

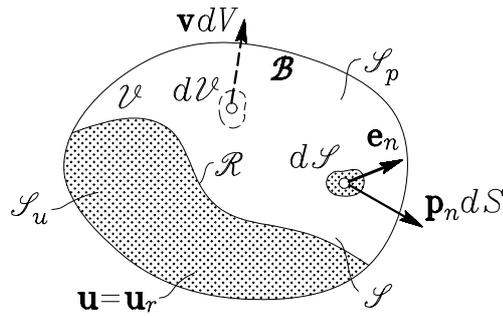
1.

ENERGIJSKE METODE V MEHANIKI KONSTRUKCIJ

1.1 Pregled osnovnih enačb linearne mehanike trdnih teles

Ravnotežne enačbe

Ravnotežne enačbe povezujejo specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n in specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} obravnavanega telesa z napetostmi σ_{ij} . Mejno ploskev telesa simbolično razdelimo na dva dela (slika 1.1)



Slika 1.1

Z \mathcal{S}_p označimo del zunanje mejne ploskve, na katerem je predpisana aktivna zunanja obtežba \mathbf{p}_n , z \mathcal{S}_u pa tisti del, na katerem so zaradi podpiranja ali na kak drugačen način predpisani pomiki \mathbf{u} in zasuki $\boldsymbol{\omega}$. Oba dela sta z robom \mathcal{R} povezana v ploskev \mathcal{S}

$$\mathcal{S}_p \cup \mathcal{S}_u = \mathcal{S} \quad \mathcal{S}_p \cap \mathcal{S}_u = \mathcal{R}. \quad (1.1)$$

V kartezijem koordinatnem sistemu z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ morajo biti znotraj območja \mathcal{V} izpolnjeni pogoji

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + v_j = 0 \\ & \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.2) \\ \mathcal{S}_p : \quad & p_{nj} = \sum_i \sigma_{ij} e_{ni} \end{aligned}$$

V nekaterih izpeljavah bomo uporabljali vektorski zapis ravnotežnih enačb

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ & \sum_i \mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z). \quad (1.3) \\ \mathcal{S}_p : \quad & \mathbf{p}_n = \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i e_{ni} \end{aligned}$$

Kinematične enačbe

Kinematične enačbe povezujejo pomike in zasuke z deformacijami.

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} & \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ & & \omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ \mathcal{S}_u : \quad & u_i = u_i^r \quad (\omega_{ij} = \omega_{ij}^r) \quad (i, j = x, y, z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

oziroma v vektorski obliki

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \\ & (i = x, y, z) \quad (1.5) \\ \mathcal{S}_u : \quad & \mathbf{u} = \mathbf{u}^r \quad (\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^r) \end{aligned}$$

Konstitucijske enačbe

Konstitucijske enačbe povezujejo deformacije z napetostmi in spremembo temperature. Za linearno elastično izotropno telo velja

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \delta_{ij} - \beta_T \Delta T \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma \delta_{ij} + \alpha_T \Delta T \delta_{ij}.\end{aligned}\quad (i, j = x, y, z) \quad (1.6)$$

Pri tem sta I_1^ε in I_1^σ prvi invarianti tenzorja napetosti oziroma tenzorja majhnih deformacij

$$I_1^\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad I_1^\varepsilon = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta_{ij}. \quad (1.7)$$

Dodajmo še nekaj pojasnil v zvezi s hidrostatičnimi in deviatoričnimi napetostmi ter ustreznimi deformacijami. Tenzor napetosti smo razstavili na hidrostatični del σ_{ij}^H in deviatorični del σ_{ij} z razcepom

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^H + s_{ij} \quad \text{oziroma} \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{3} I_1^\sigma \delta_{ij} + s_{ij}, \quad (1.8)$$

pri čemer je hidrostatični del definiran s povprečno normalno napetostjo $3\sigma^H = I_1^\sigma$. Podobno razcepimo tudi tenzor majhnih deformacij na hidrostatični ali *sferični* del ε_{ij}^H in deviatorični ali *distorzijski* del, ki ga označimo z d_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^H + d_{ij} \quad \text{oziroma} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} I_1^\varepsilon \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (1.9)$$

Kakor vemo, je pri majhnih deformacijah s prvo invarianto tenzorja deformacij izražena specifična sprememba prostornine $\varepsilon_V = I_1^\varepsilon$. Sedaj lahko enačbi (1.8) in (1.9) zapišemo v naslednji obliki

$$\sigma_{ij} = \sigma^H \delta_{ij} + s_{ij} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (1.11)$$

V nadaljevanju se omejimo na izotermni primer ($\Delta T = 0$) in vstavimo zvezo (1.11) v prvo od konstitucijskih enačb (1.6)

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(\frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij} \right) + \lambda \varepsilon_V \delta_{ij} = \left(\frac{2\mu}{3} + \lambda \right) \varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}. \quad (1.12)$$

Člen v oklepaju izrazimo z modulom elastičnosti E in Poissonovim količnikom ν

$$\frac{2\mu}{3} + \lambda = \frac{2}{3} \frac{E}{2(1+\nu)} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (1.13)$$

Dobljeni izraz je v mehaniki linearne elastične zvezne snovi znan kot *prostorninski modul (bulk modulus) K*

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (1.14)$$

S tem lahko enačbo (1.12) zapišemo v naslednji obliki

$$\sigma_{ij} = K \varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}. \quad (1.15)$$

Po drugi strani pa iz definicije prve invariante tenzorja napetosti ob upoštevanju prve od konstitucijskih enačb (1.6) sledi

$$I_1^\sigma = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta_{ij} = 2\mu \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij}. \quad (1.16)$$

Ker je

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta_{ij} &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = I_1^\varepsilon = \varepsilon_V \\ \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij} &= \delta_{xx}^2 + \delta_{yy}^2 + \delta_{zz}^2 = 3, \end{aligned} \quad (1.17)$$

dobimo zvezo med prvima invariantama tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij v obliki

$$I_1^\sigma = (2\mu + 3\lambda) I_1^\varepsilon = (2\mu + 3\lambda) \varepsilon_V. \quad (1.18)$$

Primerjava z enačbama (1.13 in (1.14) pove, da je $2\mu + 3\lambda = 3K$; ob upoštevanju definicije hidrostatične napetosti $3\sigma^H = I_1^\sigma$ zato sledi

$$I_1^\sigma = 3KI_1^\varepsilon \quad \text{in} \quad \sigma^H = K\varepsilon_V. \quad (1.19)$$

Ob upoštevanju zveze (1.15) lahko sedaj drugo od enačb (1.8) zapišemo v zelo zgovorni obliki

$$\sigma^H \delta_{ij} + s_{ij} = K\varepsilon_V \delta_{ij} + 2\mu d_{ij}, \quad (1.20)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^H &= \sigma^H \delta_{ij} = K\varepsilon_V \delta_{ij} \\ s_{ij} &= 2\mu d_{ij} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Prišli smo do drugačnega zapisa že znanega dejstva, da je pri izotropnem, idealno elastičnem telesu hidrostatični del napetostnega stanja povezan zgolj s specifično spremembo prostornine, deviatorični del pa le z distorzijskim delom deformacijskega stanja, torej s spremembo oblike.

Tudi konstitucijske enačbe je smiselno zapisati v vektorski obliki. Enačbi (1.6) pomnožimo z \mathbf{e}_j in seštejemo po j

$$\begin{aligned} \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j &= 2\mu \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j + \lambda I_1^\varepsilon \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j - \beta_T \Delta T \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j \\ \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j &= \frac{1+\nu}{E} \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j + \alpha_T \Delta T \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ker je

$$\sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma}_i, \quad \sum_j \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \text{in} \quad \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i, \quad (1.23)$$

dobijo konstitucijske enačbe naslednjo vektorsko obliko

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_i &= 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_i + \lambda I_1^\varepsilon \mathbf{e}_i - \beta_T \Delta T \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_i - \frac{\nu}{E} I_1^\sigma \mathbf{e}_i + \alpha_T \Delta T \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (i = x, y, z) \quad (1.24)$$

Na podoben način lahko v vektorski obliki zapišemo enačbi (1.10) in (1.11)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_i &= \boldsymbol{\sigma}_i^H + \mathbf{s}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \boldsymbol{\varepsilon}_i^H + \mathbf{d}_i,\end{aligned}\tag{1.25}$$

kjer pomeni

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_i^H &= \sum_j \sigma_{ij}^H \mathbf{e}_j = \sigma^H \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \sigma^H \mathbf{e}_i \\ \mathbf{s}_i &= \sum_j s_{ij} \mathbf{e}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i^H &= \sum_j \varepsilon_{ij}^H \mathbf{e}_j = \frac{1}{3} \varepsilon_V \sum_j \delta_{ij} \mathbf{e}_j = \frac{1}{3} \varepsilon_V \mathbf{e}_i \\ \mathbf{d}_i &= \sum_j d_{ij} \mathbf{e}_j.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Ob upoštevanju vsega povedanega brez težav zapišemo v vektorski obliki tudi konstitucijski zvezi (1.21)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_i^H &= K \varepsilon_V \mathbf{e}_i \\ \mathbf{s}_i &= 2\mu \mathbf{d}_i.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Za kasnejšo rabo zapišimo v vektorski obliki še prvi invarianti napetostnega in deformacijskega tenzorja ter njuna prirastka pri infinitezimalni spremembi napetostnega oziroma deformacijskega stanja

$$\begin{aligned}I_1^\sigma &= \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{e}_i & dI_1^\sigma &= \sum_i d\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{e}_i \\ I_1^\varepsilon &= \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{e}_i & dI_1^\varepsilon &= \sum_i d\boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{e}_i.\end{aligned}\tag{1.28}$$

1.2 Deformacijska energija elastičnega telesa

V uvodu smo ugotovili, da se mehansko delo, ki ga opravi zunanja obtežba pri deformiranju in premikanju telesa, naloži v telesu kot deformacijska energija. Ta ugotovitev je v skladu s prvim zakonom termodinamike, ki pravi, da je mehansko delo, ki ga na toplotno izoliranem telesu v določenem časovnem intervalu opravijo zunanje sile, enako vsoti sprememb kinetične in notranje energije telesa v tem časovnem intervalu. Pri pretežno statičnem načinu obteževanja je razvoj deformacij počasen, zato lahko spremembo kinetične energije zanemarimo. Če vzamemo, da je notranja energija telesa v začetnem, nedeformiranem stanju enaka nič, se celotno opravljeno mehansko delo zunanjih sil naloži v telesu kot *deformacijska energija* D . V primeru, da telo ni toplotno izolirano, se mu notranja energija lahko poveča oziroma zmanjša za vrednost dovedene oziroma odvzete toplote. V nadaljevanju se omejimo na primere, pri katerih telesu niti ne dovajamo niti ne odvajamo toplote.

Deformacijsko energijo, ki se naloži v enoti prostornine, imenujemo *specifična deformacijska energija* ali *gostota deformacijske energije* in jo označimo z \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = \frac{dD}{dV} . \quad (1.29)$$

V primeru prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja določimo prirastek specifične deformacijske energije s posplošitvijo enačbe (1.15), ki smo jo izpeljali v Uvodu v energijske metode.

$$d\mathcal{D} = \sum_i \sum_j \mathcal{G}_{ij} d\tilde{\varepsilon}_{ij} . \quad (1.30)$$

Pri elastičnem materialu, kjer je zveza med napetostmi in deformacijami enolična, je prirastek specifične deformacijske energije totalni diferencial funkcije $\mathcal{D}(\varepsilon_{ij})$.

$$d\mathcal{D} = \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}} d\tilde{\varepsilon}_{ij} . \quad (1.31)$$

S primerjavo enačb (1.30) in (1.31) lahko ugotovimo, da pri elastičnem telesu obstoji enolična, zvezno odvedljiva funkcija stanja $\mathcal{D}(\varepsilon_{ij})$, za katero velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathcal{G}_{ij} . \quad (1.32)$$

Za ilustracijo zapišimo specifično deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa

$$\mathcal{D} = \mu (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 . \quad (1.33)$$

Z odvajanjem funkcije \mathcal{D} se brez težav prepričamo, da so odvodi po deformacijah enaki ustreznim komponentam tenzorja napetosti.

Celotno specifično deformacijsko energijo, ki se nakopiči v telesu med prehodom iz nedeformiranega stanja \mathbf{B} ($\varepsilon_{ij} = 0$) v deformirano stanje \mathbf{B}' , opisano z deformacijami ε_{ij} , določimo z integralom

$$\mathcal{D} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \mathcal{G}_{ij} d\varepsilon_{ij} . \quad (1.34)$$

Ker so deformacije ε_{ij} funkcije koordinat x, y, z , je tudi specifična deformacijska energija funkcija točke

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(x, y, z) . \quad (1.35)$$

Celotno deformacijsko energijo deformiranega telesa sedaj izračunamo tako, da specifično deformacijsko energijo integriramo po območju \mathcal{V} , ki ga telo zavzema v prostoru

$$D = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV = \int_{\mathcal{V}} \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \mathcal{G}_{ij} d\varepsilon_{ij} dV . \quad (1.36)$$

Izračunajmo specifično deformacijsko energijo v poljubni točki linearno elastičnega telesa. Omejimo se na izotermni primer ($\Delta T = 0$), vstavimo

prvo od konstitucijskih zvez (1.6) v enačbo (1.34)

$$\mathcal{D} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \left(2\mu \underline{\varepsilon}_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \delta_{ij} \right) d\underline{\varepsilon}_{ij} \quad (1.37)$$

in po množenju dobimo

$$\mathcal{D} = 2\mu \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\varepsilon}_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} + \lambda \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j I_1^\varepsilon \delta_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} . \quad (1.38)$$

Iz druge od enačb (1.7) sledi

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} = dI_1^\varepsilon , \quad (1.39)$$

zato lahko drugi člen na desni strani enačbe (1.38) zapišemo v odvisnosti od prve invariante deformacij

$$\mathcal{D} = 2\mu \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\varepsilon}_{ij} d\underline{\varepsilon}_{ij} + \lambda \int_0^{I_1^\varepsilon} I_1^\varepsilon dI_1^\varepsilon . \quad (1.40)$$

Pri tem je I_1^ε prva invarianta končnega deformiranega stanja, opisanega z deformacijami ε_{ij} . Po integriranju sledi

$$\mathcal{D} = \mu \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2} (I_1^\varepsilon)^2 . \quad (1.41)$$

S preoblikovanjem vsote kvadratov deformacijskih komponent in z upoštevanjem definicij prve in druge invariante deformacijskega tenzorja †

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + 2\varepsilon_{yz}^2 + 2\varepsilon_{zx}^2 \\ &= (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 - \\ &\quad 2(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2) \\ &= (I_1^\varepsilon)^2 - 2I_2^\varepsilon \geq 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

† Glej učbenik: Srpčič, Mehanika trdnih teles, enačbi (1.182) in (1.183).

lahko enačbo (1.41) zapišemo takole

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} (2\mu + \lambda) (I_1^\varepsilon)^2 - 2\mu I_2^\varepsilon. \quad (1.43)$$

Ugotovitev, da je specifična deformacijska energija invariantna količina, je logična, saj njena vrednost ne more biti odvisna od izbire koordinatnega sistema.

Še enkrat se vrnimo k enačbi (1.41) in jo ob upoštevanju prve od konstitucijskih enačb (1.6) ter definicije (1.7) zapišimo nekoliko drugače

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \left[2\mu \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_i \sum_j (2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda I_1^\varepsilon \delta_{ij}) \varepsilon_{ij} \right] \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Ko govorimo o deformacijski energiji, ne smemo pozabiti, da je ta pri elastičnem telesu enaka mehanskemu delu, ki je bilo porabljeno pri deformiranju telesa. V nadaljevanju si oglejmo, kolikšen del specifičnega deformacijskega dela je bil porabljen za spremembo prostornine in kolikšen za spremembo oblike elementarnega dela telesa v bližnji okolici obravnavanega delca. V enačbo (1.44) vstavimo zvezi (1.10) in (1.11)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\sigma^H \delta_{ij} + s_{ij}) \left(\frac{1}{3} \varepsilon_V \delta_{ij} + d_{ij} \right) \quad (1.45)$$

in po množenju dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{6} \sigma^H \varepsilon_V \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij} + \frac{1}{6} \varepsilon_V \sum_i \sum_j s_{ij} \delta_{ij} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sigma^H \sum_i \sum_j d_{ij} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j s_{ij} d_{ij}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Pri tem je

$$\begin{aligned}
 \sum_i \sum_j \delta_{ij} \delta_{ij} &= 3 \\
 \sum_i \sum_j s_{ij} \delta_{ij} &= I_1^s = 0 \\
 \sum_i \sum_j d_{ij} \delta_{ij} &= I_1^d = 0 \\
 \sum_i \sum_j s_{ij} d_{ij} &= 2\mu \sum_i \sum_j d_{ij} d_{ij} = 2\mu (I_1^d)^2 - 4\mu I_2^d = -4\mu I_2^d.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Upoštevali smo, da sta prvi invarianti deviatoričnih delov napetostnega in deformacijskega tenzorja enaki nič ($I_1^s = I_1^d = 0$). Enačba (1.41) se s tem glasi

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sigma^H \varepsilon_V - 2\mu I_2^d \tag{1.48}$$

Kakor vidimo, je celotno specifično deformacijsko delo delca sestavljeno iz dveh delov. Prvi del predstavlja specifično deformacijsko delo, ki ga hidrostatične napetosti opravijo pri specifični spremembi prostornine. Drugi del pa predstavlja specifično deformacijsko delo, ki ga deviatorične napetosti opravijo pri spremembi oblike elementarnega dela telesa. Zato prvega od omenjenih delov imenujemo *hidrostatično specifično deformacijsko delo* \mathcal{D}^H , drugega pa *preoblikovalno specifično deformacijsko delo* \mathcal{D}^P

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{D}^H &= \frac{1}{2} \sigma^H \varepsilon_V = \frac{K}{2} \varepsilon_V^2 \\
 \mathcal{D}^P &= -2\mu I_2^d
 \end{aligned} \right\} \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^H + \mathcal{D}^P. \tag{1.49}$$

Preoblikovalni del specifičnega deformacijskega dela lahko zapišemo tudi v odvisnosti od druge invariante deviatoričnega dela napetostnega tenzorja

$$\mathcal{D}^P = -\frac{1}{2\mu} I_2^s. \tag{1.50}$$

Z I_2^s pa smo v poglavju o pogojih za začetek plastičnega tečenja izrazili Misesov pogoj. Ob upoštevanju zvez (1.49) in (1.50) lahko sedaj Misesovemu pogoju najdemo razvidnejši fizikalni pomen: do začetka plastičnega tečenja pride tedaj, ko preoblikovalni del specifičnega deformacijskega dela doseže določeno, od materiala odvisno vrednost.

1.3 Dopolnilna deformacijska energija elastičnega telesa

V dosedanjem proučevanju energijskih razmer v elastičnem trdnem telesu smo kot neodvisne spremenljivke vpeljali komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} in ugotavljali, kolikšna notranja energija se naloži v telesu pri prehodu iz začetnega nedeformiranega stanja v končno deformirano stanje. V tem razdelku uberemo drugo pot in kot neodvisne spremenljivke izberemo komponente napetosti σ_{ij} . Deformacijsko energijo, ki se naloži v elastičnem telesu med tem, ko se napetosti od začetnega neobteženega stanja povečajo do končnega napetostnega stanja, imenujemo *dopolnilna* ali *komplementarna deformacijska energija* in jo za razliko od deformacijske energije D označimo z D^* .

Dopolnilno deformacijsko energijo, ki se naloži v enoti prostornine, imenujemo *specifična dopolnilna deformacijska energija* ali *gostota dopolnilne deformacijske energije* \mathcal{D}^*

$$\mathcal{D}^* = \frac{dD^*}{dV}. \quad (1.51)$$

Nadaljujemo podobno kot v prejšnjem razdelku in zapišemo prirastek specifične dopolnilne deformacijske energije za primer prostorskega napetostnega in deformacijskega stanja

$$d\mathcal{D}^* = \sum_i \sum_j \xi_{ij} d\sigma_{ij}. \quad (1.52)$$

Pri elastičnem materialu, kjer je zveza med napetostmi in deformacijami enolična, je prirastek specifične deformacijske energije totalni

diferencial funkcije $\mathcal{D}^*(\sigma_{ij})$.

$$d\mathcal{D}^* = \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} d\underline{\sigma}_{ij} . \quad (1.53)$$

To pomeni, da lahko pri elastičnem telesu najdemo enolično, zvezno odvedljivo funkcija stanja $\mathcal{D}^*(\sigma)$, za katero velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}^*}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} = \underline{\xi}_{ij} . \quad (1.54)$$

Kot primer navedimo specifično dopolnilno energijo linearno elastične snovi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* = & \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - \\ & \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 . \end{aligned} \quad (1.55)$$

Odводи funkcije \mathcal{D}^* po napetostih so očitno enaki ustreznim komponentam ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij.

Specifično dopolnilno deformacijsko energijo, ki se nakopiči v telesu med prehodom iz neobteženega stanja $\sigma_{ij} = 0$ v končno mehansko stanje, opisano z napetostmi σ_{ij} , določimo z integralom

$$\mathcal{D}^* = \int_0^{\sigma_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\xi}_{ij} d\underline{\sigma}_{ij} , \quad (1.56)$$

celotno dopolnilno deformacijsko energijo obteženega telesa pa izračunamo tako, da specifično dopolnilno deformacijsko energijo integriramo po območju \mathcal{V}

$$D^* = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^* dV = \int_{\mathcal{V}} \int_0^{\sigma_{ij}} \sum_i \sum_j \underline{\xi}_{ij} d\underline{\sigma}_{ij} dV . \quad (1.57)$$

Specifično dopolnilno deformacijsko energijo v poljubni točki linearno elastičnega telesa določimo tako, da v enačbo(1.56) vstavimo drugo od konstitucijskih zvez (1.6) pri $\Delta T = 0$ in na podoben način kot v prejšnjem razdelku po krajši izpeljavi dobimo

$$\mathcal{D}^* = \frac{1}{2E} (I_1^\sigma)^2 - \frac{1+\nu}{E} I_2^\sigma \quad (1.58)$$

Prav tako lahko hitro pokažemo, da je pri linearno elastični snovi specifična dopolnilna deformacijska energija delca enaka njegovi specifični deformacijski energiji, enakost pa velja tudi med celotno dopolnilno deformacijsko energijo in celotno deformacijsko energijo telesa

$$\mathcal{D}^* = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{D}^* = \mathcal{D} \\ D^* = D. \end{cases} \quad (1.59)$$

Izpeljavo enačb (1.58) in (1.59) kakor tudi dokaz enakosti izpeljanih izrazov (1.43) za specifično deformacijsko energijo in (1.58) za njeno dopolnilno vrednost prepuščamo skrbnemu bralcu.

1.4 Posplošene sile in posplošeni pomiki

V enačbi (1.44) smo specifično deformacijsko energijo \mathcal{D} , ki se naloži v enoti prostornine linearno elastičnega telesa, izrazili s končno doseženimi napetostmi in deformacijami. Celotno deformacijsko energijo telesa D izračunamo z integriranjem specifične deformacijske energije po območju, ki ga telo zavzema v prostoru. V nadaljevanju si oglejmo, kako celotno deformacijsko energijo telesa izrazimo neposredno z zunanjo specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n in specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} . Nalogo občutno skrajšamo z zapisom nastopajočih izrazov v vektorski obliki. V ta namen najprej v vektorski obliki zapišimo enačbo (1.44)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sigma_i \varepsilon_i. \quad (1.60)$$

Da je zapis pravilen, se hitro prepričamo ob upoštevanju definicij koordinatnih vektorjev napetosti in deformacij

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_j \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_k \varepsilon_{ik} \mathbf{e}_k. \quad (1.61)$$

Po vstavitvi v enačbo (1.60) namreč sledi

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \sum_k \varepsilon_{ik} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (1.62)$$

Ker je $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ in $\sum_k \varepsilon_{ik} \delta_{jk} = \varepsilon_{ij}$, dobimo

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \sum_k \varepsilon_{ik} \delta_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.63)$$

Celotna deformacijska energija telesa je sedaj

$$D = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i dV. \quad (1.64)$$

Upoštevamo, da zunanja obtežba in napetosti zadoščajo ravnotežnim pogojem

$$\mathcal{V} : \quad \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1.65)$$

$$\sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z) \quad (1.66)$$

$$\mathcal{S} : \quad \mathbf{p}_n = \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i e_{ni}, \quad (1.67)$$

pomiki, deformacije in zasuki pa so povezani s kinematično enačbo

$$\mathcal{V} : \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i. \quad (1.68)$$

Ta kinematični pogoj upoštevamo v enačbi (1.64) in dobimo

$$D = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV. \quad (1.69)$$

Prvi integral na desni strani gornje enačbe preoblikujemo v skladu s pravilom za odvod produkta

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dV = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) dV - \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} \mathbf{u} dV, \quad (1.70)$$

v drugem pa zamenjamo vrstni red faktorjev in ob upoštevanju ravnotežnega pogoja (1.66) dobimo

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV = - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \times \mathbf{e}_i dV = 0. \quad (1.71)$$

Enačba (1.69) se s tem glasi

$$D = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_i}{\partial x_i} \mathbf{u} dV, \quad (1.72)$$

Z Gaussovimi integralskimi izreki

$$\oint_{\mathcal{S}} \sum_i P_i \mathbf{e}_{ni} dS = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i} dV \quad (1.73)$$

prevedemo prvi integral na desni strani enačbe (1.72) na integral po mejni ploskvi \mathcal{S}

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) dV = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}) \mathbf{e}_{ni} dS = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{e}_{ni} \mathbf{u} dS. \quad (1.74)$$

Ob upoštevanju ravnotežnih pogojev (1.65) in (1.67) lahko sedaj enačbo (1.72) zapišemo v naslednji obliki

$$D = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n \mathbf{u} dS + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \mathbf{u} dV, \quad (1.75)$$

Dobljeno enačbo lahko še nadalje preoblikujemo v priročnejšo obliko za praktično delo, in sicer z naslednjim razmislekom: specifična površinska obtežba $\mathbf{p}_n(x, y, z)$ vključuje vse sile, ki delujejo na mejno ploskev telesa \mathcal{S} . Ta obtežba je na različne načine porazdeljena po površini telesa. Pogosti so primeri, ko je del površinske obtežbe z relativno veliko intenziteto porazdeljen po razmeroma majhnem delu površine telesa. Za tovrstne obtežbe je smiselno vpeljati računski modela točkovne sile ali točkovne dvojice. Celotno obtežbo mejne ploskve lahko torej sestavimo iz določenega števila točkovnih sil \mathbf{P}_J in točkovnih dvojic \mathbf{M}_J ter iz tistega dela površinske obtežbe \mathbf{p}_n , ki je porazdeljen po večjih delih površine in ga torej ni mogoče z dovoljšnjo natančnostjo nadomestiti s točkovnimi silami in dvojičami.

$$\mathbf{p}_n \cup \mathbf{P}_J \cup \mathbf{M}_J = \mathbf{p}_n \quad (J = 1, 2, \dots). \quad (1.76)$$

Z oznako \mathcal{D} za tisti del deformacijskega dela, ki ga opravita porazdeljena specifična površinska obtežba \mathbf{p}_n in specifična prostorninska obtežba \mathbf{v}

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{u} dS + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dV, \quad (1.77)$$

lahko celotno deformacijsko energijo telesa D zapišemo na naslednji način

$$D = \mathcal{D} + \frac{1}{2} \sum_J \mathbf{P}_J \cdot \mathbf{u}_J + \frac{1}{2} \sum_J \mathbf{M}_J \cdot \boldsymbol{\omega}_J. \quad (1.78)$$

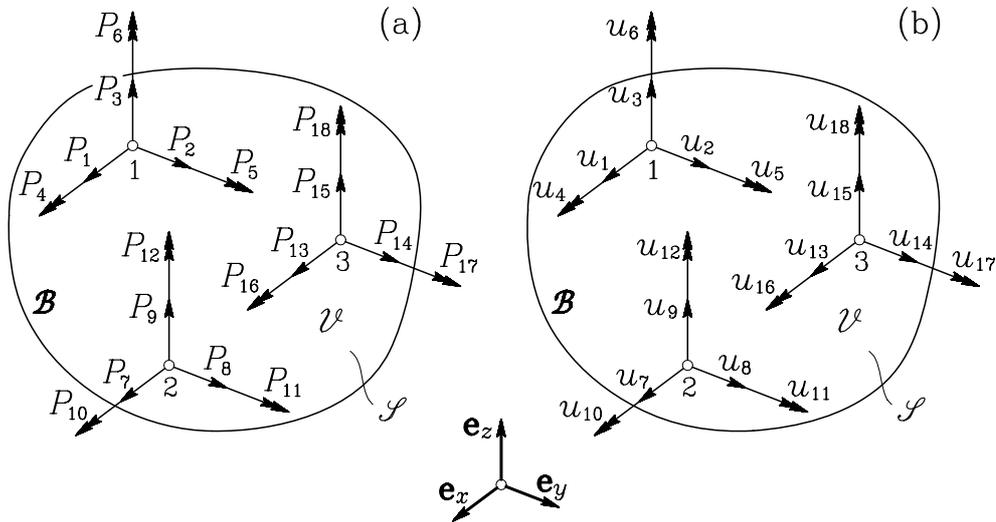
Pri tem sta torej \mathbf{P}_J in \mathbf{M}_J točkovna sila in točkovna dvojica, ki delujeta v točki J , z \mathbf{u}_J in $\boldsymbol{\omega}_J$ pa smo označili vektor pomika in vektor zasuka iste točke J . V kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ jih zapišemo z vsotami

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_J &= \sum_i P_i^J \mathbf{e}_i & \mathbf{M}_J &= \sum_i M_i^J \mathbf{e}_i \\ \mathbf{u}_J &= \sum_i u_i^J \mathbf{e}_i & \boldsymbol{\omega}_J &= \sum_i \omega_i^J \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (i = x, y, z; J = 1, 2, \dots) \quad (1.79)$$

S skalarnimi komponentami vektorjev \mathbf{P}_J , \mathbf{M}_J , \mathbf{u}_J in $\boldsymbol{\omega}_J$ zapišemo enačbo (1.78) takole

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \sum_J \sum_i P_i^J u_i^J + \frac{1}{2} \sum_J \sum_i M_i^J \omega_i^J \quad (i = x, y, z; J = 1, 2, \dots) \quad (1.80)$$

Kakor vidimo, gre za razmeroma neroden in nepregleden zapis, ki pa ga lahko občutno poenostavimo z uvedbo tako imenovanih *posplošeni sil* in *posplošeni pomiki*. Pri tem vpeljemo enotno oznako P_i za posplošene sile, ki vključujejo tako točkovne sile v ožjem pomenu besede, kakor tudi točkovne dvojice. Prav tako vpeljemo enotno oznako u_i za posplošene pomike, ki vključujejo tako translacijske kakor tudi rotacijske stopnje prostosti, torej komponente pomikov in komponente zasukov.



Slika 1.2

Uporaba zapisov z uporabo posplošeni sil in posplošeni pomiki je še posebej ugodna pri izpeljavi algoritmov in sestavljanju računalniških programov za numerično analizo problemov konstrukcijske mehanike. V rabi so različni načini za oštevilčenje posplošeni sil in posplošeni pomiki.

pomikov. Zelo zanesljiv in nedvoumen način je, da v določenem smiselnem zaporedju označimo vse točke mejne ploskve, v katerih na telo delujejo točkovne sile in dvojice, nato pa v vsaki obravnavani točki telesa kot posplošene sile vpeljemo vse možne komponente sil in dvojic, kot posplošene pomike pa ustrezne komponente pomikov in zasukov glede na skupni nepremični koordinatni sistem. V splošnem prostorskem primeru imamo torej v vsaki obravnavani točki po šest posplošenih sil in šest posplošenih pomikov, njihove oznake pa si sledijo glede na zaporedje oznak obravnavanih točk (*slika 1.2*). Pri ravninskih ali linijskih računskih modelih trdnih teles se število možnih posplošenih sil oziroma pomikov ustrezno zmanjša. Kakor sledi iz enačbe (1.80) in *slike 1.2*, je pri tem treba skrbno paziti le na to, da se oznake posplošenih sil in posplošenih pomikov ujemajo tako po prijemališčih kakor tudi po smereh delovanja. Prednost opisanega načina vpeljave in označevanja posplošenih sil in posplošenih pomikov je tudi v tem, da omogoča preprosto vključitev pomikov zanimivih neobteženih točk telesa v mehansko analizo, kar dosežemo zgolj s tem, da za posplošene sile v takih točkah predpišemo vrednosti nič.

Izraz (1.78) za celotno deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa preide s tem v zelo preprosto obliko

$$D = \tilde{D} + \frac{1}{2} \sum_i^n P_i u_i, \quad (1.81)$$

kjer je n skupno število posplošenih sil oziroma posplošenih pomikov.

1.5 Izrek o virtualnih pomikih (izrek o virtualnem delu)

V razdelkih 1.1 do 1.4 smo se ukvarjali z realnimi fizikalnimi količinami, ki jih lahko vsaj posredno tudi izmerimo. V nadaljevanju pa bomo spoznali dve novi količini, ki ju imenujemo *virtualno delo* in *dopolnilno virtualno delo*. Dejansko gre pri tem zgolj za formalni matematični količini, ki pa ju izračunamo podobno kot mehansko

delo oziroma deformacijsko energijo pri medsebojno neodvisnih silah in pomikih. Obe omenjeni količini in z njima povezani izreki predstavljajo učinkovito matematično orodje za reševanje praktičnih problemov konstrukcijske mehanike.

Vzemimo, da je trdno telo na območju \mathcal{V} obteženo s specifično prostorninsko obtežbo \mathbf{v} , na delu mejne ploskve \mathcal{S}_p pa s specifično površinsko obtežbo \mathbf{p}_n (slika 1.1). Napetosti σ_i , ki se zaradi te obtežbe pojavijo v telesu, naj bodo *statično dopustne*; to pomeni, da zadoščajo ravnotežnim pogojem (1.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ & \sum_i \mathbf{e}_i \times \sigma_i = \mathbf{0} \quad (i = x, y, z). \quad (1.82) \\ \mathcal{S}_p : \quad & \mathbf{p}_n = \sum_i \sigma_i \mathbf{e}_{ni} \end{aligned}$$

Zaradi delovanja zunanje obtežbe se telo deformira. Pomiki \mathbf{u} , zasuki $\boldsymbol{\omega}$ in deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, ki opisujejo deformiranje telesa, naj bodo *kinematično dopustni*; to pomeni, da zadoščajo kinematičnim pogojem (1.5)

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i \quad (i = x, y, z) \quad (1.83) \\ \mathcal{S}_u : \quad & \mathbf{u} = \mathbf{u}^r \quad (\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^r) \end{aligned}$$

S tem smo vzeli, da se je telo po obtežitvi z zunanjo obtežbo umirilo v ustrezni ravnotežni legi, ki pa se v skladu s predpostavko o majhnih deformacijah v geometrijskem pogledu le malo razlikuje od nedeformirane začetne oblike telesa. Sedaj pa vzemimo, da se dejanski pomiki telesa nekoliko spremenijo. To navidezno (virtualno) spremembo polja pomikov označimo z $\delta \mathbf{u}$ in jo imenujemo *virtualni pomik*. Za virtualne pomike $\delta \mathbf{u}$ in pripadajoče virtualne zasuke $\delta \boldsymbol{\omega}$ ter virtualne deformacije

$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_i$ zahtevamo, da ustrezajo enakim kinematičnim pogojem kot dejanski pomiki, zasuki in deformacije

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x_i} &= \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i + \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i & (i = x, y, z) & \quad (1.84) \\ \mathcal{S}_u : \quad \delta \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

le na delu mejne ploskve \mathcal{S}_u , kjer so pomiki predpisani, morajo biti virtualni pomiki enaki nič. Seveda to tudi pomeni, da morajo biti virtualni pomiki dovolj majhni, da so zadoščene predpostavke o majhnih deformacijah, ob katerih smo izpeljali kinematične enačbe (1.83). V vseh drugih pogledih pa so virtualni pomiki poljubni in prepuščeni naši izbiri, torej tudi povsem neodvisni od dejanske zunanje obtežbe. V jeziku variacijskega računa opredelimo virtualne pomike kot *linearni del poljubne možne spremembe deformirane konfiguracije telesa*.

Ker so virtualni pomiki neodvisni od dejanske obtežbe telesa, lahko določimo navidezno (virtualno) delo, ki ga dejanska zunanja obtežba opravi na virtualnih pomikih, skladno z definicijo mehanskega dela konstantne sile na od te sile neodvisnem pomiku. To delo imenujemo *virtualno delo zunanjih sil* in ga označimo z δW

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (1.85)$$

Ker je virtualni pomik na delu mejne ploskve \mathcal{S}_u enak nič, lahko na desni strani enačbe (1.85) brez posledic prištejemo integral virtualnega dela po \mathcal{S}_u

$$\delta W = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{S}_u} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (1.86)$$

Vsota prvih dveh integralov predstavlja integral virtualnega dela po celotni sklenjeni mejni ploskvi telesa \mathcal{S}

$$\delta W = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{p}_n \delta \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (1.87)$$

Ob upoštevanju robnega pogoja na površini telesa lahko prvi integral na desni strani izrazimo z napetostmi in po preureditvi dobimo

$$\delta W = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i \sigma_i \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{ni} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV. \quad (1.88)$$

Z uporabo Gaussovega integralskega izreka

$$\oint_{\mathcal{S}} \sum_i P_i \mathbf{e}_{ni} dS = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i} dV \quad (1.89)$$

prevedemo integral po sklenjeni mejni ploskvi \mathcal{S} na integral po prostorskem območju \mathcal{V} , ki ga ograjuje ploskev \mathcal{S}

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_i \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dV \quad (1.90)$$

Izraz v oklepaju odvajamo kot produkt in po ureditvi dobimo

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \mathbf{v} \right) \delta \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial x_i} dV. \quad (1.91)$$

V skladu s prvim od ravnotežnih pogojev (1.82) je prvi integral v enačbi (1.91) enak nič, drugega pa ob upoštevanju kinematičnega pogoja (1.84) za virtualne pomike zapišemo takole

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \delta \boldsymbol{\varepsilon}_i dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV. \quad (1.92)$$

Če v mešanem produktu, ki nastopa v drugem integralu, zamenjamo prvi in drugi, nato pa še drugi in tretji vektor, dobimo

$$\sum_i \sigma_i (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = \delta \boldsymbol{\omega} \sum_i \mathbf{e}_i \times \sigma_i = \mathbf{0}. \quad (1.93)$$

Pri tem smo upoštevali še drugega od ravnotežnih pogojev (1.82). V enačbi (1.92) nam torej ostane le prvi integral, ki predstavlja virtualno delo dejanskih napetosti na virtualnih deformacijah. Imenujemo ga *virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta\bar{D}$

$$\delta\bar{D} = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sigma_i \delta\epsilon_i dV. \quad (1.94)$$

Iz primerjave enačb (1.85), (1.92) in (1.94) sledi *izrek o virtualnih pomikih oziroma izrek o virtualnem delu*, ki pove, da je v ravnotežnem stanju telesa pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W = \delta\bar{D}. \quad (1.95)$$

Za praktično delo v mehaniki je bolj koristna naslednja oblika izreka o virtualnih pomikih:

Če je pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil, je telo v ravnotežju.

Izrek o virtualnem delu torej predstavlja drugačen zapis ravnotežnih enačb. Glede na to, da so ravnotežne enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden.

1.6 Izrek o virtualnih silah (izrek o dopolnilnem virtualnem delu)

Izhodišče za izpeljavo izreka o virtualnih silah je ravnotežno stanje telesa, kakršno smo definirali na začetku prejšnjega razdelka. Pri tem poudarimo, da pripadajoči pomiki, zasuki in deformacije zadoščajo kinematičnim pogojem.

Sedaj pa vzemimo, da telo navidezno dodatno obtežimo s poljubno specifično prostorninsko obtežbo $\delta\mathbf{v}$ in s poljubno specifično površinsko

obtežbo $\delta \mathbf{p}_n$. To obtežbo imenujemo *virtualna obtežba* in je povsem neodvisna od dejanske obtežbe telesa. Zahtevamo le, da je virtualna obtežba *statično dopustna*. To pomeni, da virtualna obtežba in pripadajoče napetosti $\delta \sigma_i$ zadoščajo ravnotežnim pogojem

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \sum_i \frac{\partial \delta \sigma_i}{\partial x_i} + \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ & (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.96) \\ \mathcal{S} : \quad & \sum_i \delta \sigma_i \mathbf{e}_{ni} = \delta \mathbf{p}_n. \end{aligned}$$

Delo, ki ga virtualna obtežba opravi na dejanskih pomikih, imenujemo *dopolnilno ali komplementarno virtualno delo zunanjih sil* in ga označimo z δW^*

$$\delta W^* = \oint_{\mathcal{S}} \delta \mathbf{p}_n \mathbf{u} dS + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{v} \mathbf{u} dV. \quad (1.97)$$

Ob upoštevanju robnega pogoja na površini telesa lahko prvi integral na desni strani izrazimo z virtualnimi napetostmi in po preureditvi dobimo

$$\delta W^* = \oint_{\mathcal{S}} \sum_i \delta \sigma_i \mathbf{u} \mathbf{e}_{ni} dS + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{v} \mathbf{u} dV. \quad (1.98)$$

Z uporabo Gaussovega integralskega izreka prevedemo integral po sklenjeni mejni ploskvi \mathcal{S} na integral po prostorskem območju \mathcal{V}

$$\delta W^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \sigma_i \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{v} \mathbf{u} dV. \quad (1.99)$$

Izraz v oklepaju odvajamo kot produkt in po ureditvi dobimo

$$\delta W^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \left(\frac{\partial \delta \sigma_i}{\partial x_i} + \delta \mathbf{v} \right) \mathbf{u} dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \delta \sigma_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} dV. \quad (1.100)$$

V skladu s prvim od ravnotežnih pogojev (1.96) je prvi integral v enačbi (1.100) enak nič, drugega pa ob upoštevanju kinematičnega pogoja (1.83) zapišemo takole

$$\delta W^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \varepsilon_i \delta \sigma_i dV + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \delta \sigma_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) dV . \quad (1.101)$$

Mešani produkt v drugem integralu je, podobno kakor v prejšnjem razdelku, enak nič. Ostane nam torej le prvi integral, ki predstavlja delo virtualnih napetosti na dejanskih deformacijah. Imenujemo ga *dopolnilno* ali *komplementarno virtualno delo notranjih sil* in ga označimo z $\delta \bar{D}^*$

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \varepsilon_i \delta \sigma_i dV . \quad (1.102)$$

Iz primerjave enačb (1.97), (1.101) in (1.102) sledi *izrek o virtualnih silah* oziroma *izrek o dopolnilnem delu*, ki pove, da je pri kinematično dopustnih dejanskih pomikih in statično dopustni virtualni obtežbi dopolnilno virtualno delo zunanjih sil enako dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^* . \quad (1.103)$$

Za praktično delo v mehaniki je bolj koristna naslednja oblika izreka o virtualnih silah:

Če je pri statično dopustni virtualni obtežbi telesa dopolnilno virtualno delo zunanjih sil enako dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil, so izpolnjeni kinematični pogoji.

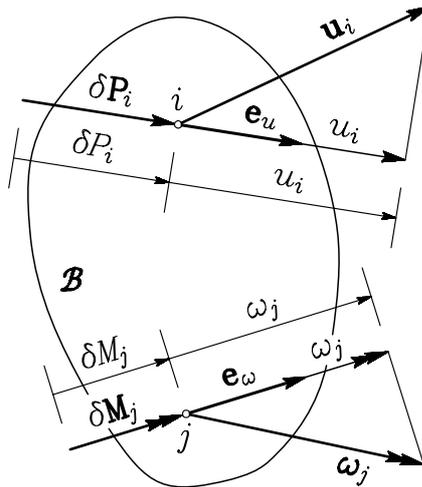
Izrek o dopolnilnem virtualnem delu torej predstavlja drugačen zapis kinematičnih enačb. Glede na to, da so kinematične enačbe v svoji izvorni obliki parcialne diferencialne enačbe, je zapis v obliki izreka o dopolnilnem virtualnem delu pogosto znatno bolj ugoden. Kakor se bo izkazalo v nadaljevanju, predstavlja izrek o virtualnih silah učinkovito orodje za določanje pomikov in zasukov diskretnih točk telesa.

1.7 Določanje pomikov in zasukov z izrekom o virtualnih silah

V okviru omejitve (1.96) lahko virtualno obtežbo izberemo povsem poljubno. Seveda je umestno izbrati virtualno obtežbo tako, da z njo na čim bolj preprost način določimo pomike in zasuke posameznih točk telesa. Zato dosledno vzamemo, da je virtualna prostorninska obtežba enaka nič, virtualno obtežbo mejne ploskve telesa \mathcal{S} pa sestavimo zgolj iz virtualnih točkovnih sil $\delta\mathbf{P}_i$ in virtualnih točkovnih dvojic $\delta\mathbf{M}_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \quad & \delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathcal{S} : \quad & \delta\mathbf{P}_i \cup \delta\mathbf{M}_i = \delta\mathbf{p}_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{1.104}$$

Pri tem smo vpeljali poenostavljen način označevanja prijemališč virtualnih sil in dvojic kar z zaporednimi naravnimi števili i ($i = 1, 2, \dots, n$).



Slika 1.3

Oznaka $\delta\mathbf{P}_i$ oziroma $\delta\mathbf{M}_i$ tako pomeni, da virtualna sila in virtualna dvojica delujeta v točki i . Enako logiko označevanja uporabimo za pomike in zasuke, tako da sta \mathbf{u}_i in $\boldsymbol{\omega}_i$ pomik in zasuk, ki ju dejanska zunanja obtežba povzroči v točki i . S tem lahko dopolnilno virtualno delo zunanjih sil zapišemo takole

$$\delta W^* = \sum_i^n \mathbf{u}_i \delta \mathbf{P}_i + \sum_i^n \boldsymbol{\omega}_i \delta \mathbf{M}_i. \quad (1.105)$$

Naj bo naloga zastavljena takole: v točki i telesa \mathcal{B} je treba določiti pomik u_i v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_u , v točki j pa zasuk ω_j okoli osi, določene z enotskim vektorjem \mathbf{e}_ω (slika 1.3).

Reševanja se lotimo tako, da v točki i obtežimo telo z virtualno silo $\delta \mathbf{P}_i$, ki se po smeri ujema z enotskim vektorjem \mathbf{e}_u , v točki j pa z virtualno dvojico $\delta \mathbf{M}_j$, ki ima smer enotskega vektorja \mathbf{e}_ω . Če z δP_i in δM_j označimo velikosti vektorjev $\delta \mathbf{P}_i$ in $\delta \mathbf{M}_j$, lahko ta dva vektorja zapišemo takole

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{P}_i &= \delta P_i \mathbf{e}_u \\ \delta \mathbf{M}_j &= \delta M_j \mathbf{e}_\omega. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Dopolnilno virtualno delo, ki ga virtualna zunanja obtežba opravi na dejanskih pomikih in zasukih, je tedaj

$$\delta W^* = \mathbf{u}_i \delta \mathbf{P}_i + \boldsymbol{\omega}_j \delta \mathbf{M}_j = u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j. \quad (1.107)$$

Skalarna produkta $\mathbf{u}_i \mathbf{e}_u$ in $\boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega$ predstavljata projekciji vektorjev \mathbf{u}_i in $\boldsymbol{\omega}_j$ na smeri \mathbf{e}_u in \mathbf{e}_ω , torej ravno iskani pomik in zasuk točk i in j

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i \mathbf{e}_u &= u_i \\ \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{e}_\omega &= \omega_j. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Dopolnilno virtualno delo zunanjih sil lahko sedaj zapišemo v skalarni obliki

$$\delta W^* = u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j \quad (1.109)$$

in ob upoštevanju izreka o virtualnih silah dobimo

$$\delta W^* = \delta \bar{D}^* \quad \rightarrow \quad u_i \delta P_i + \omega_j \delta M_j = \delta \bar{D}^*. \quad (1.110)$$

Virtualni obtežbi δP_i in δM_j lahko izberemo poljubno, na primer takole

$$\delta P_i = 1, \quad \delta M_j = 0$$

in iz enačbe (1.110) sledi

$$u_i = \delta \bar{D}^* (\delta P_i = 1, \delta M_j = 0). \quad (1.111)$$

Z izbiro

$$\delta P_i = 0, \quad \delta M_j = 1$$

pa dobimo

$$\omega_j = \delta \bar{D}^* (\delta P_i = 0, \delta M_j = 1). \quad (1.112)$$

Tako smo prišli do zelo preprostega pravila: *pomik obravnavane točke telesa v predpisani smeri določimo tako, da telo v obravnavani točki obtežimo z enotsko virtualno silo v izbrani smeri in izračunamo pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil $\delta \bar{D}^*$. Iskani pomik je po vrednosti kar enak dopolnilnemu virtualnemu delu, ki ga napetosti zaradi enotske virtualne obtežbe opravijo na dejanskih deformacijah telesa. Podobno ravnamo, če je treba v obravnavani točki telesa določiti zasuk okrog predpisane smeri v prostoru: točko obtežimo z enotsko virtualno dvojico v izbrani smeri in iskani zasuk izračunamo kot dopolnilno virtualno delo, ki ga pripadajoče virtualne napetosti opravijo na dejanskih deformacijah telesa.*

1.8 Pomiki in zasuki diskretnih točk linijskega nosilca pri upogibu z osno silo

Kakor smo pokazali v prejšnjem razdelku, je računski postopek za določanje pomikov in zasukov posameznih točk telesa osredotočen na računanje dopolnilnega virtualnega dela $\delta \bar{D}^*$ pri premišljeno izbrani enotski virtualni obtežbi. Skalarni zapis enačbe (1.102)

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV \quad (1.113)$$

pokaže, da moramo določiti deformacije ε_{ij} , ki ustrezajo dejanski zunanji obtežbi, ter napetosti $\delta \sigma_{ij}$, ki pripadajo virtualni obtežbi telesa.

Pri linijskem elementu je določanje dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil razmeroma preprosto, saj je v skladu z osnovnimi predpostavkami le deformacijska komponenta ε_{xx} različna od nič. V vsoti na desni strani enačbe (1.113) nam torej od devetih ostane en sam člen

$$\delta \bar{D}^* = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} dV \quad (1.114)$$

V poglavju *Upogib ravnega nosilca z osno silo*[†] smo izpeljali enačbo za določanje vzdolžne normalne napetosti σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - y \frac{M_z}{I_z} + z \frac{M_y}{I_y}. \quad (1.115)$$

Upoštevajoč Hookov zakon $\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$ določimo deformacijo ε_{xx} z enačbo

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{N_x}{EA_x} - y \frac{M_z}{EI_z} + z \frac{M_y}{EI_y}, \quad (1.116)$$

virtualne napetosti $\delta \sigma_{xx}$ pa analogno analogno z enačbo (1.115)

$$\delta \sigma_{xx} = \frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y}. \quad (1.117)$$

Pri linijskem nosilcu lahko trojni integral po prostorskem območju \mathcal{V} , ki nastopa v enačbi (1.114), izračunamo tako, da najprej integriramo po prečnem prerezu \mathcal{A}_x , nato pa še po dolžini elementa l . Upoštevamo, da je $dV = dA_x dx$ in dobimo

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}^* = & \\ & \int_0^l \int_{\mathcal{A}_x} \left(\frac{N_x}{EA_x} - y \frac{M_z}{EI_z} + z \frac{M_y}{EI_y} \right) \left(\frac{\delta N_x}{A_x} - y \frac{\delta M_z}{I_z} + z \frac{\delta M_y}{I_y} \right) dA_x dx. \end{aligned} \quad (1.118)$$

[†] Glej knjigo Srpčič, *Mehanika trdnih teles*, Ljubljana, 2003, str. 521.

Notranje sile zaradi dejanske in zaradi virtualne obtežbe so funkcije koordinate x , zato se pri integriranju po prečnem prerezu \mathcal{A}_x obnašajo kot konstante. Zato lahko enačbo (1.118) zapišemo takole

$$\delta \bar{D}^* = \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x^2} \int_{\mathcal{A}_x} dA_x - \frac{M_y \delta M_z + M_z \delta M_y}{EI_y I_z} \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x - \frac{N_x \delta M_z + M_z \delta N_x}{EA_x I_z} \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x + \frac{N_x \delta M_y + M_y \delta N_x}{EA_x I_y} \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y^2} \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z^2} \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x \right) dx. \quad (1.119)$$

V poglavju *Upogib ravnega nosilca z osno silo*† smo vpeljali oznake za geometrijske karakteristike prečnega prereza \mathcal{A}_x

$$\begin{aligned} A_x &= \int_{\mathcal{A}_x} dA_x && \dots \text{ ploščina prečnega prereza } \mathcal{A}_x \\ S_y &= \int_{\mathcal{A}_x} z dA_x && \dots \text{ statični moment prečnega prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } y \\ S_z &= \int_{\mathcal{A}_x} y dA_x && \dots \text{ statični moment prečnega prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } z \\ I_{yy} &= \int_{\mathcal{A}_x} z^2 dA_x && \dots \text{ vztrajnostni moment prečnega prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } y \\ I_{zz} &= \int_{\mathcal{A}_x} y^2 dA_x && \dots \text{ vztrajnostni moment prečnega prereza } \mathcal{A}_x \text{ glede na os } z \\ I_{yz} &= - \int_{\mathcal{A}_x} yz dA_x && \dots \text{ deviacijski vztrajnostni moment prečnega prereza } \mathcal{A}_x . \end{aligned}$$

† Glej knjigo Srpcič, *Mehanika trdnih teles*, Ljubljana, 2003, str. 518-519.

Lokalni koordinatni sistem obravnavanega linijskega elementa lahko vedno izberemo tako, da sta osi y in z težiščni in glavni vztrajnostni osi prečnega prereza \mathcal{A}_x . Tedaj je $S_y = S_z = 0$ in $I_{yz} = 0$ in iz enačbe (1.119) sledi

$$\delta\bar{D}^* = \int_0^l \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx. \quad (1.120)$$

Dobili smo zelo preprosto pravilo za računanje dopolnilnega virtualnega dela notranjih sil: določiti moramo produkte osnih sil in upogibnih momentov zaradi dejanske in zaradi virtualne obtežbe, jih reducirati s togostnimi karakteristikami in jih integrirati po celotni dolžini nosilca. Če imamo opraviti s sestavljeno linijsko konstrukcijo, na primer z okvirjem, sestavljenim iz n linijskih elementov, izračunamo dopolnilno virtualno delo notranjih sil za celotno konstrukcijo z vsoto

$$\delta\bar{D}^* = \sum_{e=1}^n \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} + \frac{M_z \delta M_z}{EI_z} \right) dx, \quad (1.121)$$

pri čemer smo z l_e označili dolžino linijskega elementa e .

1.8 Metoda Vereščagina

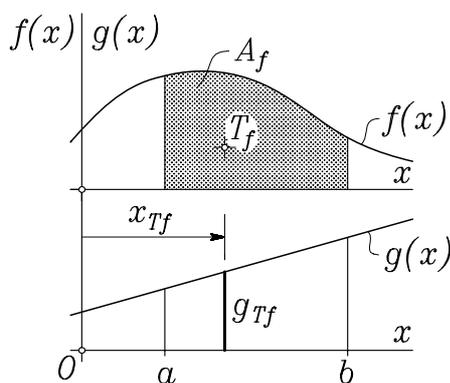
Ker za virtualno obtežbo dosledno izbiramo točkovne virtualne sile in dvojice, so notranje sile δN_x , δM_y in δM_z vedno odsekoma linearne funkcije. Integriranje produktov teh funkcij s funkcijami notranjih sil zaradi dejanske obtežbe N_x , M_y in M_z si lahko občutno olajšamo z uporabo tako imenovane *grafo-analitične metode Vereščagina*.

Izračunati je treba integral

$$J = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad (1.122)$$

pri čemer je $f(x)$ poljubna gladka funkcija na intervalu $[a, b]$, $g(x)$ pa je poljubna linearna funkcija na tem intervalu (slika 1.4)

$$g(x) = \alpha + \beta x. \quad (1.123)$$



Slika 1.4

Integral J je tako

$$J = \int_a^b f(x) (\alpha + \beta x) dx, \quad (1.124)$$

oziroma, ker sta α in β konstanti

$$J = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b x f(x) dx. \quad (1.125)$$

Dobljeno enačbo zapišemo malo drugače

$$J = \int_a^b f(x) dx \left(\alpha + \beta \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \right). \quad (1.126)$$

Vpeljemo nove oznake

$$A_f = \int_a^b f(x) dx, \quad x_{Tf} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \text{in} \quad g_{Tf} = \alpha + \beta x_{Tf},$$

pri čemer A_f predstavlja ploščino lika, ki ga na intervalu $[a, b]$ določa funkcija $f(x)$, x_{Tf} je razdalja težišča omenjenega lika od ordinatne osi, g_{Tf} pa je vrednost funkcije $g(x)$ pri $x = x_{Tf}$.

Tako smo prišli do preprostega pravila za izvednotenje integrala J

$$J = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \rightarrow \quad J = A_f g_{Tf}. \quad (1.127)$$

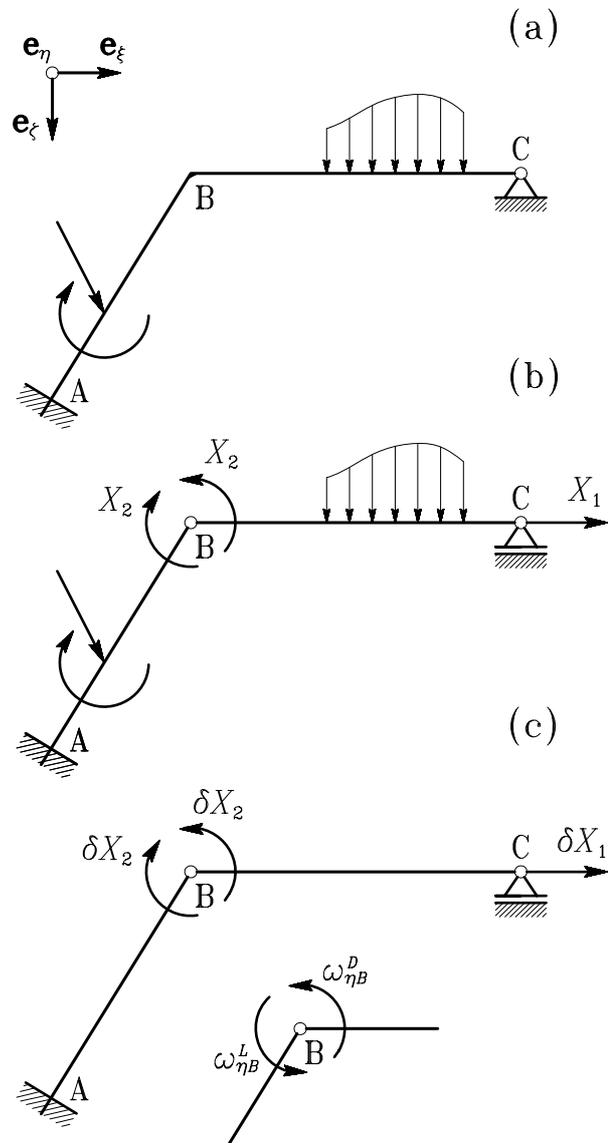
Ploščino A_f lika, ki ga določa funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, pomnožimo z ordinato g_{Tf} funkcije $g(x)$ pod težiščem omenjenega lika. V primeru, da je tudi funkcija f linearna, se lahko vlogi obeh funkcij tudi zamenjata.

Z metodo Vereščagina smo pridobili zelo učinkovito orodje za praktično računanje pomikov in zasukov v posameznih točkah linijskih konstrukcij.

1.9 Metoda sil pri statično nedoločenih linijskih konstrukcijah

Uporabo *metode sil* si oglejmo na primeru preproste dvakrat statično nedoločene ravninske linijske okvirne konstrukcije (*slika 1.5.a*).

V konstrukcijo vpeljemo toliko dodatnih prostostnih stopenj, da postane statično določena, vendar kinematično stabilna. Ena od neskončno mnogo možnosti za sprostitev konstrukcije je prikazana na *sliki 1.5.b*.



Slika 1.11

Ker imamo opraviti z dvakrat statično nedoločeno konstrukcijo, vpeljemo dve sprostitev: možnost vodoravnega pomika v podpori C in

upogibni členek v stiku B. Tako smo dobili tako imenovano *statično določeno osnovno konstrukcijo* ali *delovni sistem*. Ta sistem mora biti v statičnem in kinematičnem pogledu enakovreden prvotni konstrukciji. Statično enakovrednost smo zagotovili s tem, da smo v točkah C in B, kjer smo vpeljali sprostitev, obtežili delovni sistem z nadomestnima zunanjsima silama X_1 in X_2 . S silo X_1 smo nadomestili vodoravno reakcijo, s katero nepomična podpora C deluje na prvotno konstrukcijo in preprečuje vodoravni pomik desnega krajišča prečke \overline{BC} . Z dvojicama X_2 pa nadomestimo notranji upogibni moment, s katerim v togem stiku B elementa \overline{AB} in \overline{BC} delujeta drug na drugega, in zagotavljata enak zasuk obeh elementov v točki B. Nadomestnih sil X_1 in X_2 zaenkrat še ne poznamo. Določimo ju iz pogojev za kinematično enakovrednost delovnega sistema in prvotne konstrukcije. V našem primeru gre za zahtevo, da mora biti vodoravni pomik nosilca v podpori C enak nič in da morata biti upogibna zasuka obeh stikajočih se elementov v točki B enaka med seboj. Ker se lokalna koordinatna sistema elementov konstrukcije ne ujemata med seboj, je ugodno vpeljati *skupni* ali *globalni koordinatni sistem* z bazo $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$, v katerem pogoja za kinematično enakovrednost zapišemo z enačbama

$$u_{\xi C} = 0 \quad (1.128)$$

$$\omega_{\eta B}^L = \omega_{\eta B}^D. \quad (1.129)$$

Z $\omega_{\eta B}^L$ in $\omega_{\eta B}^D$ smo označili zasuka okrog globalne osi η na "levi" in "desni" strani stika B. Pogoj (1.128) je očitno kinematični robni pogoj za smer ξ v nepomični vrtljivi podpori C. Pogoj (1.129) pa je po svoji naravi *kompatibilnostni pogoj*, saj zahteva enoličnost zasuka v točki B. Za nadaljnje delo ga je ugodno zapisati v naslednji obliki

$$\omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L = \Delta\omega_{\eta B} = 0, \quad (1.130)$$

torej kot zahtevo, da mora biti *medsebojni zasuk* v stiku B enak nič.

Pogoja (1.128) in (1.130) sestavljata sistem dveh enačb, iz katerih bomo izračunali neznani nadomestni sili X_1 in X_2 . Pomik in oba zasuka, ki

nastopajo v teh enačbah, bi lahko izračunali z uporabo diferencialne enačbe za vzdolžni pomik in enačbe upogibnice, ki smo ju izpeljali v okviru elementarne teorije upogiba. Vendar nam izrek o virtualnih silah ponuja dosti bolj udobno pot, ki jo bomo spoznali v nadaljevanju. V ta namen obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo z virtualno silo δX_1 v točki C in z virtualnima dvojicama δX_2 v stiku B, kakor kaže *slika 1.5.c*. Virtualna obtežba je seveda povsem neodvisna od dejanske obtežbe in nadomestnih sil. Vendar se izkaže, da je ugodno izbrati virtualne sile tako, da se njihove smeri ujemajo s smermi nadomestnih sil X_1 in X_2 . Dopolnilno virtualno delo zunanjih sil je tedaj

$$\delta W^* = u_{\xi C} \delta X_1 + (\omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L) \delta X_2. \quad (1.131)$$

Upoštevali smo, da je dopolnilno virtualno delo, ki ga dvojica δX_2 opravi na dejanskem zasuku $\omega_{\eta B}^L$, negativno, saj sta smeri virtualne dvojice in dejanskega zasuca nasprotni med seboj.

Dopolnilno virtualno delo notranjih sil je v obravnavanem ravninskem primeru ($M_z = 0$) določeno z izrazom

$$\delta \bar{D}^* = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx, \quad (1.132)$$

Ob predpostavki, da je konstrukcija linearno elastična, si zapis dopolnilnega virtualnega dela znatno olajšamo, če pri določitvi notranjih sil uporabimo zakon superpozicije. Tako osno silo kakor tudi upogibni moment izrazimo kot vsoto prispevkov dejanske zunanje obtežbe ter obeh nadomestnih sil

$$\begin{aligned} N_x &= N_x(p) + N_x(X_1) + N_x(X_2) \\ M_y &= M_y(p) + M_y(X_1) + M_y(X_2), \end{aligned} \quad (1.133)$$

kjer smo z $N_x(p)$ in $M_y(p)$ označili skupna prispevka celotne dejanske zunanje obtežbe k osni sili N_x oziroma upogibnemu momentu M_y .

V nadaljevanju uporabljamo za omenjena prispevka še bolj pregledni označbi

$$N_{xp} = N_x(p) \quad \text{in} \quad M_{yp} = M_y(p). \quad (1.134)$$

Zapise notranjih sil dodatno poenostavimo z vpeljavo tako imenovanih *normiranih notranjih sil*, ki bi nastopile v osnovni statično določeni konstrukciji, če bi jo obtežili z enotsko nadomestno silo $X_1 = 1$ oziroma z enotskima dvojicama $X_2 = 1$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x1} &= N_x(X_1 = 1) & \bar{M}_{y1} &= M_y(X_1 = 1) \\ \bar{N}_{x2} &= N_x(X_2 = 1) & \bar{M}_{y2} &= M_y(X_2 = 1). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Ker je

$$\begin{aligned} N_x(X_1) &= X_1 N_x(X_1 = 1) & M_y(X_1) &= X_1 M_y(X_1 = 1) \\ N_x(X_2) &= X_2 N_x(X_2 = 1) & M_y(X_2) &= X_2 M_y(X_2 = 1), \end{aligned} \quad \text{in} \quad (1.136)$$

preideta enačbi (1.133) v pregledno obliko

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2} \\ M_y &= M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Ker smo za virtualni sili δX_1 in δX_2 izbrali enaki smeri kot za X_1 in X_2 , lahko podobno kakor dejansko osno silo in dejanski upogibni moment izrazimo tudi virtualno osno silo in virtualni upogibni moment

$$\begin{aligned} \delta N_x &= \delta X_1 \bar{N}_{x1} + \delta X_2 \bar{N}_{x2} \\ \delta M_y &= \delta X_1 \bar{M}_{y1} + \delta X_2 \bar{M}_{y2}. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Izraz (1.132) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil lahko sedaj zapišemo takole

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}^* = & \\ & \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left[\frac{1}{EA_x} (N_{xp} + X_1 \bar{N}_{x1} + X_2 \bar{N}_{x2}) (\delta X_1 \bar{N}_{x1} + \delta X_2 \bar{N}_{x2}) + \right. \\ & \left. \frac{1}{EI_y} (M_{yp} + X_1 \bar{M}_{y1} + X_2 \bar{M}_{y2}) (\delta X_1 \bar{M}_{y1} + \delta X_2 \bar{M}_{y2}) \right] dx. \end{aligned} \quad (1.139)$$

Desno stran enačbe (1.139) uredimo tako, da zberemo vse člene, ki so pomnoženi z virtualno silo δX_1 , in vse, ki so pomnoženi z virtualno dvojico δX_2 . Tako dobimo

$$\begin{aligned} \delta \bar{D}^* = & \delta X_1 \left[X_1 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx + \right. \\ & X_2 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx + \\ & \left. \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \right] + \\ & \delta X_2 \left[X_1 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx + \right. \\ & X_2 \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} \bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx + \\ & \left. \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2} N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2} M_{yp}}{EI_y} \right) dx \right] \end{aligned} \quad (1.140)$$

Integrale, ki nastopajo v dobljeni enačbi, lahko izračunamo vnaprej, saj se nanašajo na statično določeni osnovni sistem. Z oznakami

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1}\bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1}\bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{12} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1}\bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1}\bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\
 b_1 &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x1}N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y1}M_{yp}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{21} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2}\bar{N}_{x1}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2}\bar{M}_{y1}}{EI_y} \right) dx \\
 a_{22} &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2}\bar{N}_{x2}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2}\bar{M}_{y2}}{EI_y} \right) dx \\
 b_2 &= \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{\bar{N}_{x2}N_{xp}}{EA_x} + \frac{\bar{M}_{y2}M_{yp}}{EI_y} \right) dx
 \end{aligned} \tag{1.141}$$

lahko izraz (1.141) za dopolnilno virtualno delo notranjih sil zapišemo na kratko

$$\delta \bar{D}^* = \delta X_1 (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1) + \delta X_2 (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2) \tag{1.142}$$

in ga v skladu z izrekom o dopolnilnem virtualnem delu izenačimo z dopolnilnim virtualnim delom zunanjih sil, ki smo ga že določili z enačbo (1.131). Tako dobimo

$$\begin{aligned}
 dWk = \delta \bar{D}^* : \quad & \delta X_1 (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 - u_{\xi C}) + \\
 & \delta X_2 (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 - \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L) = 0 \tag{1.143}
 \end{aligned}$$

Pri poljubni izbiri virtualnih sil δX_1 in δX_2 je enačba (1.143) izpolnjena le v primeru, da sta oba izraza v okroglih oklepajih enaka nič. Tedaj

velja

$$\begin{aligned} u_{\xi C} &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \\ \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Tako smo določili vodoravni pomik $u_{\xi C}$ in medsebojni zasuk $\Delta\omega_{\eta} = \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L$ v odvisnosti od dejanske zunanje obtežbe in nadomestnih sil X_1 in X_2 . Upošteva je zakon superpozicije zlahka prepoznamo fizikalni pomen posameznih koeficientov v gornjih enačbah:

- a_{11} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročila sila $X_1 = 1$,
- a_{12} je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročili dvojici $X_2 = 1$,
- b_1 je vodoravni pomik, ki bi ga v točki C povzročila celotna dejanska zunanja obtežba nosilca,
- a_{21} je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročila sila $X_1 = 1$,
- a_{11} je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročili dvojici $X_2 = 1$,
- b_1 je medsebojni zasuk v členku B, ki bi ga povzročila celotna dejanska zunanja obtežba nosilca.

Iz druge in četrte od enačb (1.141) tudi vidimo, da sta koeficienta a_{12} in a_{21} enaka med seboj.

V našem primeru iz robnega pogoja (1.128) in kompatibilnostnega pogoja (1.130) sledi, da je $u_{\xi C} = 0$ in $\Delta\omega_{\eta} = \omega_{\eta B}^D - \omega_{\eta B}^L = 0$. Sistem (1.144) se s tem glasi

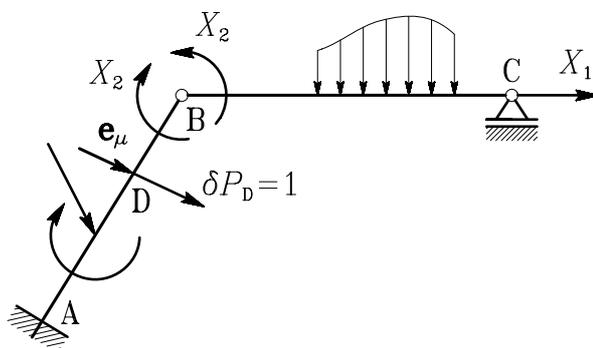
$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.145)$$

Koeficiente a_{11}, \dots, a_{22} in prosta člena (desni strani) b_1 in b_2 smo določili z enačbami (1.141). Tako smo dobili sistem dveh linearnih algebrskih enačb, iz katerih s katero od znanih metod določimo nadomestni zunanji sili X_1 in X_2 . S tem poznamo celotno zunanjo obtežbo osnovne statično določene konstrukcije (*slika 1.5.b*). Reakcije določimo z ravnotežnimi pogoji, notranje sile pa z enačbama (1.137).

Nalogo lahko sedaj še razširimo z zahtevo, da je treba določiti, na primer, pomik točke D v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_μ (slika 1.6). V skladu z dosedanjimi ugotovitvami obtežimo osnovno statično določeno konstrukcijo v točki D z virtualno silo $\delta P_D = 1$ v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_μ in izračunamo iskani pomik u_μ kot pripadajoče dopolnilno virtualno delo notranjih sil

$$u_\mu = \delta \bar{D}^*(p, X_1, X_2, \delta P_D = 1) = \sum_{e=1}^2 \int_0^{l_e} \left(\frac{N_x \delta N_x}{EA_x} + \frac{M_y \delta M_y}{EI_y} \right) dx. \quad (1.146)$$

N_x in M_y sta osna sila in upogibni moment, ki pripadata dejanski zunanji obtežbi na prvotni statično nedoločeni konstrukciji, vendar ju ob upoštevanju zakona superpozicije lahko izračunamo na osnovnem statično določenem sistemu z enačbama (1.137), saj sta sedaj X_1 in X_2 znani zunanji sili. Prav tako na osnovnem statično določenem sistemu izračunamo virtualno osno silo $\delta N_x(\delta P_D = 1)$ in virtualni upogibni moment $\delta M_y(\delta P_D = 1)$.



Slika 1.6

Ugotovitev, da tudi notranje sile zaradi virtualne obtežbe določamo kar na statično določeni osnovni konstrukciji, je znana kot *redukcijsko pravilo* in znatno olajšuje računanje pomikov in zasukov statično nedoločenih konstrukcij.

1.10 Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela

enačbe v obliki (1.147) ugodne tudi za obravnavanje problemov, pri katerih so v posameznih točkah konstrukcije predpisani pomiki in zasuki, na primer pri posedanju podpor ali vodenju pomikov pri eksperimentih.

Iz enačb (1.147) določimo nadomestne sile X_1, X_2, \dots, X_n , nato pa po analogiji z enačbama (1.1.37) še osne sile in upogibne momente

$$\begin{aligned} N_x &= N_{xp} + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} X_i \\ M_y &= M_{yp} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} X_i. \end{aligned} \quad (1.150)$$

Metoda sil je ena od temeljnih metod za določanje reakcij, notranjih sil ter pomikov in zasukov linijskih konstrukcij. Še posebej je primerna za hitro statično analizo linijskih konstrukcij z nizko stopnjo statične nedoločenosti.

1.10 Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela

V razdelku 1.5 smo virtualne pomike opredelili kot poljubne, dovolj majhne, kinematično dopustne pomike, ki so povsem neodvisni od dejanske zunanje obtežbe telesa. Ob upoštevanju te opredelitve lahko izpeljemo zelo koristen izrek.

Vzemimo linearno elastično, stabilno podprto telo in obravnavajmo dva medsebojno neodvisna, statično dopustna primera zunanje obtežbe: v prvem primeru deluje na telo zunanja specifična površinska obtežba $\mathbf{p}_n^{(1)}$ in specifična prostorninska obtežba $\mathbf{v}^{(1)}$; napetosti, pomike in deformacije, ki pripadajo tej obtežbi, označimo s $\boldsymbol{\sigma}_i^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)}$. V drugem primeru pa telo obtežimo z zunanjo obtežbo $\mathbf{p}_n^{(2)}$ in $\mathbf{v}^{(2)}$; tej obtežbi pripadajo napetosti $\boldsymbol{\sigma}_i^{(2)}$, pomiki $\mathbf{u}^{(2)}$ in deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)}$

$$\begin{aligned} (1) \dots \quad \mathbf{p}_n^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} &\quad \rightarrow \quad \mathbf{u}^{(1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} \\ (2) \dots \quad \mathbf{p}_n^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)} &\quad \rightarrow \quad \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

1.10 Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela

Ker so pomiki in deformacije $\mathbf{u}^{(2)}$ in $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)}$, ki pripadajo drugemu obtežnemu primeru, neodvisni od prvega obtežnega primera, jih lahko v odnosu do obtežbe $\mathbf{p}_n^{(1)}$ in $\mathbf{v}^{(1)}$ razumemo kot virtualne pomike in deformacije. Virtualno delo, ki ga zunanja obtežba prvega obtežnega primera opravi na pomikih, ki pripadajo drugemu obtežnemu primeru, označimo z $\delta W^{(1,2)}$

$$\delta W^{(1,2)} = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n^{(1)} \mathbf{u}^{(2)} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{u}^{(2)} dV. \quad (1.152)$$

Podobno zapišemo virtualno delo $\delta W^{(2,1)}$, ki ga zunanja obtežba drugega obtežnega primera opravi na pomikih, ki pripadajo prvemu obtežnemu primeru.

$$\delta W^{(2,1)} = \int_{\mathcal{S}_p} \mathbf{p}_n^{(2)} \mathbf{u}^{(1)} dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{u}^{(1)} dV. \quad (1.153)$$

Ker je telo v obeh obtežnih primerih v ravnotežju, velja izrek o virtualnih pomikih in virtualno delo zunanjih sil lahko v obeh primerih izenačimo z ustreznim virtualnim delom notranjih sil.

$$\begin{aligned} (1) \dots \quad \delta W^{(1,2)} &= \delta \bar{D}^{(1,2)} = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} dV \\ (2) \dots \quad \delta W^{(2,1)} &= \delta \bar{D}^{(2,1)} = \int_{\mathcal{V}} \sum_i \boldsymbol{\sigma}_i^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} dV. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Ob upoštevanju konstitucijskega zakona (1.24) pri $\Delta T = 0$ dobimo

$$\begin{aligned} (1) \dots \quad \delta W^{(1,2)} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \left(2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} + \lambda I_1^{\varepsilon(1)} \mathbf{e}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} dV \\ (2) \dots \quad \delta W^{(2,1)} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \left(2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} + \lambda I_1^{\varepsilon(2)} \mathbf{e}_i \right) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} dV \end{aligned} \quad (1.155)$$

1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

in ob upoštevanju enačbe (1.28) sledi

$$\begin{aligned} (1) \dots \quad \delta W^{(1,2)} &= \int_{\mathcal{V}} \left(2\mu \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} + \lambda I_1^{\varepsilon(1)} I_1^{\varepsilon(2)} \right) dV \\ (2) \dots \quad \delta W^{(2,1)} &= \int_{\mathcal{V}} \left(2\mu \sum_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(1)} + \lambda I_1^{\varepsilon(2)} I_1^{\varepsilon(1)} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Zaradi komutativnosti skalarnega produkta sta desni strani v obeh enačbah (1.156) enaki, kar zapišemo kot *Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela*

$$\delta W^{(1,2)} = \delta W^{(2,1)} \quad (1.157)$$

ali z besedami:

Pri linearno elastičnem telesu je virtualno delo obtežbe, ki pripada prvemu obtežnemu primeru, na pomikih, ki pripadajo drugemu obtežnemu primeru, enako virtualnemu delu obtežbe, ki pripada drugemu obtežnemu primeru, na pomikih, ki pripadajo prvemu obtežnemu primeru.

1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela, ki smo ga izpeljali v prejšnjem razdelku, ima daljnosežne posledice. Kot prvo, neposredno posledico izpeljemo *Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov*.

Spet obravnavamo stabilno podprto linearno elastično telo pri dveh medsebojno neodvisnih statično dopustnih obtežnih primerih, le da je tokrat zunanja obtežba sestavljena zgolj iz točkovnih sil in dvojic v dveh različnih točkah telesa (*slika 1.7*)

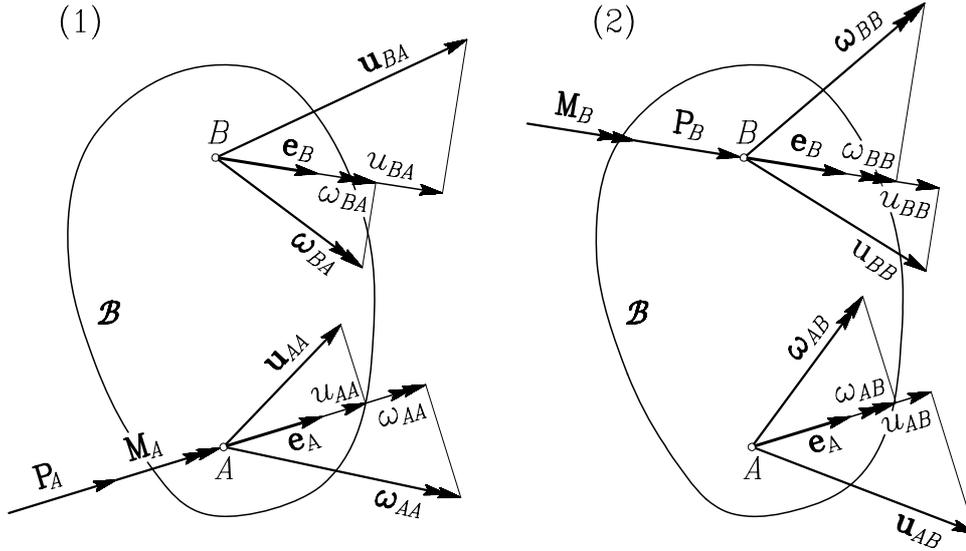
V prvem obtežnem primeru je telo v točki A obteženo s točkovno silo \mathbf{P}_A in s točkovno dvojico \mathbf{M}_A , ki pa sta obe usmerjeni vzdolž enotskega

1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

vektorja \mathbf{e}_A . Če velikosti obeh točkovnih obtežb označimo s P_A in M_A , lahko pišemo

$$\mathbf{P}_A = P_A \mathbf{e}_A \quad \text{in} \quad \mathbf{M}_A = M_A \mathbf{e}_A. \quad (1.158)$$

Pomik in zasuk, ki se zaradi te obtežbe pojavita v točki B , označimo z \mathbf{u}_{BA} in $\boldsymbol{\omega}_{BA}$.



Slika 1.7

V drugem obtežnem primeru pa je telo obteženo le v točki B , in sicer s točkovno silo \mathbf{P}_B in s točkovno dvojico \mathbf{M}_B v smeri enotskega vektorja \mathbf{e}_B

$$\mathbf{P}_B = P_B \mathbf{e}_B \quad \text{in} \quad \mathbf{M}_B = M_B \mathbf{e}_B. \quad (1.159)$$

Pomik in zasuk, ki se zaradi te obtežbe pojavita v točki A , označimo z \mathbf{u}_{AB} in $\boldsymbol{\omega}_{AB}$. Ker gre za dva medsebojno povsem neodvisna obtežna primera, lahko uporabimo Betti-Rayleighov izrek o vzajemnosti virtualnega dela in zapišemo Maxwellov izrek kot sledi

$$\delta W^{(1,2)} = \delta W^{(2,1)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}_A \mathbf{u}_{AB} + \mathbf{M}_A \boldsymbol{\omega}_{AB} = \mathbf{P}_B \mathbf{u}_{BA} + \mathbf{M}_B \boldsymbol{\omega}_{BA}. \quad (1.160)$$

1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

Ob upoštevanju enačb (1.158) in (1.159) ter komutativnosti skalarnega produkta lahko izrek zapišemo takole

$$P_A \mathbf{u}_{AB} \mathbf{e}_A + M_A \boldsymbol{\omega}_{AB} \mathbf{e}_A = P_B \mathbf{u}_{BA} \mathbf{e}_B + M_B \boldsymbol{\omega}_{BA} \mathbf{e}_B. \quad (1.161)$$

Skalarni produkt $\mathbf{u}_{AB} \mathbf{e}_A$, ki predstavlja projekcijo vektorja pomika \mathbf{u}_{AB} na smer \mathbf{e}_A , označimo z u_{AB} . Podobne oznake vpeljemo tudi za preostale tri nastopajoče skalarne produkte

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{AB} \mathbf{e}_A &= u_{AB} & \mathbf{u}_{BA} \mathbf{e}_A &= u_{BA} \\ \boldsymbol{\omega}_{AB} \mathbf{e}_A &= \omega_{AB} & \boldsymbol{\omega}_{BA} \mathbf{e}_A &= \omega_{BA}. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Maxwellov izrek (1.160) lahko sedaj zapišemo v splošni skalarni obliki

$$P_A u_{AB} + M_A \omega_{AB} = P_B u_{BA} + M_B \omega_{BA}. \quad (1.163)$$

Za praktično delo v konstrukcijski mehaniki so pomembne štiri posebne oblike Maxwellovega izreka, ki ustrezajo različnim izbiram točkovnih obtežb v obeh obtežnih primerih

$$\begin{aligned} P_A = 1, M_A = 0, P_B = 1, M_B = 0 &\rightarrow u_{AB} = u_{BA} \\ P_A = 0, M_A = 1, P_B = 0, M_B = 1 &\rightarrow \omega_{AB} = \omega_{BA} \\ P_A = 1, M_A = 0, P_B = 0, M_B = 1 &\rightarrow u_{AB} = \omega_{BA} \\ P_A = 0, M_A = 1, P_B = 1, M_B = 0 &\rightarrow \omega_{AB} = u_{BA}. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Ob upoštevanju vsega povedanega skušajmo prvo od dobljenih oblik Maxwellovega izreka izraziti še z besedami:

Pomik, ki se zaradi delovanja enotske sile iz drugega obtežnega primera pojavi v prijemališču in v smeri enotske sile iz prvega obtežnega primera, je enak pomiku, ki se zaradi delovanja enotske sile iz prvega obtežnega primera pojavi v prijemališču in v smeri enotske sile iz drugega obtežnega primera.

Na podobno neroden način bi ubesedili tudi preostale tri oblike Maxwellovega izreka. Pri tretji in četrti obliki nas ne sme zmotiti

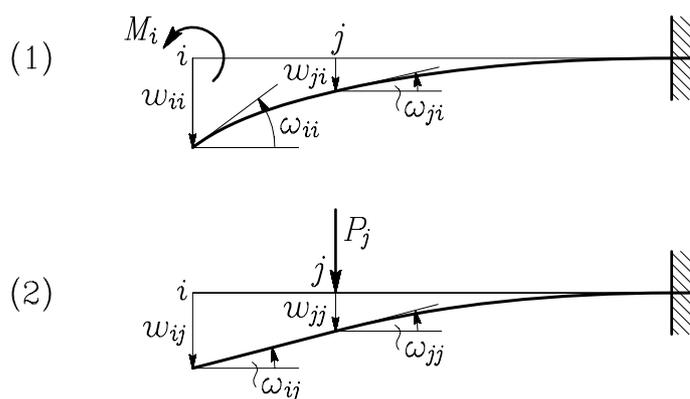
1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

navidezno neskladje v enotah izenačenih pomikov in zasukov. Obe enakosti smo namreč dobili tako, da smo v izvornih enačbah eno stran pokrajšali z enoto sile (N), drugo pa z enoto dvojice (Nm).

Za ilustracijo si oglejmo previsni nosilec v dveh značilnih obtežnih primerih (*slika 1.8*): v prvem primeru je nosilec v krajišču i obtežen s točkovno dvojico M_i , v drugem pa v vmesni točki j z navpično točkovno silo P_j . Navpični pomik, ki ga v točki j povzroči dvojica M_i , označimo z w_{ji} , zasuk, ki ga v krajišču i povzroči sila P_j , pa z ω_{ij} . V tem primeru zapišemo Betti–Rayleighov izrek z enačbo

$$M_i \omega_{ij} = P_j w_{ji} . \quad (1.165)$$

Maxwellov izrek pa se, kakor kažejo enačbe (1.164), nanaša na medsebojne enakosti pomikov in zasukov, ki ustrezajo enotskim silam in dvojicam v različnih obtežnih primerih.



Slika 1.8

Računanje s pomiki in zasuki, ki pripadajo enotskim obtežbam, si lahko občutno olajšamo z vpeljavo tako imenovanih *podajnostnih koeficientov* f_{ij} . V našem primeru bi, na primer, lahko označili

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \omega_{ij}(P_j = 1) & \rightarrow & \omega_{ij} = f_{ij}P_j \\ f_{ji} &= w_{ji}(M_i = 1) & & w_{ji} = f_{ji}M_i . \end{aligned} \quad (1.166)$$

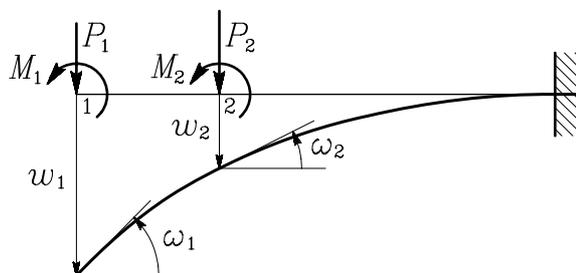
1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

Enačba (1.165) preide s tem v zelo zgovorno obliko

$$M_i f_{ij} P_j = P_j f_{ji} M_i \quad \rightarrow \quad f_{ji} = f_{ij}, \quad (1.167)$$

ki pove, da so podajnostni koeficienti pri linearno elastičnem telesu simetrični.

V primeru, da v istem obtežnem primeru na telo deluje več različnih obtežb (*slika 1.9*), bi bil pri običajnem označevanju sil in dvojic ter pomikov in zasukov zapis posameznih pomikov in zasukov v odvisnosti od vseh nastopajočih obtežb zelo nepregleden. Težavam se uspešno izognemo z vpeljavo *posplošenih sil* in *posplošenih pomikov*, ki smo jih že spoznali v razdelku 1.4.



Slika 1.9

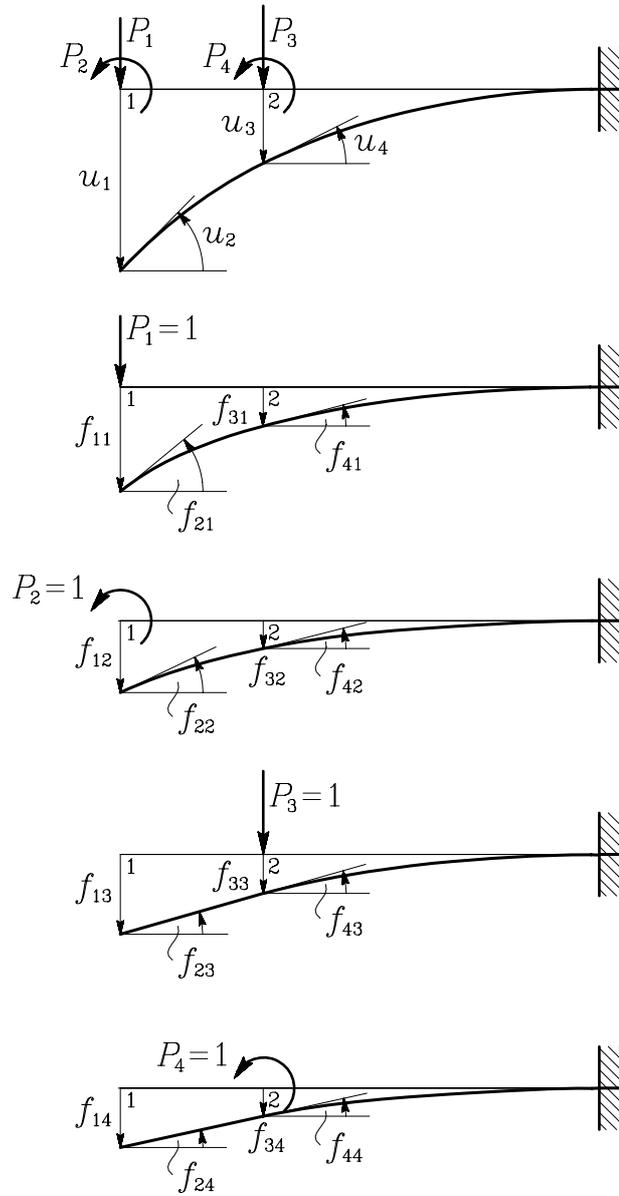
Še enkrat si oglejmo previsni nosilec, prikazan na *sliki 1.9*, tokrat z uvedbo splošenih oznak za sile in pomike (*slika 1.10*). Splošenim silam P_1, \dots, P_4 ustrezajo splošeni pomiki u_1, \dots, u_4 . Z upoštevanjem zakona superpozicije lahko vsakega od splošenih pomikov izrazimo kot vsoto prispevkov posameznih splošenih sil. Za pomik u_1 na primer velja

$$u_1 = u_1(P_1) + u_1(P_2) + u_1(P_3) + u_1(P_4) \quad (1.168)$$

oziroma z uporabo podajnostnih koeficientov

$$u_1 = f_{11}P_1 + f_{12}P_2 + f_{13}P_3 + f_{14}P_4 = \sum_{j=1}^4 f_{1j}P_j. \quad (1.169)$$

1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov



Slika 1.10

1.11 Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov in zasukov

Podobno lahko izrazimo tudi preostale posplošene pomike, kar v primeru, da imamo opraviti z n posplošenimi silami in prav tolikimi pomiki, na kratko zapišemo z enačbo

$$u_i = \sum_j f_{ij} P_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.170)$$

Pomen podajnostnih koeficientov je v tem primeru povsem nedvoumen (slika 1.10)

$$f_{ij} = u_i (P_j = 1). \quad (1.171)$$

Pogosto uporabljamo tudi matrični zapis

$$\{u\} = [F] \{P\}, \quad (1.172)$$

kjer je $[F]$ matrika podajnostnih koeficientov oziroma *podajnostna matrika telesa*. Z Maxwellovim izrekom smo ugotovili, da so podajnostni koeficienti simetrični glede na zamenjavo indeksov ($f_{ji} = f_{ij}$), zato je tudi podajnostna matrika simetrična

$$[F] = [F]^T. \quad (1.173)$$

Podajnostna matrika stabilno podprtega telesa je nesingularna, zato lahko naredimo obrat enačbe (1.172), in sicer tako, da jo z leve pomnožimo z inverzno matriko $[F]^{-1}$

$$[F]^{-1} \{u\} = [F]^{-1} [F] \{P\}, \quad (1.174)$$

Za inverzno matriko $[F]^{-1}$ vpeljemo novo oznako

$$[F]^{-1} = [K] \quad (1.175)$$

in jo imenujemo *togostna matrika telesa*. Ker je $[F]^{-1} [F] = [I]$, preide enačba (1.174) v naslednjo obliko

$$\{P\} = [K] \{u\}. \quad (1.176)$$

1.12 Castiglianov izrek

Matriko $[K]$ sestavljajo togostni koeficienti k_{ij}

$$k_{ij} = P_i(u_j = 1), \quad (1.177)$$

tako da velja

$$P_i = \sum_j k_{ij} u_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.178)$$

Podobno kakor podajnostna je tudi togostna matrika simetrična, trej velja

$$[K] = [K]^T \quad \text{oziroma} \quad k_{ji} = k_{ij}. \quad (1.179)$$

1.12 Castiglianov izrek

V razdelku 1.4 smo v enačbi (1.80) celotno deformacijsko energijo linearno elastičnega telesa zapisali s posplošenimi točkovnimi silami in pomiki. Ob upoštevanju zapisa (1.178) preide enačba (1.80) v naslednjo obliko

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n k_{ij} u_i u_j, \quad (1.180)$$

oziroma v matrični obliki

$$D = \underline{D} + \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}. \quad (1.181)$$

Analogno lahko ob upoštevanju zapisa (1.170) izrazimo tudi dopolnilno ali komplementarno deformacijsko energijo telesa

$$D^* = \underline{D}^* + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n f_{ij} P_i P_j, \quad (1.182)$$

pri čemer za linearno elastična telesa velja enakost $D^* = D$. V matrični obliki se enačba (1.182) glasi

$$D^* = \underline{D} + \frac{1}{2} \{P\}^T [F] \{P\}. \quad (1.183)$$

1.12 Castiglianov izrek

Izračunajmo odvod deformacijske energije D po poljubnem posplošenem pomiku u_k . Delež \underline{D} ni eksplicitno odvisen od točkovnih posplošenih pomikov, zato je njegov odvod po u_k enak nič. V drugem sumandu na desni strani enačbe (1.182) upoštevamo pravilo za odvajanje produkta

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial u_k} &= \frac{1}{2} \sum_i^n u_i \frac{\partial}{\partial u_k} (k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \dots + k_{ik}u_k + \dots + k_{in}u_n) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_j^n u_j \frac{\partial}{\partial u_k} (k_{1j}u_1 + k_{2j}u_2 + \dots + k_{kj}u_k + \dots + k_{nj}u_n) \end{aligned} \quad (1.184)$$

in, ker so posplošeni pomiki neodvisni med seboj, dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u_k} = \frac{1}{2} \sum_i^n k_{ik}u_i + \frac{1}{2} \sum_j^n k_{kj}u_j. \quad (1.185)$$

Ob upoštevanju simetrije togostnih koeficientov in zamenljivosti seštevanih indeksov velja

$$\sum_i^n k_{ik}u_i = \sum_i^n k_{ki}u_i = \sum_j^n k_{kj}u_j \quad (1.186)$$

in enačba (1.185) se glasi

$$\frac{\partial D}{\partial u_k} = \sum_j^n k_{kj}u_j. \quad (1.87)$$

Indeks k nadomestimo z i in s primerjavo z enačbo (1.178) dobimo

$$\frac{\partial D}{\partial u_i} = \sum_j^n k_{ij}u_j = P_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.188)$$

Dobljena zveza je znana kot *prvi Castiglianov izrek* in pove, da z odvajanjem celotne deformacijske energije po izbranem posplošenem pomiku

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

dobimo posplošeno silo, ki se po prijemališču in po smeri ujema z izbranim posplošenim pomikom.

Podobno izpeljemo tudi *drugi Castiglianov izrek*. Celotno dopolnilno deformacijsko energijo D^* , ki smo jo zapisali z enačbo (1.182), odvajamo po izbrani posplošeni sili P_i in dobimo pripadajoči posplošeni pomik u_i

$$\frac{\partial D^*}{\partial P_i} = \sum_j f_{ij} P_j = u_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.189)$$

Izpeljana Castiglianova izreka imata predvsem zgodovinski pomen; v nekaterih preprostih primerih, še posebej če lahko celotno deformacijsko energijo oziroma dopolnilno deformacijsko energijo zapišemo zgolj s posplošenimi točkovnimi silami in pomiki ($\underline{D} = 0$ ali $\underline{D}^* = 0$) pa Castiglianova izreka predstavljata zanimivo in učinkovito orodje za računanje točkovnih sil oziroma pomikov.

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

Znova si oglejmo trdno telo \mathcal{B} (slika 1.1) in vzemimo, da se je po nanosu zunanje obtežbe \mathbf{p}_n in \mathbf{v} umirilo v ravnotežni legi, ki je opisana s poljem pomikov \mathbf{u} in pripadajočimi deformacijami ε_{ij} . Pri tem je specifična površinska obtežba \mathbf{p}_n predpisana na delu \mathcal{S}_p zunanje mejne ploskve, z \mathcal{S}_u pa je označen tisti del zunanje mejne ploskve, na katerem so zaradi podpiranja ali na kak drugačen način predpisani pomiki \mathbf{u} .

V razdelku 1.5 smo ugotovili, da lahko sistem parcialnih diferencialnih enačb ravnotežja, ki smo ga izpeljali v poglavju o napetostih, enakovredno nadomestimo z izrekom o virtualnem delu (1.95). Zapišimo ta izrek v nekoliko drugačni obliki

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i p_{ni} \delta u_i dS + \int_{\mathcal{V}} \sum_i v_i \delta u_i dV = 0. \quad (1.190)$$

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

Kakor vidimo, je ravnotežni pogoj, zapisan z enačbo (1.190), zelo splošen in neodvisen od materialnih lastnosti obravnavanega telesa. V nadaljevanju vpeljemo dve pomembni omejitvi:

i material je elastičen, torej obstoji taka funkcija deformacijskega stanja $\mathcal{D}(\varepsilon_{ij})$ (v razdelku **1.2** smo jo prepoznali kot specifično deformacijsko energijo telesa), da velja

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}, \quad (1.191)$$

ii zunanja obtežba je *potencialna*. To pomeni, da lahko najdemo taki *potencialni funkciji* $\Phi(u_i)$ in $\Psi(u_i)$, da velja

$$p_{ni} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \quad \text{in} \quad v_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial u_i}. \quad (1.192)$$

Kot zgled navedimo potencialno funkcijo

$$\Phi = \frac{1}{2}\beta u_z^2 \quad \rightarrow \quad p_{nz} = -\beta u_z,$$

s katero, na primer, ponazorimo kontaktni tlak med dnom temelja in elastično zemljino s koeficientom podlage β , pri kateri je interakcijska površinska obtežba, s katero temeljna tla delujejo na temelj, premosorazmerna s posedkom temelja.

Če omejitvi (1.191) in (1.192) upoštevamo v ravnotežnem pogoj (1.190), sledi

$$\int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV + \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \delta u_i dS + \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \delta u_i dV = 0. \quad (1.193)$$

V skladu z definicijo, ki smo jo vpeljali v *Uvodu v variacijski račun*, vpeljemo prve variacije funkcij \mathcal{D} , Φ in Ψ

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D} &= \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} & \delta \Phi &= \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \delta u_i \\ & & \delta \Psi &= \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} \delta u_i \end{aligned} \quad (1.194)$$

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

in jih vstavimo v enačbo (1.193)

$$\int_{\mathcal{V}} \delta \mathcal{D} dV + \int_{\mathcal{S}_p} \delta \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \delta \Psi dV = 0. \quad (1.195)$$

Uporabimo še pravilo o komutativnosti operatorja δ in dobimo

$$\delta \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV + \delta \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \delta \int_{\mathcal{V}} \Psi dV = 0. \quad (1.196)$$

Prvi integral v dobljeni enačbi predstavlja celotno deformacijsko energijo telesa D , vsoto drugega in tretjega integrala pa označimo z W in jo imenujemo *potencial zunanjih sil*

$$W = \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \Psi dV. \quad (1.197)$$

S tem se enačba (1.196) glasi

$$\delta D + \delta W = \delta (D + W) = 0. \quad (1.198)$$

Vsoto v oklepaju imenujemo *potencialna energija telesa Π*

$$\Pi = D + W = D + \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \Psi dV. \quad (1.199)$$

V splošnem primeru potencialne obtežbe moramo torej poznati potencialni funkciji Φ in Ψ , da bi lahko izračunali potencialno energijo Π .

Izrek o virtualnem delu (1.190) preide s tem v zahtevo, da je prva variacija potencialne energije v ravnotežnem stanju telesa enaka nič

$$\delta \Pi = 0. \quad (1.200)$$

V okviru vpeljanih omejitev je zahteva (1.200) znana kot *izrek o stacionarni vrednosti potencialne energije*, ki velja tako za linearno kakor tudi za nelinearno elastična telesa:

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

Med vsemi polji pomikov, ki zadoščajo kinematičnim robnim pogojem, ustreza ravnotežnemu stanju telesa tisto polje pomikov, pri katerem ima potencialna energija telesa stacionarno vrednost.

Pri tem smo vzeli, da je potencialna energija funkcija pomikov $\Pi = \Pi(u_i)$. Ker so pomiki u_i v splošnem funkcije koordinat, je potencialna energija funkcional. Z enačbo (1.200) smo torej zahtevali, da ima funkcional Π v ravnotežnem stanju telesa *stacionarno točko*, ne vemo pa še, ali gre pri tem za lokalni minimum, lokalni maksimum ali sedlo. Vrsto stacionarne točke lahko določimo le ob nadaljnji omejitvi na *konservativno obtežbo*. V tem primeru se obtežbi \mathbf{p}_n in \mathbf{v} med deformiranjem telesa ne spreminjata, torej nista odvisni od pomikov. Tedaj sta potencialni funkciji Φ in Ψ kvečjemu linearni funkciji pomikov in velja

$$\begin{aligned} \Phi = - \sum_i p_{ni} u_i & \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p_{ni}}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} = 0 \\ \Psi = - \sum_i v_i u_i & \quad \frac{\partial v_i}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} = 0. \end{aligned} \quad (1.201)$$

Potencialna energija je tedaj

$$\Pi = D - \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i p_{ni} u_i dS - \int_{\mathcal{V}} \sum_i v_i u_i dV \quad (1.202)$$

oziroma ob upoštevanju enačb (1.36) in (1.201)

$$\Pi = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{D} dV + \int_{\mathcal{S}_p} \Phi dS + \int_{\mathcal{V}} \Psi dV. \quad (1.203)$$

Vzemimo, da ima potencialna energija pri aktualnem polju pomikov u_j in pripadajočih deformacijah ε_{ij} stacionarno vrednost. Kakor smo pokazali v poglavju o osnovah variacijskega računa, odločajo o naravi ugotovljene stacionarne točke funkcionala druga in višje variacije. Ugotoviti moramo, kako se spremeni vrednost funkcionala Π , če se pomiki spremenijo za δu_j , pri čemer se deformacije spremenijo za

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

$\delta\varepsilon_{ij}$. Funkcional Π razvijemo v Taylorjevo vrsto glede na vrednost pri pomikih u_j in deformacijah ε_{ij} in izrazimo njegovo spremembo z vsoto variacij

$$\Delta\Pi = \Pi(u_j + \delta u_j) - \Pi(u_j) = \delta\Pi + \delta^2\Pi + \delta^3\Pi + \dots, \quad (1.204)$$

Obravnavamo stacionarno točko funkcionala, zato je $\delta\Pi = 0$. Ker so variacije pomikov poljubne, jih lahko izberemo tako majhne, da druga variacija $\delta^2\Pi$ določa predznak vsote vseh preostalih členov na desni strani enačbe (1.204). Izračunamo jo z izrazom

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi &= \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} dV + \\ &\quad \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{S}_p} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j dS + \\ &\quad \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{V}} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j dV. \end{aligned} \quad (1.205)$$

Zaradi lastnosti (1.201) sta drugi in tretji člen enaka nič, o pomenu prvega pa se najlaže prepričamo, če specifično deformacijsko energijo \mathcal{D} razvijemo v potenčno vrsto okrog deformacijskega stanja ε_{ij}

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon_{ij}) &= \mathcal{D}(\varepsilon_{ij}) + \sum_i \sum_j \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \\ &\quad \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (1.206)$$

Sedaj pa zapišimo vrsto (1.206) za nedeformirano stanje telesa, ko je $\varepsilon_{ij} = 0$. Ob upoštevanju enačbe (1.191) dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\delta \varepsilon_{ij}) &= \mathcal{D} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} + \sigma_{ij} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} + \\ &\quad \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} \delta \varepsilon_{ij} \delta \varepsilon_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (1.207)$$

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

Umestno je vzeti, da je specifična deformacijska energija nedeformiranega telesa enaka nič in da so v tem stanju enake nič tudi vse napetosti

$$\mathcal{D} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} = 0 \quad \text{in} \quad \sigma_{ij} \Big|_{\varepsilon_{ij}=0} = 0. \quad (1.208)$$

Prav tako lahko predpostavimo, da so prirastki deformacij $\delta\varepsilon_{ij}$ tako majhni, da kvadratni člen določa predznak celotne desne strani v enačbi (1.207). Kakor vidimo, gre pri tem za spremembo specifične deformacijske energije, če se v začetku nedeformirano telo deformira za $\delta\varepsilon_{ij}$. To pomeni, da je bilo v deformiranje elementa telesa s enotsko prostornino vloženo določeno mehansko delo, za prav toliko pa se je povečala specifična deformacijska energija tega elementa. Sprememba specifične deformacijske energije je torej pri elastičnem telesu vedno pozitivna (le v primeru, da so vsi prirastki deformacij enaki nič, je tudi sprememba specifične deformacijske energije enaka nič). Do enakega sklepa bi prišli tudi s čisto matematičnim razmislekom, saj vsota v kvadratnem členu predstavlja pozitivno definitno kvadratno formo, za katero velja, da je vedno pozitivna, le v primeru $\delta\varepsilon_{ij} = 0$ je enaka nič. S tem smo dokazali, da je sprememba potencialne energije $\delta\Pi$ v okolici ravnotežne lege $\varepsilon_{ij} = 0$ pozitivna, torej gre za lokalni minimum funkcionala Π . To ugotovitev brez dokaza posplošimo na poljubno deformirano stanje telesa † in jo predstavimo kot *izrek o minimumu potencialne energije*:

Med vsemi polji pomikov, ki zadoščajo kinematičnim robnim pogojem, ustreza ravnotežnemu stanju telesa tisto polje pomikov, pri katerem ima potencialna energija telesa lokalni minimum.

Ravnotežno stanje, ki ustreza minimalni vrednosti potencialne energije telesa, imenujemo *stabilno ravnotežje*. V primeru, da bi bila sprememba potencialne energije $\Delta\Pi$ negativna, bi govorili o lokalnem maksimumu funkcionala Π in *nestabilnem ravnotežju telesa*. Primer $\Delta\Pi = 0$ pa

† Za linearno elastično telo je dokaz ob upoštevanju enačbe (1.33) razmeroma preprost, zato ga prepuščamo pridnemu bralcu.

1.13 Izrek o minimumu potencialne energije

opredelimo kot nevtrarno stacionarno točko ali sedlo funkcionala in s tem *nevtrarno ravnotežje telesa*.

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{in} \quad \Delta \Pi > 0 \quad \text{stabilno ravnotežje}$$

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{in} \quad \Delta \Pi = 0 \quad \text{nevtrarno ravnotežje}$$

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{in} \quad \Delta \Pi < 0 \quad \text{nestabilno ravnotežje}.$$

Omenjene vrste ravnotežja si ponazorimo s klasično fizikalno skico kroglice v različnih ravnotežnih položajih glede na razgibano podlago (*slika 1.11*). Ta skica nas med drugim tudi opozori na zelo pomembno dejstvo, da je pojem ravnotežja v vseh treh primerih povezan z lokalnimi stacionarnimi točkami funkcionala Π , torej z majhnimi premiki iz ravnotežne lege. Če bi se namreč kroglica iz nevtralne lege premaknila preveč v levo, bi prešla iz nevtralnega v stabilno ravnotežno stanje, pri velikem premiku v desno pa v stanje nestabilnega ravnotežja.



Slika 1.11