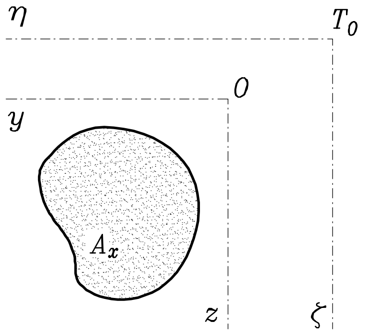
1. VAJA IZ TRDNOSTI
(geometrijske karakteristike likov)

NALOGA 1. *Izpelji formulo za vztrajnostni tenzor* $\mathbf{J}'$ *za poljuben lik, če koordinatni sistem* (y, z) *vzporedno premaknemo v točko* $T_0(y_0, z_0)$*, tj.* $(y, z) \mapsto (\eta, \zeta) = (y, z) - (y_0, z_0)$.

Podatki: A_x, $T_0(y_0, z_0)$

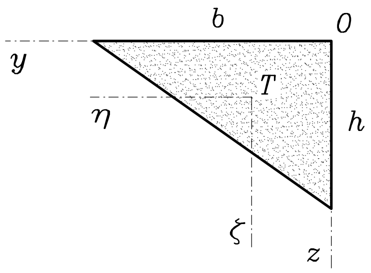


Rešitev.

$$\begin{aligned} I_{\eta\eta} &= I_{yy} - 2z_0 S_y + z_0^2 A_x \\ I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\eta} &= I_{yz} + y_0 S_y + z_0 S_z - y_0 z_0 A_x \\ I_{\zeta\zeta} &= I_{zz} - 2y_0 S_z + y_0^2 A_x \end{aligned}$$

NALOGA 2. *Izračunaj komponente vztrajnostnega tenzorja* $\mathbf{J}$ *za prikazani trikotnik glede na koordinatni sistem* (y, z)*. Izračunaj vztrajnostni tenzor* $\mathbf{J}_T$*, če koordinatni sistem premaknemo v težišče lika.*

Podatki: b, h

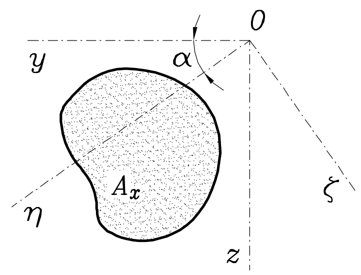


Rešitev.

$$\mathbf{J} = \frac{A_x}{12}\begin{bmatrix} 2h^2 & -bh \\ -bh & 2b^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}_T = \frac{A_x}{18}\begin{bmatrix} h^2 & A_x \\ A_x & b^2 \end{bmatrix}$$

NALOGA 3. *Izpelji formulo za vztrajnostni tenzor* $\mathbf{J}'$ *pri rotaciji koordinatnega sistema* $(y, z) \mapsto (\eta, \zeta)$.

Podatki: A_x, α



Rešitev.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned} I_{\eta\eta} &= \tfrac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha \\ I_{\eta\zeta} &= -\tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha \\ I_{\zeta\zeta} &= \tfrac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha \end{aligned}$$

NALOGA 4. *Pri katerem kotu je vztrajnostni moment* $I_{\eta\eta}(\alpha)$ *ekstremen? Izračunaj glavni vztrajnostni tenzor* $\widehat{\mathbf{J}}$.

Podatki: A_x

Rešitev.

$$\tan 2\widehat{\alpha} = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}, \qquad \widehat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} I_{\eta\eta}(\widehat{\alpha}) & 0 \\ 0 & I_{\zeta\zeta}(\widehat{\alpha}) \end{bmatrix}$$

NALOGA 5. *Izračunaj deviacijski vztrajnostni moment I_{yz} za lik $\mathcal{A}_x$, ki je simetričen glede na koordinatno os z.*

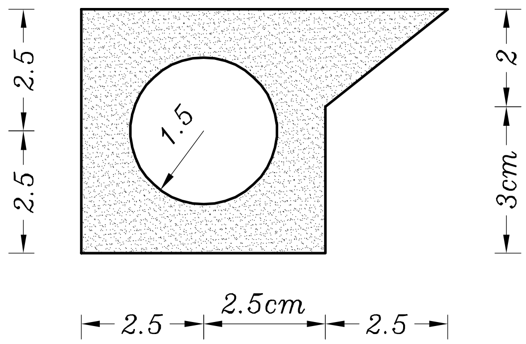
Podatki: $\mathcal{A}_x$

REŠITEV. $I_{yz} = 0$

NALOGA 6. *Izračunaj komponente glavnega vztrajnostnega tenzorja $\widehat{\mathbf{J}}$ ter pripadajoče glavne vztrajnostne osi glede na težišče podanega lika.*

Podatki:

REŠITEV. $\widehat{\alpha} = 28.912°$, $\widehat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 48.442 & 0 \\ 0 & 80.951 \end{bmatrix}$ cm^4

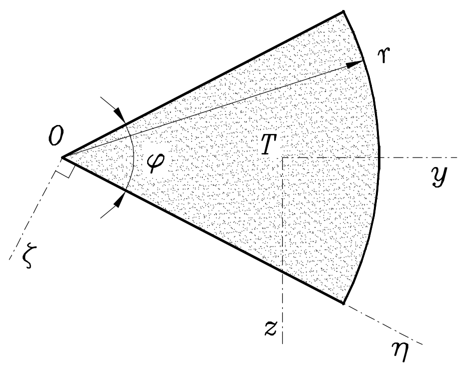


NALOGA 7. *Izračunaj koordinate težišča $T(\eta_T, \zeta_T)$ in komponente glavnega vztrajnostnega tenzorja $\widehat{\mathbf{J}}_T$ v težišču prikazanega lika.*

Podatki: r, φ

REŠITEV. $T(\eta_T, \zeta_T) = \frac{2r}{3\varphi}(\sin\varphi, \cos\varphi - 1)$

$$\widehat{\mathbf{J}}_T = \frac{r^4}{8}\begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi & 0 \\ 0 & \varphi + \sin\varphi + \frac{32\,(\cos\varphi - 1)}{9\,\varphi} \end{bmatrix}$$

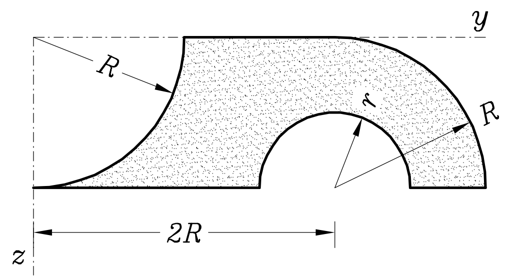


NALOGA 8. *Za prikazani lik izračunaj koordinate težišča $T(y_T, z_T)$ in komponente glavnega vztrajnostnega tenzorja $\widehat{\mathbf{J}}_T$ v težišču.*

Podatki: r, $R = 2r$

REŠITEV. $T(y_T, z_T) = (3.4659r, 1.0071r)$

$$\widehat{\mathbf{J}}_T = \begin{bmatrix} 2.0053r^4 & 0 \\ 0 & 11.5389r^4 \end{bmatrix}$$



NALOGA 9. *Izpelji izraze za ploščino A_x, statična momenta S_y, S_z in komponente vztrajnostnega tenzorja $\mathbf{J}$ v koordinatnem sistemu (y, z) za poljuben poligonalen lik.*

Podatki: $T_i(y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$

REŠITEV. $(y_{n+1}, z_{n+1}) = (y_1, z_1)$

$$A_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1} + y_i)(z_{i+1} - z_i)$$
$$S_y = -\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2)$$
$$S_z = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(z_{i+1} - z_i)(y_{i+1}^2 + y_{i+1}y_i + y_i^2)$$
$$I_{yy} = -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^3 + z_{i+1}^2 z_i + z_{i+1}z_i^2 + z_i^3)$$
$$I_{yz} = -\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n}(z_{i+1} - z_i)(z_{i+1}(3y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_i + y_i^2) + z_i(y_{i+1}^2 + 2y_{i+1}y_i + 3y_i^2))$$
$$I_{zz} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(z_{i+1} - z_i)(y_{i+1}^3 + y_{i+1}^2 y_i + y_{i+1}y_i^2 + y_i^3)$$