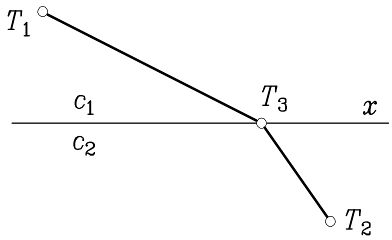
# 8. VAJA IZ TRDNOSTI
# (variacijski račun, direktne metode)

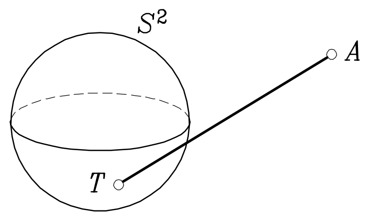
**NALOGA 1.** (Fermatov princip) *Naj bosta $T_1$ in $T_2$ točki, ki ležita v ravnini na nasprotnih straneh osi $x$. Kako moramo izbrati točko $T_3$ na abscisi, da pride svetlobni žarek, ki se na odseku $T_1T_3$ giblje s hitrostjo $c_1$, na $T_3T_2$ pa s $c_2$, najhitreje iz točke $T_1$ v točko $T_2$?*




**Podatki:** $c_1$, $c_2$, $T_1$, $T_2$

REŠITEV. $c_2 \sin \alpha_1 = c_1 \sin \alpha_2$ (lomni zakon)

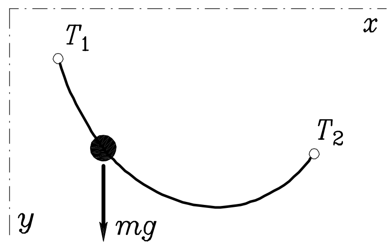
**NALOGA 2.** (Vezani ekstrem) *Naj bo $A \in \mathbb{R}^3$ poljubna točka v prostoru. Izračunaj točko $T$ na sferi $S^2$ z radijem $r$ tako, da bo razdalja $\overline{AT}$ ekstremna.*




**Podatki:** $r$, $S^2$, $A$

REŠITEV. Presek $S^2$ s premico, ki jo določata točki $A$ in središče sfere.

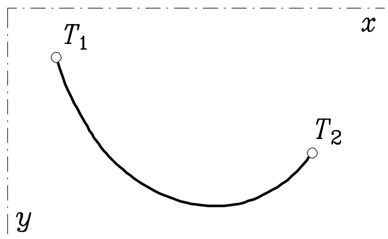
**NALOGA 3.** (Brahistokrona) *V navpični ravnini naj bosta dani točki $T_1$ in $T_2$. Določi krivuljo, po kateri točkasta masa $m$, ki je vezana na to krivuljo, najhitreje pride iz točke $T_1$ v točko $T_2$. Upor zraka zanemari.*




**Podatki:** $m$, $T_1$, $T_2$

REŠITEV. Cikloida.

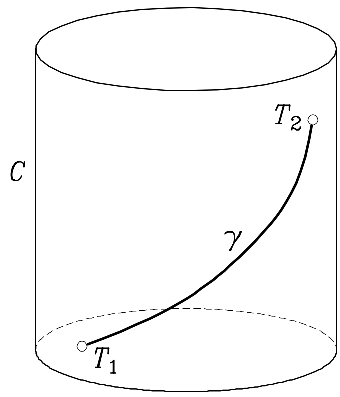
**NALOGA 4.** (Izoperimetrični problem. Verižnica) *Določi ravnotežno lego neraztegljive vrvice linijske gostote $\mu$ in dolžine $\ell$, ki je pritrjena v točkah $T_1$ in $T_2$. V ravnotežni legi je težnostna potencialna energije vrvice minimalna. Tedaj je tudi težišče vrvice najnižje.* Analogna naloga: *Določi krivuljo med dvema točkama $T_1$ in $T_2$ z dolžino $\ell$, da bo površina rotacijske ploskve okoli osi $x$ maksimalna.*




**Podatki:** $\mu$, $\ell$, $T_1$, $T_2$

REŠITEV. Verižnica.

**NALOGA 5.** (Geodetična krivulja) *Naj bosta $T_1$ in $T_2$ poljubni točki na valju $C$ z radijem $r$. Določi krivuljo $\gamma$ med točkama $T_1$ in $T_2$ tako, da bo ločna razdalja $\ell(\gamma)$ med njima najmanjša. Kaj dobimo, če valj $C$ zamenjamo s sfero $S^2$?*




**Podatki:** $r$, $T_1$, $T_2$

REŠITEV. Spirala. Presek $S^2$ z ravnino, ki jo določajo točke $T_1$, $T_2$ in središče sfere.

**NALOGA 6.** (Izrek o minimumu potencialne energije) *Za ravninski nosilec dolžine $a$ izpelji z izrekom o minimumu potencialne energije, $\varPi = D - W$,* tehnično teorijo nosilcev *(imenovano tudi 'teorija 1. reda'), tj. sistem diferencialnih enačb s pripadajočimi naravnimi (statičnimi) in bistvenimi (kinematičnimi) robnimi pogoji.*

Rešitev. Sistem diferencialnih enačb, $x \in (0, a)$:

$$
\begin{aligned}
N_x' + \mathcal{P}_x &= 0, & u' - \varepsilon &= 0, & N_x - EA_x\,\varepsilon &= 0,\\
N_z' + \mathcal{P}_z &= 0, & w' + \varphi - \gamma &= 0, & N_z - GA_z\,\gamma &= 0,\\
M_y' - N_z + \mathcal{M}_y &= 0, & \varphi' - \kappa &= 0, & M_y - EI_{yy}\,\kappa &= 0.
\end{aligned}
$$

Pripadajoči robni pogoji, $x \in \{0, a\}$:

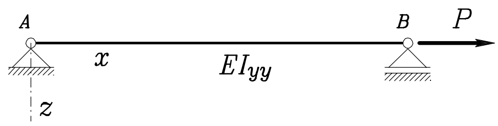
$$
\begin{aligned}
N_x(0) + F_1 &= 0, & u(0) &= U_1,\\
N_z(0) + F_2 &= 0, & w(0) &= U_2,\\
M_y(0) + F_3 &= 0, & \varphi(0) &= U_3,\\
N_x(a) - F_4 &= 0, & u(a) &= U_4,\\
N_z(a) - F_5 &= 0, & w(a) &= U_5,\\
M_y(a) - F_6 &= 0, & \varphi(a) &= U_6.
\end{aligned}
$$

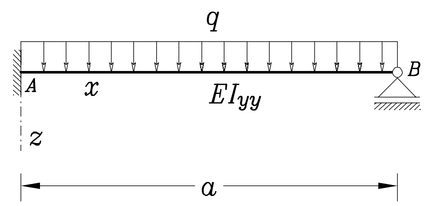
**NALOGA 7.** (Izrek o maksimumu dopolnilne potencialne energije. Legendrova transformacija) *Za ravninski nosilec izpelji ob upoštevanju Legendrove transformacije izrek o maksimumu dopolnilne potencialne energije. Primerjaj s Castiglianovim izrekom v 9. vaji.*

Rešitev.

$$
\varPi^*(N_x, N_z, M_y) = -\frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{N_x^2}{EA_x} + \frac{N_z^2}{GA_z} + \frac{M_y^2}{EI_{yy}}\right) \mathrm{d}x = -D^*
$$

**NALOGA 8.** *Za prikazana ravninska okvira izpelji z izrekom o minimumu potencialne energije pripadajoči robni problem in ga tudi reši. Izračunaj pripadajoči vrednosti potencialne energije v ekstremalah. Drugi primer reši tudi z izrekom o maksimumu dopolnilne potencialne energije.*




**Podatki:** $P$, $q$, $a$, $EI_{yy}$

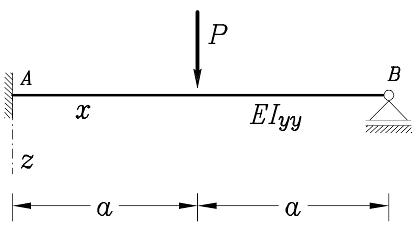
Rešitev. (i) $\varPi = -\frac{P^2}{2EI_{yy}}$, (ii) $\varPi = -\frac{a^5 q^2}{640 EI_{yy}}$, $B_z = -\frac{3}{8}\,aq$

**NALOGA 9.** (Ritzova metoda) *Prikazani ravninski nosilec dolžine $2a$ reši numerično tako, da predpostaviš funkcijo pomikov s predpisoma*

(i) $w(x) = x^2(x - 2a)\left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sin\frac{k\pi x}{2a}\right)$,

(ii) $w(x) = x^2(x - 2a)\left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k\right)$.

*Nastavka za pomik $w$ sta izbrana tako, da identično rešita bistvene robne pogoje: $w(0) = \varphi(0) = w(2a) = 0$. Analiziraj rešitev za posamezne vrednosti $n$. Nalogo reši tudi z izrekom o maksimumu dopolnilne potencialne energije.*




**Podatki:** $a$, $P$, $EI_{yy}$

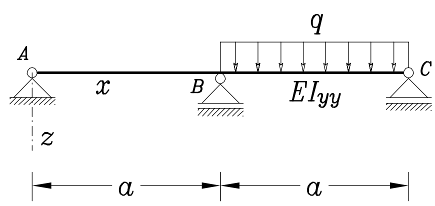
Rešitev. $\varPi = -\frac{7a^3P^2}{192 EI_{yy}}$, $B_z = -\frac{5}{16}\,P$

**NALOGA 10.** (Galerkinova metoda) *Prikazani kontinuirni nosilec dolžine $2a$ reši numerično tako, da predpostaviš funkcijo pomikov s predpisoma*

(i) $w(x) = x(x - a)(x - 2a)\left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \sin\frac{k\pi x}{a}\right)$,

(ii) $w(x) = x(x - a)(x - 2a)\left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k\right)$.

*Nastavka za pomik $w$ sta izbrana tako, da identično rešita bistvene robne pogoje: $w(0) = w(a) = w(2a) = 0$. Analiziraj rešitev za posamezne vrednosti $n$.*




**Podatki:** $a$, $q$, $EI_{yy}$

Rešitev. $\varPi = -\frac{11a^5q^2}{3840 EI_{yy}}$, $B_z = -\frac{5}{8}\,aq$