Izrek o virtualnih pomikih

Marjan Stanek in Goran Turk †

Principle of virtual displacements

Povzetek

V prispevku je izpeljan izrek o virtualnih pomikih. Poseben poudarek je v natančni izbiri osnovnih predpostavk o virtualnih pomikih. Za razliko od običajne predpostavke o majhnosti virtualnih pomikov je tu definirano, da je virtualni pomik linearni del možnega pomika. Za ilustracijo izrek o virtualnih pomikih uporabimo za konstrukcijo vplivnice.

Summary

A principle of virtual displacements was derived in this paper. The choice of the basic assumption was specifically emphasised. In contrast to usual assumption of small virtual displacement, the virtual displacement is defined as a linear part of a finite displacement. The use of the principle is shown on the construction of an influence line.

1. Uvod

Ravnotežne enačbe za sistem sil $\vec{F}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ na togem telesu zapišemo z enačbama $\sum_{i=1}^{s} \vec{F}_i = \vec{0}$, $\sum_{i=1}^{s} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$. Statično določen sistem togih teles je tako podprt, da pri poljubni obtežbi miruje. Za statično določen sistem je število reakcij in število sil v vezeh enako številu ravnotežnih enačb za vsa prosta telesa in za vse vezi. V ravnotežnih enačbah nastopajo vse reakcije podpor in vse sile v vezeh.

Ravnotežne enačbe za sile, ki na sistem togih teles delujejo, lahko zapišemo tudi z **izrekom o virtualnih pomikih**. V nadaljevanju najprej izpeljemo izrek o virtualnih pomikih za sistem delcev, nato pa še za sistem delcev s togimi vezmi in za togo telo. Pri sistemu delcev s togimi vezmi se razdalje med delci ne spreminjajo.

† Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
Jamova 2, 1000 Ljubljana,
e-mail: mstanek@fagg.uni-lj.si, gturk@fagg.uni-lj.si.

2. Izrek o virtualnih pomikih sistema delcev

Da bi izpeljali izrek o virtualnih pomikih sistema delcev, definirajmo vezi v sistemu delcev, število prostostnih stopenj sistema delcev, posplošene koordinate ter virtualne pomike.

2.1 Vezi in število prostostnih stopenj sistema delcev

Sistem delcev določa množica N gibajočih ali mirujočih delcev $\mathscr{D}_i$ z masami m_i $(i = 1, \ldots, N)$. Delci so nepovezani ali pa povezani z breztežnimi vezmi. Za določitev lege prostega sistema N delcev v prostoru moramo poznati $3N$ koordinat. Če je sistem delcev vezan, je medsebojna lega delcev odvisna od vrste vezi in koordinate delcev niso več vse neodvisne. Vezi določajo odvisnosti med koordinatami lege delcev. Če je N delcev povezanih z r stacionarnimi vezmi (neodvisnimi od časa), zapišemo enačbe vezi takole

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) &= 0,\\
f_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) &= 0,\\
&\vdots\\
f_r(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) &= 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Enačbe vezi morajo biti med seboj neodvisne. Enačbe (1) so med seboj neodvisne, če je rang Jacobijanske matrike $[\,J\,] = [\,\partial f_i/\partial x_j\,]$ enak številu vezi r. V tem primeru lahko iz enačb (1) izrazimo r koordinat s preostalimi $3N - r$ med seboj neodvisnimi koordinatami. Lego takega sistema lahko opišemo s $3N - r$ neodvisnimi spremenljivkami. Število neodvisnih spremenljivk, ki v celoti določajo lege delcev v sistemu, imenujemo **število prostostnih stopenj** sistema delcev. Označimo ga z n_{ps}:

$$n_{ps} = 3N - r. \tag{2}$$

2.2 Posplošene koordinate

Za opis lege sistema delcev pogosto izberemo koordinate, ki so med seboj neodvisne. Izberemo jih tako, da **enolično** določajo lego sistema delcev. Označimo jih s q_j $(j = 1, \ldots, n_{ps})$ in imenujemo **posplošene koordinate**. Izpolnjevati morajo naslednja pogoja:

1. Lega vsakega delca sistema je enolično določena s koordinatami q_j $(j = 1, \ldots, n_{ps})$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{n_{ps}}), \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{3}$$

2. Enačbe vezi (1) morajo biti identično izpolnjene tudi, če jih izrazimo s posplošenimi koordinatami.

Posplošene koordinate so lahko različne geometrijske količine kot na primer razdalja, kot, ploščina, prostornina itd. Izberemo jih tako, da je reševanje naloge čim lažje.

2.3 Virtualni pomiki

Zapišimo pomik delca $\mathscr{D}_i$, katerega gibanje je omejeno z vezmi, tako, da ima n_{ps} prostostnih stopenj, s posplošenimi koordinatami q_j $(j = 1, \ldots, n_{ps})$. Lego takega delca lahko izrazimo s kartezičnimi x_i, y_i, z_i ali posplošenimi koordinatami $q_1, \ldots, q_{n_{ps}}$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(x_i, y_i, z_i) = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{n_{ps}}). \tag{4}$$

Poljuben pomik $\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$, ki je skladen z vezmi, imenujemo **možen pomik**. Dobimo ga, če zapišemo razliko krajevnih vektorjev dveh možnih leg delca, to je lege, ki je določena s posplošenimi koordinatami q_i in nekoliko spremenjene lege, ki je določena s posplošenimi koordinatami $q_j + \delta q_j$ $(j = 1, \ldots, n_{ps})$:

$$\vec{u}_i = \vec{r}_i'(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_{n_{ps}} + \delta q_{n_{ps}}) - \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{n_{ps}}). \tag{5}$$

Krajevni vektor $\vec{r}_i'(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_{n_{ps}} + \delta q_{n_{ps}})$ dobimo, če (4) razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$\vec{r}_i'(q_1+\delta q_1, \ldots, q_{n_{ps}}+\delta q_{n_{ps}}) = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{n_{ps}}) + \sum_{j=1}^{n_{ps}} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{n_{ps}} \sum_{k=1}^{n_{ps}} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_k}\, \delta q_j\, \delta q_k + \ldots . \tag{6}$$

Izraz (6) vstavimo v (5) in dobimo

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{n_{ps}} \sum_{k=1}^{n_{ps}} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j\, \partial q_k}\, \delta q_j\, \delta q_k + \ldots . \tag{7}$$

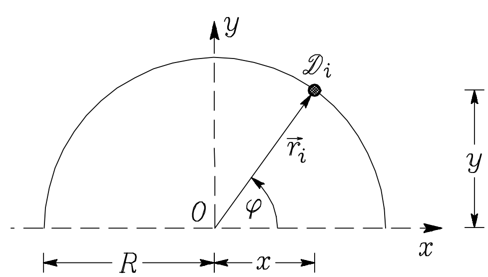
Virtualni pomik $\delta\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$ je definiran kot **poljubni linearni del možnega pomika** $\vec{u}_i$. Dobimo ga iz (7), če upoštevamo le linearni del vsote

$$\delta\vec{u}_i = \text{linearni del}(\vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j. \tag{8}$$

Ker je virtualni pomik definiran kot poljubni linearni del možnega pomika, je virtualni pomik delca $\mathscr{D}_j$, ki ima predpisani pomik $\vec{u}_{jp}$, enak nič. Virtualni pomik zato definiramo z enačbama

$$\boxed{\delta\vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j, \qquad \vec{u}_j = \vec{u}_{jp}: \quad \delta\vec{u}_j = \vec{0}.} \tag{9}$$

Vzemimo, da se delec $\mathscr{D}_i$ lahko premika vzdolž polovice krožnice (slika 1).



SLIKA 1 Delec $\mathscr{D}_i$ se lahko giblje le po polkrožnici.

Določimo virtualni pomik $\delta\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$ za primer, da je $\varphi = 0$! Delec $\mathscr{D}_i$ ima eno prostostno stopnjo gibanja. Za $q_1 = \varphi$ sledi

$$\vec{r}_i = r\, \cos\varphi\, \vec{e}_x + r\, \sin\varphi\, \vec{e}_y.$$

Iz (8) dobimo

$$\delta\vec{u}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\varphi}\,\delta\varphi = (-r\,\sin\varphi\,\vec{e}_x + r\,\cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\delta\varphi.$$

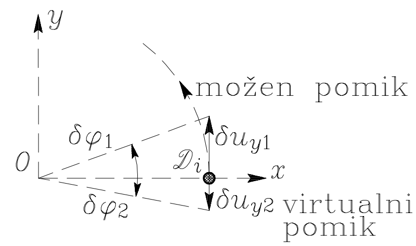
Če je $\varphi = 0$, je

$$\delta\vec{u}_i = r\,\delta\varphi\,\vec{e}_y$$

oziroma

$$\delta u_{ix} = 0, \qquad \delta u_{iy} = r\,\delta\varphi. \tag{10}$$

Za delec, ki se nahaja v legi $\varphi = 0$, je njegova virtualno premaknjena lega prikazana na sliki 2. Velikost in smer virtualnega zasuka $\delta\varphi$ v enačbi (10) sta poljubna, ne nujno majhna!



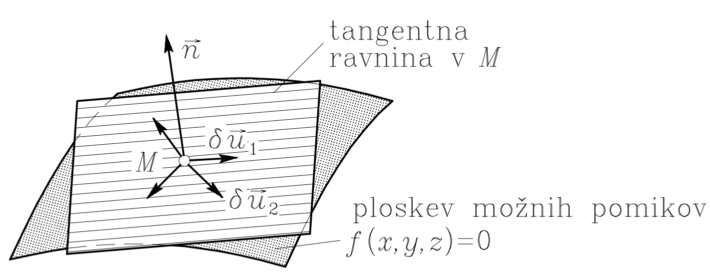
SLIKA 2 Virtualni pomik $\delta\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$ za lego $\varphi = 0$

Linearni del možnega pomika torej pomeni pomik vzdolž tangente na krivuljo možnih pomikov.

Če se delec $\mathscr{D}_i$ lahko premika po ploskvi tridimenzionalnega prostora, ki je določena z enačbo $f(x, y, z) = 0$, ima dve prostostni stopnji gibanja $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2)$. Njegov virtualni pomik je

$$\delta\vec{u}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\,\delta q_2. \tag{11}$$

Če izberemo za posplošeni koordinati q_1 in q_2 koordinatni črti ploskve, po katerih se delec lahko giblje, sledi iz enačbe (11), da leži virtualni pomik $\delta\vec{u}_i$ v tangentni ravnini na ploskev možnih pomikov. Tangentna ravnina virtualnih pomikov $\delta\vec{u}_i$ na ploskev možnih pomikov leži v tisti točki, v kateri se delec nahaja, preden ga virtualno premaknemo. Velikost in smer virtualnega pomika v tangentni ravnini sta **poljubna** (slika 3).



SLIKA 3 Virtualni pomik $\delta\vec{u}_i$ leži v tangentni ravnini na ploskev $f = 0$.

Če je lega delcev določena z n_{ps} posplošenimi koordinatami, leži virtualni pomik v tangentni ravnini na n_{ps} dimenzionalno ploskev možnih pomikov. Take ploskve ne moremo narisati.

2.4 Izrek o virtualnih pomikih

Sile, ki delujejo na sistem delcev $\mathscr{D}_i$ z masami m_i, $(i = 1, \ldots, N)$, delimo na zunanje sile $\vec{F}_{iz}$ in na notranje sile $\vec{S}_{ij}$. Zunanje sile $\vec{F}_{iz}$ delimo še na aktivne sile $\vec{F}_i$ in na reakcije podpor $\vec{R}_i$.

Notranje sile $\vec{S}_{ij}$ so sile, s katerimi posamezni delci obravnavanega sistema delcev delujejo med seboj. $\vec{S}_{ij}$ je sila, s katero delec $\mathscr{D}_j$ deluje na delec $\mathscr{D}_i$. Po 3. Newtonovem zakonu dva delca delujeta med seboj s silama, ki imata enako velikost, ležita na isti smernici in sta nasprotno usmerjeni:

$$\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}, \qquad \vec{S}_{ii} = \vec{0}. \tag{12}$$

Enačbo gibanja delca $\mathscr{D}_i$ določa drugi Newtonov zakon

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij}, \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{13}$$

Pri tem je $\vec{a}_i \equiv \partial^2 \vec{r}_i / \partial t^2$ vektor pospeška delca $\mathscr{D}_i$. Če enačbo gibanja za delec $\mathscr{D}_1$ skalarno pomnožimo z virtualnim pomikom $\delta\vec{u}_1$ delca $\mathscr{D}_1$, enačbo gibanja za delec $\mathscr{D}_2$ z virtualnim pomikom $\delta\vec{u}_2$ delca $\mathscr{D}_2$ in tako dalje ter enačbe seštejemo, dobimo:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij} \cdot \delta\vec{u}_i = 0. \tag{14}$$

Izraz (14) predstavlja delo sil na virtualnih pomikih, ki ga velikokrat imenujemo virtualno delo in označimo z δW:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij} \cdot \delta\vec{u}_i = 0. \tag{15}$$

Če so podpore take, da je delo reakcij na virtualnih pomikih enako nič

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{u}_i = 0, \tag{16}$$

so podpore **idealne**. Če so razen tega vezi med delci take, da je delo notranjih sil na virtualnih pomikih enako nič

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij} \cdot \delta\vec{u}_i = 0, \tag{17}$$

potem zapišemo (15) v obliki **Lagrange-D'Alembert**-ovega izreka za sistem delcev

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \cdot \delta\vec{u}_i = 0. \tag{18}$$

Če delci mirujejo ali se gibljejo premočrtno z enakomerno hitrostjo, dobimo iz (18) izrek o virtualnih pomikih za sistem delcev, za katerega sta izpolnjena pogoja (16) in (17), v obliki

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i = 0. \tag{19}$$

Izrek o virtualnih pomikih (19) določa **pogoj za mirovanje** sistema delcev, za katerega sta izpolnjena pogoja (16) in (17).

Pri sistemu delcev s togimi vezmi se razdalja med delcema $\mathscr{D}_i$ in $\mathscr{D}_j$ ne spreminja. Virtualni pomik $\delta\vec{u}_j$ delca $\mathscr{D}_j$ izrazimo z virtualnim pomikom $\delta\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$ po enačbi

$$\delta\vec{u}_j = \delta\vec{u}_i + \delta\vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{ij}, \qquad \delta\vec{\varphi}_j = \delta\vec{\varphi}_i. \tag{20}$$

Z $\vec{r}_{ij}$ označimo vektor od lege delca $\mathscr{D}_i$ do lege delca $\mathscr{D}_j$. Pokažimo, da enačbi (20) ustrezata pogojem (9) za virtualni pomik. Pokazati moramo, da predstavlja $\delta\vec{u}_j$ v enačbi (20) linearni del možnih pomikov.

Druga izmed enačb (20) je očitno linearna, zato obravnavajmo le prvo. Zveza med $\delta\vec{u}_j$ in $\delta\vec{u}_i$ je tudi linearna. Zato ta del enačbe ustreza definiciji za virtualne pomike. Sedaj pokažimo še, da definiciji za virtualne pomike ustreza tudi drugi del prve izmed enačb (20). Če vzamemo, da je $\delta\vec{u}_i = \vec{0}$, sledi

$$\delta\vec{u}_j = \delta\vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{ij}. \tag{21}$$

Sedaj predpostavimo, da je možen pomik $\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$ enak nič, možen zasuk $\vec{\varphi}_i$ sistema delcev s togimi vezmi okrog delca $\mathscr{D}_i$ pa različen od nič: $\vec{\varphi}_i \neq \vec{0}$. V tem primeru se sistem delcev vrti okrog delca $\mathscr{D}_i$. Ploskev možnih pomikov delca $\mathscr{D}_j$ določa krogla s polmerom $|\vec{r}_{ij}|$ in središčem v $\mathscr{D}_i$. Iz (21) sledi, da je virtualni pomik $\delta\vec{u}_j$ pravokoten na vektor $\vec{r}_{ij}$. Zato leži v tangentni ravnini na ploskev možnih pomikov, to je na kroglo. S tem smo pokazali, da enačbi (20) ustrezata pogojem za virtualne pomike sistema delcev s togimi vezmi. Enačbi (20) predstavljata kinematične pogoje za virtualne pomike sistema delcev s togimi vezmi.

Pokažimo, da je za sistem delcev s togimi vezmi enačba (17) izpolnjena. V vsoti skalarnih produktov v enačbi (17) nastopajo vsote dela parov sil

$$\vec{S}_{ij} \cdot \delta\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot \delta\vec{u}_j.$$

Zaradi enačb (12) in (20) je $\vec{S}_{ij} \cdot \delta\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot \delta\vec{u}_j = 0$ in je zato izpolnjena enačba (17). Ker so podpore idealne, je izpolnjena tudi enačba (16). Zato je delo sil na virtualnih pomikih enako

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i) \cdot \delta\vec{u}_i = 0. \tag{22}$$

Enačba (22) opisuje gibanje sistema delcev s togimi vezmi in idealnimi podporami. Če sistem delcev miruje ali se giblje premočrno in z enakomerno hitrostjo, so pospeški vseh delcev enaki nič. Takrat dobimo iz enačbe (22) **izrek o virtualnih pomikih** za sistem delcev s togimi vezmi in idealnimi podporami, ki predstavlja pogoj za mirovanje sistema delcev

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i = 0.} \tag{23}$$

Enačba (23) določa pogoj za ravnotežje sil, ki na sistem delcev s togimi vezmi in idealnimi podporami, delujejo. Izrek o virtualnih pomikih imenujemo tudi Lagrangeov izrek o virtualnih pomikih ali izrek o virtualnem delu. Opišemo ga takole: *delo vseh aktivnih sil na virtualnih pomikih je enako nič, če so sile, ki na sistem delcev delujejo, v ravnotežju.* Velja tudi obrnjeno: *če je delo vseh aktivnih sil na virtualnih pomikih enako nič, so sile, ki na sistem delcev delujejo, v ravnotežju.*

Izrek o virtualnih pomikih (23) lahko izrazimo s posplošenimi silami Q_i, če virtualni pomik $\delta\vec{u}_i$ delca $\mathscr{D}_i$ izrazimo s posplošenimi koordinatami q_i $(i = 1, \ldots, n_{ps})$. Enačbo (8) vstavimo v (23) in dobimo

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i = 0.} \tag{24}$$

S Q_i je označena posplošena sila, definirana z enačbo

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n_{ps}). \tag{25}$$

Merska enota posplošene sile je odvisna od merske enote pripadajoče posplošene koordinate. Na primer: če je posplošena koordinata q razdalja, je posplošena sila Q sila; če je q kot, je Q moment itd.

3. Izrek o virtualnih pomikih za togo telo z idealnimi podporami

Če na togo telo deluje s sil, zapišemo izrek o virtualnih pomikih takole

$$\boxed{\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i = 0.} \tag{26}$$

Z $\delta\vec{u}_i$ označimo virtualni pomik prijemališča sile $\vec{F}_i$. V izreku nastopajo le aktivne sile F_i, ne pa tudi reakcije in notranje sile. Kinematične pogoje za virtualne pomike togega telesa zapišemo z enačbama (glej (20))

$$\delta\vec{u} = \delta\vec{u}_0 + \delta\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}, \qquad \delta\vec{\varphi} = \delta\vec{\varphi}_0. \tag{27}$$

4. Uporaba izreka o virtualnih pomikih za statično določene linijske konstrukcije

4.1 Računanje reakcij in notranjih sil statično določene linijske konstrukcije

Reakcije in notranje sile določamo po naslednjem postopku:

Statično določeno konstrukcijo spremenimo v konstrukcijo z eno prostostno stopnjo. Če računamo vpetostno reakcijo oziroma vpetostni moment, potem v podporo vstavimo tako vez, ki dovoli pomik v smeri vpetostne reakcije oziroma zasuk okrog osi vpetostnega momenta. Vpliv odstranjene vezi nadomestimo z ustrezno vpetostno reakcijo oziroma vpetostnim momentom. Če pa računamo notranjo silo oziroma notranji moment v izbranem prečnem prerezu, potem v ta prerez vstavimo tako vez, ki dovoli medsebojni zamik sosednjih elementov v smeri notranje sile oziroma medsebojni zasuk sosednjih elementov okrog osi notranjega momenta. Vpliv odstranjene vezi nadomestimo s parom ustreznih notranjih sil oziroma notranjih momentov.

Konstrukciji z eno prostostno stopnjo gibanja vsilimo virtualne pomike in zapišemo izrek o virtualnih pomikih. V izreku upoštevamo kinematične pogoje za virtualne pomike. Ko upoštevamo še, da so virtualni pomiki poljubni, lahko reakcijo oziroma notranjo silo izračunamo.

4.2 Določanje vplivnic statično določenih linijskih konstrukcij

Pri določanju vplivnic za reakcije in notranje sile v statično določeni linijski konstrukciji upoštevamo naslednja pravila:

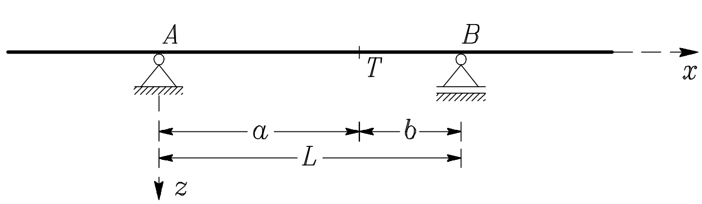
Statično določeno konstrukcijo spremenimo v konstrukcijo z eno prostostno stopnjo. Če določamo vplivnico za vpetostno reakcijo oziroma vpetostni moment, potem v podporo vstavimo tako vez, ki dovoli pomik v smeri vpetostne reakcije oziroma zasuk okrog osi vpetostnega momenta. Vpliv odstranjene vezi nadomestimo z ustrezno vpetostno reakcijo oziroma vpetostnim momentom. Konstrukcijo z eno prostostno stopnjo virtualno tako premaknemo, da ima virtualni pomik na mestu vpetostne reakcije oziroma virtualni zasuk na mestu vpetostnega momenta **nasprotno smer** od smeri vpetostne reakcije oziroma vpetostnega momenta. Absolutna vrednost virtualnega pomika oziroma virtualnega zasuka mora biti enaka **ena**.

Če pa določamo vplivnico za notranjo silo oziroma notranji moment v nekem prečnem prerezu, potem v ta prerez vstavimo tako vez, ki dovoli medsebojni zamik sosednjih elementov v smeri notranje sile oziroma medsebojni zasuk okrog osi notranjega momenta. Vpliv odstranjene vezi nadomestimo s parom notranjih sil oziroma notranjih momentov. Konstrukcijo z eno prostostno stopnjo virtualno tako premaknemo, da ima virtualni pomik na mestu notranje sile oziroma virtualni zasuk na mestu notranjega momenta **nasprotno smer** od smeri notranje sile oziroma notranjega momenta. Vsota absolutnih vrednosti virtualnih pomikov na mestu notranje sile oziroma virtualnih zasukov na mestu notranjega momenta mora biti enaka **ena**.

V tem primeru določa virtualno premaknjena lega konstrukcije vplivnico

$$\delta w \equiv \eta.$$

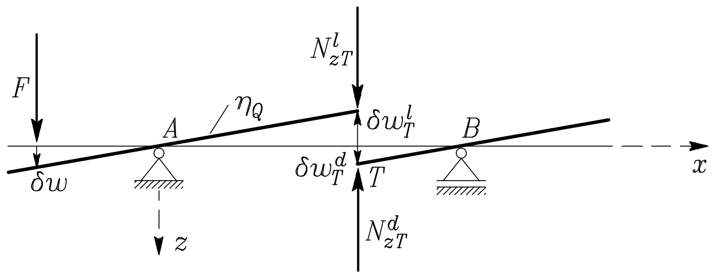
Primer: Z uporabo izreka o virtualnih pomikih določimo vplivnico za prečno silo N_{zT} v prečnem prerezu $x = a$ prostoležečega nosilca s previsoma (slika 4)!



SLIKA 4 Prostoležeči nosilec s previsoma

V prečnem prerezu a vstavimo tako vez, ki dovoli medsebojni zamik v smeri prečne sile N_{zT} (členek za prečno silo ali strižni členek). Vpliv odstranjene vezi nadomestimo s silama $N_{zT}^l = N_{zT}^d \equiv N_{zT}$. S tem dobimo konstrukcijo, ki ima eno prostostno stopnjo gibanja in jo lahko virtualno premaknemo. Upoštevamo, da strižni členek dovoli medsebojni zamik sosednjih elementov v smeri prečne sile, medsebojnega zasuka pa ne. Če vzamemo, da ima δw_T^l nasprotno smer kot sila N_{zT}^l, δw_T^d pa nasprotno smer kot sila N_{zT}^d, zapišemo izrek o virtualnih pomikih takole (slika 5)

$$\delta W = -N_{zT}^l \, |\delta w_T^l| - N_{zT}^d \, |\delta w_T^d| + F \, \delta w = 0 \quad \rightarrow \quad -N_{zT}(|\delta w_T^l| + |\delta w_T^d|) + F \, \delta w = 0.$$



SLIKA 5 V konstrukcijo vstavimo strižni členek in jo ustrezno premaknemo.

Če je $|\delta w_T^l| + |\delta w_T^d| = 1.0$, dobimo

$$\boxed{N_{zT} = F \, \delta w.} \tag{28}$$

Iz primerjave enačbe (28) z enačbo $N_{zT} = F \, \eta_Q$, s katero je vplivnica definirana, sledi, da je virtualno premaknjena lega δw enaka vplivnici η_Q za prečno silo N_{zT}.

Velikosti $|\delta w_T^l|$ in $|\delta w_T^d|$ izračunamo iz enačbe $|\delta w_T^l| + |\delta w_T^d| = 1.0$ ter kinematičnega pogoja $|\delta w_T^l|/a = |\delta w_T^d|/b$. Tako dobimo izraza $|\delta w_T^l| = a/L$ in $|\delta w_T^d| = b/L$, s katerima vplivnico η_Q lahko narišemo!

5. Zaključek

V prikazani izpeljavi izreka o virtualnih pomikih za togo telo nismo zahtevali, da so virtualni pomiki majhni, kot to naredijo v nekaterih knjigah. Virtualni pomik smo definirali kot poljubni linearni del možnega pomika in izpeljali izrek o virtualnih pomikih. Pri taki definiciji virtualnega pomika lahko izrek uporabimo tudi pri nalogah, pri katerih virtualni pomiki in zasuki niso majhni.

6. Literatura

M. Stanek, G. Turk, Statika II, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1996.