ in Equation (17), representing the source/sink of turbulent kinetic energy due to the variable molecular viscous function of non-Newtonian fluids.

2.4 Transport equation for the rate of dissipation of turbulent kinetic energy

Taking the following moment of the Navier-Stokes equation (Wilcox [7], Speziale [8]):

$$2\eta \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} [N(v'_i)]} = 0, \quad (19)$$

where $N(v'_i)$ is the Navier-Stokes operator of i -th component of velocity fluctuations:

$$\begin{aligned} N(v'_i) &= N(v_i) - N(\bar{v}_i) \\ &= \rho \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \rho v'_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (v'_i v'_k - \overline{v'_i v'_k}) + \\ &\quad \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\eta} \gamma'_{ik} + \eta' \bar{\gamma}_{ik} + \eta' \gamma'_{ik} - \overline{\eta' \gamma'_{ik}}). \end{aligned} \quad (20)$$

one arrives to:

$$\begin{aligned} &\underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\rho \frac{\partial v'_i}{\partial t} \right)}_I + \underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\rho \bar{v}_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)}_{II} + \underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\rho v'_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \right)}_{III} + \\ &\underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\rho \frac{\partial}{\partial x_k} (v'_i v'_k) \right]}_{IV} - \underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_k}) \right]}_V + \underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)}_{VI} - \\ &\underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\eta} \gamma'_{ik}) \right]}_{VII} - \underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\eta' \bar{\gamma}_{ik}) \right]}_{VIII} - \underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\eta' \gamma'_{ik}) \right]}_{IX} + \\ &\underbrace{2\eta \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\eta' \gamma'_{ik}) \right]}_X = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Viscous function is decomposed into the sum of time-averaged and fluctuating part ($\eta = \bar{\eta} + \eta'$), hence individual terms in Equation (20) can be rewritten as:

- Term I

$$\dots = \rho (\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)$$

- Term II

$$\begin{aligned} \dots &= 2\rho \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_m} \left[(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right] + \rho \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{x_m} \frac{\partial v'_i}{x_m} \right] - \\ &\quad \rho \bar{v}_k \left[\frac{\partial v'_i}{x_m} \frac{\partial v'_i}{x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\eta} + \eta') \right] \end{aligned}$$

- Term III

$$\dots = 2\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \left(\bar{\eta} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m} + \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m} \right) + \rho \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_m} \left(\bar{\eta} v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} + \eta' v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)$$

- Term IV

$$\dots = 2\rho \bar{\eta} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + 2\rho \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \rho \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right) + \rho \eta' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)$$

- Term V

$$\dots = 2\rho \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i v'_k}{\partial x_k} \right)$$

- Term VI

$$\dots = 2\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right) + 2\eta' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)$$

- Term VII

$$\dots = 2\bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) + 2 \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial x_k \partial x_m} \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) + 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) + 2\bar{\eta} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) + 2 \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_m} \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) + 2\bar{\eta}^2 \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right] + \bar{\eta} \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right]$$

- Term VIII

$$\dots = 2\bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x_k \partial x_m} + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x_k \partial x_m} + 2\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_i} \right) \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \eta'}{\partial x_k} + 2\bar{\eta} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \eta'}{\partial x_m} + 2 \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \eta'}{\partial x_m} + 2\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} \right) \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} + 2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} \right) \eta'^2 \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}$$

- Term IX

$$\begin{aligned}
 \dots &= 2\bar{\eta} \overline{\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)} + 2\eta' \overline{\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)} + \\
 &2\bar{\eta} \overline{\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)} + 2\eta' \overline{\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right)} + \\
 &2\bar{\eta} \overline{\frac{\partial \eta'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)} + 2\eta' \overline{\frac{\partial \eta'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)} + \\
 &2\bar{\eta} \eta' \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right]} + 2\eta'^2 \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \right]}
 \end{aligned}$$

- Term X

$$\dots = 2\eta' \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right]} + 2\eta' \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\eta' \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k^2} \right)}$$

For time independent non-Newtonian viscous behavior the following is used:

$$\eta = \eta(|\dot{\gamma}|) \implies \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial t} = 0 \tag{22}$$

to rewrite the Term I as:

$$\overline{\rho (\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{(\bar{\eta} + \eta') \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)} \right]. \tag{23}$$

Considering the definition for the average rate of dissipation of turbulent kinetic energy (Pinho [1]):

$$\rho \varepsilon = \overline{(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}} \tag{24}$$

the exact transport equation for ε is written:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & -2 \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \left[\overline{(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m}} \right] - 2 \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_m} \left[\overline{(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}} \right] - \\
 & 2 \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_m} \left[\overline{(\bar{\eta} + \eta') v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}} \right] - 2 \overline{(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m}} - \\
 & \overline{(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)} - 2 \overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)} + \\
 & \overline{(\bar{\eta} + \eta') (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right) \right]} - \\
 & 2 \overline{(\bar{\eta} + \eta') (\bar{v} + v') \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_m}} + \\
 & 2 \overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial^2 (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_m \partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \dot{\gamma}'_{ik}} + 2 \overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \dot{\gamma}'_{ik}}{\partial x_m}} + \\
 & 2 \overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)} + 2 \overline{\dot{\gamma}'_{ik} (\bar{v} + v') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x_k \partial x_m}} + \\
 & 2 \overline{\frac{\partial \dot{\gamma}'_{ik}}{\partial x_m} (\bar{v} + v') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \eta'}{\partial x_k}} + 2 \overline{\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} (\bar{v} + v') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \eta'}{\partial x_m}} + \\
 & 2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k^2} \right) \overline{(\bar{v} + v') \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}} - 2 \overline{v' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \dot{\gamma}'_{ik} \right]} - \\
 & 2 \overline{v' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\eta' \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k^2} \right)} + 2 \overline{\eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i v'_k}{\partial x_k} \right)} + \\
 & \overline{\bar{v}_k \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}}. \tag{25}
 \end{aligned}$$

First eight terms are Newtonian like, while all other terms appear due to variable viscous function of non-Newtonian fluids. Again, the order of magnitude analysis (Pinho [1]) is used to

arrive to the simplified transport equation for rate of dissipation of turbulent kinetic energy:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{v}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & \underbrace{-2 \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} \left[(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m} \right]}_{Ia} - \underbrace{2 \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_m} \left[(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right]}_{Ib} - \\
 & \underbrace{2 \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_m} \left[(\bar{\eta} + \eta') v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right]}_{Ic} - \underbrace{2 (\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_k}{\partial x_m}}_{Id} - \\
 & \underbrace{(\bar{\eta} + \eta') \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)}_{IIa} - \underbrace{2 (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)}_{IIb} + \\
 & \underbrace{(\bar{\eta} + \eta') (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right) \right]}_{III} - \\
 & \underbrace{2 (\bar{\eta} + \eta') (\bar{v} + v') \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k \partial x_m}}_{IV} + \\
 & \underbrace{2 (\bar{v} + v') \frac{\partial^2 (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_m \partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \dot{\gamma}'_{ik}}_V + \underbrace{2 (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial \dot{\gamma}'_{ik}}{\partial x_m}}_{VI} + \\
 & \underbrace{2 (\bar{v} + v') \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)}_{VII} + \underbrace{2 \dot{\gamma}'_{ik} (\bar{v} + v') \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x_k \partial x_m}}_{VIII} - \\
 & \underbrace{2 v' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\frac{\partial \eta'}{\partial x_k} \dot{\gamma}'_{ik} \right]}_{IXa} - \underbrace{2 v' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\eta' \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k^2} \right)}_{IXb} + \\
 & \underbrace{2 \eta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v'_i v'_k}{\partial x_k} \right)}_X + \underbrace{\bar{v}_k \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m}}_{XI}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

3 Modelling of transport equations for $k - \varepsilon$ turbulent model

3.1 Momentum equation

In the momentum equation:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\eta} \nabla^2 \bar{v}_i - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \tag{27}$$

all terms, with the exception of Reynolds stresses, are known and can be numerically modelled (Ternik and Marn [6]). Thus, modelling of Reynolds stresses is required. Pinho [1] proposed a first-order turbulence closure (Boussinesq approximation):

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (28)$$

where k is the average turbulent kinetic energy and ν_T is the turbulent viscosity. The latter is given with the Prandtl-Kolmogorov equation:

$$\nu_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (29)$$

Here f_μ is the damping function appearing in low Reynolds number model and is equal to 1 in high Reynolds models and away from walls.

3.2 Transport equation for k

The pressure diffusion has a small contribution in Newtonian fluid flow and the same assumption is adopted for non-Newtonian fluids, Pinho [1]. Similar as for Newtonian fluids, this term is lumped together with the turbulent transport (rate at which the turbulence energy is transported through the fluid by turbulent fluctuations) and modelled using the gradient model of diffusion (Wilcox [7]):

$$\overline{v'_j p'} + \frac{1}{2} \rho \overline{v'_i v'_j v'_i} = -\rho \frac{\nu_T}{\sigma_K} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (30)$$

where σ_K is the turbulent Prandtl number.

The final form of transport equation for k is therefore:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\rho \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon - \rho D + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\eta} + \rho \frac{\nu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_i}. \quad (31)$$

Here D is the damping function that is needed in low Reynolds number model.

3.3 Transport equation for ε

On the right hand side of Equation (26) the following terms appear:

- Production of ε ($P_\varepsilon = Ia + Ib + Ic + Id$)

For the Newtonian fluids, term Ic is usually neglected with the argument that the velocity fluctuations and its gradients are less well correlated than the gradients in term Id , Pinho [1].

$$P_\varepsilon = -\rho C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \rho C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right)^2 = \rho C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right)^2. \quad (32)$$

Equation (32) incorporates the modifications due to variable non-Newtonian viscosity in modified definition of the average rate of dissipation. f_1 is the damping function appearing in low Reynolds $k - \varepsilon$ model.

- Turbulent diffusion of ε ($D_\varepsilon = IIa + IIb + X$)

Turbulent diffusion due to velocity fluctuations is accounted for in term IIa , while the term IIb accounts for turbulent diffusion by pressure fluctuations. Term IIa is written as:

$$-\overline{(\bar{\eta} + \eta')} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right) = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho v'_k \varepsilon})}_{IIa1} + \underbrace{v'_k \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)^2}_{IIa2},$$

where $\overline{(\bar{\eta} + \eta') \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)} = \rho \varepsilon$ was used. Term $IIa1$ is the turbulent diffusion, while term $IIa2$ is purely non-Newtonian and modelled with gradient hypothesis:

$$v'_k \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right)^2 \sim C_{\varepsilon 4} \overline{\rho v'_k \varepsilon} \frac{1}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \sim C_{\varepsilon 4} \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon \bar{v}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k}. \quad (33)$$

Similar, term IIb is written as:

$$-2 \overline{(\bar{v} + v')} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right) = -2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{(\bar{v} + v')} \frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \right]}_{IIb1} + 2 \underbrace{\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial x_i}}_{IIb2},$$

with term $IIb1$ accounting for diffusion due to pressure fluctuations and term $IIb2$ accounting for diffusion due to variable non-Newtonian viscosity.

Turbulent diffusion by fluctuations of viscosity is incorporated in term X . When compared with terms $IIa1 + IIb1$ this term is small and found out to be neglectible, Pinho [1]. At the end, turbulent diffusion $D_\varepsilon = IIa1 + IIb1 + IIb2$ is modelled with a gradient hypothesis $\left(\overline{v'_k \varepsilon} \sim \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right)$ leading to:

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right). \quad (34)$$

- Molecular diffusion of ε ($M_\varepsilon = III + V + VI + VII$)

For high Reynolds number flows the molecular diffusion is often neglected (in comparison to turbulent diffusion), but for low Reynolds $k - \varepsilon$ model it has to be considered. In spite of the fact that contributions from terms V , VI in VII are at least important as term III , those three terms are not considered, Pinho [1], and the molecular diffusion is modelled as:

$$M_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right). \quad (35)$$

- Destruction of ε ($\Phi_\varepsilon = IV$)

Term *IV* is modelled similar as for Newtonian fluids (Speziale [8]):

$$\Phi_\varepsilon = -\rho f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (36)$$

where f_2 is the damping function.

- Convection of ε ($K_\varepsilon = XI$)

Since convection of ε involves gradients of ε , physical space gradients of ε as well as of variable viscosity has to be considered. Pinho [1] proposed:

$$\bar{v}_k \frac{\partial(\bar{\eta} + \eta')}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} \frac{\partial v'_i}{\partial x_m} = \rho \bar{v}_k \frac{\varepsilon}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k} \sim \rho C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{\bar{\eta}} \bar{v}_k \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_k}, \quad (37)$$

where $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \varepsilon'$ is instantaneous rate of dissipation of turbulent kinetic energy and $\eta = \bar{\eta} + \eta'$ instantaneous viscous function. In Equation (37) the gradients of instantaneous viscosity are approximated by the gradients of time-averaged viscosity.

Order of magnitude analysis of terms in transport equation for ε , Pinho [1], yields that the term *VIII* is of the same magnitude order as term *X*, while order of magnitude for terms *IXa* + *IXb* is essentially smaller as for term *X*. Since term *X* was neglected, the terms *VIII*, *IXa* and *IXb* are also neglected to come out with the following transport equation for ε :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\eta} + \rho \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho E + \rho f_1 C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right)^2 - \rho f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \\ &\quad \rho C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{\bar{\eta}} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j} + \rho C_{\varepsilon 4} \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon \bar{\eta}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (38)$$

where damping function E depends on low Reynolds $k - \varepsilon$ model.

4 Conclusions

Theoretical approach and development of governing equations for turbulent generalized Newtonian fluids flow was presented. First, the momentum equation was derived taking into account the variable non-Newtonian viscous behavior. Time averaging was used in procedure to write down the exact transport equations for Reynolds stresses, turbulent kinetic energy and rate of dissipation of turbulent kinetic energy. Order of magnitude analysis results were found useful in order to neglect some terms in transport equations and simplified form of governing equations was presented. Finally, the low Reynolds $k - \varepsilon$ model was presented as an alternative closure for modelling of turbulent non-Newtonian fluid flow.

The results are similar to that of Pinho [1] with exception of last term on the right hand side of Equations (17) and (34).

References

- [1] F. T. Pinho, A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a $k - \epsilon$ type closure, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 114 (2003) 149–184.
- [2] A. S. Pereira, F. T. Pinho, Recirculating turbulent flows of thixotropic fluids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 99 (2001) 183–201.
- [3] R. J. Poole, M. P. Escudier, Turbulent flow of non-Newtonian liquids over a backward-facing step, Part I. A thixotropic and shear-thinning liquid, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 109 (2003) 177–191.
- [4] R. J. Poole, M. P. Escudier, Turbulent flow of non-Newtonian liquids over a backward-facing step, Part II. A viscoelastic and shear-thinning liquids, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 109 (2003) 193–230.
- [5] M. P. Escudier, S. Smith, Turbulent flow of Newtonian and shear-thinning liquids through a sudden symmetric expansion, *Experiments in Fluids* 27 (1999) 427–434.
- [6] P. Ternik, J. Marn, Modelling of non-Newtonian fluid flow using USRBF user subroutine, in: *CFX Conference 2003*, Garmisch-Partenkirchen, 2003.
- [7] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, USA, 1998.
- [8] C. G. Speziale, Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence, *Annual Review of Fluid Mechanics* 23 (1991) 107–157.



The influence of non-linear viscous function on the non-Newtonian turbulent fluid flow dynamic

P. Ternik¹ and J. Marn²

Vpliv nelinearne viskozne funkcije na dinamiko turbulentnega toka nenevtonske tekočine

Abstract. A turbulent flow of non-Newtonian fluid is studied by means of numerical modelling. Non linear viscous behavior is accounted for in the damping functions of $k - \epsilon$ turbulent model as well as in the momentum equation, transport equation for turbulent kinetic energy and dissipation of turbulent kinetic energy. Two users subroutines were used to model additional source terms in momentum equation and all source terms in convection-diffusion equations for k and ϵ . Numerical results for a developing turbulent flow in a channel and turbulent flow over a backward facing step indicate a great influence of non-Newtonian viscous behavior on a flow field.

Povzetek. Prispevek predstavlja numerično modeliranje turbulentnega toka nenevtonske tekočine. Spremenljiva viskozna funnkcija je upoštevana v dušilnih funkcijah $k - \epsilon$ turbulentnega modela kot tudi v gibalni enačbi ter prenosni enačbi turbulentne kinetične energije in disipacije turbulentne kinetične energije. Uporabniška podprograma sta služila za modeliranje dodatnih izvornih členov v gibalni enačbi in vseh izvornih členov v konvektivno-difuzivnih enačbah za k in ϵ . Numerični rezultati za razvijajoč se turbulentni tok v kanalu in turbulentni tok čez stopnico nakazujejo velik vpliv nenevtonskega viskoznega obnašanja na tokovno polje.

1 Introduction

Simplified form of transport equations for non-Newtonian turbulent flow were proposed by Pinho [1] and were successfully repeated by Ternik and Marn [2]. Still, there is a question of modelling those equations and more important, whether the existing turbulent models and damping functions are suitable for numerical modelling of non-Newtonian turbulent flow.

¹ University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

² University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering

In general, two new damping functions in transport equation for ϵ were introduced (Pinho [1]), with no further suggestion about calculating them. Thus, as a first approximation, $C_{\epsilon 3}$ and $C_{\epsilon 4}$ are assumed to have the value of zero and only contributions from variable viscosity are considered.

In section 2, the Launder-Sharma turbulent model with variable viscosity is presented.

In section 3 the governing equations are written and followed by geometry and boundary conditions for two numerical examples.

In section 4 the numerical results for particulate numerical example are shown.

2 Launder-Sharma low Reynolds number $k - \epsilon$ turbulent model

Variable non-Newtonian viscosity is accounted for in the damping functions E and D of the Launder-Sharma (Bredberg [3]) model to yield the following:

$$D = 2\bar{v} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2, \quad E = 2\bar{v}v_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} \right)^2. \quad (1)$$

The formulation of remaining damping functions in Launder-Sharma model is the same as for Newtonian fluids (Bredberg [3], Wilcox[4]):

$$f_\mu = \exp \left[\frac{-3.4}{(1 + Re_T/50)^2} \right], \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Re_T^2), \quad (2)$$

with:

$$Re_T = \frac{k^2}{\bar{\epsilon}\bar{v}}, \quad v_T = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\bar{\epsilon}} \quad (3)$$

and:

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, \quad C_{\epsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3. \quad (4)$$

3 Numerical modelling

3.1 Governing equations

The governing equations for an incompressible and stationary turbulent flow of generalized Newtonian fluid using the Launder-Sharma low Reynolds model can be summarized as follows:

- Mass conservation

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

- Momentum conservation

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \eta_N \nabla^2 \bar{v}_i - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + (\bar{\eta} - \eta_N) \nabla^2 \bar{v}_i \quad (6)$$

- Turbulent kinetic energy conservation

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\rho \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\eta} + \rho \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \tilde{\varepsilon} - 2\bar{\eta} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_i} \quad (7)$$

- Rate of dissipation of turbulent kinetic energy conservation

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\bar{\eta} + \rho \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + 2\bar{\eta} v_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} \right)^2 + \rho f_1 C_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - \rho f_2 C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} \quad (8)$$

Reynolds stresses and the production of turbulent kinetic energy were modelled as:

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = v_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad P_k = -\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

and the true ε is related to the reduced $\tilde{\varepsilon}$ as $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D$.

The Power law was chosen to prescribe the variable viscous function:

$$\bar{\eta} = K |\bar{\gamma}|^{n-1}, \quad |\bar{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \bar{\gamma}_{ij} \bar{\gamma}_{ji}}, \quad \bar{\gamma}_{ij} = \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right). \quad (10)$$

Here, n is the Power law index ($n > 1$ for shear-thickening fluid and $n < 1$ for shear-thinning fluid) and K is the consistency parameter. For a Newtonian fluid, $n = 1$ and $\eta_N = K$.

3.2 Geometry and boundary conditions

For the developing turbulent flow in a channel the uniform velocity profile ($\bar{v}_x = 1$), turbulent kinetic energy ($k = 0.05$) and mixing length ($l = 0.1$) were imposed at the inlet, while zero normal gradients on a velocity, turbulent kinetic energy and dissipation of turbulent kinetic energy along with $p_2 = 0$ were imposed at the outlet.

In a case of a backward facing step flow, the Dirichlet boundary conditions at the inlet were imposed on a velocity, turbulent kinetic energy and dissipation of turbulent kinetic energy (using the numerical results for fully developed turbulent flow in a channel). Free outflow was modelled with a mass flow boundary condition.

For both numerical examples, the value of the Reynolds number was 5600. It was defined on the basis of the channel height (height of an upstream section for backward facing step), inlet average velocity, density and Newtonian dynamic viscosity.

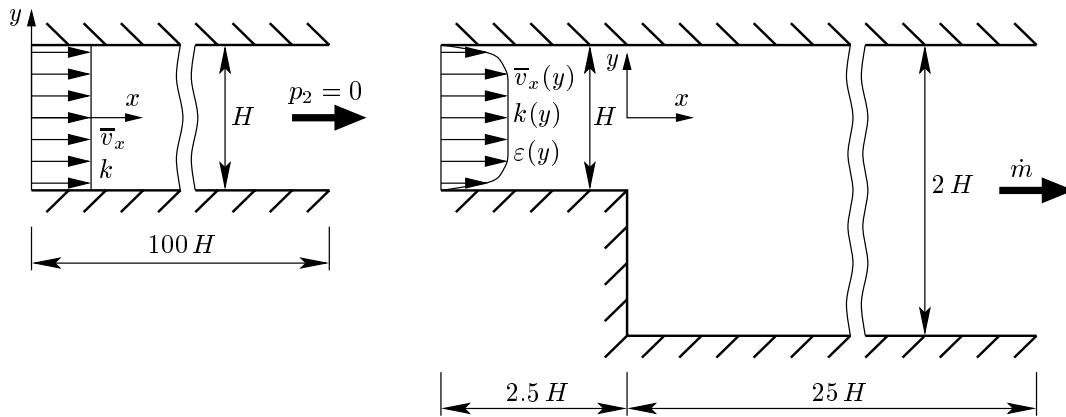


Figure 1 : Channel (left), backward facing step (right). $H = 1$.

3.3 Numerical procedure

The governing equations were solved using CFX-4.4 computer code which employs the standard finite volume method. Each equation is integrated over each control volume to obtain a discrete equation which connects the variable at the centre of the volume with its neighbors. The physical space gradients were computed using the second order accurate central differences scheme. The Hybrid discretization scheme was used for the k and ε equation, while the Higher Upwind scheme was used to discretize the v_x and v_y equation. An updated velocity and pressure fields satisfying exact mass continuity and approximately satisfying the discrete momentum equations were obtained by the SIMPLEC algorithm.

Physical space gradients in source terms in governing equations were computed with a second-order finite differences scheme. Two user subroutines, USRBF for momentum equation (Ternik and Marn [5]) and USRSRC for k and ε transport equation, were used to model those source terms (AEA Technology [6]). Effective diffusivity in transport equation for turbulent kinetic energy ($\bar{\eta} + \rho v_T / \sigma_k$) and rate of dissipation of turbulent kinetic energy ($\bar{\eta} + \rho v_T / \sigma_\varepsilon$) was modelled with USRDIF user subroutine.

4 Results

4.1 Nodalization analysis

The influence of computational mesh refinement on the numerical accuracy was studied through the nodalization analysis. For this, the Newtonian flow flow was considered using three different computational meshes with uniformly distributed elements in the x direction and non-uniformly distributed elements in the y direction. The grid was highly refined in a near-wall region, since the viscous sub-layer had to be resolved, Table (1).

Figure (2) show numerical results for Newtonian fluid. As the number of elements increase the numerical results converge to the value independent of the mesh density. Accounting for numerical accuracy and number of elements the Mesh II was found to be a good compromise

and all results presented in continuation were obtained using Mesh II.

Table 1 : Characteristics of computational meshes.

Mesh	Num. el.	Δx	Δy_{min}
I	1000×50	0.100000	0.007979
II	1500×75	0.066666	0.005407
III	2000×100	0.050000	0.004006

Furthermore, the results were found to be in an excellent agreement with results obtained by Mesh II when the Launder-Sharma turbulent model was used as a default (and only) model in CFX-4.4.

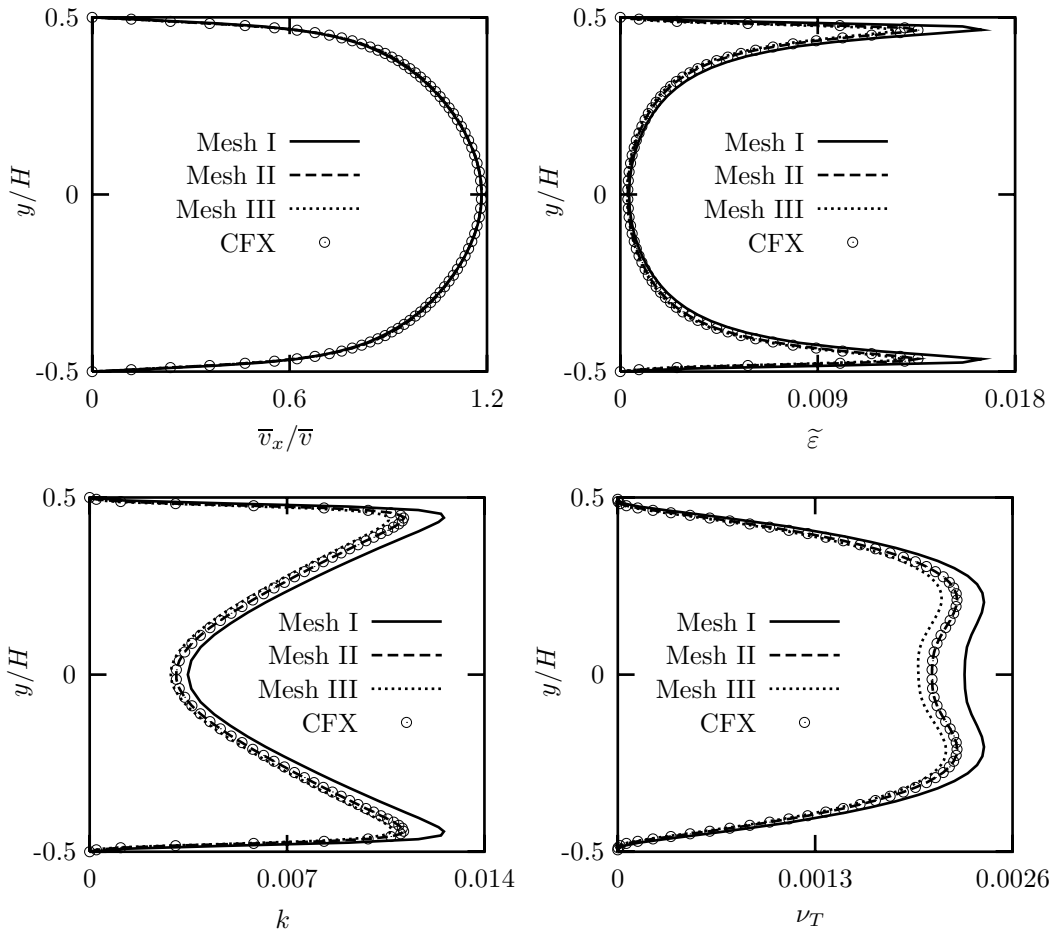


Figure 2 : Nodalization analysis results ($x = 100$): normalized velocity profile, dissipation of turbulent kinetic energy, turbulent kinetic energy, turbulent viscosity.

In as case of a turbulent flow over a backward facing step the upstream section was populated with 50 elements in x direction and 75 elements in y direction (similar to a channel flow), while for downstream section 500 elements in x direction and 150 elements in y direction was used. The mesh in x direction was refined before and beyond the step plane with $\Delta x_{min} = 0.02$.

4.2 Developing turbulent flow in a channel

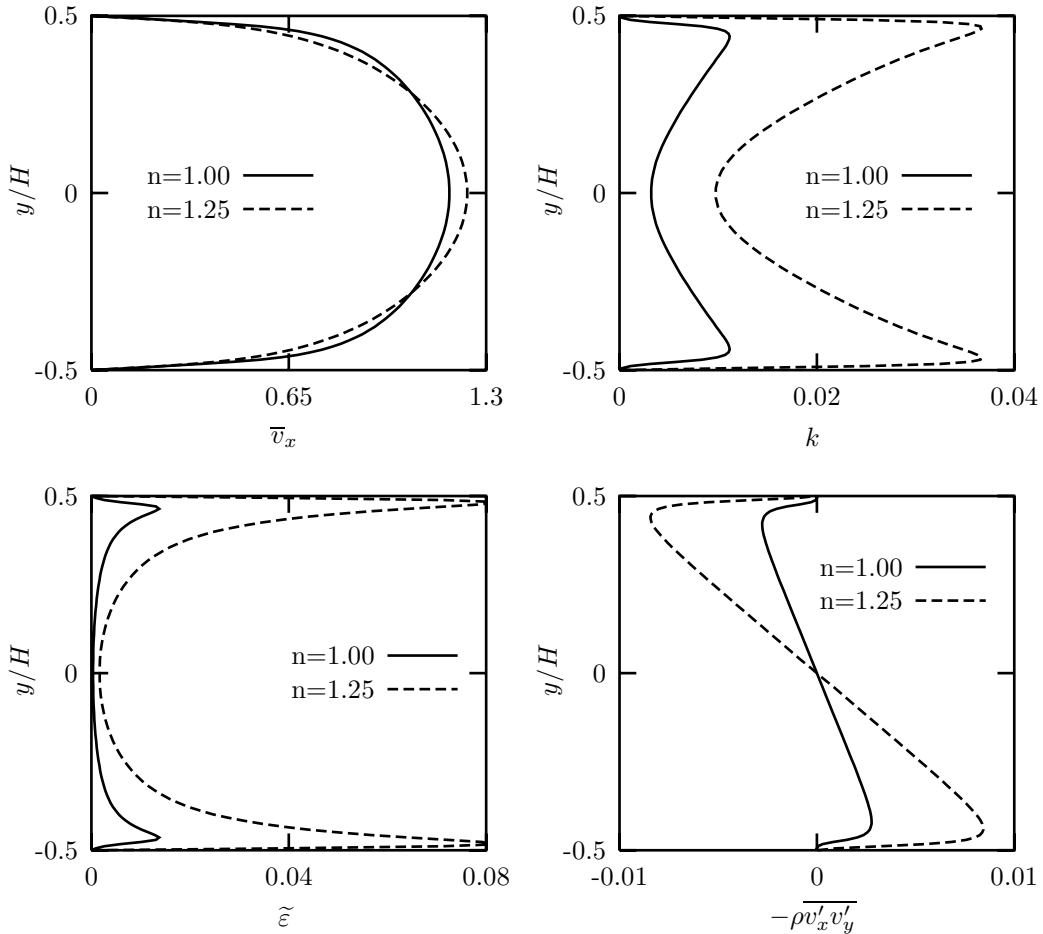


Figure 3 : Numerical results at outlet: velocity profile (\bar{v}_x), turbulent kinetic energy (k), dissipation of turbulent kinetic energy (ϵ), Reynolds stresses ($-\rho \overline{v'_x v'_y}$).

In comparison to a Newtonian fluid, the shear-thickening viscous behavior increases the maximum velocity at the channel centreline and decreases velocity in a near-wall region. Furthermore, one can observe a significant increase of a turbulent kinetic energy, dissipation of turbulent kinetic energy and turbulent (Reynolds) stresses, especially in a near-wall region, Figure (3).

For both, Newtonian and non-Newtonian fluid, the value of non-dimensional wall distance is below one; $y^+ = 0.942$ for Newtonian and $y^+ = 0.736$ for non-Newtonian fluid.

4.3 Turbulent flow over a backward facing step

Fully developed flow in an upstream section is followed by a flow disturbance beyond the step plane. For a shear-thickening behavior ($n = 1.25$) the disturbance is more modest in comparison to a Newtonian fluid. The peak of maximum velocity is placed away from upper wall, velocity profile near lower wall approaches no-slip conditions ($\bar{v}_x = 0$) more gradual, Figure (4). One can also conclude that for non-Newtonian fluid velocity profile would develop in to fully developed flow conditions faster than for Newtonian fluid.

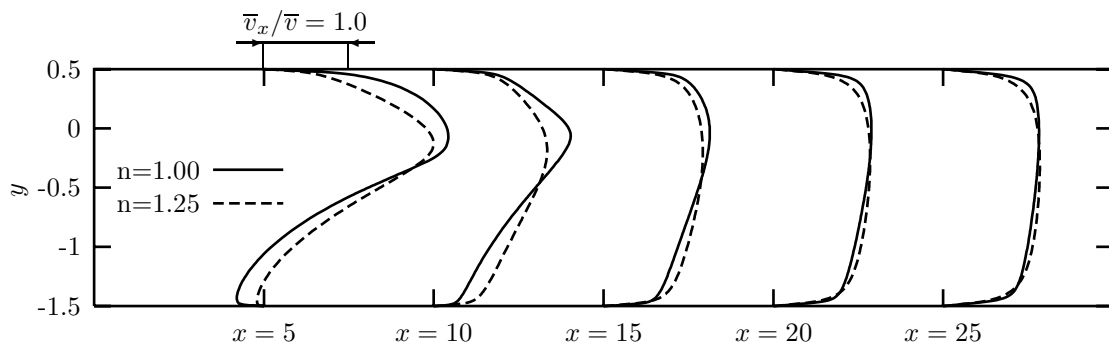


Figure 4 : Normalized velocity profile (\bar{v}_x/\bar{v}) at various downstream stations of a backward facing step.

In both cases, two recirculating zones along lower wall are visible, Figure (5). For non-Newtonian fluid the recirculating length of both vortices is smaller in comparison to Newtonian fluid.

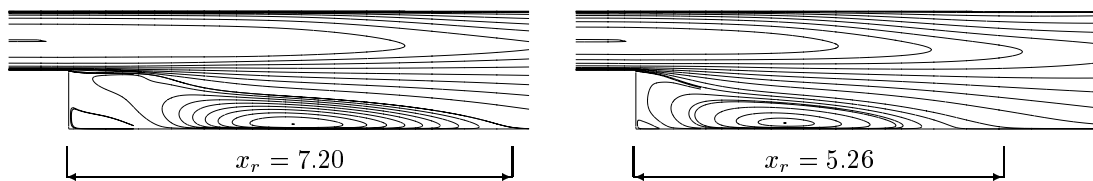


Figure 5 : Contour plot of constant axial velocity: $n = 1.00$ (left), $n = 1.25$ (right).

5 Conclusions

An example of numerical modelling of a non-Newtonian turbulent flow was presented. Non-linear viscous behavior was accounted for in damping functions of Launder-Sharma turbulent model as well as in turbulent Reynolds number and turbulent viscosity. Governing equations were solved with a finite volume method. USRBF user subroutine was used to model additional (non-Newtonian) terms in momentum equation, while USRSRC user subroutine was used to model all (Newtonian and non-Newtonian) source terms in convection-diffusion transport equation for turbulent kinetic energy and dissipation of turbulent kinetic energy.

Developing turbulent flow in a channel and turbulent flow over a backward facing step were two numerical examples. Numerical procedure was validated through comparison of results obtained with user subroutines and results when Launder-Sharma was used as a default turbulent model.

It was pointed out that non linear viscous function has a great influence on flow field. Shear thickening behavior increases maximum velocity at the channel centreline as well as turbulent kinetic energy, dissipation of turbulent kinetic energy and Reynolds stresses. For a turbulent flow over a backward facing step, the flow disturbance is modest in comparison to Newtonian fluid. For both fluids, two vortices exist, with vortices being smaller for shear-thickening viscous behavior.

References

- [1] F. T. Pinho, A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a $k - \epsilon$ type closure, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 114 (2003) 149–184.
- [2] P. Ternik, J. Marn, Time averaged governing equations of turbulent generalized Newtonian fluids flow, in: Submitted to *Kuhljevi dnevi*, Grad Otočec, 2004.
- [3] J. Bredberg, On Two-equation Eddy-Viscosity Models (Internal Report 01/8), Chalmers University of Technology, Sweden, 2001.
- [4] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, USA, 1998.
- [5] P. Ternik, J. Marn, Modelling of non-Newtonian fluid flow using USRBF user subroutine, in: *CFX Conference 2003*, Garmisch-Partenkirchen, 2003.
- [6] A. Technology, *CFX-4.4 Solver manual*, 2003.



Tok v kanalu z nenadno razširitvijo z metodo kontrolnih volumnov

P. Ternik, M. Delić, Z. Žunič in J. Marn¹

Flow in a channel with sudden expansion using control volume method

Povzetek. V prispevku smo analizirali tok v kanalu z nenadno simetrično razširitvijo. Zanimalo nas je obnašanje tretjega vrtinca, ki nastane kot posledica nesimetričnosti toka pri višjih vrednosti Reynoldsovega števila. Za reševanje integralnih ohranitvenih enačb smo uporabili izpeljanko metode kontrolnih volumnov. Rezultate smo primerjali z rezultati Oliveire.

Abstract. In this work a flow in a channel with symmetric sudden expansion is analysed. The subject of interest is behaviour of the third vortex resulting from asymmetry of flow at higher values of Reynolds number. For the solution of integral conservation equations the variant of control volume method was used. The results were compared to the results of Oliveira.

1 Uvod

Pri tokovih Newtonske tekočine skozi kanal z nenadno simetrično razširitvijo postane pri določeni vrednosti Reynoldsovega števila tok nesimetričen. Do t.i. bifurkacijske točke pride pri kritični vrednosti Reynoldsovega števila $Re = Re_{kr}$. Pojav so intenzivno preučevali, tako eksperimentalno Durst [1] in Cherdron *et al.* [2], kot tudi numerično Drikakis [3], Hawa in Rusak [4] ter Oliveira [5]. Avtorji so se večinoma odločali za določanje vrednosti kritične vrednosti Reynoldsovega števila, redkeje pa za analizo obnašanja tokovnega polja pri višjih vrednostih Reynoldsovega števila.

Cilj naše analize je bil preučevanje tokovnih razmer od pričetka nesimetrije toka, do začetka neustaljenih razmer.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

2 Vodilne enačbe

Ravninski tok viskozne nestisljive tekočine lahko opišemo s kontinuitetno in gibalno enačbo, ki ju ob zanemaritvi volumskih sil zapišemo kot

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

kjer so v_i hitrostni vektor, x_i krajevni vektor in p tlak. Gostota ρ in dinamična viskoznost μ sta konstantni po celotnem računskem območju.

3 Postopek reševanja

Pri reševanju Navier-Stokesovih enačb zapisanih za osnovne fizikalne spremenljivke za tok nestisljive tekočine nam težave povzroča tlačni člen. Te težave odpravimo z vključitvijo časovnega odvoda v kontinuitetno enačbo

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

kjer imenujemo koeficient β umetna stisljivost.

Z vpeljavo brezdimenzijskih spremenljivk, kjer sta L in v_∞ , karakteristična dolžina in hitrost,

$$x_i^* = \frac{1}{L} x_i, \quad v_i^* = \frac{1}{v_\infty} v_i, \quad p^* = \frac{1}{\rho_0 v_\infty^2} p, \quad t^* = \frac{v_\infty}{L} t, \quad \beta^* = \frac{1}{v_\infty^2} \beta.$$

prevedemo enačbi (1) in (2) v naslednjo obliko:

$$\frac{1}{\beta^*} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\partial v_i^*}{\partial x_i^*} = 0,$$

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (v_j^* v_i^*) = - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right),$$

V zgornjih enačbah nastopajo same brezdimenzijske vrednosti, zato bomo zaradi prikladnosti pisanje zvezdice (*) opustili.

Sistem enačb za ravninski tok nestisljive newtonske tekočine ob upoštevanju umetne stisljivosti in ob uporabi brezdimenzijskih spremenljivk lahko zapišemo v konzervativni obliki kot eno samo vektorsko enačbo

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial E_{vis}}{\partial x} + \frac{\partial G_{vis}}{\partial y}, \quad (4)$$

kjer je

$$Q = \begin{Bmatrix} p/\beta \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix}, \quad E = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_x^2 + p \\ v_x v_y \end{Bmatrix}, \quad G = \begin{Bmatrix} v_y \\ v_x v_y \\ v_y^2 + p \end{Bmatrix}, \quad E_{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xx} \\ \tilde{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}, \quad G_{vis} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{yy} \end{Bmatrix}$$

in

$$\tilde{\tau} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Z vpeljavo lokalnih koordinat (ξ, η) , katerih povezavo s kartezijskim koordinatnim sistemom podamo z

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta},$$

prevedemo enačbo (4) v obliko

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial E_{vis}}{\partial \xi} + \frac{\partial G_{vis}}{\partial \eta}, \quad (5)$$

kjer so:

$$Q = JQ, \quad E = J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} E + \frac{\partial \xi}{\partial y} G \right), \quad G = J \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} E + \frac{\partial \eta}{\partial y} G \right), \quad E_{vis} = J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} E_{vis} + \frac{\partial \xi}{\partial y} G_{vis} \right),$$

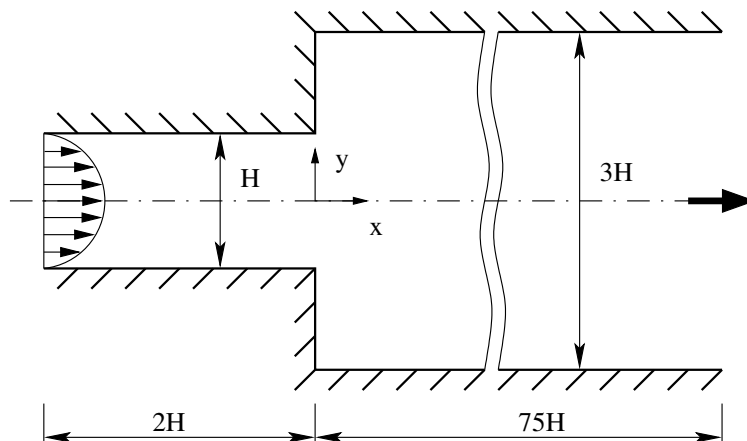
$$G_{vis} = J \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} E_{vis} + \frac{\partial \eta}{\partial y} G_{vis} \right) \quad \text{in} \quad J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Enačbo 5 smo reševali z izpeljanko metode kontrolnih volumnov. Časovno integracijo smo izvedli z eksplicitno metodo Runge-Kutta, konvektivne tokove smo računali z metodo karakteristik, Drikakis [6], difuzijske tokove pa z metodo končnih razlik, Žunič [7].

4 Tok v kanalu z nenadno razširitvijo

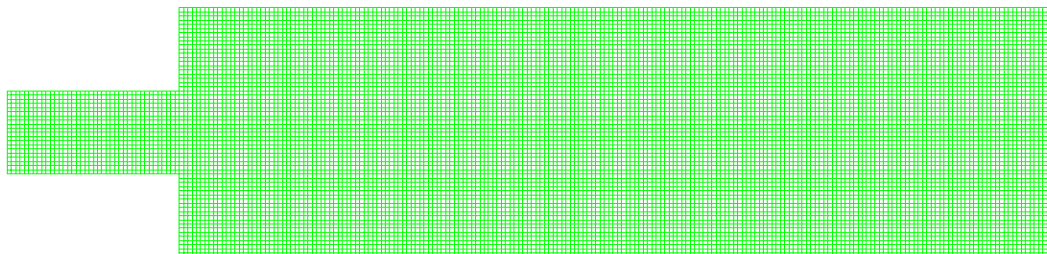
Obravnavali bomo tok v kanalu z nenadno razširitvijo. Geometrija problema in robni pogoji so prikazani na sliki 1. Na vstopu smo predpisali hitrostni profil $v_x = 3/2 - 2/3y^2$, $v_y = 0$, tlak smo ekstrapolirali iz območja. Na izstopu smo predpisali razvit hitrostni profil $\partial v_x / \partial n = \partial v_y / \partial n = 0$ in tlak $p = 0$. Na stenah smo uporabili brezdrnsni robni pogoj za hitrosti in ekstrapolacijo iz območja za tlak. Računali smo tokovna polja za vrednosti Reynoldsovega števila $Re = 50, 53, 54, 55, 60, 100, 150, 200$ in 250. Vrednosti okoli bifurkacijske točke smo zgostili

zaradi natančnejše določitve njenega položaja. Reynoldsovo število smo definirali na osnovi višine vstopnega kanala in povprečne hitrosti na vstopu. Rezultate smo primerjali z izračunom Oliveire [5].



Slika 1 : Geometrija problema za tok v kanalu s stopnico.

Na sliki 2 je prikazan detajl uporabljene mreže od vstopnega dela do razširitve. Velikost uporabljene mreže je znašala 40×20 za vstopni del in 1500×60 za razširjeni del. Elementi so bili enakomerno razporejeni v x in y smeri. Z enako velikimi elementi po celotnem območju smo želeli doseči enako natančnost izračunavanja območij povratnega toka, ne glede na položaj njihovega nastanka.



Slika 2 : Detajl mreže, vstopni del z raširitvijo.

V tabeli 1 smo primerjali dolžine recirkulacijskih območij za spodnji in zgornji vrtinec. Vrednosti x_1 in x_5 sta dolžini vogalnih oz. sekundarnih vrtincev v spodnjem in zgornjem vogalu. Ti sekundarni vrtinci so posledica primarnih vrtincev, njihova velikost pa je v primerjavi s primarnimi zanemarljivo majhna in jih večina avtorjev niti ne navaja. Vrednosti x_2 in x_6 sta dolžini primarnega spodnjega in zgornjega vrtinca, vrednosti x_3 in x_4 pa odlepitvena in pilepitvena dolžina tretjega vrtinca.

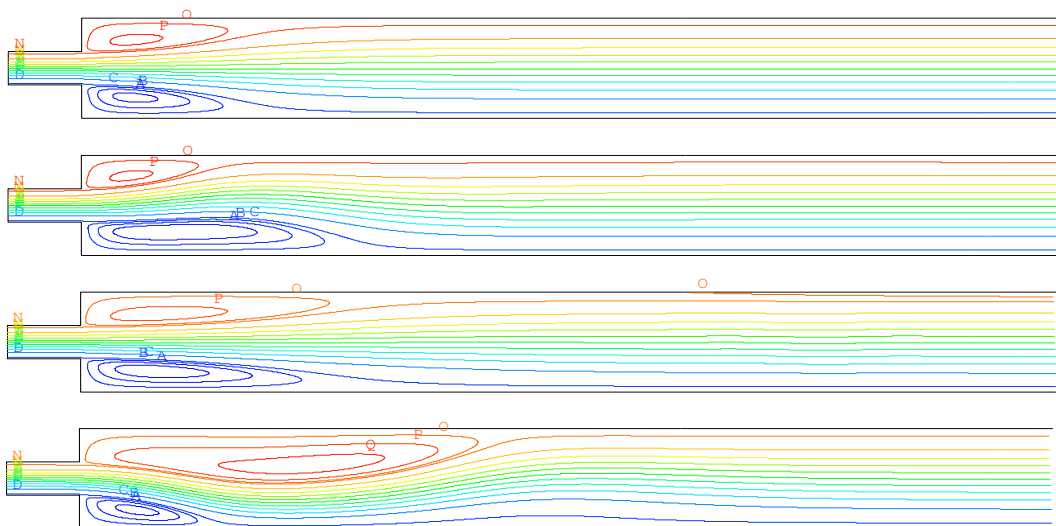
Izračunane vrednosti se zadovoljivo ujemajo z referenčnimi. Odstopanja so manjša od 1%. Do bifurkacijske točke pride pri vrednosti $Re = 54$, kar se ujema z rezultati dobljenimi z drugimi

metodami, na primer Drikakis [3] $Re = 53,3$, Hawa in Rusak [4] $Re = 53,8$ in Oliveira [5] $Re = 54$.

Tabela 1 : Recirkulacijske dolžine

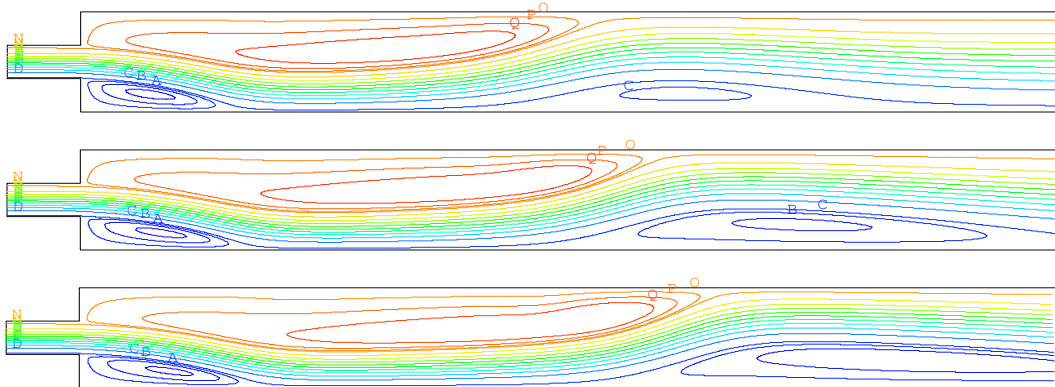
Re	x_1	x_2	Oliveira	x_3	x_4	x_5	x_6	Oliveira
50	0,089	5,104	5,080			0,089	5,110	5,081
53	0,091	5,370				0,091	5,450	
54	0,091	5,422	5,445			0,091	5,599	5,523
55	0,090	4,705				0,092	6,384	
60	0,090	3,929	3,935			0,094	7,666	7,609
80	0,975	3,667	3,658			0,104	10,13	10,06
100	0,103	3,795	3,781	11,96	12,73	0,101	11,72	11,66
150	0,123	4,212		11,68	21,34	0,126	14,05	
200	0,139	4,584		12,84	27,52	0,138	15,76	
250	0,149	4,908		14,15	33,14	0,146	17,39	

Na sliki 3 so prikazane tokovnice za vrednost Reynoldsovega števila $Re = 50, 60, 80$ in 100 . Kot zanimivost lahko navedemo, da se v našem primeru pri nižjih vrednostih Reynoldsovega števila povečuje dolžina spodnjega vrtinca, po pojavu tretjega vrtinca pa se razmere obrnejo, tako da se spodnji vrtinec nenadoma zmanjša in se na spodnjem robu prične tvorba tretjega vrtinca. Po navedbah Drikakisa [8] je kraj nastanka daljšega vrtinca naključen in lahko nastane tako na zgornjem, kot na spodnjem robu.



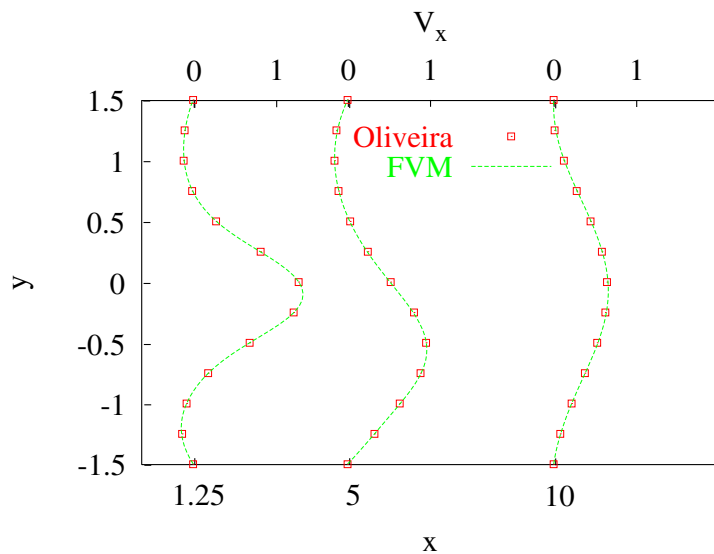
Slika 3 : Tokovnice za vrednosti Reynoldsovega števila $Re = 50, 60, 80$ in 100 . Izrisane so vrednosti tokovne funkcije ψ A -0,05 B -0,03 C -0,01 D 0,01 E 0,1 F 0,2 G 0,3 H 0,4 I 0,5 J 0,6 K 0,7 L 0,8 M 0,9 N 0,99 O 1,01 P 1,05 in Q 1,1.

Na sliki 4 so prikazane tokovnice za vrednost Reynoldsovega števila $Re = 150, 200$ in 250 .



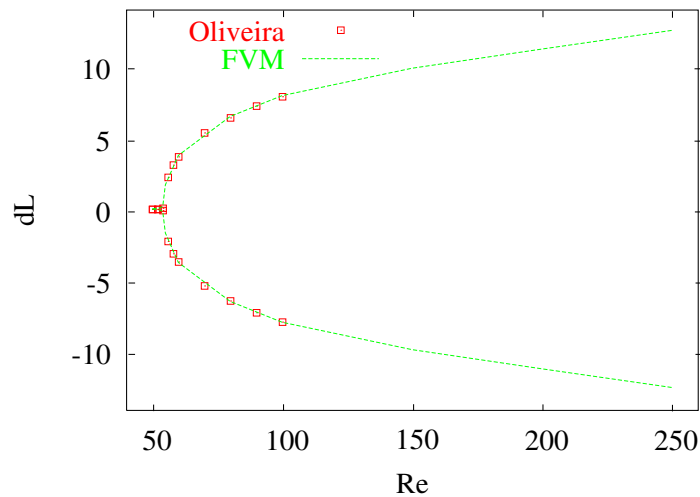
Slika 4 : Tokovnice za vrednosti Reynoldsovega števila $Re = 150, 200$ in 250 . Izrisane so vrednosti tokovne funkcije ψ A -0,05 B -0,03 C -0,01 D 0,01 E 0,1 F 0,2 G 0,3 H 0,4 I 0,5 J 0,6 K 0,7 L 0,8 M 0,9 N 0,99 O 1,01 P 1,05 in Q 1,1.

Na sliki 5 imamo prikazano primerjavo hitrostnih profilov na treh oddaljenostih od nenadne razširitve ($x = 1,25, 5, 10$) za vrednost Reynoldsovega števila $Re = 80$. Primerjali smo z referenčnimi rezultati Oliveire [5].



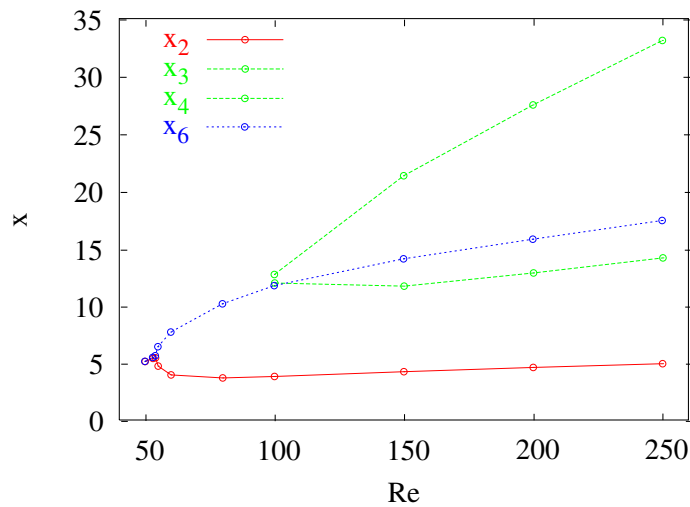
Slika 5 : Hitrostni profili v_x za $Re = 80$, na oddaljenosti $x = 1,25, 5, 10$, primerjava z referenco.

Na sliki 6 imamo prikazan bifurkacijski graf, na katerem je prikazana razlika med dolžino zgornjega in spodnjega vrtinca v odvisnosti od vrednosti Reynoldsovega števila. Iz grafa je razvidno, da je tok do kritične točke simetričen, nakar se simetrija poruši.



Slika 6 : Bifurkacijski graf, $dL = x_6 - x_2$, primerjava z referenco.

Na sliki 7 imamo prikazano rast recirkulacijskih vrtincev s povečevanjem vrednosti Reynoldsovega števila. Tok doseže ustaljene razmere za vrednosti Reynoldsovega števila do $Re = 250$. Nad to mejo postanejo razmere neustaljene.



Slika 7 : Recirkulacijske dolžine.

5 Zaključki

Reševali smo tok skozi nenadno simetrično razširitev za različne vrednosti Reynoldsovega števila. Uporabili smo metodo kontrolnih volumnov, pri čemer smo enačbe za ohranitev mase

in gibalne količine reševali eksplicitno. Za izračun konvektivnih tokov smo uporabili metodo karakteristik, za izračun difuzijskih pa metodo končnih razlik. Dobljene rezultate smo primerjali z rezultati dosegljivimi iz literature. Dobili smo zadovoljivo ujemanje kritične vrednosti Reynoldsovega števila z referenčnimi rezultati. V nadaljevanju raziskave smo obdelali še pojav in rast tretjega vrtinca, vse do začetka neustaljenega toka.

Literatura

- [1] F. Durst, A. Melling, J. H. Whitelaw, Low reynolds number flow over a plane symmetrical sudden expansion, *J. Fluid Mech.* 64 (1) (1974) 111–128.
- [2] W. Cherdron, F. Durst, J. H. Whitelaw, Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with a sudden expansion, *J. Fluid Mech.* 84 (1978) 13–.
- [3] D. Drikakis, Bifurcation phenomena in incompressible sudden expansion flows, *Phys. Fluids.* 9 (1997) 76–86.
- [4] T. Hawa, Z. Rusak, The dynamics of a laminar flow in a symmetric channel with a sudden expansion, *Int. J. Fluid Mech.* 436 (2001) 283–320.
- [5] P. J. Oliveira, Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 114 (2003) 33–63.
- [6] D. Drikakis, P. A. Govatsos, D. E. Papantonis, A characteristic-based method for incompressible flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 19 (1994) 667–685.
- [7] Z. Žunič, Numerična obravnava problema aerodinamike vozil, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, 1997.
- [8] P. Neofytou, D. Drikakis, Non-newtonian flow instability in a channel with sudden expansion, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 111 (2003) 127–150.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2004

Analiza metod za simuliranje vezanih problemov s programom LS-DYNA

M. Vesenj¹, H. Müllerschön², A. Hummel³, Z. Ren¹

Analysis of methods for simulating coupled problems with the software LS-DYNA

Povzetek. Prispevek opisuje primerjavo metod simuliranja interakcije med tekočino in trdnino s programom LS-DYNA. Različne metode simulacije tekočine (Lagrange, Euler, ALE in SPH) so uporabljene za analizo vezanega problema deformabilnega rezervoarja, napoljenega s tekočino in izpostavljenega dinamični obremenitvi. Rezultati računalniških simulacij so primerjani z obstoječimi eksperimentalnimi meritvami. Izvedena primerjava kaže, da lahko gibanje tekočine zelo dobro opišemo tudi z alternativnimi metodami za simuliranje tekočine, saj so takšni modeli zelo ekonomični in primerni za vgradnjo v večje sklope (modele).

Abstract. The paper describes methods for simulation of fluid-structure interaction with the software LS-DYNA. Different formulations (Lagrange, Euler, ALE and SPH) for simulating the fluid have been presented in the way the LS-DYNA deals with such problems. The described methods have been applied, evaluated and compared with an experiment. Computational simulations have shown that the motion of the fluid can be very good described with the alternative methods in LS-DYNA. Additionally, such models are very economical and suitable for building into bigger and more complex models.

1 Uvod

V zadnjem času postajajo numerične simulacije vse pomembnejše. Cilj le-teh ni več zgolj določitev obnašanje samo enega fizikalnega sistema, temveč tudi medsebojni vpliv dveh ali več fizikalnih sistemov. Kadar medsebojno vplivata dva ali več sistemov in je rešitev posameznega brez upoštevanja ostalih nemogoča, govorimo o vezanih problemih. [9]

V predloženem prispevku je obravnavan vezan problem povezave med tekočino in trdnino. Prispevek opisuje in primerja različne numerične metode za reševanje omenjenih problemov. Predstavljene so možnosti računalniškega simuliranja dinamike tekočin in trdnin s sistemom LS-DYNA, ki temelji na metodi končnih elementov. Primerjava metod je ponazorjena s

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² DYNAmore GmbH, Stuttgart, Nemčija

³ DaimlerChrysler AG, Stuttgart, Nemčija

praktičnim primerom pretakanja tekočine v deformabilnem rezervoarju. Rezultati le-teh pa so vrednoteni glede na rezultate eksperimenta. Cilj raziskave je olajšati izbiro metode za uporabo v različnih in mnogostranskih problemih interakcije med tekočino in trdnino.

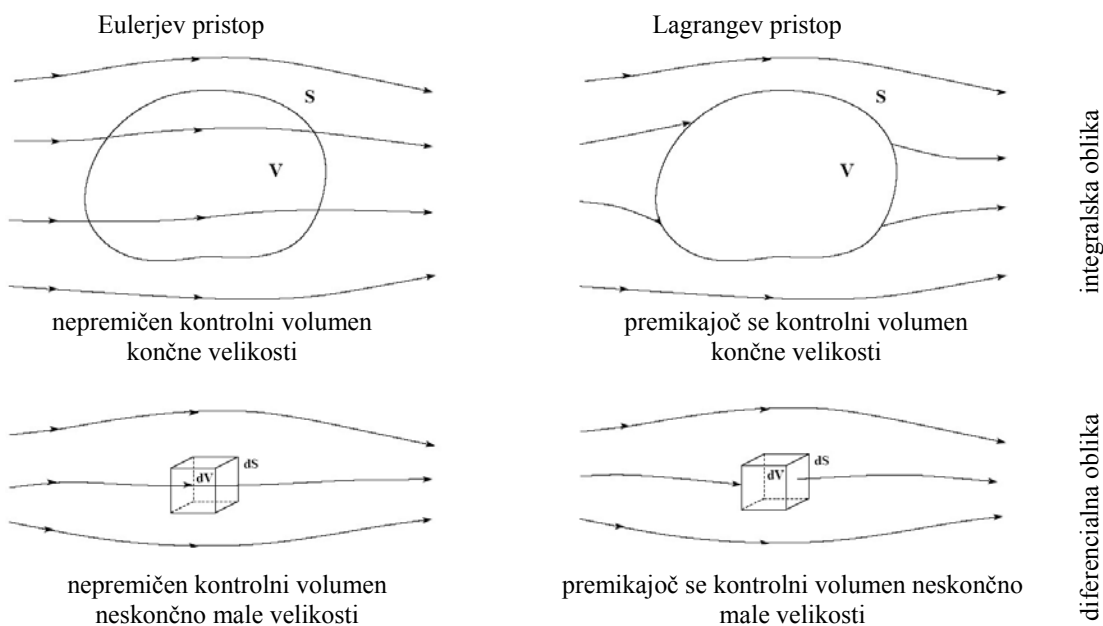
2 Različni načini zapisov fizikalnega problema

Lagrangeov način se običajno uporablja v mehaniki trdnin. Problem opišemo z velikim številom masnih delcev in opazujemo gibanje vsakega posameznega delca v prostoru in času. Problem je natančno določen kadar poznamo gibanje vseh delcev.

Čeprav je Lagrangeov način opisa gibanja jase in preprost, ko gre za posamezen masni delec, pa je v primeru proučevanja celotnega tokovnega prostora, predstavljenega z velikim številom masnih delcev, v večini primerov izredno kompleksen. [3]

Pri Eulerjevem načinu (slika 1) opazujemo problem v določenimi prostorski točki in ne sledimo gibanju posameznega delca. V časovnem intervalu Δt gredo skozi točko številni masni delci, katerih gibanje je v trenutku prehoda določeno z veličinami polja v dani točki (npr. hitrostjo, temperaturo). V opazovani točki se veličine polja spreminjajo s časom.

Temeljna razlika med Lagrangevim in Eulerjevim pristopom je v tem, da so pri Lagrangeovem načinu, veličine x , y in z spremenljive koordinate gibljivega delca, pri Eulerjevem načinu pa pomenijo mirujoče koordinate določene točke polja. [3]

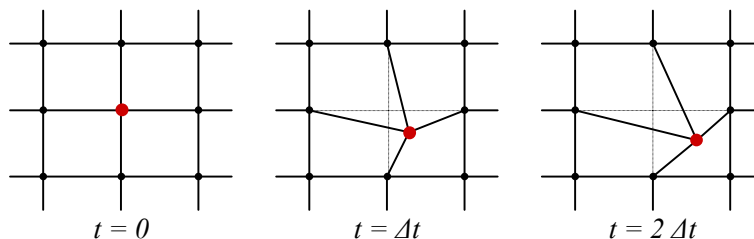


Slika 1: Prikaz Eulerjeve in Lagrangeove formulacije. [1]

3 Razpoložljive metode za opis fizikalnih problemov

Računalniški program LS-DYNA temelji na metodi končnih elementov in je namenjen analizi dinamičnih problemov v strukturi mehaniki. Interakcijo med tekočino in trdnino je možno v omenjenem programu opisati in simulirati na več načinov. Zahtevnejši del je definiranje tekočine, saj je program v osnovi namenjen preračunavanju mehanike trdnih teles, za katerega se običajno uporablja Lagrangeov opis. Za modeliranje in simuliranje tekočine pa so na voljo naslednje možnosti:

Lagrangeov opis: v analizi predstavlja en končni element isti delež materiala celoten potek analize. Domena, napolnjena s tekočino, se lahko opiše z materialnim modelom, ki onemogoči računanje deviatoričnih napetosti. Z določitvijo nizkega strižnega modula se je moč izogniti elastičnim strižnim silam (pri tekočinah kot je npr. voda) in z uporabo nizke meje tečenja se doseže hiter prehod v plastično področje (npr. le z upoštevanjem gravitacije). Ob uporabi visokih dinamičnih obremenitev so potemtakem neupoštevane strižne sile in nerealne vpeljane sile (elastične strižne napetosti) zanemarljive glede na vztrajnostne sile tekočine. Na sliki 2 je prikazano reševanje enostavnega problema z Lagrangeovim opisom. Predpostavljeno je, da deluje obremenitev le na sredinsko vozlišče. Rezultat te obremenitve je pomik vozlišča v računskem časovnem koraku. V kolikor vpliv obremenitve ne preneha oz. se spremeni, vozlišče v naslednjem časovnem koraku ponovno zavzame nov položaj.



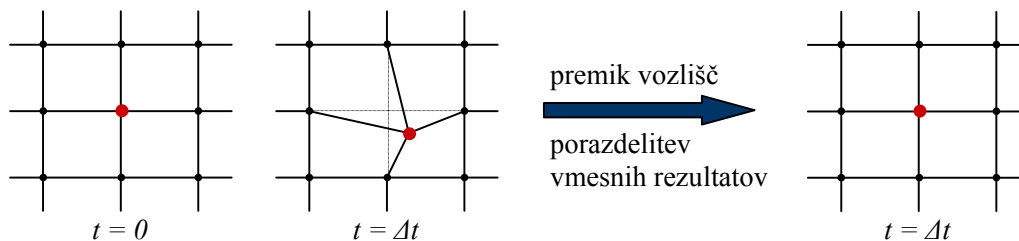
Slika 2: Lagrangeov način preračunavanja modela.

Eulerjev opis: LS-DYNA omogoča analiziranje tekočine z nepremično mrežo v prostoru, skozi katero teče tekočina. Material se premika iz enega končnega elementa v drugega. Kadar govorimo o osnovnem Eulerjevem opisu mislimo na mrežo, ki se ne premika in ne deformira. Kljub temu da na izgled Eulerjeva mreža v LS-DYNI miruje in se ne deformira, le-ta spreminja svojo obliko v posameznih časovnih korakih, saj se pri reševanju samega problema poslužuje Lagrangeovega zapisa, ki je v LS-DYNI mnogo bolj razdelan.

Eulerjeva mreža končnih elementov je v LS-DYNI obravnavana po posebnem principu (slika 3). Kot posledica obremenitev (npr. toka tekočine) opazovano vozlišče po enem časovnem koraku, sorazmerno obremenitvi, spremeni svoj položaj (mreža se deformira). Po časovnem koraku se analiza ustavi in izvedeta se dve aproksimaciji [5]:

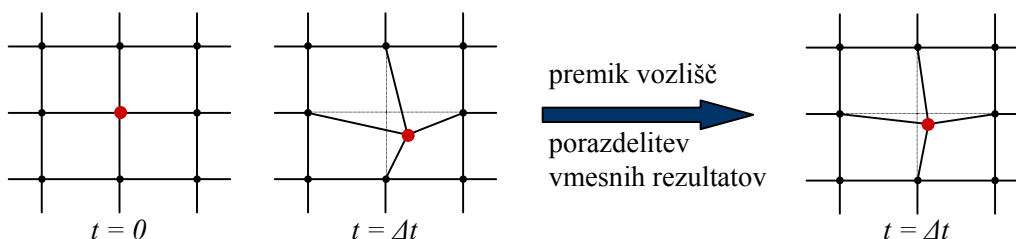
- premik vozlišč: vsem vozliščem "Eulerjeve" mreže, ki so zaradi obremenitev spremenila svojo lego, se ponovno definira izhodiščna lega;
- porazdelitev vmesnih rezultatov: vsem veličinam, ki so se nanašale na vozlišča s spremenjenim položajem, priredi vrednosti tako, da so napetosti, tokovna polja, polja hitrosti itn. ustrezno prenesena na izhodiščne koordinate vozlišč in premik vozlišč ne vpliva na obremenitveno polje pri analizi.

Opisan postopek se ponavlja celoten računski čas analize ter uporabniku programa ponuja mirujočo nedeformabilno Eulerjevo mrežo.



Slika 3: Eulerjev način preračunavanja modela.

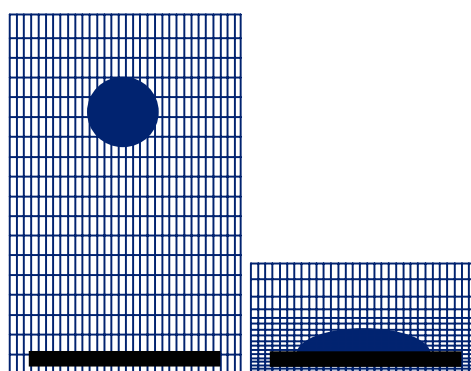
Lagrange-Eulerjev opis (Arbitrary Lagrangian Eulerian - ALE): pri katerem naj bi se prevzele prednosti obeh formulacij. Mreža (material) se lahko premika in deformira ter sledi materialu v modelu (Lagrangeov opis), dodatno pa dopušča, da se material skozi mrežo pretaka, kar je značilnost Eulerjevega opisa. Tudi pri tem opisu se izvaja podoben postopek kot pri Eulerjevi formulaciji (slika 4). Razlikuje se v računanju novih koordinat vozlišč, ki so



Slika 4: ALE način preračunavanja modela.

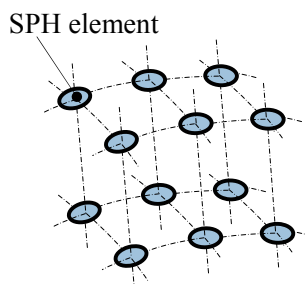
spremenila svoj položaj. Vozlišča namreč niso zamaknjena nazaj na izhodiščne lege, ampak se nov položaj vozlišča izračuna na podlagi povprečne oddaljenosti od sosednjih elementov. V LS-DYNI ločimo ALE elemente, ki lahko vsebujejo le eno vrsto tekočine v določenem trenutku (angl. single material) in elemente, ki omogočajo, da se v enem elementu nahaja več različnih tekočin hkrati (angl. multi material).

Prednost Lagrange-Eulerjevega opisa se pokaže, kadar želimo slediti določeni napetostni fronti in želimo, da gostejša mreža sledi fronti ali v primeru analize rezervoarjev, kjer se v notranjosti rezervoarja pretaka gorivo, mejna ploskev pa se zaradi vpliva med trdnino in tekočino ves čas spreminjajo (slika 5). Podobne metode se uporabljajo tudi v drugih programski paketih kot npr. MSC/Dytran.



Slika 5: Možnosti uporabe ALE formulacije.

SPH metoda (Smoothed Particle Hydrodynamics): je integracijska shema, ki so jo razvili Lucy, Gingold in Monaghan (1977). Razvita je bila na podlagi Lagrangeove formulacije, z namenom izogniti se omejitvam mreže, kadar nastopijo zelo velike deformacije v okviru metode končnih elementov. Glavna razlika med standardnimi metodami in SPH je odsotnost mreže (slika 6). Zatorej so delci računska osnova preko katerih se rešujejo temeljne enačbe [2].

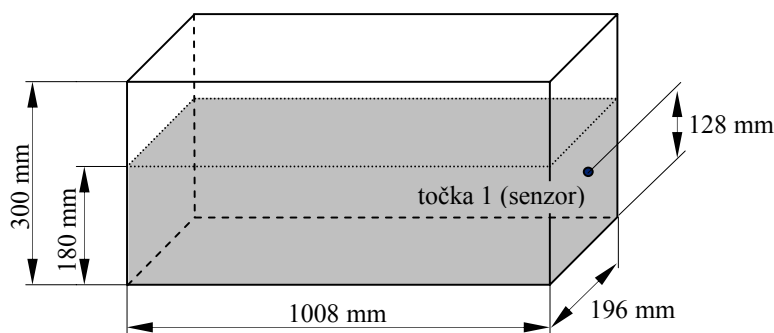


Slika 6: SPH model.

3 Pretakanje tekočine v deformabilnem rezervoarju – praktični primer

3.2 Opis problema in računalniški model

Za vrednotenje zgoraj opisanih metod je bila izvedena primerjalna analiza pretakanja tekočine v rezervoarju (slika 7), kjer so bili rezultati računalniških simulacij primerjani z že izvedenimi eksperimentalnimi meritvami [8].



Slika 7: Praktičen primer.

Predmet analize je rezervoar iz pleksi stekla, ki je do višine 180 mm napolnjen z vodo (slika 7). Debelina sten je 30 mm. Model rezervoarja sestavljajo lupinski Belytschko-Tsay končni elementi, ki imajo tri integracijske točke po debelini elementa. Uporabljen je bil elasto-plastičen materialni model. Celoten rezervoar je bil pospešen s pospeškom, katerega časovna odvisnost je povzeta po [8]. Začetna hitrost modela v času $t = 0$ s je 0 m/s. Pomik rezervoarja je omejen v vertikalni (z) smeri. Model rezervoarja s tekočino je bil izpostavljen tudi delovanju konstantnega gravitacijskega pospeška ($g = 9,81$ m/s). V točki 1 (slika 7) je bil

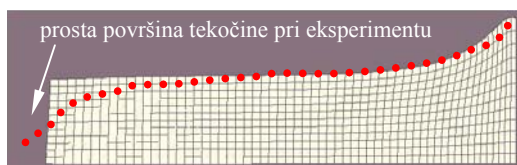
nameščen senzor, ki je meril tlak s katerim voda deluje na steno rezervoarja. Za primerjavo položaja površine tekočine med testom pa je bil uporabljen posnetek konfiguracije proste površine v času $t = 38$ ms eksperimenta [8].

3.2 Podatki dinamične analiz

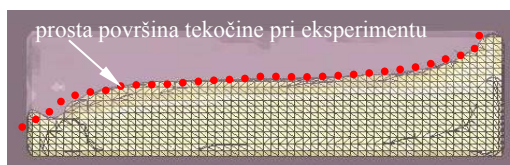
Izvedene so bile eksplisitne dinamične analize z uporabo štirih različnih metod simuliranja tekočine: Lagrange, Euler, ALE in SPH. Za izvedbo analiz je bil uporabljen program LS-DYNA PC Version 970 [4]. Opazovani časovni interval 80 ms. Časovni korak inkrementne simulacije je bil določen glede na najnižjo resonančno frekvenco strukture in je znašal 0,01 ms. Posamezni model so bili sestavljeni iz približno 5000 končnih elementov.

3.2 Rezultati

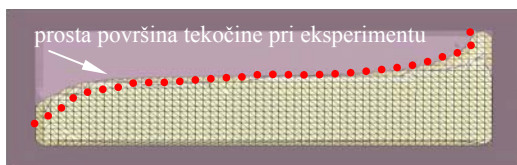
Na slikah 8 do 11 so prikazani rezultati v obliki primerjave proste površine tekočine pri času $t = 38$ ms.



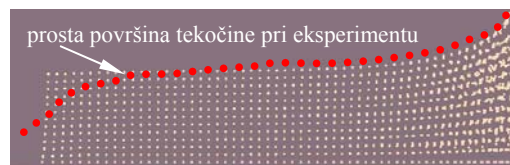
Slika 8: Površina tekočina pri $t = 38$ ms (Lagrange).



Slika 9: Površina tekočina pri $t = 38$ ms (Euler).



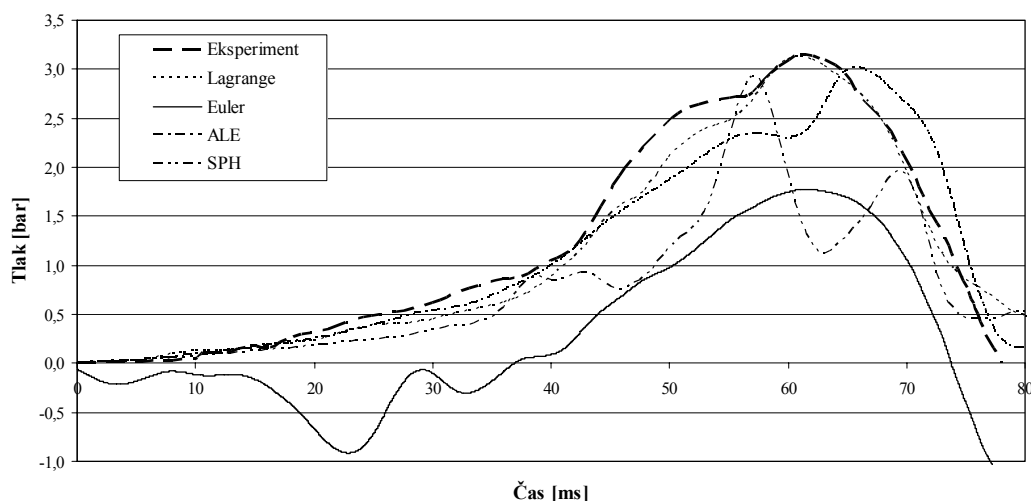
Slika 10: Površina tekočina pri $t = 38$ ms (ALE).



Slika 11: Površina tekočina pri $t = 38$ ms (SPH).

Iz slike 8 je razvidno, da je SPH in Lagrangeova formulacija le aproksimacija gibanja tekočine, saj v realnosti tekočina ne bi obdržala oblike posode. Kljub temu pa je potrebno razmisliti ali ima to velik vpliv na globalen rezultat analize. V primeru, da je pomemben le impulz zaradi udarca tekočine ob steno, so deformacije in pomiki na nasprotnem - oddaljenem delu modela lahko zanemarljivi. ALE in Eulerjeva formulacija opišeta položaj proste površine tekočine mnogo bolje, kar pa zahteva tudi več računskega časa. Problem, ki se pojavi z Lagrangevim opisom tekočine je popačenost elementov, saj le-ti sledijo toku materiala. Zato je za zelo velike deformacije Lagrangeova metoda neprimerna.

Na sliki 12 je prikazana primerjava tlakov s katerim deluje tekočina na senzor, ki je pritrjen na rezervoar (slika 7).



Slika 12: Tlak vode v točki meritve.

Rezultati računalniških simulacij, ki so zbrani v obliki tlakov na sliki 12 so bili določeni na dva različna načina. Tlak s katerim, deluje tekočina na površino pri Lagrangeovi in SPH metodi je bil določen s pomočjo kontaktnih sil, ki delujejo na opazovanem območju. Tlak pri ALE in Eulerjevi metodi pa LS-DYNA določi s pomočjo kriterija za prepuščanje tekočine skozi steno (angl. leakage control). S pomočjo le-tega ovrednoti silo, ki je potrebna za vzpostavitev ravnotežja v vsakem opazovanem elementu na meji med tekočino in trdnino. Najboljše ujemanje z eksperimentalnimi rezultati dosežemo z Lagrangeovim in ALE opisom tekočine. Tlak, določen z SPH metodo, prav tako zagotavlja dober opis tekočine, še posebej, če upoštevamo dejstvo, da je modeliranje pri tej metodi zelo hitro in nezahtevno (mreža sestoji le iz SPH vozlišč – elementov) in omogoča zelo stabilno analizo. Odstopanje pri primerjavi rezultatov opazimo le z uporabo Eulerjeve metode, kjer pa ni vzrok v natančnosti metode, temveč v drugačnem načinu modeliranja zraka v rezervoarju (uporabljena je bila drugačna enačba stanja [5]).

Kljub temu, da so bile deformacije rezervoarja zelo majhne in skoraj neopazne, zaradi velike debeline sten rezervoarja v eksperimentu [8], je bila interakcija med tekočino in trdnino ves čas prisotna. V primeru, da bi debelino stene rezervoarja zmanjšali bi le-ta postala očitnejša.

Iz numeričnih analiz je razvidno, da obstoječe metode, ki so na razpolago v LS-DYNI, nudijo zanesljivo alternativo za simuliranje vezanih problemov. Prednost SPH in Lagrangeove formulacije je računski čas analize, ki je mnogo manjši od računskega časa ALE in Eulerjeve formulacije. Vendar je gibanje tekočine veliko bolje opisano z uporabo slednjih.

4 Zaključek

V prispevku so predstavljene numerične metode za reševanje vezanih problemov med tekočino in trdnino s programom LS-DYNA. Različne metode (Lagrange, Euler, ALE in SPH) so bile uporabljene za analizo gibanja tekočine v deformabilnem rezervoarju, numerični rezultati pa so bili primerjani z eksperimentalnimi meritvami. Primerjava rezultatov je pokazala, da lahko z uporabo različnih metod dosežemo dobro ujemanje z realnostjo, zato so omenjeni modeli zelo primerni za integracijo v večje numerične modele (npr. določitev deformacije rezervoarja vozila pri analizi trka).

Literatura

- [1] J. Ferziger, M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [2] L. L. Lacombe, *Smoothed Particle Hydrodynamics. Part I, II*.
- [3] L. Škerget, *Mehanika tekočin*, Tehniška fakulteta v Mariboru in Fakulteta za strojništvo v Ljubljani, 1994.
- [4] Livermore Software Technology Corporation, *LS-DYNA Keyword User's Manual. Version 970*, Livermore, 2003.
- [5] Livermore Software Technology Corporation, *LS-DYNA Theoretical Manual*, Livermore, 1998.
- [6] M. Hriberšek, *Računalniška dinamika tekočin*, Fakulteta za strojništvo, Maribor, 2001.
- [7] M. Vesenjaj, Z. Ren, M. Hriberšek, *Weakly coupled analysis of a blade in multiphase mixing vessel*, GAMM 2004, Dresden, 2004.
- [8] M. Meywerk, F. Decker, J. Cordes, *Fuel Sloshing in Crash Simulation*, EuroPAM 99, 1999.
- [9] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method – Volume 1 – The Basis*, McGraw-Hill Ltd., London, 2000.
- [10] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method – Volume 3 – Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Ltd., London, 2000.



SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO
SREČANJE KUHLJEVI DNEVI 2004

Vpliv zračnosti zobniškega para na natančnost gibanja enoročičnega manipulatorja

B. Vohar¹, K. Gotlih², Z. Ren³

The influence of gear backlash on the motion accuracy of a single link manipulator

Povzetek. V delu je obravnavana dinamična analiza enoročičnega manipulatorja z upoštevanjem elastičnosti in zračnosti v zobniškem prenosniku. Zračnost najmočneje vpliva na zmanjšano natančnost vodenja manipulatorja ter povzroča neželene vibracije. Prikazan je opis modeliranja zračnosti zobniškega para in uporabljenega kontaktnega modela, od koder je razvidno, kako zelo se poveča kompleksnost dinamičnega modela zaradi vpliva zračnosti. Opisana teorija je nato uporabljena za izpeljavo dinamičnega modela enoročičnega manipulatorja z Lagrangeovo metodo. Izdelan je algoritem in računalniški program za izračun direktne dinamike enoročičnega manipulatorja. Nato so izvedene primerjalne analize enoročičnega manipulatorja z zračnostjo ter enakega sistema brez zračnosti. Prikazani rezultati na diagramih rotacij in kotnih hitrosti prikazujejo nenatančnosti manipulatorja z zračnostjo ter vibracije, do katerih prihaja zaradi zračnosti.

Abstract. In this work the dynamic analysis of a single link manipulator is considered, with backlash and elasticity of the gear transmission taken into the account. Backlash is considered to be one of the most significant phenomena in gear dynamics that negatively influences on the manipulator motion accuracy. A description of a spur gear dynamics model that includes the effects of backlash and gear tooth elasticity is given, where it is shown the increased complexity of such a system comparing to an idealized, backlash-free one. The presented theory is then used for the dynamic analysis of a single link manipulator with Lagrangian method, and the computer algorithm for its solution is developed. The manipulator with backlash and elasticity is then compared to the equal, but stiff and backlash-free version. At the end results are shown, which confirm increased inaccuracy of the manipulator with backlash.

¹ mag. Bojan VOHAR, univ. dipl. inž. str., Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, (bojan.vohar@uni-mb.si)

² doc. dr. Karl GOTLIH, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, (gotlih@uni-mb.si)

³ izr. prof. dr. Zoran REN, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, (ren@uni-mb.si)

1 Uvod

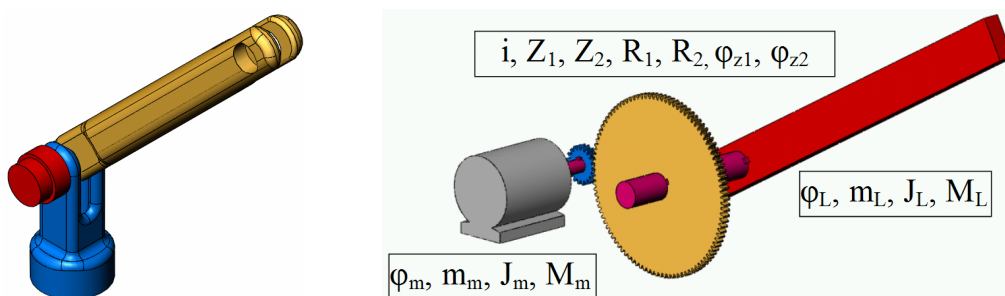
V sodobni proizvodnji in tehnologiji so industrijski roboti oz. manipulatorji nepogrešljivi. Da bo manipulator učinkovit, mora biti njegovo gibanje dovolj natančno in ponovljivo. Slednje pa je v veliki meri odvisno od kontrolnega sistema, ki mora zagotoviti opisane zahteve med delovanjem, hkrati pa mora biti sposoben zaznavati spremembe v strukturi manipulatorja, do katerih prihaja zaradi delovanja samega (npr. obraba elementov). Glavne težave, ki se pojavijo ob uporabi regulacije, so predvsem časovni zamik reguliranega signala (zelo pomembno pri hitrih sistemih), zahtevana natančnost in občutljivost senzorjev ter s tem neizogibno povezana višja cena takšnega sistema. Veliko oviro pri razvoju sodobnih, hitrotekočih manipulatorjev poleg konstrukcijskih rešitev še vedno povzroča kontrolni sistem, ki temelji na matematičnem modelu dinamike manipulatorja. Od stopnje natančnosti tega modela je v največji meri odvisna učinkovitost regulacije in časovni zamik reguliranega signala. Zaradi omenjenih težav so zato večinoma v uporabi čim enostavnejši dinamični modeli manipulatorjev, kar se zelo izkazuje že ob sami fizični obliki manipulatorjev. Le-ti imajo večinoma težke in veliko predimenzionirane elemente ter tako preveliko togost za podane naloge. S tem je doseženo, da lahko tak manipulator obravnavamo kot sistem kvazitogih teles, kar dinamiko zelo poenostavi.

Ena pomembnejših poenostavitev je tudi neupoštevanje zračnosti v zobniških prenosih manipulatorja. Čeprav se na tržišču pojavlja vedno več alternativnih rešitev (npr. t.i. direct-drive in harmonic-drive pogoni), so običajna zobniška gonila še vedno najbolj pogosta oblika prenosa in povečanja motornega momenta v pogonih manipulatorjev [2],[3]. Njihova pomembna slabost je zračnost med zobmi, ki povzroča udarce, hrup, neželene vibracije in zmanjšuje natančnost ter ponovljivost sistema. Večina kontrolnih sistemov v svoji strukturi ne upošteva zračnosti in drugih nelinearnosti zobniških prenosov, zato se napakam vodenja ni moč izogniti. S povečevanjem potreb po natančnejših sistemih (npr. CNC stroji, hitri in lahki manipulatorji) so te težave vse bolj očitne.

Iz opisanega razumljivo sledi želja po čim učinkovitejšem dinamičnem modelu, ki bi zajel čim več parametrov, ki pomembno vplivajo na delovanje in vodenje manipulatorja, hkrati pa bil dovolj hiter za uporabo v kontrolnih sistemih. V delu je prikazan primer dinamičnega modela enoročičnega manipulatorja ob upoštevanju zračnosti zobniškega prenosa. Namen je prikazati vpliv zračnosti na natančnost gibanja takšnega sistema v primerjavi z idealiziranim, togim modelom, kjer zračnosti in elastičnosti v zobniškem prenosniku ne upoštevamo. Zato v nadaljevanju najprej sledi prikaz dinamičnega modela idealiziranega modela, ki bo služil kot referenčni model, nato pa je opisano modeliranje zobniškega para z zračnostjo. Zaradi nezveznosti, ki se pojavi zaradi zračnosti, postane v določenih trenutkih delovanja mehanski sistem nesklopljen (nepovezan), kar moramo v dinamičnem modelu nujno upoštevati. Prikazana teorija je nato uporabljena za izpeljavo dinamičnega modela in analizo enoročičnega manipulatorja z zračnostjo v zobniškem prenosniku. Prikazana je primerjava s togim, idealiziranim modelom brez zračnosti, iz česa je jasno razvidno, kako se zaradi prisotne nezveznosti v sistemu poveča kompleksnost gibalnih enačb ter postopek reševanja. V zaključku prikazani rezultati primerjanih analiz jasno prikažejo vpliv zračnosti na natančnost vodenja celotnega sistema.

2 Model idealiziranega enoročičnega manipulatorja

Dinamični model idealiziranega enoročičnega manipulatorja, prikazanega na sliki 1, predstavlja referenco, s katero bomo primerjali natančnost enakega manipulatorja z zračnostjo v zobniškem prenosniku.



Slika 1: Poenostavljen model ter glavni parametri enoročičnega ravninskega manipulatorja

Vse sestavne dele, vključno z zgibi, obravnavamo kot popolnoma toge. Glavni karakteristični parametri manipulatorja so: φ_m, m_m, J_m, M_m (kot rotacije rotorja, masa motorja, masni vztrajnostni moment rotorja ter pogonski moment motorja); φ_L, m_L, J_L, M_L (parametri ročice: kot zasuka, masa, masni vztrajnostni moment, moment bremena); $i, Z_1, Z_2, R_1, R_2, \varphi_{z1}, \varphi_{z2}$ (prestavno razmerje zobniškega prenosnika, število zob ter osnovna kroga zobnika 1 in 2, kota rotacije zobnika 1 in 2). Za tak manipulator zapišemo gibalne enačbe po Lagrangeovi metodi. Zobniški par obravnavamo kot idealen, brez zračnosti, zanj velja osnovni zakon ozobja. Prav tako obravnavamo vse gredi kot popolnoma toge. Zato lahko zapišemo naslednje zveze za rotacije posameznih elementov:

$$\varphi_{z1} = \varphi_m \quad \varphi_{z1} = i \cdot \varphi_{z2} \quad \varphi_L = \varphi_{z2} = \varphi_m / i \quad (1)$$

Vse rotacijske veličine smo reducirali na pogonsko stran, sistem ima samo eno prostostno stopnjo. Za zapis gibalnih enačb z Lagrangeovo metodo potrebujemo izraze za kinetično in potencialno energijo ter virtualno delo vseh zunanjih sil na sistem. Celotna kinetična energija sistema je vsota kinetičnih energij posameznih komponent:

$$T = \dot{\varphi}_m^2 / 2 \left[J_m + J_{z1} + (J_{z2} + J_L / i^2) \right] \quad (2)$$

K potencialni energiji sistema prispeva samo gibanje ročice, ostale komponente se vrtijo okoli nepomičnih osi in njihova težišča ne spreminjajo položaja:

$$V = m_L g L \sin \varphi_L = m_L g L \sin(\varphi_m / i) \quad (3)$$

Pogonski moment motorja je edina zunanja sila na sistem. Na strani ročice predstavlja moment bremena samo masa ročice in je že zajet v potencialni energiji. Zato je virtualno delo zunanjih sil:

$$\delta W = M_1 \delta \varphi_m \quad (4)$$

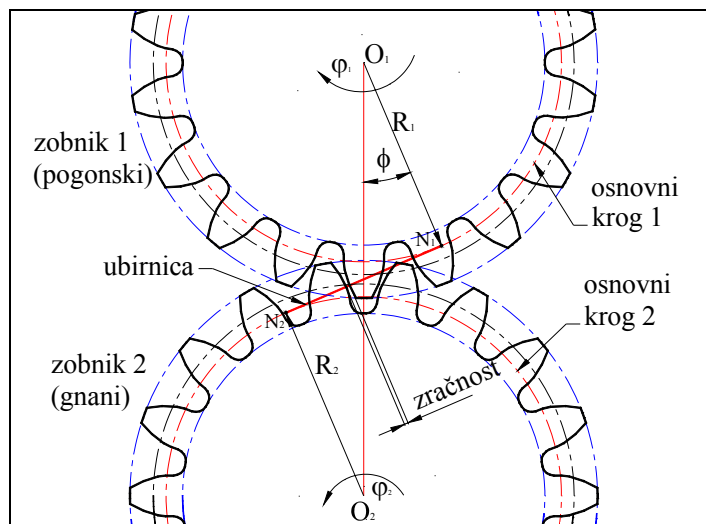
Iz zgornjih izrazov sledi gibalna enačba idealiziranega sistema:

$$\left[J_m + J_{z1} + (J_{z2} + J_L / i^2) \right] \ddot{\varphi}_m + (m_L g L / i) \cos(\varphi_m / i) = M_1 \quad (5)$$

3 Dinamika zobniškega para z zračnostjo

V idealnem primeru brez zračnosti velja osnovni zakon ozobja in lahko zobnika modeliramo z nadomestnima kinematičnima valjema. Tak sistem ima eno samo prostostno stopnjo. Prisotnost zračnosti pa v sistem vnese nezveznost in eno dodatno prostostno stopnjo. Sedaj ni več dovolj zgolj poznavanje kota pogonskega zobnika, saj zaradi nezveznosti od tod ni

moč takoj sklepati na kot rotacije gnanega zobnika. Ob tem privzamemo popolno togost gredi, prav tako ni nikakršnih deformacij v ležajih. Edina deformacija, ki se pojavi v modelu, je posledica elastičnosti zob zobnikov. Zračnost z definiramo kot linearno razdaljo med zobnima bokoma pogonskega in gnanega zobnika, merjeno vzdolž ubirnice zobniškega para. Celotna zračnost znaša $2z$. Definiramo tudi izhodni oz. začetni položaj zobnikov: kadar središčnica zoba pogonskega zobnika ter središčnica zobne vrzeli gnanega zobnika sovpadata z linijo, ki povezuje osi obeh zobnikov, takrat sta zobnika v izhodnem položaju (slika 2).



Slika 2: Zobniški par z zračnostjo v začetnem položaju

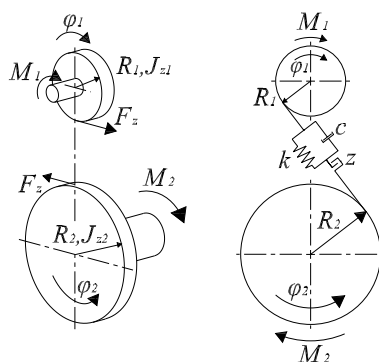
Smer rotacije pogonskega zobnika φ_1 in smer pogonskega momenta M_1 sta pozitivni v sourni smeri, smer gnanega zobnika φ_2 ter odgonskega momenta oz. momenta bremena M_2 pa sta pozitivni v nasprotni smeri. Kot prednji bok zobnika definiramo tisti bok opazovanega zoba, ki je pred drugim bokom istega zoba, gledano v pozitivni smeri rotacije opazovanega zobnika. Prej omenjeni drugi bok imenujemo zadnji bok zoba. Zaradi zračnosti prihaja do izgube kontakta in temu sledečih trkov med zobmi. Tako definiramo tri področja v delovanju zobniške dvojice [2]:

- ZRAČNOST (zobnika nista v kontaktu);
- PREDNJI KONTAKT (prednji bok pogonskega zobnika ubira z zadnjim bokom gnanega zobnika);
- ZADNJI KONTAKT (zadnji bok pogonskega zobnika ubira s prednjim bokom gnanega zobnika);

V primeru idealnega zobniškega para, kadar zračnosti ni, sta zobnika ves čas v kontaktu, sistem je sklopljen in lahko zapišemo gibalno enačbo sistema v obliki:

$$(J_{z1} + J_{z2}/i^2)\ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2/i, \quad (6)$$

kjer sta J_{z1}, J_{z2} masna vztrajnostna momenta obeh zobnikov ter i prestavno razmerje. Zobniški par z zračnostjo pa ne predstavlja sklopljenega sistema. Slika 3 prikazuje shemo modela zobniškega para z zračnostjo. Elastičnost in zračnost zob simuliramo s kombiniranim elementom vzmet-dušilka-zračnost, ki povezuje osnovna valja realnega zobniškega para.



Slika 3: Model zobniškega para z zračnostjo

Dinamiko takšnega sistema je potrebno zapisati za vsako področje delovanja posebej, tako ločimo 3 sisteme gibalnih enačb:

- 1) Prednji kontakt: relativna rotacija obeh zobnikov je večja od velikosti zračnosti, zato prednji bok pogonskega zobnika ubira z zadnjim bokom gnanega:

$$R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 > z \quad (7)$$

Gibalne enačbe tega območja zapišemo v obliki:

$$J_{z1}\ddot{\varphi}_1 = M_1 - F_{zp}R_1 \quad J_{z2}\ddot{\varphi}_2 = M_2 + F_{zp}R_2 \quad (8)$$

F_{zp} je normalna kontaktna sila prednjega kontakta na boku zoba, definirana kot $F_{zp} = k\delta_p + c\dot{\delta}_p$, kjer je δ_p dinamična napaka zobniškega prenosa ter $\dot{\delta}_p$ relativna hitrost vzdolž ubirnice za prednji kontakt:

$$\delta_p = R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 - z \quad \dot{\delta}_p = R_1\dot{\varphi}_1 - R_2\dot{\varphi}_2 \quad (9)$$

- 2) Zračnost: relativna rotacija obeh zobnikov je tokrat manjša od absolutne velikosti zračnosti, pride do izgube kontakta in ločitve zobnikov:

$$-z < R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 < z \quad (10)$$

V tem območju med zobnikoma ni prenosa sile oz. vrtilnega momenta, gibalne enačbe imajo naslednjo obliko:

$$J_{z1}\ddot{\varphi}_1 = M_1 \quad J_{z2}\ddot{\varphi}_2 = M_2 \quad (11)$$

- 3) Zadnji kontakt: relativna rotacija obeh zobnikov je manjša od velikosti zračnosti za zadnjim bokom pogonskega zobnika, zato le-ta ubira s prednjim bokom gnanega:

$$R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 < -z \quad (12)$$

Gibalne enačbe tega območja dobijo obliko:

$$J_{z1}\ddot{\varphi}_1 = M_1 + F_{zz}R_1 \quad J_{z2}\ddot{\varphi}_2 = M_2 - F_{zz}R_2 \quad (13)$$

F_{zz} pa je tokrat definirana kot $F_{zz} = k\delta_z + c\dot{\delta}_z$, dinamična napaka zobniškega prenosa ter relativna hitrost vzdolž ubirnice za zadnji kontakt pa imata v tem primeru obliko:

$$\delta_z = R_2\varphi_2 - R_1\varphi_1 - z \quad \dot{\delta}_z = R_2\dot{\varphi}_2 - R_1\dot{\varphi}_1 \quad (14)$$

V zgornji izrazih predstavljata k in c funkciji togosti zobniške dvojice ter dušenja materiala, ki bosta opisana v nadaljevanju.

Normalna kontaktna sila na bok zoba je povezujoči člen med tremi sistemi enačb. Njena karakteristika je zelo pomembna za same lastnosti in natančnost dinamičnega modela in izhaja iz kontaktnega modela, ki ga uporabimo. Kontaktna sila, uporabljena v našem delu, temelji na teoriji elastičnega trka in je definirana kot kombinacija elastične sile in sile dušenja [3]. Najenostavnejša oblika elastične sile za kontakt dveh zobnih bokov je aproksimirana z uporabo Hertzove kontaktne teorije, kjer zobna boka v trenutni točki kontakta nadomestimo z valjema. Tak pristop sta uporabila Yang in Sun [1], ki sta razvila t.i. rotacijski model kontakta za študijo dinamike ravne zobniške dvojice z zračnostjo. Togost je v njunem modelu aproksimirana kot $k = \pi Eb/4(1-\nu^2)$, kjer je E Youngov modul elastičnosti materiala, b širina zobnih bokov ter ν Poissonovo število. Zveza med elastično silo in deformacijo zoba je seveda nelinearna, vendar sta Yang in Sun z linearizacijo modela pokazala zanemarljiva odstopanja od prvotne, nelinearne zveze [1]. Tako je elastična komponenta kontaktne sile v njunem modelu kar enaka $F = k\delta$, kjer je δ deformacija zoba. Ta model je v literaturi zelo razširjen, vendar ima pomanjkljivost, da upošteva samo vpliv Hertzovega tlaka. Zato je bil predlagan nov, kompleksnejši model, avtorjev Nakade in Utagawe [2]. Ta še dodatno upošteva tudi vplive upogibnega momenta, strižnih deformacij ter deformacije v korenu zoba. Celotno deformacijo zoba tako zapišemo kot: $\delta_i = \delta_b + \delta_s + \delta_f + \delta_h$, kjer so $\delta_b, \delta_s, \delta_f, \delta_h$ komponente deformacije zaradi upogiba, striga, deformacije v korenu ter Hertzovega tlaka. Shing [2] je omenjeni model še razširil in je poleg natezne komponente upogibne sile upošteval tudi tlačno komponento. Podrobnejša izpeljava je zaradi preobširnosti tukaj izpuščena in si jo bralec lahko ogleda v [3]. Izraze za posamezne komponente deformacije zoba ovrednotimo, npr. z enotsko kontaktno silo ter vstavimo v izraz za togost posameznega zoba zobnika j v ubiru: $k_j = F_z/\delta_{y_j}$.

Pri ubiranju zobnikov izmenično ubirata en ali dva para zob (enojno ali dvojno ubiranje), kar ima vpliv na togost ubiranja. Pri dvojnem ubiranju se moment, ki se prenaša skozi gonilo, porazdeli na večje število zob kot pri enojnem ubiranju in je deformacija zob zato manjša oz. skupna togost ubiranja je večja. Zato je potrebno upoštevati tudi ta dejavnik. Z zgoraj opisanim modelom sta zoba v ubiru modelirana kot dve zaporedno spojeni vzmeti. Dvojno ubiranje pa ponazorimo z dvema vzporedno spojenima vzmetema. Torej za skupno togost ubiranja med vsakim celotnim ciklusom ubiranja velja:

$$K = \begin{cases} K_I = k_{11}k_{21}/k_{11} + k_{21} & \text{enojno ubiranje} \\ K_{II} = (k_{11}k_{21}/k_{11} + k_{21}) + (k_{12}k_{22}/k_{12} + k_{22}) & \text{dvojno ubiranje} \end{cases} \quad (15)$$

kjer k_{ij} predstavlja posamično togost j -tega zoba na i -tem zobniku.

Hitrejša kot je rotacija zobnikov, hitreje se bo togost ubiranja spreminjala med enojno in dvojno. Poleg tega se togost spreminja tudi vzdolž zoba samega (v korenu je večja kot v temenu zoba). Takšen spremenljiv potek togosti zelo upočasni izračun dinamike zobniškega para, kar je za uporabo v kontrolnih sistemih v realnem času nesprejemljivo. Zobniški pogoni manipulatorjev so večinoma hitro tekoči in togost ubiranja se spreminja z zelo visoko frekvenco. Zato bi bilo zelo nepraktično, če ne celo nemogoče, dovolj natančno z ustreznimi senzorji zaznavati dejanski potek togosti med obratovanjem (posredno preko položaja in hitrosti). Da se temu izognemo, se zato pri razvoju kontrolnih sistemov manipulatorjev večinoma uporablja nadomestna, povprečna togost. V literaturi kontrolnih sistemov (npr. [2]) zasledimo, da bosta odziva realnega sistema in sistema s povprečenimi parametri zelo blizu

skupaj pod pogojem, če sistem obratuje v območju visokih obratovalnih hitrosti. Seveda z uvedbo povprečne togosti v sistem vnesemo dodaten približek in s tem napako, a ocena je, da prednost v smislu hitrosti reševanja odtehta to napako [2]. Zato smo se tudi pri naših analizah odločili za uporabo nadomestne togosti, ki jo izračunamo kot povprečje celotne togosti enojnega in dvojnega ubiranja nam da končno vrednost nadomestne togosti:

$$k = (K_I + K_{II})/2 \quad (16)$$

Druga komponenta kontaktne sile je poleg togosti še dušenje. V našem delu smo uporabili linearni Kelvin-Voigtov model, ki kontaktno silo aproksimira v obliki $F_z = k\delta + c\dot{\delta}$. Čeprav ni tako natančen kot nekateri drugi modeli, ki jih je moč zaslediti v literaturi ([1], [2]), se je izkazal za hitrejšega in predvsem stabilnejšega. Drugi modeli temeljijo na koeficientu restitucije, zanj pa je potrebno poznavanje trenutnih hitrosti trka. To pa je v realnem sistemu skoraj neizvedljivo, vsekakor pa zelo nepraktično, saj postane regulacijski sistem preobsežen in prepočasen. Faktor dušenja v Kelvin-Voigtovem modelu zapišemo kot [1]:

$$c = 2\zeta \sqrt{k(J_{z2}R_1^2 + J_{z1}R_2^2)/J_{z1}J_{z2}}, \quad (17)$$

kjer je ζ koeficient dušenja zaradi viskozne trenja med zobniki, k pa je povprečna, nadomestna togost ubiranja zobniškega para. Z izrazi za togost ubiranja (16) ter faktor dušenja (17) je kontaktna sila med zobnikoma popolnoma določena.

3 Model dinamike manipulatorja z upoštevanjem elastičnosti in zračnosti zobniškega para

Zgoraj opisan model zobniške dvojice uporabimo za izpeljavo dinamičnega modela enoročičnega manipulatorja z zračnostjo v zobniškem prenosniku. V tem primeru ni več moč reducirati vseh kotnih veličin na pogonsko stran, saj v trenutkih zračnosti med zobnikoma sistem ni sklopljen in takrat je gibanje gnanega zobnika neodvisno od gibanja pogonskega. Veljajo naslednje kotne relacije med komponentami:

$$\varphi_{z1} = \varphi_m \quad \varphi_L = \varphi_{z2} \quad (18)$$

V primerjavi s togim modelom se tukaj pojavi dodatna prostostna stopnja. Gibalne enačbe manipulatorja zapišemo podobno kot prej po Lagrangeovem postopku, s čimer dobimo sistem dveh gibalnih enačb:

$$\left. \begin{aligned} B_1\ddot{\varphi}_m + F_z R_1 &= M_1 \\ B_2\ddot{\varphi}_{z2} + B_3 \cos \varphi_{z2} - F_z R_2 &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} B_1 &= J_m + J_{z1} & B_2 &= J_{z2} + J_L \\ B_3 &= m_L g L \end{aligned} \quad (19)$$

Zaradi zračnosti celotno dinamiko manipulatorja ločimo v tri področja, kot je bilo opisano v prejšnjem poglavju. Tako ima končni sistem enačb naslednjo obliko:

$$\left. \begin{aligned} B_1\ddot{\varphi}_m &= M_1 \\ B_2\ddot{\varphi}_{z2} + B_3 \cos \varphi_{z2} &= 0 \end{aligned} \right\} -z < R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 < z \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1\ddot{\varphi}_m + (k(R_1\varphi_m - R_2\varphi_{z2} - z) + c(R_1\dot{\varphi}_m - R_2\dot{\varphi}_{z2}))R_1 &= M_1 \\ B_2\ddot{\varphi}_{z2} + B_3 \cos \varphi_{z2} - (k(R_1\varphi_m - R_2\varphi_{z2} - z) + c(R_1\dot{\varphi}_m - R_2\dot{\varphi}_{z2}))R_2 &= 0 \end{aligned} \right\} R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 > z \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 \ddot{\varphi}_m - (k(R_2 \varphi_{z2} - R_1 \varphi_m - z) + c(R_2 \dot{\varphi}_{z2} - R_1 \dot{\varphi}_m)) R_1 &= M_1 \\ B_2 \ddot{\varphi}_{z2} + B_3 \cos \varphi_{z2} + (k(R_2 \varphi_{z2} - R_1 \varphi_m - z) + c(R_2 \dot{\varphi}_{z2} - R_1 \dot{\varphi}_m)) R_2 &= 0 \end{aligned} \right\} R_1 \varphi_1 - R_2 \varphi_2 < -z \quad (22)$$

V primerjavi z enačbo (5) je očitno, koliko bolj kompleksen je matematični model obravnavanega manipulatorja, kadar je prisotna zračnost in elastičnost zobniškega reduktorja. To ima seveda velik negativni vpliv na hitrost in način reševanja dinamike. Prikazani sistem enačb opisuje dinamiko osnovnega enoročičnega ravninskega manipulatorja, zato si ni težko predstavljati, kako kompleksen bi šele bil sistem enačb kakšnega prostorskega manipulatorja s 6 prostostnimi stopnjami. Sedaj je bolj razvidno, zakaj matematični modeli v kontrolnih sistemih ne upoštevajo tega pojava.

Za opisani model manipulatorja z upoštevanjem zračnosti smo izdelali računalniško kodo za izračun direktne dinamike. Na kratko lahko potek izračuna opišemo v naslednjih korakih:

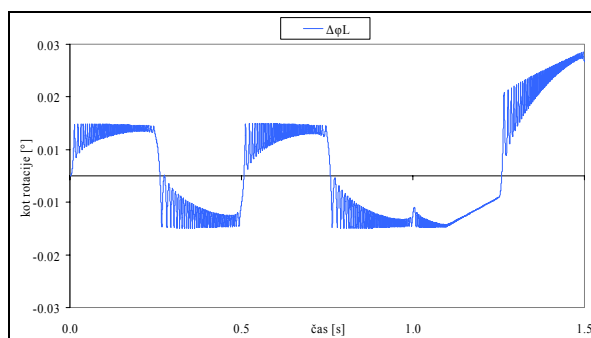
- Branje vseh parametrov sistema in simulacije (čas simulacije, diskretizacija, ...). Ob pričetku simulacije sta zobnika v izhodnem položaju.
- Izračun sistema gibalnih enačb za področje zračnosti (označimo kot stanje 0).
- Izračun časa prehoda v kontakt.
- Izpisovanje vmesnih rezultatov (zahtevanih dinamičnih veličin) stanja 0 v predpisanih časovnih korakih dokler ni dosežen čas prehoda.
- Dosežen je čas prehoda v kontakt, preverjanje kontaktnega pogoja za prednji kontakt (stanje 1) in zadnji kontakt (stanje 2).
- Preklop v ustrezno stanje (1 ali 2) ter prenos končnih rezultatov stanja 0 v nove začetne pogoje.
- Izračun sistema gibalnih enačb za področje kontakta (1 ali 2).
- Izračun časa izgube kontakta in prehoda nazaj v zračnost.
- Izpisovanje vmesnih rezultatov stanja 1 ali 2 v predpisanih časovnih korakih dokler ni dosežen čas preklopa.
- Dosežen je čas prehoda v zračnost, preklop v stanje 0 in prenos novih začetnih pogojev.

Program torej neprenehoma preklaplja med 3 stanji sistema (0, 1 in 2). Kako hitro in kako dolgo se ti preklopi dogajajo, je seveda odvisno od strukture sistema, obremenitev in začetnih pogojev. Po vsakem preklopu je potrebno vsakič znova rešiti sistem gibalnih enačb ustreznega stanja ter izračunati nove prehodne čase, kar pa zelo podaljša računski čas.

4 Rezultati in zaključek

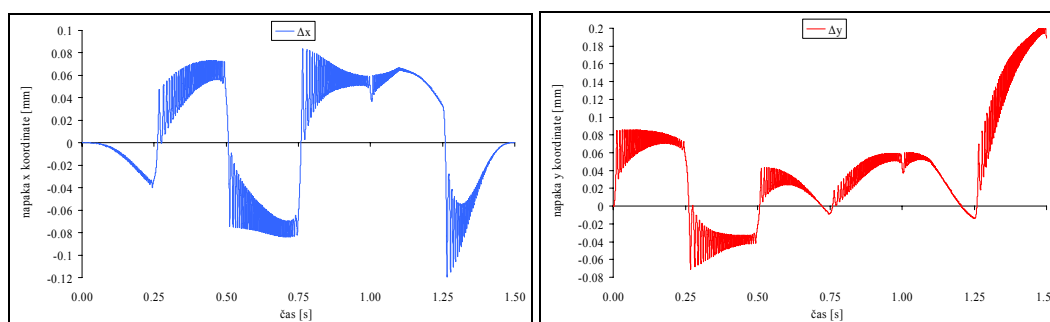
Opisana matematična modela smo simulirali z različnimi obremenitvenimi primeri. V nadaljevanju so prikazani rezultati primera, kjer smo manipulatorju predpisali vnaprej določen gib: rotacije 0° , 60° , 135° , 0° ; v celotnem času 1.5 s ter intervalih 0.5 s za vsak korak, pri čemer je kot rotacije merjen od izhodiščnega, vodoravnega položaja ročice. Podano gibanje je tipa točka-točka, ker imamo podano začetno in končno točko gibanja, vmesnih pa ne. Poleg tega je naša zahteva tudi, da so hitrosti in pospeški v vsaki podani točki enaki nič. Vseh omejitev na posameznem intervalu med dvema zahtevanima točkama je torej 6 ($q_0, q_1, \dot{q}_0, \dot{q}_1, \ddot{q}_0, \ddot{q}_1$), kjer sta $q_0 = q(t_0)$ in $q_1 = q(t_1)$ začetni in končni kot rotacije ročice na posameznem intervalu. Ustrezno tirnico gibanja določimo s polinomi 5. stopnje za vsak posamezni interval, ki jih vstavimo v gibalno enačbo idealiziranega sistema, s čimer dobimo

želeno karakteristiko pogonskega momenta [3]. S tem pogonskim momentom poganjamo oba modela ter opazujemo pozicijske napake oz. odstopanja sistema z zračnostjo. V nadaljevanju so prikazani diagrami primerjave poteka rotacij in kotnih hitrosti obeh manipulatorjev. Rezultati so pričakovani: gibanji obeh sistemov sta zelo blizu skupaj, napake so zelo majhne, kar je glede na velikost zračnosti pričakovano. Na sliki 5 je prikazana kotna napaka manipulatorja skozi celoten gib.



Slika 5: Kotna napaka manipulatorja z zračnostjo

Rezultati kažejo na odstopanje sistema z zračnostjo od idealnega v vseh predpisanih točkah, tako z napako rotacije kot tudi kotne hitrosti. Večje in intenzivnejše kot so spremembe smeri oz. pospeški in pojemki sistema, večja bodo odstopanja. Zelo očiten je pojav vibracij, ki so posledica zračnosti. Vibracije so še posebej prisotne po vsakem prevoju v poteku pogonskega momenta, ko manipulator preide iz pospeševanja v zaviranje ali obratno. Za jasnejšo ponazoritev smo kotna odstopanja manipulatorja z zračnostjo izrazili tudi v linearnih x in y koordinatah. Diagrama v nadaljevanju prikazujeta absolutno napako položaja konice ročice pri gibanju skozi predpisan gib.



Slika 6: Napaka x in y koordinate manipulatorja z zračnostjo (odstopanje od idealiziranega modela)

Razvidno je, da napaka v obeh koordinatah za namene zelo natančnega pozicioniranja ni več zanemarljiva. Maksimalna napaka v x smeri znaša 0.119 mm, v y smeri pa celo 0.205 mm. Kot smo pričakovali, je zares največja ob koncu giba, kjer so prisotni največji pojemki sistema. Prikazani rezultati jasno prikažejo nenatančnosti in napake, ki jih v sistem vnese prisotnost zračnosti. Napake vodenja so velikostnega reda, ki za natančne aplikacije takšnih

manipulatorjev ni več zanemarljiv, zato so potrebne in zaželene še nadaljnje študije obravnavanega pojava.

S takšnimi analizami je omogočen boljši vpogled v posamezne parametre sistema ter njihov vpliv na dinamiko sistema. S poznavanjem odziva takšnega sistema lahko vnaprej ustrezno spremenimo regulacijski model in algoritem vodenja, posledica tega pa je natančnejše gibanje in tudi hitrejši popravki vodenja glede na motnje iz okolice in sistema samega.

Literatura

- [1] Sarkar N., Ellis R. E., Moore T. N., *Backlash Detection in Geared Mechanisms: Modeling, Simulation and Experimentation*. Mechanical Systems and Processing, 11 (3): 391 – 408, 1997
- [2] Shing T. K., *Dynamics and Control of Geared Servomechanisms with Backlash and Friction Consideration*. Institute for Systems Research, University of Maryland, Ph.D. thesis 94-13, 1994
- [3] Vohar B., *Dinamična analiza manipulatorja z nezveznostmi v strukturi*, Fakulteta za strojništvo Maribor, magistrsko delo, junij 2004



Analitična integracija napetosti po betonskih prečnih prerezih

D. Zupan in M. Saje¹

Analytical integration over concrete cross-sections

Povzetek. V članku predstavimo analitično integracijo po robu betonskih prečnih prerezov. Učinkovitost integracije po prečnih prerezih je zelo pomembna pri reševanju enačb nosilcev po metodi končnih elementov, saj zaradi iterativnega reševanja integracijo velikokrat ponovimo. Učinkovitost predstavljenega postopka je prikazana na več računskih primerih.

Abstract. In the paper an analytical integration scheme over the boundary of a concrete cross-section is presented. The efficiency of this integration is of a great importance in the finite-element analysis of reinforced concrete beams where the integrals over the cross-sections need to be evaluated many times because of iterative solving of equations. The efficiency of our approach is demonstrated on several numerical examples.

1 Uvod

Iterativno reševanje enačb armiranobetonskih linijskih nosilcev po metodi končnih elementov zahteva mnogo izračunov rezultatnih notranjih sil in komponent materialne tangentne matrike. Porazdeljene napetosti moramo integrirati po prečnih prerezih, kar je pri nelinearnem materialu lahko zelo zahtevna naloga. Zaradi tega je pomembno, da je integracija po prerezu čimbolj učinkovita. V svetu so razvili številne numerične algoritme za integracije po prerezu, glej npr. Bonet s soavtorji [2], Fafitis [4], Rasheed and Dinno [5]. Bolj učinkoviti so tisti algoritmi, ki uporabljajo prevedbo integracije na rob območja v skladu z Greenovo formulo. Prevedba na rob območja je seveda učinkovitejša kot uporaba ploskovnih integralov, pa vendar še vedno ni optimalna. Numerična integracija je za malo integracijskih točk nenatančna, veliko točk pa lahko precej podaljša računske čase. Za razliko od navedenih avtorjev integrale izračunamo analitično. Kadar lahko rob območja aproksimiramo s poligonom, dobimo učinkovito shemo analitične integracije.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Osnova za analitični pristop je znan konstitucijski diagram betona. Privzeli smo diagram, ki sta ga predlagala Desayi in Krishnan [3] za beton v tlaku in razširitev Bergana in Holanda [1] za natezni del. Poleg tega smo uporabili standardni pristop in privzeli linearno porazdelitev deformacij po prečnem prerezu. Analitični postopek je ne le točnejši, temveč v večini primerov tudi hitrejši kot numerični algoritmi. Večjo hitrost ponazorimo s številom računskih operacij, potrebnih pri računskem primeru.

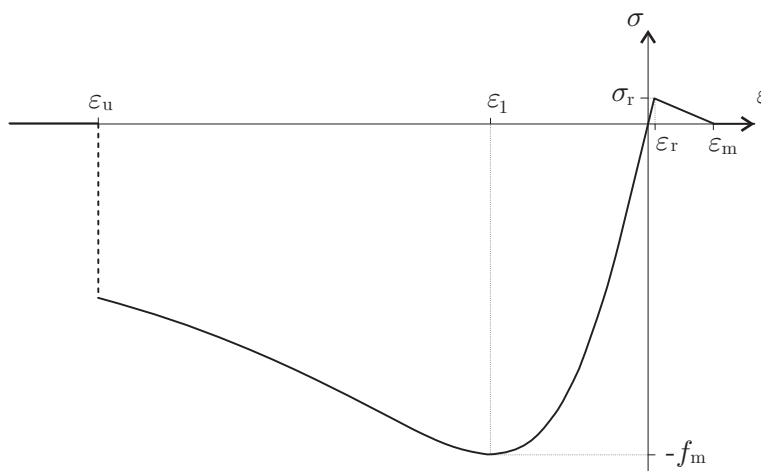
Vpliva armature v tem članku ne upoštevamo, saj lahko običajno zaradi sorazmerno majhne površine prerezov armaturnih palic glede na celotno površino prereza predpostavimo, da se napetost po prerezu posamezne palice ne spreminja in da armaturna palica zaseda le eno točko prereza.

2 Materialni model betona

Izhajamo iz enoosnega napetosnega preizkusa in materialni model podamo za vsako vlakno v smeri normale prereza posebej. Pri modeliranju betona v tlačnem območju povzamemo diagram, kot ga podajata Desayi in Krishnan [3], in dodatno upoštevamo togost betona v nategu po Berganu in Holandu [1]:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 2f_m |\varepsilon_1| \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon^2} & \varepsilon_u < \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} (\varepsilon - \varepsilon_m) & \varepsilon_r < \varepsilon \leq \varepsilon_m \\ 0 & \varepsilon_m < \varepsilon \end{cases} \quad (1)$$

Pri tem je f_m povprečna tlačna trdnost betona, ε_1 je deformacija v betonu pri tlačni trdnosti f_m , ε_u je mejna deformacija v tlaku, ε_r je deformacija pri največji natezni nosilnosti (σ_r) in ε_m je največja natezna deformacija. Zaradi preglednejšega zapisa smo uporabili oznako σ_r za



Slika 1 : Konstitucijski model betona za enoosno napetosno stanje.

vrednost napetosti pri ε_r : $\sigma_r = 2f_m |\varepsilon_1| \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_r^2}$. Predpis (1) razdeli deformacije na štiri območja (glej graf na sliki 1): območji, kjer so napetosti enake nič, območje, kjer so napetosti linearna funkcija deformacij in območje, kjer velja nelinearna zveza.

3 Integracija napetosti po prečnem prerezu

Zaradi linijskega modela nosilca moramo predpostaviti potek deformacij po prerezu. Osne deformacije v poljubni točki prereza izrazimo z rezultantno vzdolžno deformacijo γ_1 in rezultantnima upogibnima deformacijama κ_2 in κ_3 . Privzamemo kar linearen potek deformacij po prerezu:

$$\varepsilon(y, z) = \gamma_1 + y\kappa_3 + z\kappa_2. \quad (2)$$

Pripadajočo osno napetost $\sigma(y, z)$ v točki prereza določimo po materialnem zakonu (1). Z integracijo osnih napetosti po prerezu dobimo konstitucijsko osno silo in upogibna momenta v težišču:

$$\begin{aligned} N_1 &= \iint_{\mathcal{A}} \sigma(\varepsilon(y, z)) dydz & M_2 &= \iint_{\mathcal{A}} z\sigma(\varepsilon(y, z)) dydz \\ M_3 &= \iint_{\mathcal{A}} y\sigma(\varepsilon(y, z)) dydz. \end{aligned}$$

Integrale po prečnih prerezih bomo z uporabo Greenove formule prevedli na integrale po robu. Pred tem je smiselno poiskati take zavrtene koordinate (ξ, η) , da bo $\sigma(\xi, \eta) = \sigma(\eta)$. Koordinatni osi y, z zavrtimo v ξ, η za kot φ :

$$\xi = y \cos \varphi + z \sin \varphi, \quad \eta = -y \sin \varphi + z \cos \varphi.$$

Za deformacije v novih koordinatah velja

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi, \eta) &= \gamma_1 + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \kappa_3 + (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \kappa_2 \\ &= \gamma_1 + \xi (\kappa_2 \sin \varphi + \kappa_3 \cos \varphi) + \eta (\kappa_2 \cos \varphi - \kappa_3 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Kot φ izberemo tako, da je člen pri ξ enak 0, torej velja

$$\varphi = \arctg \left(-\frac{\kappa_3}{\kappa_2} \right). \quad (3)$$

Gornji izraz je nedoločen le v primeru, ko je $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$, vendar je takrat $\varepsilon(\xi, \eta) = \gamma_1$. To pomeni, da je v tem primeru napetost konstantna in jo lahko izpostavimo iz integrala. V vseh ostalih primerih zavrtimo koordinate za kot φ iz enačbe (3). Sledi $\sigma(\xi, \eta) = \sigma(\gamma_1 + K\eta)$, kjer smo s K označili izraz $\kappa_2 \cos \varphi - \kappa_3 \sin \varphi$. Namesto η vpeljimo novo integracijsko spremenljivko

$$\varepsilon = \gamma_1 + K\eta. \quad (4)$$

Determinanta Jacobijeve matrike celotne koordinatne transformacije je enaka $\frac{1}{K}$. Integrale po prerezu zapišemo v novih koordinatah

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{K} \iint_{\mathcal{A}} \sigma(\varepsilon) d\xi d\varepsilon & M_2 &= \frac{1}{K} \iint_{\mathcal{A}} \left(\xi \sin \varphi + \frac{\varepsilon - \gamma_1}{K} \cos \varphi \right) \sigma(\varepsilon) d\xi d\varepsilon \\ M_3 &= \frac{1}{K} \iint_{\mathcal{A}} \left(\xi \cos \varphi - \frac{\varepsilon - \gamma_1}{K} \sin \varphi \right) \sigma(\varepsilon) d\xi d\varepsilon \end{aligned}$$

in z uporabo Greenove formule prevedemo na integrale po robu:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{K} \int_{\partial \mathcal{A}} \xi \sigma(\varepsilon) d\varepsilon & M_2 &= \frac{1}{K} \int_{\partial \mathcal{A}} \left(\frac{1}{2} \xi^2 \sin \varphi + \xi \frac{\varepsilon - \gamma_1}{K} \cos \varphi \right) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \\ M_3 &= \frac{1}{K} \int_{\partial \mathcal{A}} \left(\frac{1}{2} \xi^2 \cos \varphi - \xi \frac{\varepsilon - \gamma_1}{K} \sin \varphi \right) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned}$$

Kadar je integracijsko območje poljuben mnogokotnik, je integracija po robu preprosta. Naj bodo

$$(\xi_\rho, \varepsilon_\rho), \quad \rho = 1, \dots, N_\rho$$

oglišča mnogokotnika, urejena glede na pozitivno orientacijo roba. Rob med poljubnima zaporednima točkama $(\xi_\rho, \varepsilon_\rho)$ in $(\xi_{\rho+1}, \varepsilon_{\rho+1})$ leži na premici

$$\xi(\varepsilon) = k_\rho \varepsilon + n_\rho, \quad (5)$$

kjer sta

$$k_\rho = \frac{\xi_{\rho+1} - \xi_\rho}{\varepsilon_{\rho+1} - \varepsilon_\rho}, \quad n_\rho = \xi_\rho - k_\rho \varepsilon_\rho.$$

Integral po robu izrazimo kot vsoto integralov med paroma zaporednih oglišč, pri tem pa upoštevamo enačbo (5):

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \xi \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} \left[k_\rho \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon + n_\rho \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right] \\ M_2 &= \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \left(\frac{1}{2} \xi^2 \sin \varphi + \xi \frac{\varepsilon - \gamma_1}{K} \cos \varphi \right) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} \left[\left(\frac{k_\rho^2}{2} \sin \varphi + \frac{k_\rho}{K} \cos \varphi \right) \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon^2 \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \left(k_\rho n_\rho \sin \varphi + \frac{n_\rho - k_\rho \gamma_1}{K} \cos \varphi \right) \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n_\rho^2}{2} \sin \varphi - \frac{n_\rho \gamma_1}{K} \cos \varphi \right) \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Izpeljava za M_3 je enaka, le koeficienta $\sin \varphi$ in $\cos \varphi$ sta zamenjana s $\cos \varphi$ in $-\sin \varphi$. Najprej gledneje in tudi računsko najbolj učinkovito je koeficiente za M_2 in M_3 pripraviti hkrati:

$$\begin{bmatrix} c_{\rho 12} & c_{\rho 22} & c_{\rho 32} \\ c_{\rho 13} & c_{\rho 23} & c_{\rho 33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_\rho}{K} & \frac{n_\rho - k_\rho \gamma_1}{K} & -\frac{n_\rho \gamma_1}{K} \\ \frac{k_\rho^2}{2} & k_\rho n_\rho & \frac{n_\rho^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Potem velja

$$M_j = \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} \left[c_{\rho 1j} \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon^2 \sigma(\varepsilon) d\varepsilon + c_{\rho 2j} \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon + c_{\rho 3j} \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \right],$$

za $j = 2, 3$. Ko določene integrale $I_{1\rho} = \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$, $I_{2\rho} = \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$ in $I_{3\rho} = \int_{\varepsilon_\rho}^{\varepsilon_{\rho+1}} \varepsilon^2 \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$ nadomestimo z ustreznimi analitičnimi izrazi, dobimo preprosti formuli:

$$N_1 = \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} (k_\rho I_{2\rho} + n_\rho I_{1\rho}) \quad M_j = \frac{1}{K} \sum_{\rho=1}^{N_\rho} (c_{\rho 1j} I_{3\rho} + c_{\rho 2j} I_{2\rho} + c_{\rho 3j} I_{1\rho}), \quad j = 2, 3. \quad (6)$$

Pri tem moramo paziti na točke, v katerih funkcija $\sigma(\varepsilon)$ ni odvedljiva. Če za celotni prečni prerez velja

$$\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r,$$

so izrazi $I_{1\rho}$, $I_{2\rho}$ in $I_{3\rho}$ določeni s naslednjimi formulami

$$\begin{aligned} I_{1\rho} &= f_m |\varepsilon_1| \ln \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{\rho+1}^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_\rho^2} \\ I_{2\rho} &= 2f_m |\varepsilon_1| \left(\varepsilon_{\rho+1} - \varepsilon_\rho + \varepsilon_1 \left(\arctg \frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon_1} - \arctg \frac{\varepsilon_{\rho+1}}{\varepsilon_1} \right) \right) \\ I_{3\rho} &= f_m |\varepsilon_1| \left(\varepsilon_{\rho+1}^2 - \varepsilon_\rho^2 + \varepsilon_1^2 \ln \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_\rho^2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{\rho+1}^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Če pa za prerez velja

$$\varepsilon_r \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m,$$

določimo $I_{1\rho}$, $I_{2\rho}$ in $I_{3\rho}$ kot

$$\begin{aligned} I_{1\rho} &= \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_{\rho+1}^2 - \varepsilon_\rho^2) - \varepsilon_m (\varepsilon_{\rho+1} - \varepsilon_\rho) \right) \\ I_{2\rho} &= \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} \left(\frac{1}{3} (\varepsilon_{\rho+1}^3 - \varepsilon_\rho^3) - \frac{\varepsilon_m}{2} (\varepsilon_{\rho+1}^2 - \varepsilon_\rho^2) \right) \\ I_{3\rho} &= \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r - \varepsilon_m} \left(\frac{1}{4} (\varepsilon_{\rho+1}^4 - \varepsilon_\rho^4) - \frac{\varepsilon_m}{3} (\varepsilon_{\rho+1}^3 - \varepsilon_\rho^3) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

V splošnem lahko v prerezu poiščemo podobmočje \mathcal{A}_u , ki zadošča $\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r$ in podobmočje \mathcal{A}_m , za katero velja $\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r$. Za vsako podobmočje posebej izračunamo rezultantno osno silo in momenta po formuli (6), le da na \mathcal{A}_u upoštevamo enačbe (7), na \mathcal{A}_m pa enačbe (8). Na koncu rezultate po podobmočjih seštejemo.

Za izpeljavo komponent materialne tangentne matrike uporabimo podoben postopek, ki ga zaradi dolžine tu ne navajamo. Celoten algoritem je zapisan v [6].

4 Računski primer

Zaradi vnaprej pripravljenih analitičnih integralov je opisana metoda ne samo točnejša, temveč tudi hitrejša od numeričnih metod. Učinkovitost predstavljene metode bomo prikazali na računskem primeru. Analitični postopek primerjamo z dvema, dokaj natančnima numeričnima metodama: i) numerično integracijo po robu prereza in ii) numerično integracijo z razdelitvijo prereza na tanke lamele. Za primerjavo metod uporabimo dve naravni merili: i) relativno napako

(v procentih) glede na pravo vrednost in ii) število računskih operacij v pomični piki (*flops*), ki jih zahteva posamezni postopek. V vseh predstavljenih izračunih smo iz vrednotili rezultantno osno silo in momenta ter šest komponent materialne tangentne matrike hkrati. Tako je primerjava objektivnejša, saj smo se izognili večkratnim izračunom nekaterih vmesnih količin. Navedimo kratek opis obeh numeričnih metod, ki smo ju uporabili za primerjavo z analitičnim postopkom. Pri *numerični integraciji po robu* postopamo enako kot pri analitičnem postopku, le da vse integrale po robu iz vrednotimo numerično:

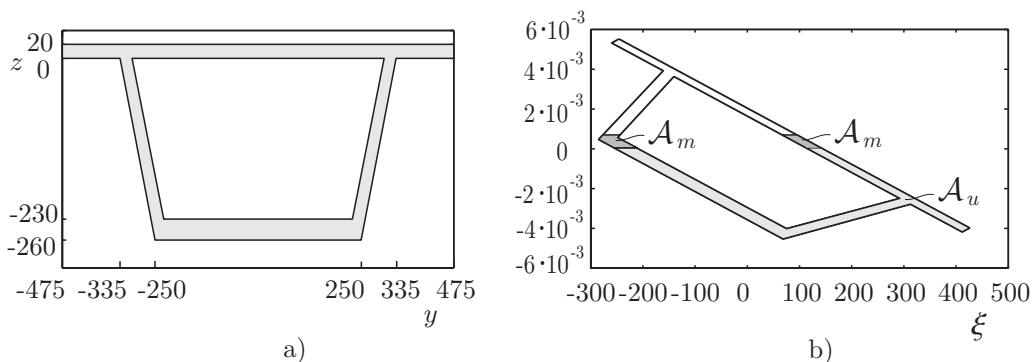
$$I_p = \int_{\epsilon_p}^{\epsilon_{p+1}} f(\epsilon) d\epsilon \rightarrow \frac{\epsilon_{p+1} - \epsilon_p}{2} \sum_{p=1}^n w_p f(\epsilon_p), \quad (9)$$

kjer so w_p uteži in ϵ_p vozlišča Gaussovih kvadraturnih formul. Pri *numerični integraciji po tankih lamelah* razdelimo površino prereza na tanke lamele, po katerih integriramo numerično. Prerez najprej transformiramo v koordinatni sistem (ξ, η) (glej poglavje 3). Kadar meje integracije vzdolž osi ξ niso odvisne od integracijske spremenljivke η , je

$$\iint_{\mathcal{A}} \sigma(\epsilon(y, z)) dydz = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sigma(\gamma_1 + K\eta) d\xi d\eta = (\xi_2 - \xi_1) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sigma(\gamma_1 + K\xi_1) d\eta. \quad (10)$$

Običajno ni tako, zato v integracijskem območju najprej poiščemo podobmočje \mathcal{A}_u , ki zadošča $\epsilon_u \leq \frac{\eta - \gamma_1}{K} \leq \epsilon_r$ in podobmočje \mathcal{A}_m , za katero velja $\epsilon_r \leq \frac{\eta - \gamma_1}{K} \leq \epsilon_m$. Na podobmočjih \mathcal{A}_u in \mathcal{A}_m določimo najmanjšo in največjo vrednost koordinate η : η_{\min} in η_{\max} . Interval $[\eta_{\min}, \eta_{\max}]$ razdelimo na l lamel $[\eta_s, \eta_{s+1}]$, kjer je $\eta_1 = \eta_{\min}$ in $\eta_{l+1} = \eta_{\max}$. Za vsako lamelo posebej aproksimiramo integracijske meje v smeri ξ z njihovimi vrednostmi na srednjici lamele $\eta = \frac{\eta_s + \eta_{s+1}}{2}$ in uporabimo formulo (10). Integral v (10) izračunamo po Gaussovih kvadraturnih formulah in vplive lamel seštejemo.

Računski primer, ki ga predstavljamo, je dokaj zahteven. Prerez je trapezne oblike z luknjo, kot kaže slika 2a. Privzeli smo naslednje vrednosti deformacijskih količin $\gamma_1 = -0.0005$, $\kappa_2 = 0.00001$ in $\kappa_3 = 0.00001$ in predpostavili linearni potek deformacij po prerezu. Za material



Slika 2 : a) Prečni prerez trapezne oblike in b) pripadajoči graf v koordinatnem sistemu (ξ, ϵ) s podpodročjema \mathcal{A}_u and \mathcal{A}_m .

prereza smo izbrali naslednje parametre:

$$\begin{aligned}\varepsilon_u &= -8 \cdot 10^{-3}, & \varepsilon_1 &= -2.2 \cdot 10^{-3}, & f_m &= 3.3 \text{ kN/cm}^2 \\ \varepsilon_r &= 5.5 \cdot 10^{-5}, & \varepsilon_m &= 7 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Analitični rezultati, dobljeni s predstavljenno metodo, so prikazani v tabeli 1. Analitične rezultate primerjamo z numeričnimi v tabelah 1 in 2.

Iz tabele 1 (desno) je razvidno, da so rezultati dobljeni z dovolj natančno numerično integracijo po robu točni, vendar zahtevajo veliko število računskih operacij. Relativna napaka izračunanih notranjih sil pri 2-točkovni Gaussovi integraciji je precejšnja, kar 10%. Napaka se zelo zmanjša, če uporabimo 3-točkovno integracijo po robu, saj je za notranje sile manjša kot 1%. Precej večja je napaka pri izračunu elementov tangentne materialne matrike. Največja izmed napak je tudi pri 3-točkovni Gaussovi integraciji kar 20%. Pri izračunu nosilcev po metodi končnih elementov, so dovolj točno izračunani odvodi zelo pomembni, saj določajo "smer" iteracije. Napačno izračunani odvodi vodijo k divergenci izračuna celotne konstrukcije. Večjo natančnost lahko dosežemo z uporabo natančnejše numerične integracije. Pri 5-točkovni integraciji so vsi rezultati že dovolj natančni. Cena natančnejše metode je večje število računskih operacij in posledično višji računski časi pri celotnem reševanju konstrukcije. Opozorimo, da že nenatančna 2-točkovna numerična integracija zahteva več izračunov v pomični piki (flops) kot povsem točna analitična.

Integracija po lamelah (tabela 2) je v različnih modificiranih oblikah pogosto uporabljena. Da bi bil naš izračun ekonomičen, smo uporabili večje število lamel za beton v tlaku in manjše za beton v nategu. To metodo odlikuje majhno število računskih operacij pri nizki stopnji integracije in malo lamelah. Vendar so pri nizkih stopnjah rezultati zelo nenatančni. Če želimo s to metodo dobiti točnejše rezultate, potrebujemo vsaj 5508 računskih operacij. To pa je spet več kot jih potrebujemo za izračun točnih analitičnih vrednosti.

Tabela 1 : Analitični rezultati (levo) in relativna napaka rezultatov numerične integracije po robu (desno).

količina	vrednost		$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$
N_1	$-7.72 \cdot 10^4$	N_1	0.6	0.9	0.02	0.00
M_2	$2.43 \cdot 10^6$	M_2	7.2	0.7	0.04	0.00
M_3	$-1.43 \cdot 10^7$	M_3	10.2	0.4	0.02	0.00
$\partial N_1 / \partial \gamma_1$	$1.11 \cdot 10^7$	$\partial N_1 / \partial \gamma_1$	66.2	6.2	0.08	0.00
$\partial N_1 / \partial \kappa_2$	$-4.07 \cdot 10^8$	$\partial N_1 / \partial \kappa_2$	39.5	15.5	0.50	0.00
$\partial N_1 / \partial \kappa_3$	$-1.69 \cdot 10^9$	$\partial N_1 / \partial \kappa_3$	59.9	20.0	0.57	0.00
$\partial M_2 / \partial \kappa_2$	$2.17 \cdot 10^{11}$	$\partial M_2 / \partial \kappa_2$	27.4	4.3	0.01	0.00
$\partial M_2 / \partial \kappa_3$	$2.71 \cdot 10^{11}$	$\partial M_2 / \partial \kappa_3$	14.3	3.1	0.17	0.00
$\partial M_3 / \partial \kappa_3$	$-1.20 \cdot 10^{11}$	$\partial M_3 / \partial \kappa_3$	156.9	1.6	0.92	0.00
flops	4318	flops	4605	5230	7016	17593

Tabela 2 : Relativna napaka numerične integracije po tankih lamelah.

	2-točkovna Gaussova integracija				3-točkovna Gaussova integracija			
	$l = 3 + 1$	$5 + 2$	$8 + 3$	$15 + 3$	$l = 3 + 1$	$5 + 2$	$8 + 3$	$15 + 3$
N_1	3.2	3.15	2.8	0.18	3.2	3.2	2.82	0.18
M_2	43.1	27.34	11.1	1.74	43.1	27.3	11.10	1.74
M_3	4.7	3.73	5.6	0.23	4.7	3.7	5.58	0.23
$\partial N_1 / \partial \gamma_1$	5.6	3.55	2.1	0.11	5.7	3.5	2.06	0.11
$\partial N_1 / \partial \kappa_2$	68.3	32.25	12.3	2.70	66.8	32.1	12.23	2.70
$\partial N_1 / \partial \kappa_3$	1.6	2.96	6.1	0.01	1.1	2.9	6.08	0.01
$\partial M_2 / \partial \kappa_2$	6.6	4.14	0.5	0.27	6.5	4.1	0.50	0.27
$\partial M_2 / \partial \kappa_3$	4.0	5.87	3.6	0.48	4.0	5.9	3.63	0.48
$\partial M_3 / \partial \kappa_3$	76.1	29.19	25.4	1.66	77.0	29.3	25.37	1.66
flops	1612	2407	3469	5508	1993	2881	4069	6339

5 Sklep

Predstavili smo preprosto in učinkovito analitično integracijo napetosti po poligonalnem območju. Izrazi so pripravljene za model betona, kot ga podajata Desayi in Krishnan [3], povsem analogno pa bi pripravili izraze za poljuben dovolj gladek konstitucijski diagram. Računski primeri kažejo precejšnjo prednost predstavljene metode, saj zahteva relativno majhno število računskih operacij za povsem točne rezultate.

Literatura

- [1] P. G. Bergan, I. Holand, *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 17/18, 443–467 (1979).
- [2] J. L. Bonet, P. F. Miguel, M. L. Romero, M. A. Fernández, *A Modified Algorithm for Reinforced Concrete Cross Section Integration*, V Proceedings of the 6th International Conference on Computational Structures Technology (uredil B.H.V. Topping), članek 120 (2002).
- [3] P. Desayi, S. Krishnan, *Equation for the stress-strain curve of concrete*, Journal of American Concrete Institute 61, 345–350 (1964).
- [4] A. Fafitis, *Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete Sections in Biaxial Bending*, Journal of Structural Engineering ASCE, 127, 840–846 (2001).
- [5] H. A. S. Rasheed, K. S. Dinno, *An efficient nonlinear analysis of RC sections*, Comput. Struct. 53, 613–623 (1994).
- [6] D. Zupan, *Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev*, Doktorska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana (2003).



Vpliv povezovalnih cevk na dinamične lastnosti merjenja tlaka

T. Žagar, J. Kutin in I. Bajsić

The effect of connecting tubes on the dynamic characteristics of pressure measurement

Povzetek. Sestavni del merilnega sistema za merjenje tlaka je pogosto tudi cevka, ki povezuje merjeni objekt in merilnik tlaka. Prispevek predstavlja eksperimentalno analizo vpliva povezovalne cevke na dinamične lastnosti merjenja tlaka z uporabo skočne vhodne funkcije. Za generiranje tlačnih motenj je bil uporabljen sistem dveh zvočnikov, za merjenje izhodnega tlaka pa piezoelektrični merilni sistem. Preizkusi so bili izvedeni za plastične povezovalne cevke različnih dolžin in premerov pri različnih velikostih tlačnih sprememb. Iz izmerjenih odzivov so bile določene značilne frekvence in dušenje nihanja tlaka, rezultati pa so bili uporabljeni za napoved dinamičnih merilnih pogrškov.

Abstract. The tube connecting the measured object and the pressure sensor is often the component part of the pressure measuring system. This paper presents the experimental analysis of the connecting-tube effect on the dynamic characteristics of pressure measurement by using a step input function. The pressure disturbances were generated by the system of two loudspeakers, and the output pressure was measured by the piezoelectric measuring system. Tests were performed for plastic tubes with different lengths and diameters for different magnitudes of pressure changes. The characteristic frequencies and damping of the pressure oscillations were determined from the measured responses, and the results were used to estimate the dynamic measuring errors.

1 Uvod

Pomen dinamičnega merjenja tlakov se na številnih področjih uporabe povečuje [1]. V številnih primerih je sestavni element merilnega sistema za merjenje tlaka tudi povezovalna cevka, ki povezuje merjeni objekt s tlačnim zaznavalom. Le-ta lahko pomembno vpliva na dinamične lastnosti merilnega sistema v časovnem in frekvenčnem prostoru stanj. Kadar se tlak na merjenem objektu hitro spreminja, te spremembe na tlačnem zaznavalu zaostajajo, saj je potreben določen čas, da tlačna sprememba prepotuje povezovalno cevko. Prav tako se zaradi tlačnega padca vzdolž cevke, ki je posledica tekočinskega trenja v cevki, spremeni tudi amplituda izhodnega tlaka. Dodatna masa zraka v povezovalnih elementih lahko vpliva

tudi na lastno frekvenco zaznavala. Tlačne spremembe se širijo kot valovi od vstopa v povezovalno cevko do tlačnega zaznavala, in ko val doseže zaznavalo, se od njega odbije nazaj v cevko. Glede na frekvenco prihajajočih valov in dolžino cevke, lahko odbiti valovi oslabijo ali pa ojačajo prihajajoče valove. Parametre, pri katerih ojačitve dosežejo največje vrednosti, označujemo s pojmom resonance. V poglavju 2 je podan kratek uvod v popis resonančnih frekvenc t.i. tekočinskih oscilatorjev ali resonatorjev.

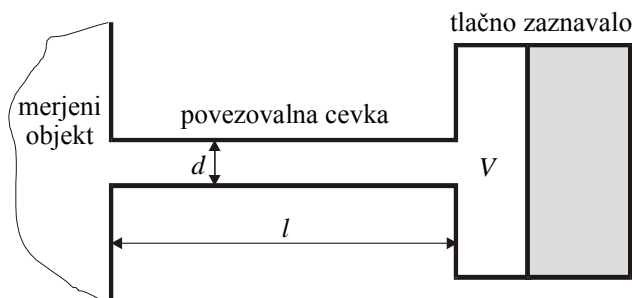
S študijem dinamičnih lastnosti tlačnega merilnega sistema s povezovalnimi cevkami so se ukvarjali tudi drugi avtorji. Whitemore s sodelavci je objavil več teoretičnih in eksperimentalnih raziskav, v katerih je eno glavnih aplikacij predstavljal vpliv dinamike merjenja tlaka na dinamiko krmilnih sistemov v letalih (glej npr. [2-4]). V [2] je, izhajajoč iz Navier-Stokesovih enačb, postavljen numerični model za napoved dinamičnih merilnih pogreškov, v [3] je predstavljena eksperimentalna analiza opazovanega sistema preko frekvenčnega vzbujanja, v [4] pa je definiran tudi postopek kompenzacije vpliva na dinamične lastnosti. Možen pristop k kompenzaciji dinamičnih merilnih pogreškov pri merjenju tlaka, ki lahko poteka v realnem času, je podan tudi v [5].

Namen našega prispevka je predstaviti merilni sistem za študij dinamičnih lastnosti tlačnih zaznaval, v katerem je kot generator tlačnih sprememb uporabljen sistem dveh zvočnikov, razvit v našem laboratoriju - LMPS [6]. Testni sistem je skupaj z nadzornim LabVIEW programom [7] za zajem in analizo podatkov opisan v poglavju 3. V poglavju 4 so predstavljeni rezultati meritev lastne frekvence in razmernika dušenja za različne dolžine in premere povezovalnih cevk, ovrednoteni pa so tudi ustrezni dinamični merilni pogreški.

2 Tekočinski oscilator

Slika 1 prikazuje shematski prikaz tlačnega zaznavala z notranjo prostornino V , ki ga z merjenim objektom (izvorom tlaka) povezuje cevka notranjega premera d in dolžine l . Izvedba opazovanega sistema predstavlja značilen tekočinski oscilator, v katerem dinamične lastnosti določa stisljivost tekočine [8, 9].

Med najbolj osnovne oblike tekočinskih oscilatorjev spada diskretni Helmholtzov resonator, ki ga, identično kot konfiguracijo na sliki 1, sestavlja votlina z ozkim vratom. Tekočina v vratu predstavlja maso oscilatorja, stisljiva tekočina v votlini pa vzmet oscilatorja. Pri temeljni analizi Helmholtzovih resonatorjev se privzame, da so vse stene toge, da v resonatorju ni stoječega valovanja (valovne dolžine tlačnih nihanj so mnogo večje od vseh



Slika 1: Shematski prikaz tlačnega zaznavala s povezovalno cevko.

karakterističnih dimenzij) in da je hitrost tekočine v votlini mnogo manjša od hitrosti tekočine v cevki. V tem primeru lahko njegovo lastno frekvenco zapišemo kot:

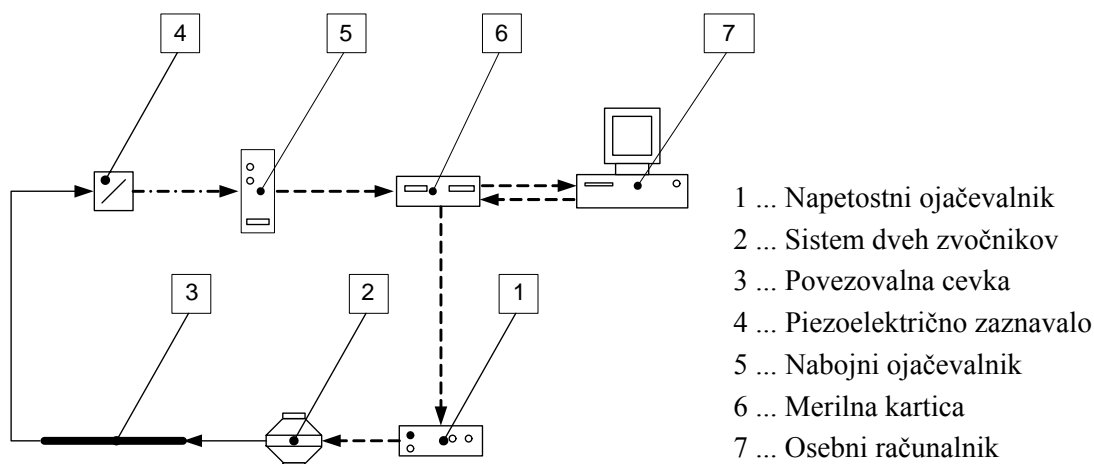
$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{A}{l \cdot V}}, \quad (1)$$

kjer je c zvočna hitrost in $A = \pi d^2/4$ prečni presek odprtine. Tudi, ko se pri analizi oscilatorja korigira npr. vpliv gibanja tekočine v votlini ali na vstopu v povezovalno cevko, vpliv stoječega valovanja ipd., ostaja zapis značilne lastne frekvence večinoma identičen kot v enačbi (1), le dolžino l ali prostornino V zamenja efektivna vrednost l_{ef} ali V_{ef} . V referenci [4] je bil preko rešitve valovne enačbe določen izraz za prvo lastno frekvenco, v katerem je vrednost efektivne prostornine V_{ef} :

$$V_{ef} = V + \frac{l \cdot A}{2}. \quad (2)$$

3 Opis merilnega sistema

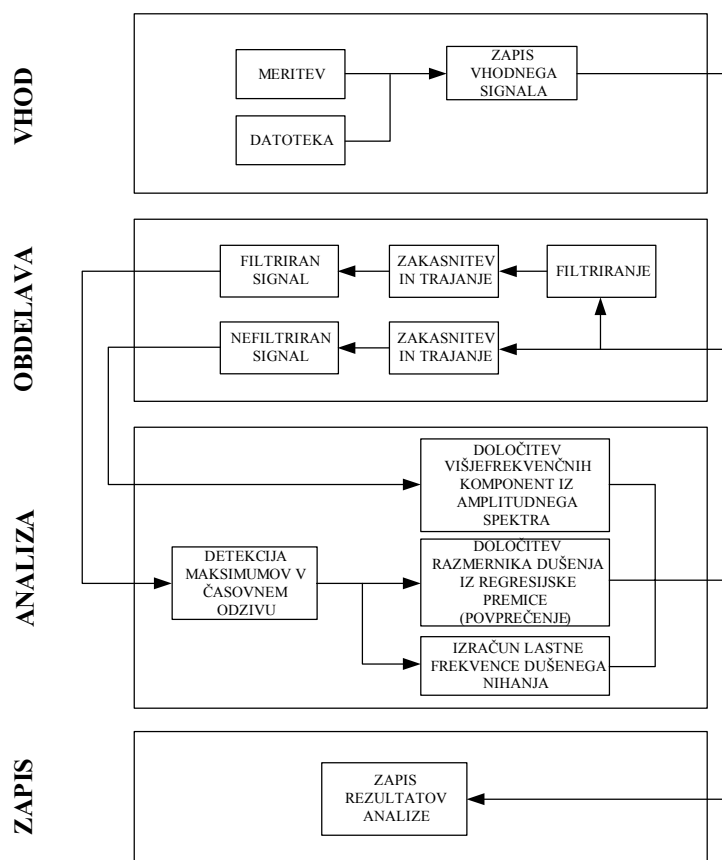
Preizkusi so bili izvedeni na preizkuševališču v LMPS, ki je shematsko predstavljeno na sliki 2. Piezoelektrično tlačno zaznavalo (Kistler 7261) je na vzbujevalni sistem dveh zvočnikov priključeno preko povezovalne cevke določenega notranjega premera in dolžine, katere dinamične lastnosti želimo analizirati. Izhodni električni naboj iz tlačnega zaznavala se v nabojnem ojačevalniku (Kistler 5007) ojači in pretvori v električno napetost, ki jo nato zajemamo preko merilne kartice (National Instruments PCI-6031E). Za nadzor sistema in obdelavo podatkov skrbi osebni računalnik s programom izdelanim v okolju LabVIEW. Skočna sprememba vzbujevalne napetosti oz. toka je poslana na sistem zvočnikov preko analognega izhoda merilne kartice in napetostnega ojačevalnika.



Slika 2: Shema preizkuševališča za analizo dinamičnih lastnosti povezovalnih cevk.

3.1 Nadzorni program

Potek delovanja LabVIEW programa lahko razdelimo na vhodni del, obdelavo in analizo ter zapis izmerkov, kar je shematsko prikazano na sliki 3. *Vhod* omogoča izbiro načina generiranja vhodnih digitalnih vrednosti, in sicer z neposredno meritvijo oziroma zajemom preko merilne kartice (*meritev*), ali pa preberemo vnaprej shranjene podatke iz datoteke (*datoteka*). Naslednjo stopnjo sestavljajo podprogrami za t.i. *obdelavo*. Tu se surov vhodni signal pripravi za analizo, zajema pa nastavitve zakasnitve in trajanja opazovanja signala, korekcijo enosmernega premika ter izločitev osnovne (najnižje) frekvenčne komponente. Obdelan merilni signal prikažemo v časovnem in frekvenčnem prostoru stanj. Sledi *analiza*, kjer se iz obdelanega merilnega signala določi osnovna lastna frekvenca in razmernik dušenja, preko frekvenčne analize pa je omogočeno tudi iskanje višjih značilnih frekvenc v odzivu. Nato se lahko dobljene rezultate po želji *zapiše* v izbrano datoteko.



Slika 3: Blokovna shema delovanja LabVIEW nadzornega programa.

Za določanje razmernika dušenja iz časovnega odziva je bila uporabljena metoda logaritemskega upada [10]. Ob predpostavki dušenega sistema drugega reda velja, da je njegov odziv eksponentno upadajoč. Tako lahko za razmerje dveh amplitud nihanja, y_i in y_{i+M} , ki sta razmaknjeni za M period, zapišemo:

$$\ln\left(\frac{y_i}{y_{i+M}}\right) = M \cdot \frac{2\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (3)$$

od koder lahko izračunamo razmernik dušenja ξ . Njegovo povprečno vrednost smo določili tako, da smo izračunali logaritemske upade med prvo in vsemi naslednjimi opazovanimi amplitudami, jih prikazali v odvisnosti od števila period ter nato razmernik dušenja izračunali preko naklonskega koeficienta regresijske premice b :

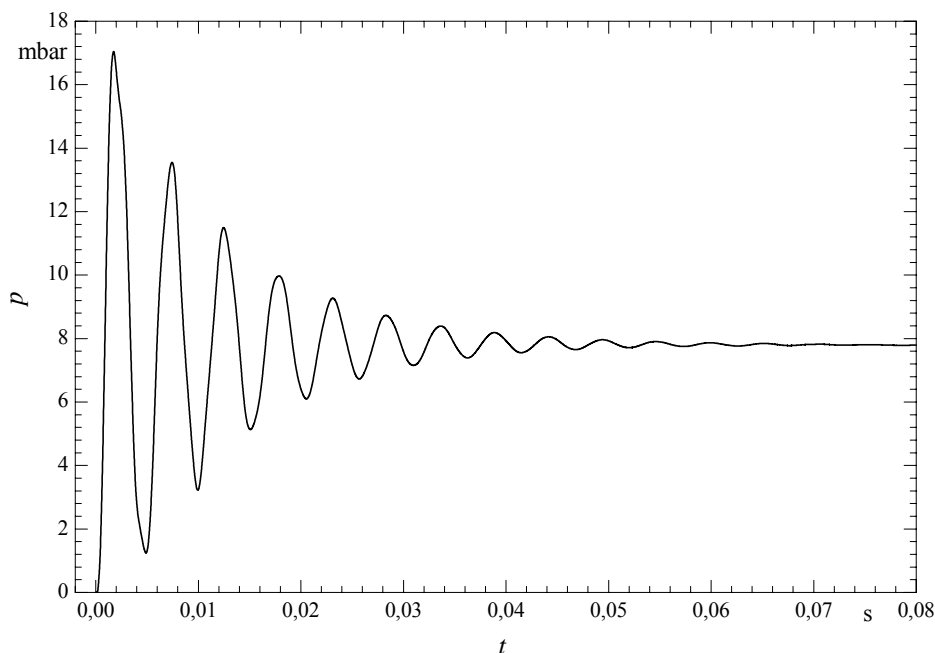
$$\xi = \frac{b}{\sqrt{(2\pi)^2 + b^2}}. \quad (4)$$

Sekundna lastna frekvenca f_l pa je bila iz časovnega odziva določena preko časa trajanja M period T_M , z upoštevanjem korekcije lastne frekvence dušenega nihanja f_d :

$$f_l = \frac{f_d}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{M}{T_M} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (5)$$

4 Rezultati meritev

Preizkuse smo izvedli za povezovalne cevke šestih različnih dolžin ($l = 100$ do 850 mm) in treh različnih notranjih premerov ($d = 2,9$ do $5,9$ mm), pri skočni spremembi tlaka velikosti približno 8 mbar. Na sliki 4 je prikazan primer odziva merilnega sistema za povezovalno cevko $d = 4$ mm in $l = 300$ mm.



Slika 4: Primer skočnega odziva za povezovalno cevko $l = 300$ mm in $d = 4$ mm.

Slika 5 prikazuje spreminjanje značilne frekvence odziva glede na dolžino povezovalne cevke za različne notranje premere. Za primerjavo so na diagramu z zveznimi krivuljami prikazane tudi teoretično ocenjene vrednosti lastnih frekvenc tekočinskega oscilatorja, izračunane z uporabo enačb (1) in (2) (notranja prostornina zaznavala $V = 1,5 \text{ cm}^3$, zvočna hitrost je ocenjena za zrak kot idealni plin pri temperaturi $23 \text{ }^\circ\text{C}$, k dolžini povezovalne cevke smo prišteli ustrezno dolžino spojke, preko katerih je povezovalna cevka priključena na tlačno zaznavalo in na vzbujevalni sistem). Vidimo, da lastna frekvenca sistema narašča z večanjem premera cevke in upada z večanjem dolžine cevke, odvisnost pa je nelinearna.

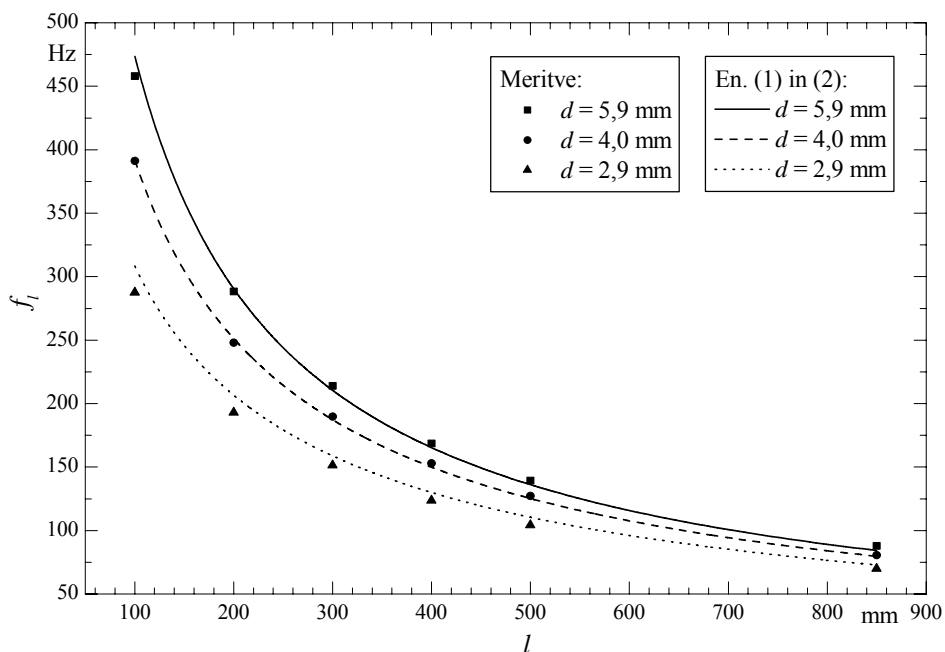
Slika 6 prikazuje spremembe razmernika dušenja z dolžino in premerom povezovalnih cevk. Vidimo, da se dušenja z večanjem dolžine povečuje, z večanjem premera pa zmanjšuje.

Za vrednotenje dinamičnih merilnih pogreškov je pomemben čas, ko se resonančni vplivi povezovalne cevke zmanjšajo v določene meje. Če izhajamo iz skočnega odziva sistema drugega reda, nam spodnjo ovojnico nihajočega odziva popisuje eksponentna funkcija:

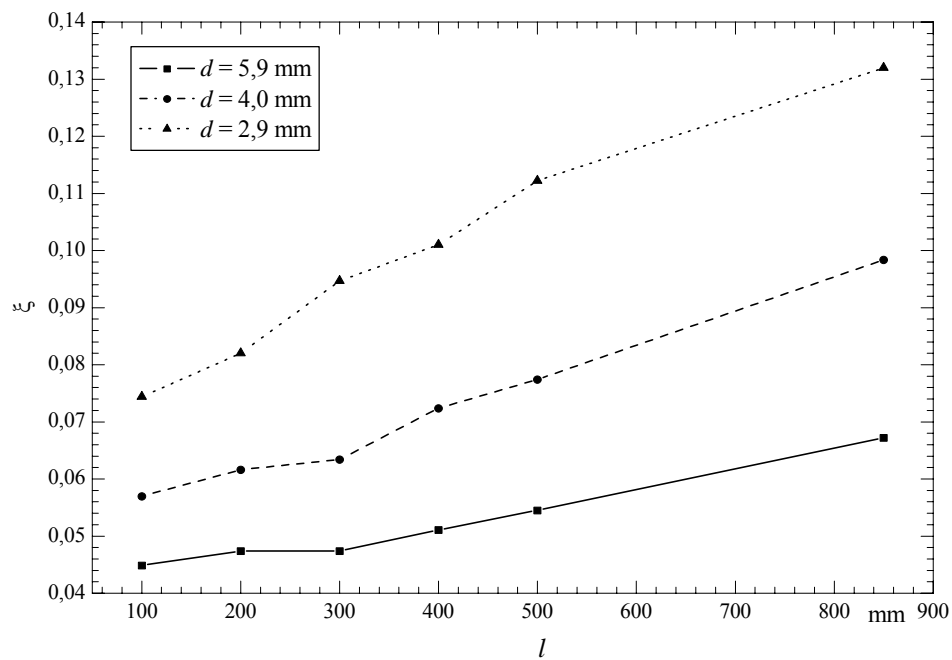
$$p^*(t) = \Delta p \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad \tau = \frac{1}{2\pi \cdot f_l \cdot \xi}, \quad (6)$$

kjer je τ t.i. časovna konstanta. Čas, v katerem se nihanje ustali v določenih mejah, npr. dinamični merilni pogrešek manjši ali enak 1 % celotne skočne spremembe Δp , lahko ocenimo kot:

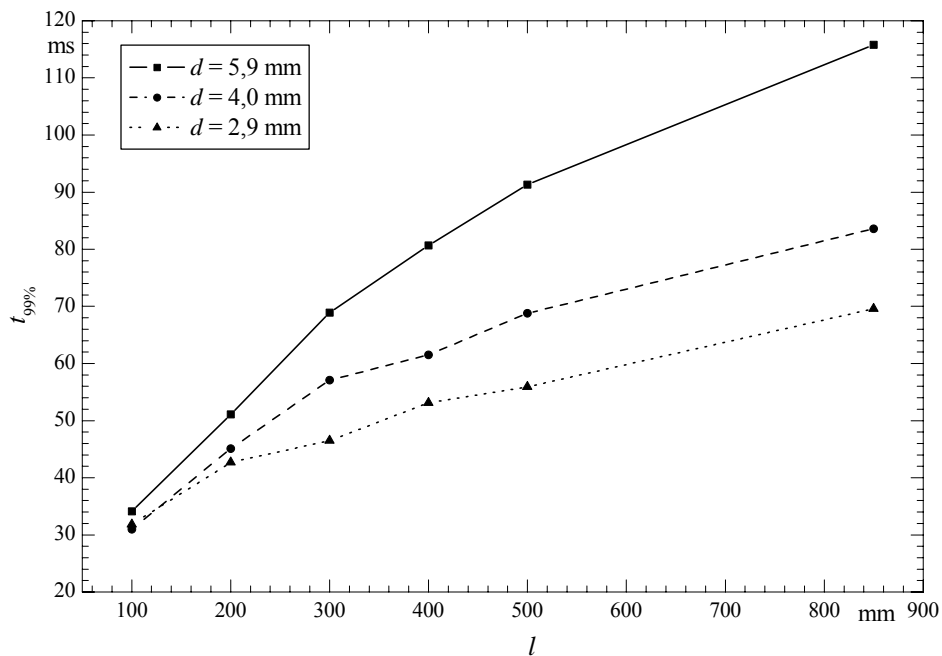
$$t_{99\%} = -\tau \cdot \ln(0,01). \quad (7)$$



Slika 5: Izmerjene lastne frekvence v odvisnosti od dolžine in premera povezovalnih cevk ter primerjava z modelom tekočinskega oscilatorja.



Slika 6: Izmerjeni razmerniki dušenja v odvisnosti od dolžine in premera povezovalnih cevk.



Slika 7: Čas iznihanja odziva za doseg dinamičnih merilnih pogreškov, ki so manjši od 1 % celotne spremembe, v odvisnosti od dolžine in premera povezovalnih cevk.

5 Sklepi

Izvedeni so bili preizkusi za analizo dinamičnih lastnosti merilnega sistema za tlak, ki vključuje priključne ali povezovalne cevke. Uporabili smo plastične cevke treh različnih premerov in šestih različnih dolžin. Omejili smo se na analizo časovnega odziva na skočno spremembo vhodnega tlaka, ki je bila generirana z uporabo sistema dveh zvočnikov in kot rezultate opazovali lastne frekvence in razmernike dušenja.

Rezultati kažejo, da so lastne frekvence najvišje pri kratkih cevkah z večjim premerom. Zelo dobro ujemanje izmerkov z relativno preprostim modelom tekočinskega oscilatorja potrjuje našo fizikalno sliko sistema. Razmerniki dušenja se z večanjem dolžine povečujejo, z večanjem premera cevke pa zmanjšujejo. Pri analizi dinamičnih merilnih pogreškov smo definirali ustaljitveni čas, ko se nihanje izniha v določene meje, to je 1 % celotnega odziva. Iz rezultatov sledi, da je za doseganje čimmanjših dinamičnih merilnih pogreškov oz. čimkrajšega časa ustalitve primerno uporabiti čimkrajše cevke s čimmanjšim notranjim premerom.

Literatura

- [1] J. Hjelmgren, *Dynamic measurement of pressure – A literature survey*, SP Report 2002:34, Swedish National Testing and Research Institute, 2002
- [2] S. A. Whitmore, *Formulation of a general technique for predicting pneumatic attenuation errors in airborne pressure sensing devices*, NASA TM 100430, 1988.
- [3] S. A. Whitmore, W. T. Lindsey, R. E. Curry, G. B. Gilyard, *Experimental characterization of the effects of pneumatic tubing on unsteady pressure measurements*, NASA TM 4171, 1990.
- [4] S. A. Whitmore, *Pneumatic distortion compensation for aircraft surface pressure sensing devices*, J. Aircraft 28(12), 828--836, 1991.
- [5] O. K. Rediniotis, M. M. Pathak, *A simple technique for frequency-response enhancement of miniature pressure probes*, AIAA Journal 37(7), 897--899, 1999.
- [6] T. Lokar, A. Smrečnik, I. Bajsić, *Generating dynamic pressure with loudspeakers*, 16th IMEKO World Congress, Dunaj, 25-28. sept. 2000, 509--514.
- [7] M. L. Chugani, A. R. Samant, M. Cerna, *LabVIEW signal processing*, Prentice-Hall, New York, 1998.
- [8] R. D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Kreiger, Malabar, 1995.
- [9] E. Naudascher, D. Rockwell, *Flow-induced vibrations. An engineering guide*, A.A. Balkema, Rotterdam, 1994.
- [10] T. D. Burton, *Introduction to dynamic systems analysis*, McGraw-Hill, New York, 1994.



Mešana metoda BEM-FEM za tokove nestisljivih viskoznih tekočin

Z. Žunič, L. Škerget in M. Hriberšek ¹

Mixed BEM-FEM method for an incompressible viscous fluids flows

Povzetek. V pričujočem prispevku smo razvili metodo za reševanje Navier-Stokesovih enačb pri čemer smo uporabili integralske oblike ohranitvenih zakonov. Uporabili smo hitrostno-vrtinčno formulacijo v kateri je kinematika predstavljena s Poissonovo enačbo za hitrostni vektor, medtem ko je kinetika predstavljena s prenosno enačbo za vrtinčnost. Kinematiko smo rešili z uporabo metode robnih elementov (BEM), medtem ko smo kinetiko rešili z uporabo metode končnih elementov (FEM). Robustnost in vsestranskost opisane formulacije smo preizkusili na primeru toka v kvadratni kotanji s pomično steno in na primeru toka v kanalu s stopnico.

Abstract. A numerical method for the solution of the Navier-Stokes equations is developed using an integral representation of the conservation equations. The velocity-vorticity formulation is employed, where the kinematics is given with the Poisson equation for a velocity vector, while the kinetics is represented with the vorticity transport equation. Kinematics is solved using boundary element method (BEM), while kinetics is solved using finite element method (FEM). Two benchmark problems are considered to show the robustness and versatility of this formulation including lid driven flow in a square cavity and flow over backward facing step.

1 Uvod

Veliko algoritmov je bilo vpeljanih v zadnjih dveh desetletjih, za numerično modeliranje tokov nestisljivih tekočin. Razvrstimo jih lahko v dve glavni skupini: formulacije z osnovnimi veličinami (hitrost-tlak) in formulacije z izpeljanimi veličinami (vrtinčnost). Osnovna težava pri formulacijah z osnovnimi spremenljivkami je zadovoljitev kontinuitetne enačbe, saj tlak ni več termodinamična veličina, Gresho in Sani [1]. Drugi pristop je formulacija, pri kateri so Navier-Stokesove enačbe zapisane izključno v odvisnosti od hitrosti in vrtinčnosti, dobimo pa jih iz definicije vrtinčnosti, kontinuitetne enačbe in rotorja gibalnih enačb.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za Strojništvo

Pristop s hitrostno-vrtinčno formulacijo ima kar nekaj dobrih strani pri reševanju tokov nestisljivih tekočin. Tlak pri izpeljavi novega sistema enačb izpade kot neznana veličina, tako da odpadejo vse težave z določanjem tlačnih robnih pogojev. Prav tako so robni pogoji enostavnejši za določanje kot pri formulacijah s tokovno funkcijo, Wong in Baker [2].

Hitrostno-vrtinčno formulacijo intenzivno uporabljajo pri metodi robnih elementov (BEM), Škerget *et al.* [3] in [4]. Linearni del prenosnega pojava popišejo samo z robnimi integrali, medtem ko nelinearne vplive modelirajo z diskretizacijo notranjega območja. Ključni del kinematike, izračun robnih vrtinčnosti, izvedejo z globalnim integralnim pristopom, s čemer dosežejo robustnost in natančnost metode.

Največji pomanjkljivosti metode sta velika požrešnost po pomnilniku zaradi shranjevanja integralov, ter računski zahtevnost enačb kinetike. Še posebej zahtevno je izračunavanje območnih integralov zaradi spreminjajočega se hitrostnega polja.

Prav zadnji dve opisani pomanjkljivosti sta bili motivacija za uporabo metode FEM za izračun kinetike vrtinčnosti. Zaradi pohlevnejših funkcij je integracija hitrejša, obenem pa so matrike integralov samo delno zasedene, kar zmanjša še potrebno količino pomnilnika za njihovo shranjevanje.

Cilj članka je tako razviti metodo, ki bo povezala metodo robnih elementov za reševanje enačbe kinematike z metodo končnih elementov za reševanje enačb kinetike.

2 Vodilne enačbe

Enačbe, ki opisujejo gibanje zveznega medija temeljijo na ohranitvi mase in gibalne količine. Ob upoštevanju nestisljivosti medija in ustaljenih razmer dobimo naslednji sistem parcialnih diferencialnih enačb zapisan z indeksno notacijo v desnosučnem kartezijevem koordinatnem sistemu

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$v_j \frac{Dv_i}{Dx_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

kjer je vektorska spremenljivka v_i hitrost in x_i krajevni vektor. Skalarna veličina p je tlak. Snovske lastnosti kot sta gostota ρ in kinematična viskoznost ν so konstantne po celotnem računskem območju.

3 Kinematika

Dinamiko viskozne nestisljive tekočine lahko razdelimo na kinematični in kinetični del z uvedbo nove spremenljivke imenovane vrtinčnost $\omega_i(x_j, t)$, ki jo dobimo kot rotor hitrostnega polja $v_i(x_j, t)$

$$\omega_i = e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Vrtinčnost je solenoiden vektor po definiciji. V zgornji enačbi je e_{ijk} enotski permutacijski tenzor. Če še enkrat uporabimo rotor v enačbi za vrtinčnost (3), dobimo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad (4)$$

in ob upoštevanju kontinuitetne enačbe za nestisljiv tok $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, izpeljemo naslednjo eliptično vektorsko Poissonovo enačbo za hitrostni vektor

$$\nabla^2 \vec{v} + \vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0. \quad (5)$$

Enačba (5) predstavlja kinematiko toka nestisljive tekočine in nam določa kompatibilnost med hitrostnim in vrtinčnim poljem. Opravka imamo torej z reševanjem sistema eliptičnih parcialnih diferencialnih enačb. Zaradi eliptičnosti enačbe (5) je za reševanje potrebno predpisati pravilne Dirichletove ali Neumanove robne pogoje, ali kombinacijo obeh, po celotnem robu Γ .

Singularno integralsko formulacijo za hitrostni vektor dobimo z uporabo Greenovega teorema, oz. metode utežnih ostankov

$$c(\xi)\vec{v}(\xi) + \int_{\Gamma} \vec{v} \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} u^* d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \times \vec{\omega} u^* d\Omega, \quad (6)$$

kjer je u^* osnovna rešitev Laplaceove enačbe. Enačbo (6) lahko preoblikujemo, glej Škerget *et al.* [4], da dobimo končno integralsko enačbo za ravninske primere

$$c(\xi)v_i(\xi) + \int_{\Gamma} v_i \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} v_j \frac{\partial u^*}{\partial t} d\Gamma - e_{ij} \int_{\Omega} \omega \frac{\partial u^*}{\partial x_j} d\Omega. \quad (7)$$

kjer sta n in t normala oziroma tangenta na rob območja.

4 Kinetika vrtinčnosti

Kinetiko vrtinčnosti za ravninske primere, časovno ustaljene razmere in nestisljivo viskozno tekočino opisuje enačba

$$v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (8)$$

z znanimi vrtinčnost (dobimo jih kot rezultat kinematike) $\omega = \omega_{\Gamma}$ po celotnem robu Γ . Računsko območje Ω razdelimo na posamezne elemente Ω_e znotraj katerih spreminjanje neznanih veličin popišemo s produktom interpolacijskih funkcij in vrednosti v vozliščnih elementa

$$u(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^n N(\xi, \eta)_l U_l, \quad (9)$$

kjer so ξ in η lokalne koordinate elementa Ω_e , n je število vozliščnih točk posameznega elementa, N_l so interpolacijske funkcije, U_l so vrednosti funkcij v vozliščnih elementa in u predstavlja vrtinčnost ω oz. hitrostni vektor v_i . Z uporabo Galerkinovega postopka in uporabo interpolacijskih funkcij N na mestu utežnih funkcij dobimo

$$\int_{\Omega_e} N_l v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega_e} N_l \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} d\Omega = 0. \quad (10)$$

Red parcialnih odvodov v difuzijskem členu zmanjšamo z uporabo Greenovega prvega teorema, tako da dobimo šibko rešitev zgornje enačbe

$$\int_{\Omega_e} N_l v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mu \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \mu N_l \frac{\partial \omega}{\partial n} d\Gamma = 0. \quad (11)$$

Zadnjega člena v enačbi (11) v našem primeru sploh ne izračunavamo, saj se izniči v vozliščih, ki ležijo na meji med dvema elementoma, zaradi kompatibilnosti toka vrtinčnosti $(\partial\omega/\partial n)_{-e} = -(\partial\omega/\partial n)_{+e}$, kjer indeksa $-e$ in $+e$ pomenita dva sosednja elementa. Ne potrebujemo ga tudi v vozliščih ki ležijo na robu Γ , saj ima enačba (8) samo Dirichletove robne pogoje (kar je posledica uporabljenega algoritma, pri katerem robne vrtinčnosti dobljene iz kinematike, uporabimo kot robne pogoje za kinetiko vrtinčnosti) in je v robnih vozliščih trivialno izračunljiva ($\omega = \omega_\Gamma$ na Γ).

Ko upoštevamo enačbo (9) v (11) dobimo enačbo v diskretni obliki

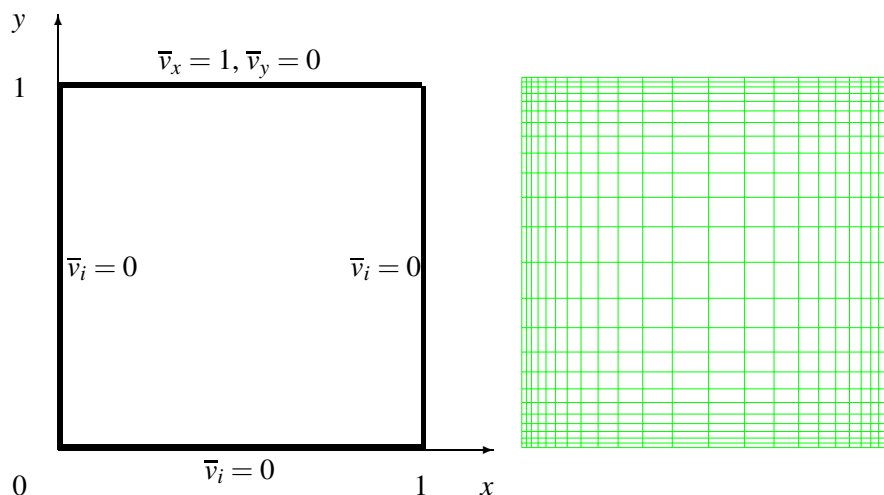
$$\int_{\Omega_e} N_l v_j \frac{\partial N_m}{\partial x_j} O_m d\Omega + \int_{\Omega_e} \mu \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} O_m d\Omega = 0, \quad (12)$$

kjer indeksi l in m pomenijo vozliščne točke končnega elementa, O_m pa vozliščne vrednosti vrtinčnosti ω za posamezen element. Z uporabo enačbe (12) po vseh elementih v območju Ω in z uporabo robnih vrtinčnosti iz kinematike dobimo nesingularen sistem linearnih enačb. Nastala sistemska matrika je razpršena in jo rešujemo z BiCGSTAB(L) iterativnim solverjem, Sleipen in Fokkema [5].

5 Računski primeri

5.1 Tok v kotalnji s pomično steno

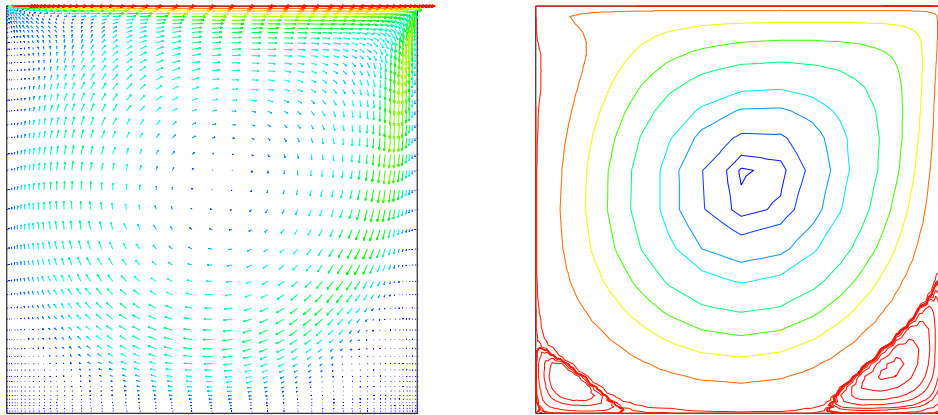
Na sliki 1 imamo prikazano geometrijo za referenčni primer toka v kotalnji s pomično steno. Računali smo dva primera za vrednosti Reynoldsovega števila (definiranega na širino kotalnje) $Re = 1000$ in $Re = 5000$. Uporabili smo mrežo velikosti 24×24 z razmerjem 8 med najkrajšo in najdaljšo stranico elementa. Rezultate smo primerjali z referenčnimi rezultati Ghie [6].



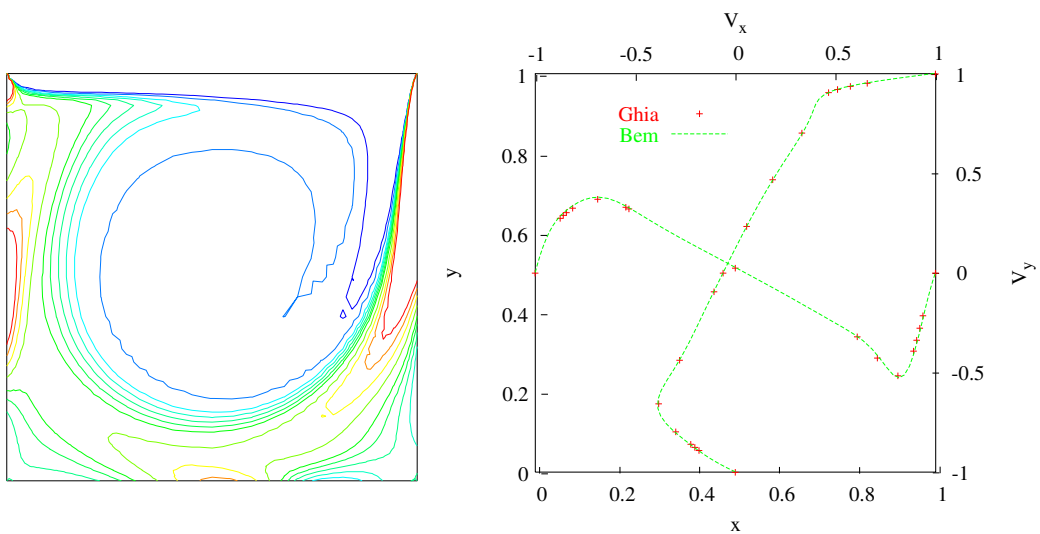
Slika 1 : Geometrija in robni pogoji za tok v kotalnji s pomično steno.

Sliki 2 in 3 prikazujeta vektorje hitrosti, tokovnice, izololinije vrtinčnosti ter primerjavo hitrostnih profilov po srednjicah kotalnje z referenčnimi rezultati za vrednost Reynoldsovega števila $Re =$

1000. Iz primerjave hitrostnih profilov vidimo, da se izračunane vrednosti dobro ujemajo z referenčnimi vrednostmi.

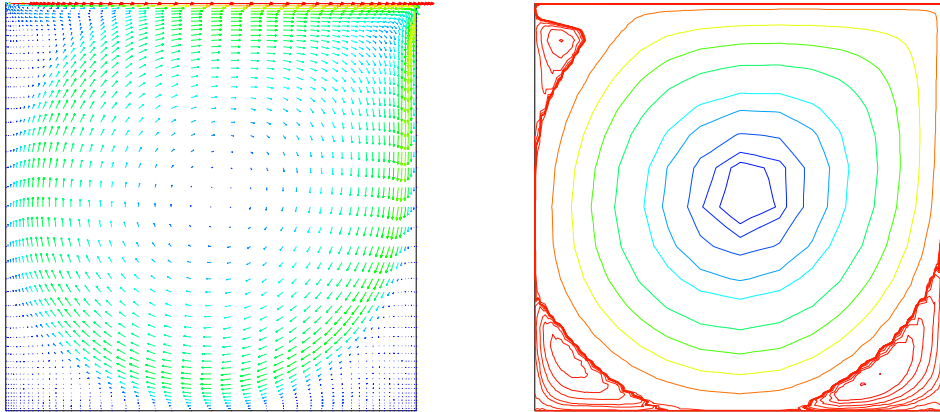


Slika 2 : Hitrostno polje in tokovnice, $Re = 1000$.

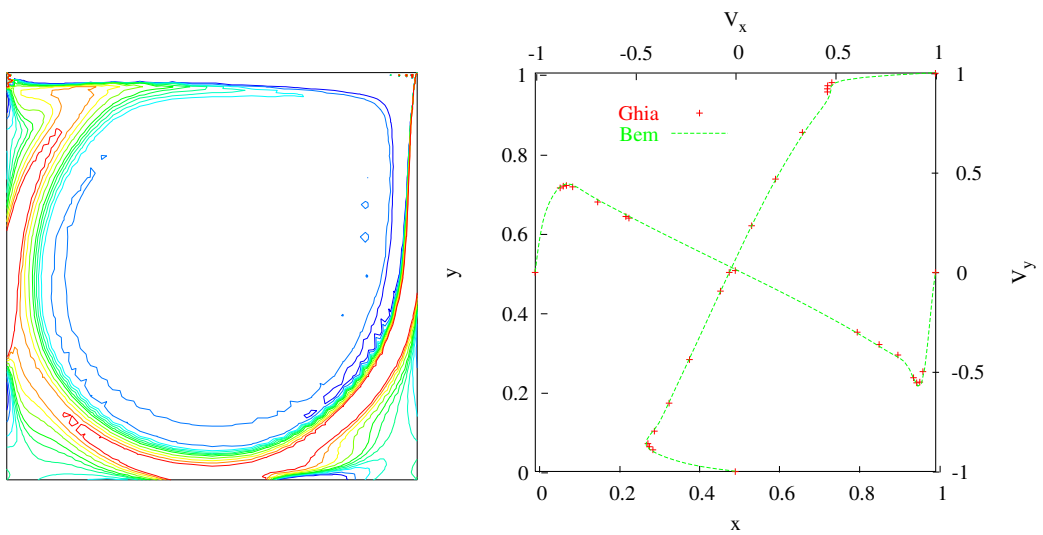


Slika 3 : Izolinije vrtnčnosti in profili hitrosti po srednjicah, $Re = 1000$.

Primerjavo smo ponovili še za zahtevnejši primer za vrednost Reynoldsovega števila $Re = 5000$. Sliki 4 in 5 prikazujeta vektorje hitrosti, tokovnice, izolinije vrtnčnosti ter primerjavo hitrostnih profilov po srednjicah kotanje z referenčnimi. Vidimo, da je ujemanje tudi pri višjih vrednostih Reynoldsovega števila dobro, še posebej, če upoštevamo, da je uporabljena mreža precej redka.



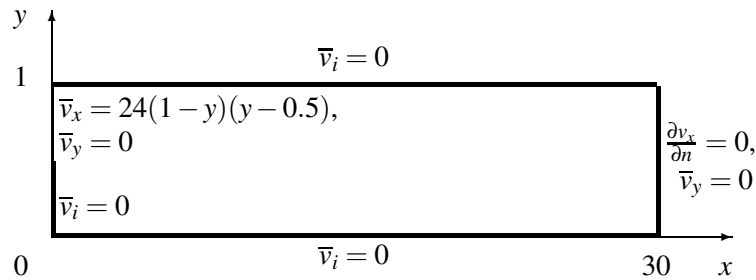
Slika 4 : Hitrostno polje in tokovnice, $Re = 5000$.



Slika 5 : IZolinije vrtnčnosti in profili hitrosti po srednjicah, $Re = 5000$.

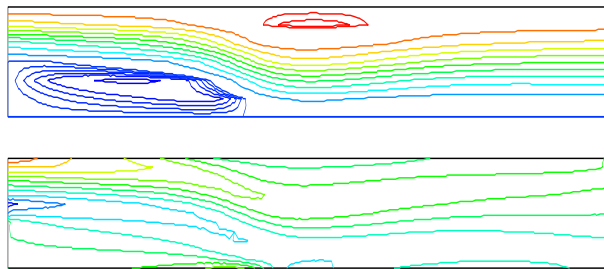
5.2 Tok v kanalu s stopnico

Drugi primer je bil tok v kanalu s stopnico. Geometrija problema in robni pogoji so prikazani na sliki 6. Velikost uporabljene mreže je bila 120×6 z razmerjem elementov 2 v smeri x in z enakomerno razporeditvijo elementov v smeri y . Rezultate smo primerjali z referenčnim izračunom Gartlinga [7].



Slika 6 : Geometrija problema in robni pogoji za tok v kanalu s stopnico.

Na sliki 7 so prikazane tokovnice in izolinije vrtničnosti za vrednost Reynoldsovega števila $Re = 800$.



Slika 7 : Tokovnice in izolinije vrtničnosti, $Re = 800$.

Primerjali smo dolžine recirkulacijskih območij za spodnji in zgornji vrtinec. Izračunana vrednost $X_1 = 6.39$ se zadovoljivo ujema z referenčno $X_1 = 6.10$. Vrednost za zgornji vrtinec so $X_2 = 5.05$, $X_3 = 10.55$ ($L_u = 5.5$), medtem ko so referenčne vrednosti $X_2 = 4.85$, $X_3 = 10.48$ ($L_u = 5.63$). Odstopanja vseh vrednosti so manjša od 5%.

6 Zaključki

Razvili smo numerično metodo za reševanje Navier-Stokesovih enačb z uporabo integralske oblike ohranitvenih enačb. Uporabili smo hitrostno-vrtinčno formulacijo, tako da je bila kinematika predstavljena s Poissonovo enačbo za hitrostni vektor, kinetika pa s prenosno enačbo za vrtinčnost. Kinematiko smo reševali z metodo robnih elementov (BEM), kinetiko pa z metodo

končnih elementov (FEM). Uporabili smo kvadratne interpolacijske funkcije. Rešili smo dva referenčna primera da bi preverili robustnost in uporabnost predstavljene formulacije. Uporabili smo primer toka v kotanji s pomično steno in primer toka v kanalu s stopnico. Rezultati so se odlično ujemali z referenčnimi vrednostmi.

Literatura

- [1] P. M. Gresho, R. L. Sani, On pressure boundary conditions for the incompressible navier-stokes equations, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 7 (1987) 1111–1145.
- [2] K. L. Wong, A. J. Baker, A 3d incompressible navier-stokes velocity-vorticity weak form finite element algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 38 (2002) 99–123.
- [3] L. Škerget, M. Hriberšek, G. Kuhn, Computational fluid dynamics by boundary domain integral method, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 46 (1999) 1291–1311.
- [4] L. Škerget, M. Hriberšek, Z. Žunič, Natural convection flows in complex cavities by bem, *Int. J. Numer. Meth. Heat & Fluid Flow* 13 (6) (2003) 720–735.
- [5] G. L. G. Sleijpen, D. R. Fokkema, Bicgstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum, *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 11 (1993) 11–32.
- [6] U. Ghia, N. Ghia, C. T. Shin, High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method, *Journal of Computational Physics* 48 (1982) 1111–1145.
- [7] D. K. Gartling, A test problem for outflow boundary conditions—flow over a backward-facing step, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 11 (1990) 953–967.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

531(063)(082)

KUHLJEVI dnevi (2004 ; Otočec)

Zbornik del / Kuhljevi dnevi 2004, Otočec, 30. september - 1.
oktober 2004 ; [organizator] Slovensko društvo za mehaniko ;
uredila Jože Korelc, Dejan Zupan. - Ljubljana : Slovensko društvo
za mehaniko, 2004

ISBN 961-90000-9-9

1. Korelc, Jože 2. Slovensko društvo za mehaniko
215625728

:Kuhljevi dnevi 2004

:zbornik del

ISBN 961-90000-9-9



9 789619 000090



Slovensko društvo
za mehaniko