9. VAJA IZ TRDNOSTI
(deformacijska energija, Castiglianov izrek)

NALOGA 1. *Za Hookeov materialni model $\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda I_{\varepsilon}\,\mathbf{1}$, kjer sta μ in λ Laméjeva koeficienta, izpelji: (1) izraza za E in ν v odvisnosti od μ in λ, (2) inverzno formulo $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$, (3) zvezo med lastnimi vrednostmi tenzorjev $\boldsymbol{\sigma}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}$ ter pokaži, da so pripadajoči lastni vektorji za $\boldsymbol{\sigma}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}$ enaki, (4) zvezo med σ_{m} in ε_{v}, (5) konstitucijski zakon za deviator napetosti $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'(\boldsymbol{\varepsilon})$, (6) v glavnem koordinatnem sistemu izraz za specifično deformacijsko energijo*

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon},$$

kjer je $\boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$, ter izraz za $W = W(\boldsymbol{\sigma})$. Pokaži, da veljata izraza

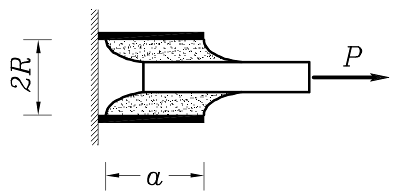
$$W_{\mathrm{vol}} = \tfrac{1}{2}\sigma_{\mathrm{m}}\varepsilon_{\mathrm{v}}, \quad W_{\mathrm{dev}} = \tfrac{3}{4\mu}\tau_{\mathrm{oct}}^2,$$

kjer je W_{vol} specifična deformacijska energija pri spremembi prostornine, W_{dev} pa specifična deformacijska energija pri preoblikovanju. Velja $W = W_{\mathrm{vol}} + W_{\mathrm{dev}}$. Izračunaj maksimalno preoblikovalno energijo W_{dev} za duktilne materiale.

Podatki: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda I_{\varepsilon}\,\mathbf{1}$

REŠITEV. $2\sigma_Y^2 = 3\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = 9\tau_{\mathrm{oct}}^2$

NALOGA 2. *Pasivna zaščita pri prenosu vibracij na podporo je izdelana tako, da je tog okrogel nosilec premera $2r$ prilepljen na votlo valjasto gumo (izolator) zunanjega premera $2R$, višine a in strižnega modula G. Izračunaj deformacijsko energijo, ki jo sila P, povzroči v votli valjasti gumi.*



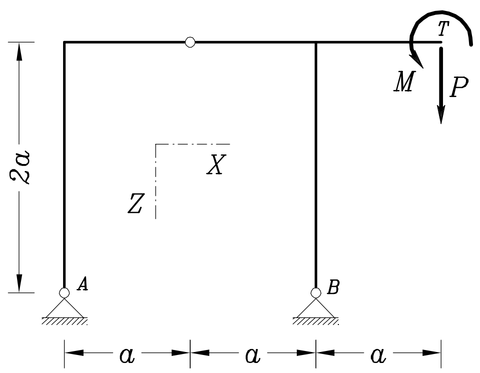
Podatki: a, r, R, G, P

REŠITEV. $D = \frac{P^2}{4\pi a G}\log\frac{R}{r}$

NALOGA 3. *Za prikazani ravninski okvir izračunaj deformacijsko energijo D zaradi obremenitve s silo P in momentom M. S Castiglianovim izrekom izračunaj tudi navpični pomik in zasuk ter koeficiente $f_{ij}(T)$ $(i,j = 1,2)$ podajnostne matrike,*

$$\begin{bmatrix} u_X \\ \varphi_Y \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix},$$

v točki T. Upoštevaj vpliv osnih sil na deformiranje.



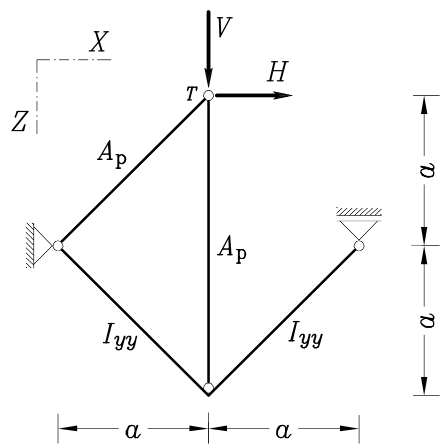
Podatki: a, P, M, E, $a^2A_x = \alpha I_{yy}$

REŠITEV. $D^* = \frac{1}{12EI_{yy}}\big(\frac{123+20\alpha}{4\alpha}a^3P^2 - \frac{51+24\alpha}{2\alpha}a^2PM + \frac{27+36\alpha}{4\alpha}aM^2\big)$

NALOGA 4. *Za prikazani ravninski okvir izračunaj deformacijsko energijo D zaradi obremenitve s silama H in V. S Castiglianovim izrekom izračunaj tudi pomik na mestu in v smeri sile V ter koeficiente $f_{ij}(T)$ $(i,j = 1,2)$ podajnostne matrike,*

$$\begin{bmatrix} u_X \\ u_Z \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_T \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix},$$

v točki T. Osne in prečne sile v nosilcu *zanemari.*



Podatki: a, H, V, E, $\sqrt{2}a^2A_{\mathrm{p}} = 3I_{yy}$

REŠITEV. $D^* = \frac{a^3\sqrt{2}}{12EI_{yy}}(4H^2\sqrt{2} + 5H^2 + 10HV + 5V^2)$

NALOGA 5. (Bettijev, Maxwellov in Castiglianov izrek) *Za splošen ravninski okvir izpelji Bettijev izrek. Iz Bettijevega izreka nato izpelji še Maxwellov in Castiglianov izrek.*

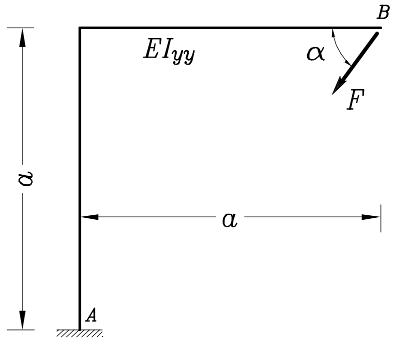
Rešitev. Bettijev izrek:

$$\int_{\bar{\mathcal{C}}} (\bar{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \cdot \boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \cdot \boldsymbol{\varphi})\, \mathrm{d}x = \int_{\bar{\mathcal{C}}} (\boldsymbol{\mathcal{P}} \cdot \bar{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\mathcal{M}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}})\, \mathrm{d}x$$

NALOGA 6. *Nosilec AB konstantnega prečnega prereza in elastičnega modula E je v točki B obremenjen s silo F, ki učinkuje pod kot α, kot kaže slika. Določi kot α tako, da sta sila F in vektor pomika v točki B na isti (glavni) smernici. Kolikšna je pripadajoča deformacijska energija?*

Podatki: a, EI_{yy}, F

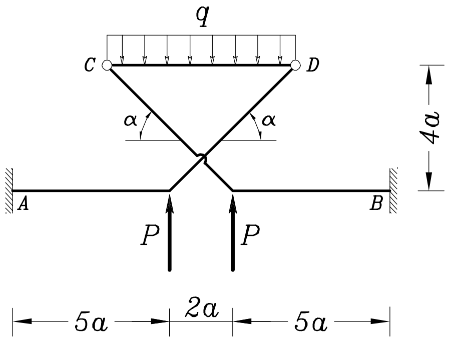
Rešitev. $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $D^* = \frac{5-(-1)^k\, 3\sqrt{2}}{12 EI_{yy}}\, a^3 F^2$



NALOGA 7. *Za prikazani ravninski okvir izračunaj s Castiglianovim izrekom reakcije in nariši diagrame notranjih sil ter pomik na mestu in v smeri sile P. Izračunaj pripadajočo deformacijsko energijo okvira. Pri kateri kombinaciji obtežbe q in sile P v nosilcu CD ni osnih sil?*

Podatki: a, P, q, EI_{yy}, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Rešitev. $u_P = 18.974\, \frac{P - 3aq}{EI_{yy}}\, a^3$, $D^* = 18.974\, \frac{a^3 P^2}{EI_{yy}} - 113.847\, \frac{a^4 q P}{EI_{yy}} + 203.170\, \frac{a^5 q^2}{EI_{yy}}$, $qa = \frac{25}{195 + 32\sqrt{2}}\, P$



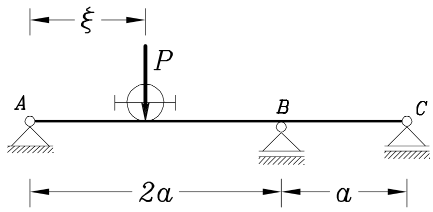
NALOGA 8. *Z Maxwellovim izrekom izračunaj vplivnici za reakcijo in upogibni moment v točki B za prikazani kontinuirni nosilec.*

Podatki: a, EI_{yy}

Rešitev. $s = \frac{\xi}{2a}$, $\quad \xi \in [0, 3a]$

$$\eta_{B_Z}(s) = -2s + s^3 - 3\,(s-1)^3\, H(s-1)$$

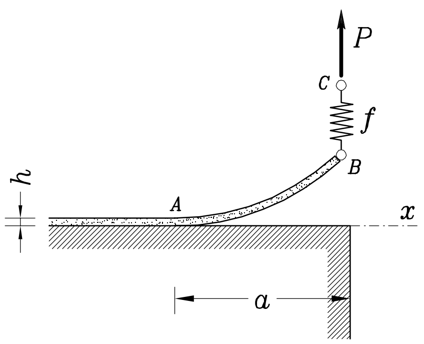
$$\eta_{M_Y^B}(s) = -2a\left(\frac{s - s^3}{3} - (2 - 4s + 3s^2 - s^3)\, H(s-1)\right)$$



NALOGA 9. (Mehanika loma) *V eksperimentalni mehaniki sprijemljivost tankega sloja s togo podlago merijo tako, da kontrolirano razpoko dolžine a povečujejo (i) s predpisano silo P ali (ii) s predpisanim pomikom v točki C, kjer je f podajnost vzmeti. Izračunaj lomno silo na enoto širine sloja, ki je potrebna, da se razpoka podaljša za Δa. Kako hitro se pri tem sprosti potencialna energija? Analiziraj limitna primera $f \to 0$ in $f \to \infty$.*

Podatki: a, P, f, EI_{yy}

Rešitev. $\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{3}{2a}\, w_B P$ (angl. *the energy release rate* ali *the crack extension force*)



NALOGA 10. (Energijski zakon) *Klada mase m pade iz višine h na vzmet togosti k, ki je pritrjena na visečo gredo dolžine a, premera d in elastičnega modula E. Ob predpostavki elastičnega trka določi napetost in raztezek grede ter faktor trka.*

Podatki: $a = 2\,\mathrm{m}$, $d = 15\,\mathrm{mm}$, $h = 15\,\mathrm{cm}$, $m = 20\,\mathrm{kg}$, $k = 10\,\mathrm{kN/cm}$, $E = 21\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$

Rešitev. $\sigma = 4.38\,\mathrm{kN/cm^2}$, $f = 38.8$