na njegovi meji $\mathscr{C}_x$ napetostno funkcijo $\varphi(y,z)$ tako, da je ravnotežna enačba (2.8) identično izpolnjena.

$$\sigma_{xy}(y,z) = \alpha\, G\, \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial z}, \qquad \sigma_{xz}(y,z) = -\alpha\, G\, \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}. \tag{2.66}$$

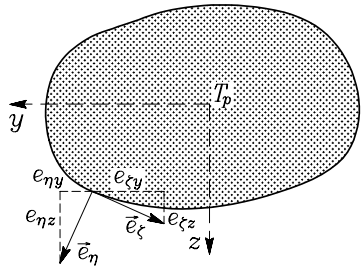
Tudi robni pogoj za vsako mejno črto $\mathscr{C}_z$, $\mathscr{C}_{ni}$ $(i = 1, \ldots, N)$ (enačba (2.12)) izrazimo s $\varphi(y,z)$

$$\mathscr{C}_z,\ \mathscr{C}_{ni}: \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, e_{\eta y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, e_{\eta z} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.67}$$

Ugodno je, če enačbe (2.65) in (2.67) izrazimo v naravnih koordinatah (η, ζ) mejnih krivulj prečnega prereza

$$y = y(\eta, \zeta), \qquad z = z(\eta, \zeta).$$

Vsaki točki mejnih krivulj $\mathscr{C}_z$, $\mathscr{C}_{ni}$ $(i = 1, \ldots, N)$ pripadata pravokotna enotska vektorja $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$, ki predstavljata normalo in tangento na mejno krivuljo (slika 2.11). Normala $\vec{e}_\eta$ je usmerjena navzven.



Slika 2.11: Enotska vektorja $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ sta usmerjena v smeri normale oziroma tangente na mejno krivuljo

Bazna vektorja $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ izrazimo glede na nepomično bazo $\vec{e}_y$ in $\vec{e}_z$ z enačbama

$$\vec{e}_\eta = e_{\eta y}\, \vec{e}_y + e_{\eta z}\, \vec{e}_z, \qquad \vec{e}_\zeta = e_{\zeta y}\, \vec{e}_y + e_{\zeta z}\, \vec{e}_z. \tag{2.68}$$

Ker sta enotska vektorja $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ med seboj pravokotna in ležita v ravnini z normalo $\vec{e}_x$, sledi

$$\vec{e}_\eta = \vec{e}_\zeta \times \vec{e}_x = e_{\zeta z}\, \vec{e}_y - e_{\zeta y}\, \vec{e}_z. \tag{2.69}$$

Iz enačb (2.68) in (2.69) sledi (glej tudi sliko 2.11)

$$e_{\eta y} = e_{\zeta z}, \qquad e_{\eta z} = -e_{\zeta y}. \tag{2.70}$$

Ker so koordinate (y, z) in (η, ζ) med seboj odvisne $y = y(\eta, \zeta)$ in $z = z(\eta, \zeta)$, velja

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\, d\zeta, \qquad dz = \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\, d\zeta. \tag{2.71}$$

Prirastek poljubnega krajevnega vektorja $\vec{\rho}$ v ravnini (y, z) lahko izrazimo glede na oba koordinatna sistema

$$d\vec{\rho} = dy\, \vec{e}_y + dz\, \vec{e}_z = d\eta\, \vec{e}_\eta + d\zeta\, \vec{e}_\zeta. \tag{2.72}$$

Enačbo (2.72) skalarno množimo z $\vec{e}_y$ oziroma z $\vec{e}_z$ in dobimo

$$dy = d\eta\, e_{\eta y} + d\zeta\, e_{\zeta y}, \qquad dz = d\eta\, e_{\eta z} + d\zeta\, e_{\zeta z}. \tag{2.73}$$

Iz primerjave enačb (2.71) in (2.73) sledi

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = e_{\eta y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = e_{\zeta y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = e_{\eta z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = e_{\zeta z}. \tag{2.74}$$

Na enak način izpeljemo izraze za odvode $\partial\eta/\partial y$, $\partial\eta/\partial z$, $\partial\zeta/\partial y$ in $\partial\zeta/\partial z$, ki jih uporabimo v razdelku 2.4.1. Ker je $\eta = \eta(y, z)$ in $\zeta = \zeta(y, z)$ sledi:

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \eta}{\partial z}\, dz, \quad d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\, dz. \tag{2.75}$$

Enačbo (2.72) množimo z $\vec{e}_\eta$ oziroma z $\vec{e}_\zeta$:

$$d\eta = e_{\eta y}\, dy + e_{\eta z}\, dz, \quad d\zeta = e_{\zeta y}\, dy + e_{\zeta z}\, dz. \tag{2.76}$$

Iz primerjave enačb (2.75) in (2.76) sledi

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = e_{\eta y}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = e_{\eta z}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = e_{\zeta y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e_{\zeta z}. \tag{2.77}$$

Enačbi (2.70) lahko sedaj zapišemo takole (upoštevamo (2.74)):

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \zeta}, \tag{2.78}$$

robni pogoj (enačba (2.67)) pa zaradi enačb (2.74) takole:

$$\mathscr{C}_z,\ \mathscr{C}_{ni}: \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.79}$$

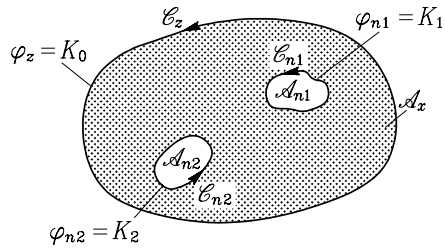
Ko upoštevamo še enačbe (2.78), dobimo

$$\mathscr{C}_z,\ \mathscr{C}_{ni}: \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.80}$$

Iz zadnje enačbe sledi, da je napetostna funkcija $\varphi(y, z)$ konstantna vzdolž vsake mejne črte prereza $\mathscr{C}_z$, $\mathscr{C}_{ni}$ $(i = 1, \ldots, N)$ (slika 2.12)

$$\mathscr{C}_z: \quad \varphi = \varphi_z = K_0, \qquad \mathscr{C}_{ni}: \quad \varphi = \varphi_{ni} = K_i, \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.81}$$

S K_0 in K_i označimo konstante.



Slika 2.12: Napetostna funkcija ima vzdolž vsake mejne črte $\mathscr{C}_z$, $\mathscr{C}_{ni}$ konstantno vrednost

Ker sta napetosti σ_{xy} in σ_{xz} odvoda napetostne funkcije $\varphi(y,z)$, je dovolj, če določimo vrednosti funkcije $\varphi(y,z)$ le do konstante natančno. To pomeni, da lahko eno izmed konstantnih vrednosti vzdolž mejnih črt $\mathscr{C}_z$, $\mathscr{C}_{ni}$ $(i = 1,\ldots,N)$ poljubno izberemo. Običajno vzamemo, da je vrednost funkcije φ na zunanji mejni črti $\mathscr{C}_z$ enaka nič

$$\boxed{\mathscr{C}_z : \qquad \varphi_z = 0.} \tag{2.82}$$

Konstantne vrednosti napetostne funkcije vzdolž notranjih mejnih črt pa določimo iz kompatibilnostnih pogojev (2.65), ki jih zaradi enačb (2.66), (2.71) in (2.78) zapišemo takole:

$$\mathscr{C}_{ni} : \qquad -\oint\limits_{\mathscr{C}_{ni}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} \right) d\zeta = 2\,A_{ni}, \qquad (i = 1,\ldots,N). \tag{2.83}$$

V (2.71) smo upoštevali, da je vzdolž $\mathscr{C}_{ni}$ diferencial $d\eta$ enak nič. Ob upoštevanju pravila za posredno odvajanje $(\partial\varphi/\partial\eta = (\partial\varphi/\partial z)\,(\partial z/\partial\eta) + (\partial\varphi/\partial y)(\partial y/\partial\eta))$ dobimo

$$\boxed{\mathscr{C}_{ni} : \qquad \oint\limits_{\mathscr{C}_{ni}} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\zeta + 2\,A_{ni} = 0, \qquad (i = 1,\ldots,N).} \tag{2.84}$$

Če zapišemo enačbe (2.64) in (2.65) z napetostno funkcijo $\varphi(y,z)$, dobimo

$$\mathscr{A}_x : \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2 = 0, \tag{2.85}$$

$$\mathscr{C}_{ni} : \qquad \oint\limits_{\mathscr{C}_{ni}} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\zeta = -2\,A_{ni}, \qquad (i = 1,\ldots,N). \tag{2.86}$$

Še enkrat poudarimo, da namesto notranje mejne črte $\mathscr{C}_{ni}$ lahko vzamemo poljubno krivuljo $\mathscr{C}_{pi}$, ki odprtino $\mathscr{A}_{ni}$ obkroža.[†] V tem primeru je na desni strani enačbe (2.86) ploščina A_{pi} območja $\mathscr{A}_{pi}$, ki ga določa krivulja $\mathscr{C}_{pi}$. Enačba (2.85) je Poissonova diferencialna enačba enakomerne torzije. Napetostno

[†] M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1998.

funkcijo $\varphi(y,z)$ izračunamo iz enačb (2.85), (2.86), (2.81) in (2.82). Reševanje teh enačb predstavlja ravninsko nalogo v ravnini prečnega prereza $\mathscr{A}_x$. Poissonovo diferencialno enačbe enakomerne torzije (2.85) rešujemo **analitično** ali **numerično**. Analitične rešitve lahko določimo le za preproste oblike prečnega prereza (krog, elipsa, pravokotnik, ...). Najpogosteje uporabljeni numerični metodi sta diferenčna metoda in metoda končnih elementov. Pri poljubni obliki prečnega prereza je primernejša metoda končnih elementov.

Specifični torzijski zasuk α izrazimo s torzijskim momentom M_x in napetostno funkcijo φ (enačbi (2.34) in (2.66))

$$M_x = \alpha\, G \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} z \right) dA_x = \alpha\, G\, I_x. \tag{2.87}$$

V enačbi (2.87) definiramo torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza I_x

$$I_x = -\int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} z \right) dA_x. \tag{2.88}$$

Običajno ga izrazimo v naslednji obliki

$$I_x = -\int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\, y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\, z) \right) dA_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(\varphi \frac{\partial z}{\partial z} + \varphi \frac{\partial y}{\partial y} \right) dA_x. \tag{2.89}$$

Uporabimo Greenov integralni izrek (2.47) in dobimo

$$I_x = -\oint\limits_{\mathscr{C}_x} (\varphi\, y\, dz - \varphi\, z\, dy) + 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x \tag{2.90}$$

Pri večkrat sovisnem območju je sklenjena krivulja $\mathscr{C}_x$ sestavljena iz zunanje mejne črte $\mathscr{C}_z$ in notranjih mejnih črt $\mathscr{C}_{ni}$ $(i = 1, \ldots, N)$ ter iz pomožnih povezovalnih črt (slika 2.13)

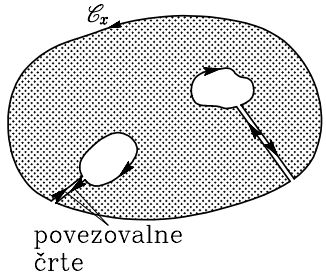
$$\mathscr{C}_x = \mathscr{C}_z \cup \mathscr{C}_{n1} \cup \quad \ldots \quad \cup \mathscr{C}_{nN}. \tag{2.91}$$

Z upoštevanjem smeri sklenjene krivulje $\mathscr{C}_x$ dobimo

$$I_x = -\oint\limits_{\mathscr{C}_z} \varphi_z (y\, dz - z\, dy) - \sum_{i=1}^{N} \oint\limits_{-\mathscr{C}_{ni}} \varphi_{ni}\, (y\, dz - z\, dy) + 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x.$$

Smer integriranja okrog notranjih odprtin je nasprotna od smeri krivulj $\mathscr{C}_{ni}$. Integrali vzdolž povezovalnih črtah se odštejejo. Ko upoštevamo še, da je $\varphi_z = 0$ (enačba (2.82)) in zamenjamo smer integriranja vzdolž notranjih mejnih črt, dobimo

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni} \oint\limits_{\mathscr{C}_{ni}} (y\, dz - z\, dy) + 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x. \tag{2.92}$$



Slika 2.13: Mejna črta $\mathscr{C}_x$ trikrat povezanega območja (prereza z dvema odprtinama)

Po ponovni uporabi Greenovega integralnega izreka (2.47)

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni} \oint_{\mathscr{C}_{ni}} (y\,dz - z\,dy) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni} \int_{\mathscr{A}_{ni}} \left(\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dA_x = \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni} \int_{\mathscr{A}_{ni}} 2\,dA_x = 2 \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni},$$

dobimo končno obliko izraza za torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza

$$\boxed{I_x = 2 \int_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x + 2 \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni}.} \tag{2.93}$$

Specifični torzijski zasuk α izračunamo iz enačbe (2.87)

$$\alpha = \frac{M_x}{G\, I_x}. \tag{2.94}$$

Enačbi za strižni napetosti (2.66) lahko zaradi (2.94) zapišemo tudi takole:

$$\sigma_{xy} = \frac{M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad \sigma_{xz} = -\frac{M_x}{I_x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{2.95}$$

Potek reševanja enačb enakomerne torzije po metodi napetosti

- Iz (2.81), (2.82), (2.85) in (2.86) izračunamo napetostno funkcijo φ
- Iz enačbe (2.93) izračunamo torzijski vztrajnostni moment I_x
- Iz enačbe (2.94) izračunamo specifični torzijski zasuk α
- Strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} izračunamo iz enačb (2.66) ali iz (2.95)
- Strižni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} izračunamo iz enačb (2.5)

- Torzijski zasuk ω_x izračunamo iz (2.25). Konstanto K dobimo, če upoštevamo, da je zasuk prereza, v katerem je postavljena viličasta podpora, enak nič

- Zasuka ω_y in ω_z dobimo iz enačbe †

$$\vec{\omega}(T) = \vec{\omega}(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left((\vec{\nabla} \times \vec{\varepsilon}_x)\, dx + (\vec{\nabla} \times \vec{\varepsilon}_y)\, dy + (\vec{\nabla} \times \vec{\varepsilon}_z)\, dz \right), \tag{2.96}$$

če upoštevamo, da sta le ε_{xy} in ε_{xz} različni od nič

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_y(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\, dy + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}\, dz \right) = \omega_y(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\, dy + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z}\, dz \right), \\ \omega_z &= \omega_z(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}\, dx - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}\, dy - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}\, dz \right) = \omega_z(T_0) - \int_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y}\, dz \right). \end{aligned} \tag{2.97}$$

Konstanti $\omega_y(T_0)$ in $\omega_z(T_0)$ še ne poznamo.

- Pomike u_x, u_y in u_z določimo iz zasukov ω_x, ω_y, ω_z in deformacij po enačbi

$$\vec{u}(T) = \vec{u}(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left((\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x)\, dx + (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y)\, dy + (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z)\, dz \right), \tag{2.98}$$

če upoštevamo, da sta pri enakomerni torziji le ε_{xy} in ε_{xz} različni od nič

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left((\varepsilon_{yx} - \omega_z)\, dy + (\varepsilon_{zx} + \omega_y)\, dz \right), \\ u_y &= u_y(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left((\varepsilon_{xy} + \omega_z)\, dx - \omega_x\, dz \right), \\ u_z &= u_z(T_0) + \int_{T_0}^{T} \left((\varepsilon_{xz} - \omega_y)\, dx + \omega_x\, dy \right). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Konstanti $u_y(T_0)$ in $u_z(T_0)$ v enačbah (2.99) določimo, če točko $T_0(y_0, z_0)$ izberemo v prečnem prerezu $x = x_{pz}$, v katerem je preprečen torzijski zasuk ω_x (na primer v prerezu $x = 0$). V tem primeru sledi iz enačb (2.30), da sta konstanti $u_y(T_0)$ in $u_z(T_0)$ enaki nič

$$u_y(T_0) \equiv u_y(x_{pz}, z_0) = -0\,(z - z_C) = 0, \quad u_z(T_0) \equiv u_z(x_{pz}, y_0) = 0\,(y - y_C) = 0.$$

† M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1998.

Izračunati moramo še konstanti $\omega_y(T_0)$ in $\omega_z(T_0)$. Konstanti izračunamo iz enakega pogoja, kot smo izračunali koordinati y_C in z_C torzijskega središča C pri metodi pomikov. To je, da sta prečni sili N_y in N_z enaki nič (2.44)

$$N_y = \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xy}\, dA_x = 0, \qquad N_z = \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xz}\, dA_x = 0. \tag{2.100}$$

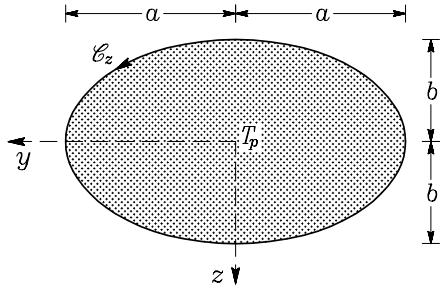
Napetosti σ_{xy} in σ_{xz} v (2.100) izračunamo tako, da najprej določimo deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} iz enačb (2.99), nato pa iz Hookovega zakona strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz}. V izrazih σ_{xy} in σ_{xz} nastopata konstanti $\omega_y(T_0)$ in $\omega_z(T_0)$, konstanta $u_x(T_0)$ pa pri odvajanju odpade. Ti napetosti vstavimo v (2.100) in dobimo dve enačbi za konstanti $\omega_y(T_0)$ in $\omega_z(T_0)$. S tem dobimo enako rešitev, kot pri metodi pomikov in sicer pomike $u_x - u_x(T_0)$, u_y in u_z, zasuke ω_x, ω_y in ω_z, napetosti σ_{xy}, σ_{xz} ter deformaciji ε_{xy} in ε_{xz}.

Vidimo, da pri reševanju enačb enakomerne torzije po metodi napetosti koordinat y_C in z_C torzijskega središča C ne potrebujemo. Pri metodi napetosti je robni pogoj bolj preprost, kot pri metodi pomikov, zato je metoda napetosti ustreznejša, če želimo izračunati le strižni napetosti ter zasuk ω_x. Obstaja pa tudi možnost, da izbočitveno funkcijo Φ izračunamo iz napetostne funkcije φ po enačbi (2.158). Nato pa določimo y_C in z_C po (2.46), pomik $u_x - u_{x0}$ po (2.41), pomika u_y in u_z po (2.30) ter zasuka ω_y in ω_z po (2.36).

2.3.1 Analitična rešitev za eliptično obliko prečnega prereza

V primeru eliptičnega prereza (slika 2.14) je zunanja meja $\mathscr{C}_z$ določena z enačbo (vzemimo, da je $a > b$)

$$\left(\frac{y_r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_r}{b}\right)^2 = 1. \tag{2.101}$$



Slika 2.14: Eliptični prerez določata dolžini a in b obeh polosi

Določiti moramo napetostno funkcijo $\varphi(y, z)$, ki zadošča kompatibilnostni pogoj (2.85)

$$\mathscr{A}_x : \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0 \tag{2.102}$$

in ima vrednost nič vzdolž zunanje mejne črte $\mathscr{C}_z$ (enačba (2.82))

$$\mathscr{C}_z : \qquad \varphi_z = 0. \tag{2.103}$$

Kompatibilnostno enačbo (2.102) zadošča poljubni polinom 2. reda, vendar moramo zaradi robnega pogoja (2.103) izbrati polinom naslednje oblike

$$\varphi = K \left(\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 - 1 \right). \tag{2.104}$$

Če vstavimo za y in z robne vrednosti y_r in z_r, sledi iz enačb (2.101) in (2.104), da ima napetostna funkcija vzdolž zunanjega robu vrednost nič (enačba (2.103)). Konstanto K v enačbi (2.104) določimo tako, da zadostimo kompatibilnostni pogoj (2.102)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 2\,K \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 2 = 0.$$

Tako dobimo

$$K = -\frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2}, \tag{2.105}$$

oziroma

$$\varphi = -\frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right). \tag{2.106}$$

V primeru eliptičnega prereza z eliptično odprtino (slika 2.15), ki jo določa enačba

$$\left(\frac{y_n}{k\,a}\right)^2 + \left(\frac{z_n}{k\,b}\right)^2 = 1, \quad 0 \le k < 1, \tag{2.107}$$

dobimo naslednjo vrednost napetostne funkcije vzdolž notranjega robu

$$y = y_n, \;\; z = z_n : \quad \varphi_n = -\frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{y_n^2}{a^2} + \frac{z_n^2}{b^2} - 1 \right) = -\frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2} \left(k^2 \left(\frac{y_n^2}{k^2\,a^2} + \frac{z_n^2}{k^2\,b^2} - \frac{1}{k^2} \right) \right)$$

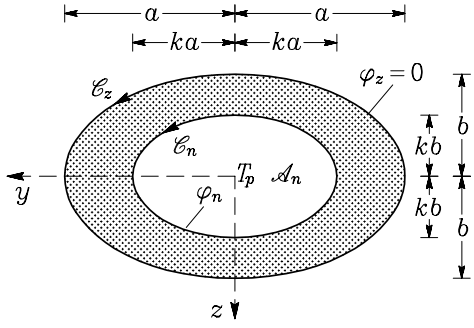
oziroma

$$\varphi_n = \frac{a^2\,b^2}{a^2 + b^2} (1 - k^2). \tag{2.108}$$

Vidimo, da je vrednost napetostne funkcije vzdolž poljubne podobne elipse (2.107), konstantna. To pomeni, da v tem posebnem primeru ostane funkcija $\varphi(y, z)$ (enačba (2.106)) nespremenjena tudi pri prerezu z odprtino.

Torzijski vztrajnostni moment določa enačba (2.93)

$$I_x = 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi \, dA_x + 2\,\varphi_n\,A_n. \tag{2.109}$$



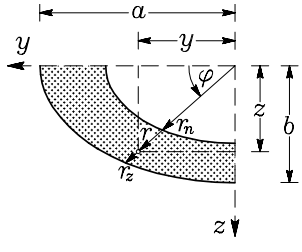
Slika 2.15: Eliptični prerez z odprtino

Z upoštevanjem enačb (2.106), (2.108) in (2.109) ga izrazimo takole:

$$I_x = -2\frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a^2}\int\limits_{\mathscr{A}_x} y^2\,dA_x + \frac{1}{b^2}\int\limits_{\mathscr{A}_x} z^2\,dA_x - \int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x - (1-k^2)\,A_n\right). \tag{2.110}$$

Če upoštevamo, da velja (glej enačbo (2.101) in sliko 2.16) integrale v enačbi (2.110) rešimo z uporabo polarnih koordinat:

$$y = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi, \qquad dA_x = r\,dr\,d\varphi.$$



Slika 2.16: Meje integriranja v radialni smeri $r_n(\varphi)$ in $r_z(\varphi)$

Zunanjo mejo integriranja $r_z(\varphi)$ določimo iz enačbe (2.101)

$$\left(\frac{y_z}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_z}{b}\right)^2 = 1 \quad\rightarrow\quad \frac{(r_z\,\cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{(r_z\,\sin\varphi)^2}{b^2} = 1 \quad\rightarrow\quad r_z^2 = \frac{1}{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}},$$

notranjo mejo pa s preprosto zvezo

$$r_n(\varphi) = k\,r_z(\varphi) = \frac{k}{\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2} + \dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}}.$$

Integrali v enačbi (2.110) so:

$$I_y = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z^2\, dA_x = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_n(\varphi)}^{r_z(\varphi)} r^2\, \sin^2\varphi\, r\, dr\, d\varphi,$$

$$I_z = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y^2\, dA_x = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_n(\varphi)}^{r_z(\varphi)} r^2\, \cos^2\varphi\, r\, dr\, d\varphi,$$

$$A_x = \int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_n(\varphi)}^{r_z(\varphi)} r\, dr\, d\varphi.$$

Rešitve teh integralov so:

$$I_y = \frac{\pi\, a\, b^3}{4}\,(1-k^4), \qquad I_z = \frac{\pi\, a^3\, b}{4}\,(1-k^4), \qquad A_x = \pi\, ab\,(1-k^2), \qquad A_n = \pi\, ab\, k^2.$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x je torej

$$I_x = -2\frac{a^2\, b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{\pi\, ab}{4}(1-k^4) + \frac{\pi\, ab}{4}(1-k^4) - \pi\, ab\,(1-k^2) - (1-k^2)\,\pi\, ab\, k^2\right)$$

oziroma

$$I_x = \frac{\pi\, a^3\, b^3}{a^2+b^2}\left(-\frac{1-k^4}{2} - \frac{1-k^4}{2} + 2(1-k^2) + 2(k^2-k^4)\right) = \frac{\pi\, a^3\, b^3}{a^2+b^2}(1-k^4). \tag{2.111}$$

Če prečni prerez nima odprtine, je k enak nič. Strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} določata enačbi (2.66)

$$\sigma_{xy} = \frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2\, M_x}{\pi\, a\, b^3}\frac{z}{1-k^4} \qquad \sigma_{xz} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2\, M_x}{\pi\, a^3\, b}\frac{y}{1-k^4}. \tag{2.112}$$

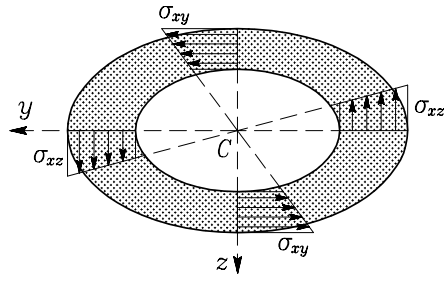
Rezultirajočo strižno napetost označimo s τ_x in izračunamo po enačbi

$$\tau_x = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2} = \frac{2\, M_x}{\pi\, a\, b(1-k^4)}\sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}} \quad \rightarrow \quad \tau_{x,\text{ekst}} = \frac{2\, M_x}{\pi\, a\, b^2}\frac{1}{(1-k^4)}. \tag{2.113}$$

Pri tem smo upoštevali enačbo (2.101) $z_r^2/b^2 = 1 - y_r^2/a^2$

$$\tau_x = \frac{2\, M_x}{\pi\, a\, b(1-k^4)}\sqrt{y_r^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^2\, b^2}\right) + \frac{1}{b^2}}, \quad \frac{\partial\tau_x}{\partial y_r} = \frac{2\, M_x}{\pi\, a\, b(1-k^4)}\frac{y_r\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^2\, b^2}\right)}{\sqrt{y_r^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^2\, b^2}\right) + \frac{1}{b^2}}} = 0.$$

Ker je $a > b$ sledi, da je $y_{r,\text{ekst}} = 0$ in je s tem enačba (2.113) dokazana. Na sliki (2.17) je prikazan potek strižnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz}.



Slika 2.17: Strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} se spreminjata linearno z razdaljo od središča S

Specifični torzijski zasuk α določimo z enačbo (2.87)

$$\alpha = \frac{M_x}{G\,I_x} = \frac{M_x}{G}\frac{a^2+b^2}{\pi\,a^3\,b^3(1-k^4)}, \tag{2.114}$$

kotni deformaciji pa sta po Hookovem zakonu in enačbah (2.112)

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = -2\,\frac{M_x}{G}\frac{z}{\pi\,a\,b^3(1-k^4)}, \qquad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} = 2\,\frac{M_x}{G}\frac{y}{\pi\,a^3\,b(1-k^4)}. \tag{2.115}$$

Pomik u_x določimo iz enačbe (2.33), če upoštevamo, da sta y_C in z_C zaradi simetrije prereza enaka nič:

$$du_x = (2\,\varepsilon_{xy} + \alpha(z-z_C))\,dy + (2\,\varepsilon_{xz} - \alpha(y-y_C))\,dz = (2\,\varepsilon_{xy} + \alpha\,z)\,dy + (2\,\varepsilon_{xz} - \alpha\,y)\,dz. \tag{2.116}$$

Če upoštevamo enačbe (2.114), (2.115) in (2.116), dobimo

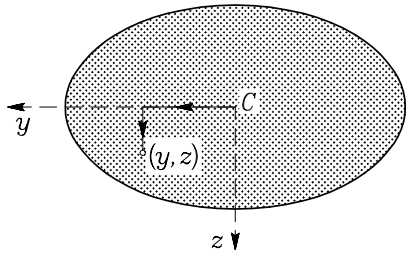
$$du_x = \frac{M_x}{G}\left(\left(\frac{-2\,z}{\pi\,a\,b^3(1-k^4)} + \frac{a^2+b^2}{\pi\,a^3\,b^3(1-k^4)}z\right)dy + \left(\frac{2\,y}{\pi\,a^3\,b(1-k^4)} - \frac{a^2+b^2}{\pi\,a^3\,b^3(1-k^4)}y\right)dz\right).$$

Po ureditvi sledi

$$du_x = \frac{M_x}{G}\frac{b^2-a^2}{\pi\,a^3\,b^3(1-k^4)}(z\,dy + y\,dz). \tag{2.117}$$

Enačbo (2.117) integriramo po pravilih za integriranje totalnega diferenciala od točke $C(0,0)$, do poljubne točke $T(y,z)$. Integracijska pot je poljubna. Vzemimo, da najprej integriramo v smeri osi y ($z=0$), nato pa v smeri vzporedno z osjo z (slika 2.18):

$$u_x(y,z) = u_x(0,0) + \frac{M_x}{G}\frac{b^2-a^2}{\pi\,a^3\,b^3(1-k^4)}\left(\int_0^y 0\,d\bar{y} + \int_0^z y\,d\bar{z}\right) = u_x(0,0) + \frac{M_x}{G}\frac{b^2-a^2}{\pi\,a^3\,b^3(1-k^4)}\,y\,z.$$

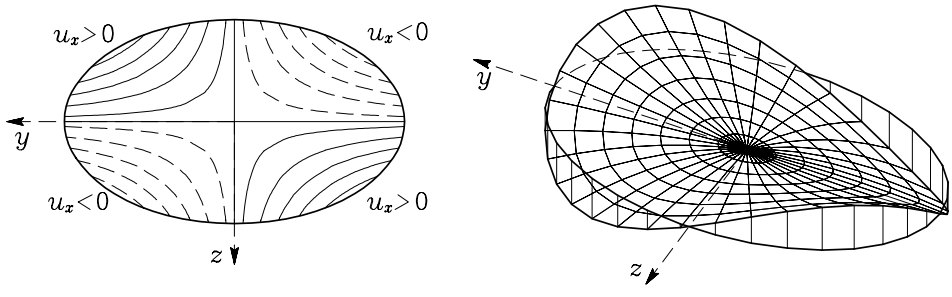


Slika 2.18: Pot integriranja od torzijskega središča do poljubne točke prereza

Za $u_x(0,0) = 0$ dobimo

$$u_x = \frac{M_x}{G} \frac{b^2 - a^2}{\pi\, a^3\, b^3 (1 - k^4)}\, y\, z. \tag{2.118}$$

Pomik $u_x(y,z)$ določa deplanacijo (izbočitev in vbočitev) prečnega prereza. Na sliki 2.19 je za $a > b$ in $M_x > 0$ prikazana z izohipsami. To so hiperbole ($y = K/z$), katerih asimptoti sta osi y in z.



Slika 2.19: Deplanacija prečnega prereza ($a > b,\ M_x > 0$)

Ker sta koordinati y_C in z_C enaki nič, izračunamo pomika u_y in u_z iz (2.30) takole:

$$u_y = -\omega_x\, z, \quad u_z = \omega_x\, y. \tag{2.119}$$

Zasuka ω_y in ω_z dobimo iz (2.36), če upoštevamo (2.114) in (2.118)

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial z} - \alpha\, y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_x}{G}\frac{b^2 - a^2}{\pi\, a^3\, b^3 (1 - k^4)}\, y - \alpha\, y\right) = -\frac{M_x\, a^2\, y}{G\, \pi\, a^3\, b^3 (1 - k^4)},$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial y} + \alpha\, z\right) = \frac{1}{2}\left(-\alpha\, z - \frac{M_x}{G}\frac{b^2 - a^2}{\pi\, a^3\, b^3 (1 - k^4)}\, z\right) = -\frac{M_x\, b^2\, z}{G\, \pi\, a^3\, b^3 (1 - k^4)}.$$

Izpeljane enačbe veljajo tudi za prečni prerez v obliki **krožnega kolobarja**, če vzamemo, da je $a = b = r_z$. Iz enačbe (2.118) sledi, da se pri krožnem prerezu prečni prerez ne deformira ($u_x = 0$), ni deplanacije.

Iz enačbe (2.106) sledi izraz za napetostno funkcijo

$$\varphi = -\frac{1}{2}(y^2 + z^2 - r_z^2).$$

Iz enačbe (2.111) dobimo izraz za torzijski vztrajnostni moment I_x

$$I_x = \frac{\pi\, r_z^4}{2}\,(1 - k^4),$$

iz enačbe (2.112) strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz}

$$\sigma_{xy} = -\frac{2\,M_x}{\pi\, r_z^4(1-k^4)}\,z, \qquad \sigma_{xz} = \frac{2\,M_x}{\pi\, r_z^4(1-k^4)}\,y,$$

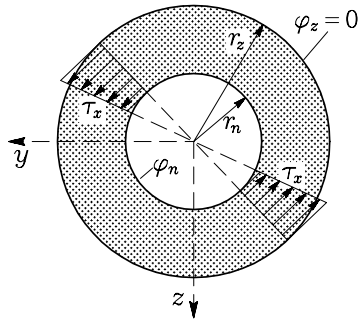
iz enačbe (2.113) rezultirajočo strižno napetost

$$\tau_x = \frac{2\,M_x}{\pi\, r_z^4(1-k^4)}\sqrt{y^2+z^2} \quad \rightarrow \quad \tau_{x,\max} = \frac{2\,M_x}{\pi\, r_z^3(1-k^4)} \tag{2.120}$$

in iz enačbe (2.114) izraz za specifični torzijski zasuk α

$$\alpha = \frac{M_x}{G}\,\frac{2}{\pi\, r_z^4(1-k^4)}.$$

V enačbah za prečni prerez v obliki kolobarja je $k = r_n/r_z$, kjer je r_z polmer zunanje krožnice, r_n pa polmer notranje krožnice kolobarja. Na sliki 2.20 prikazujemo potek rezultirajoče strižne napetosti.

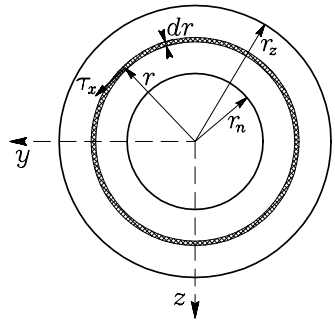


Slika 2.20: Rezultirajoča strižna napetost se linearno spreminja z oddaljenostjo od središča

Rezultirajočo strižno napetost τ_x za prečni prerez v obliki kolobarja (slika 2.21) določa enačba (2.120). Taka napetost povzroči torzijski moment M_x

$$M_x = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \tau_x\, r\, 2\,\pi\, r\, dr = 2\,\pi \int\limits_{r_n}^{r_z} \tau_x\, r^2\, dr = 2\,\pi\, \frac{2\,M_x}{\pi\, r_z^4(1-k^4)} \int\limits_{r_n}^{r_z} r^3\, dr.$$

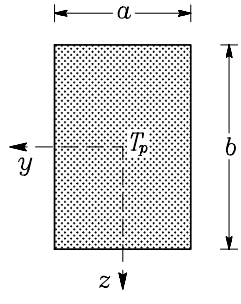
Čim večji je r, tem večja sta τ_x in r ter tem večji torzijski moment M_x prečni prerez prevzame. Največji del torzijskega momenta prevzame del prečnega prereza, ki je čim bolj oddaljen od torzijskega središča C. Iz stališča prihranka materiala so za prevzem enakomerne torzije primerni nosilci s tankostenskimi prečnimi prerezi (razdelek 2.4). Izkaže se, da so za prevzem torzijskega momenta nosilci z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom primernejši od nosilcev z odprtim prečnim prerezom (primer 2.2).



Slika 2.21: Rezultanta strižne napetosti τ_x za prečni prerez v obliki kolobarja

2.3.2 Analitična rešitev za pravokotno obliko prečnega prereza

Rešitev enačb enakomerne torzije prečnega prereza **pravokotne oblike** (slika 2.22) velikosti a in b ($b \geq a$) lahko zapišemo v obliki neskončne vrste.†



Slika 2.22: Prečni prerez pravokotne oblike

Napetostno funkcijo φ zapišemo z neskončno vrsto †

$$\varphi(y,z) = \frac{a^2}{4} - y^2 - \frac{8\,a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\frac{\cosh\left(\lambda_n z\right)}{\cosh\left(\lambda_n\, b/2\right)}\cos(\lambda_n y), \tag{2.121}$$

kjer oznaka λ_n pomeni

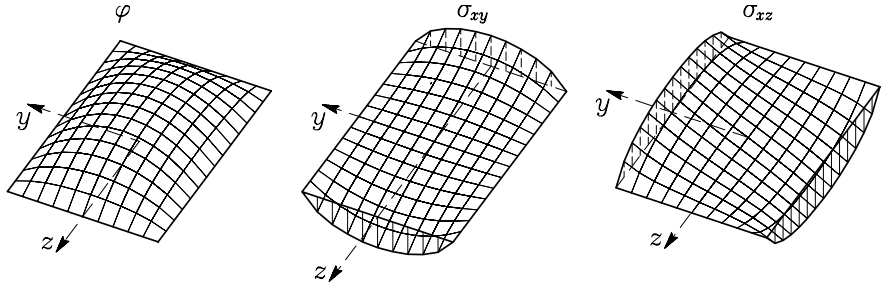
$$\lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{a}.$$

† V.V. Novozhilov, Theory of Elasticity, str. 316–320, Pergamon Press, Oxford, 1961.

Strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} izračunamo iz enačbe (2.95) †

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= -\frac{M_x}{I_x}\frac{8\,a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{\sinh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n\, b/2)}\cos(\lambda_n y),\\ \sigma_{xz} &= \frac{M_x}{I_x}\left(2\,y-\frac{8\,a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{\cosh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n\, b/2)}\sin(\lambda_n y)\right).\end{aligned} \tag{2.122}$$

Graf napetostne funkcije φ in strižnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz} v ravnini y, z prikazujemo na sliki 2.23.



Slika 2.23: Napetostna funkcija $\varphi(y,z)$ in strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz}

Torzijski vztrajnostni moment I_x izračunamo po enačbi (2.109) †

$$I_x = \frac{a^3\,b}{3} - \frac{64}{\pi^5}a^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tanh(\lambda_n\, b/2)}{(2n+1)^5}. \tag{2.123}$$

Pomik u_x zaradi izbočitve prereza izračunamo po enačbi (2.33) oziroma (2.116) †

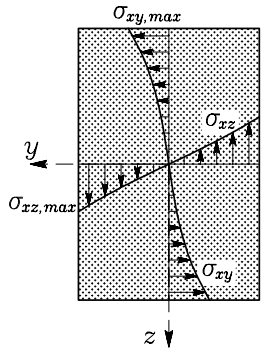
$$u_x = \frac{M_x}{GI_x}\left(y\,z-\frac{8\,a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\frac{\sinh(\lambda_n z)}{\cosh(\lambda_n\, b/2)}\sin(\lambda_n y)\right). \tag{2.124}$$

Ker vsota v izrazu za torzijski vztrajnostni moment I_x hitro konvergira, večkrat upoštevamo le prvi člen vsote

$$I_x = \frac{a^3\,b}{3} - \frac{64\,a^4}{\pi^5}\tanh\left(\frac{\pi\,b}{2\,a}\right).$$

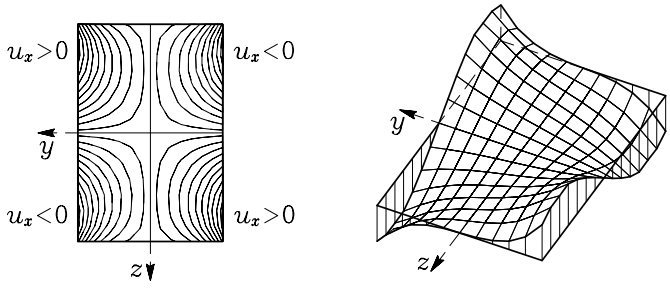
Na sliki 2.24 prikazujemo potek strižne napetosti σ_{xy} vzdolž osi $y = 0$ ter potek strižne napetosti σ_{xz} vzdolž osi $z = 0$.

† V.V. Novozhilov, Theory of Elasticity, str. 316–320, Pergamon Press, Oxford, 1961.
I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw–Hill Book Company, New York, 1956.



Slika 2.24: Strižne napetosti vzdolž koordinatnih osi

Črte enakih pomikov za prečni prerez pravokotne oblike ter $M_x > 0$ prikazujemo na sliki 2.25.



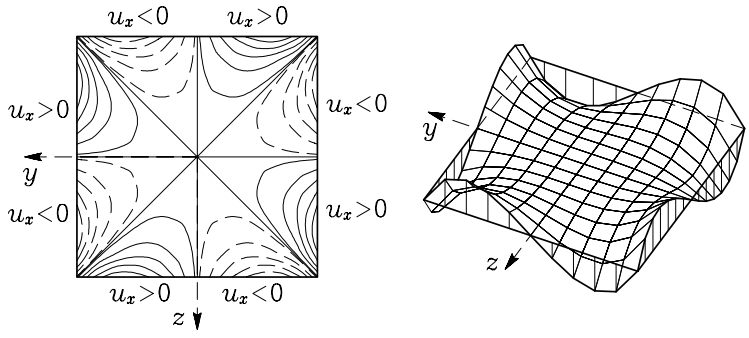
Slika 2.25: Izbočitev prečnega prereza pravokotne oblike

Črte enakih pomikov za prečni prerez kvadratne oblike ter $M_x > 0$ prikazujemo na sliki 2.26.

Zaradi obširnosti analitičnih izrazov za φ, σ_{xy}, σ_{xz}, I_x in u_x za **pravokotni prerez** v praksi velikokrat računamo te količine z vrednostmi, ki so za različna razmerja višine in širine pravokotnika podane v preglednicah. V preglednici 2.1 sta podana koeficienta k_1 in k_2 za račun torzijskega vztrajnostnega momenta I_x in največje strižne napetosti τ_{max} †

$$b \geq a : \qquad I_x = k_1\, a^3\, b, \qquad \tau_{max} = \frac{M_x}{k_2\, a^2\, b}.$$

† S. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, Third Edition, str. 312, McGraw–Hill, New York, 1970.



Slika 2.26: Izbočitev prečnega prereza kvadratne oblike

Tabela 2.1: Koeficienti za račun τ_{max} in I_x za pravokotni prečni prerez nosilca

b/a	1	1.2	1.5	2	2.5	3	4	5	10	∞
k_1	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333
k_2	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.292	0.312	0.333

Iz preglednice vidimo, da je I_x kvadrata enak

$$I_x = 0.141\, a^4.$$

Največja strižna napetost pa je

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{0.208\, a^3}.$$

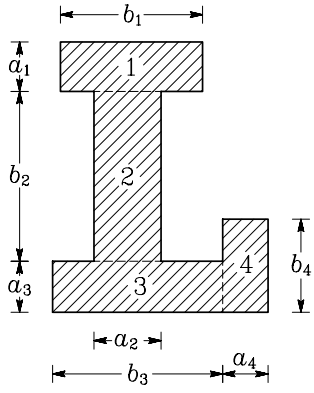
Če je b dosti večji od a ($b/a \to \infty$) velja

$$I_x = \frac{a^3\, b}{3}, \qquad \tau_{max} = \frac{3\, M_x}{a^2\, b},$$

kar v nadaljevanju izpeljemo za tankostenske prereze (enačba (2.165)).

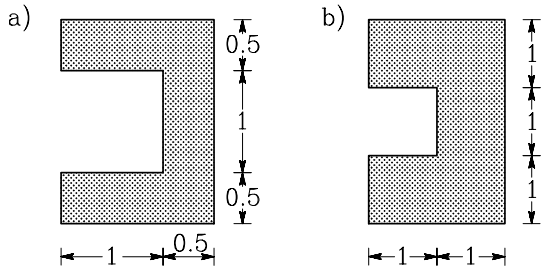
Torzijski vztrajnostni moment za prečni prerez, ki je sestavljen iz n pravokotnikov (slika 2.27), včasih računamo po naslednjem približnem postopku (vrednosti koeficienta k_1 podajamo v preglednici 2.1):

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} k_{1i}\, a_i^3\, b_i. \tag{2.125}$$



Slika 2.27: Prečni prerez je sestavljen iz štirih pravokotnih delov

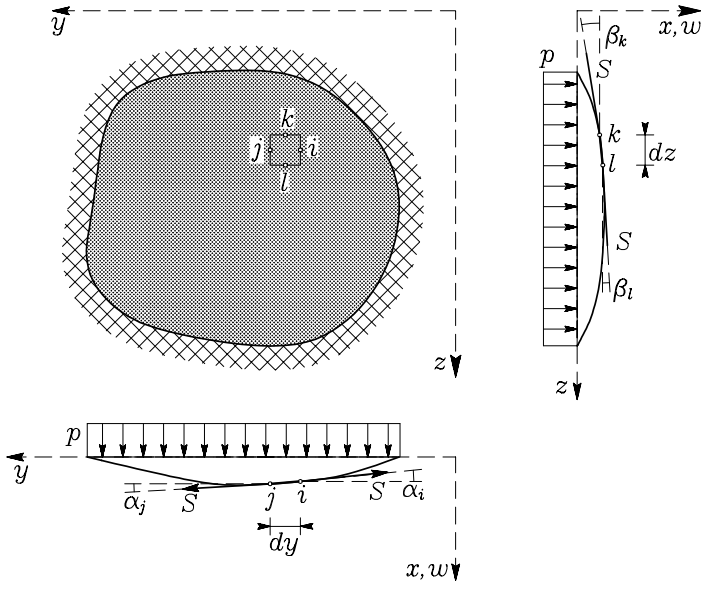
Poudariti moramo, da je enačba (2.125) zelo približna. Za primer na sliki 2.28a je točna vrednost torzijskega vztrajnostnega momenta I_x enaka 0.162, po enačbi (2.125) pa dobimo vrednost 0.127, kar je za 21.6% prenizka vrednost. Za primer na sliki 2.28b pa je točna vrednost enaka 1.587, po enačbi (2.125) pa dobimo 1.057, kar je za 33.4% prenizka vrednost. Razlika je manjša, če so prerezi tanjši oziroma je razmerje b/a večje. Točno rešitev smo izračunali po diferenčni metodi (glej razdelek 2.6).



Slika 2.28: Geometrijski podatki dveh prečnih prerezov

2.3.3 Membranska analogija

Tanko membrano napnemo na okvir, ki ima obliko prečnega prereza nosilca in jo v smeri pravokotno na membrano obtežimo z enakomernim tlakom p. Če se omejimo na majhne pomike w ter predpostavimo, da je membrana napeta z enako silo S v vseh smereh, ti pomiki zadoščajo diferencialni enačbi in robnim pogojem, ki imajo enako obliko kot diferencialna enačba in robni pogoji za račun napetostne funkcije φ pri enakomerni torziji. To pokažemo, če zapišemo ravnotežno enačbo za elementarni del membrane velikosti $dy\,dz$, na katerega deluje enakomerni tlak p (slika 2.29) in upoštevamo, da je membrana enakomerno napeta v vseh smereh.



Slika 2.29: Enakomerni tlak p povzroči pomike membrane w

Ravnotežna enačba za elementarni del membrane za smer x:

$$
\begin{aligned}
& S\,dz\,\sin\alpha_j - S\,dz\,\sin\alpha_i + S\,dy\,\sin\beta_l - S\,dy\,\sin\beta_k + p\,dy\,dz \approx \\
& \approx S\,dz\,\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_j - S\,dz\,\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_i + S\,dy\,\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_l - S\,dy\,\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_k + p\,dy\,dz \approx \\
& \approx S\,dz\,\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_i + \frac{\partial}{\partial y}\left(S\,dz\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_i\right)dy - S\,dz\,\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_i + \\
& + S\,dy\,\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_k + \frac{\partial}{\partial z}\left(S\,dy\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_k\right)dz - S\,dy\,\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_k + p\,dy\,dz = \\
& = S\,dz\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dy + S\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}dz + p\,dy\,dz = 0.
\end{aligned}
$$

Po krajšanju z $dy\,dz$ sledi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{S}. \tag{2.126}$$

Če izrazimo pomik membrane w s tlakom p, natezno silo v membrani S in z napetostno funkcijo φ takole:

$$w = \frac{p\,\varphi}{2\,S},$$

dobi enačba (2.126) enako obliko, kot v primeru enakomerne torzije

$$\frac{p}{2\,S}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{p}{2\,S}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{p}{S} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -2. \tag{2.127}$$

Tudi strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} izrazimo z odvodoma pomika w membrane

$$\sigma_{xy} = \alpha\, G\, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha\, G \frac{2\, S}{p} \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \sigma_{xz} = -\alpha\, G\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha\, G \frac{2\, S}{p} \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2.128}$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x je premosorazmeren prostornini, ki jo določajo pomiki membrane

$$I_x = 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x = 2 \frac{2\, S}{p} \int\limits_{\mathscr{A}_x} w\, dA_x = \frac{4\, S}{p} \int\limits_{\mathscr{A}_x} w\, dA_x. \tag{2.129}$$

Če bi membrano iz gume napeli na okvir, ki ima obliko prečnega prereza nosilca in jo obtežili z enakomernim pritiskom p, ter izmerili velikost natezne membranske sile S, pomike membrane w in odvoda pomika w po y in w po z, bi lahko izračunali I_x po enačbi (2.129). Nato za izbrani torzijski moment M_x izračunamo specifični torzijski zasuk α iz enačbe $\alpha = M_x/(G\, I_x)$. Strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} izračunamo iz (2.128).

2.3.4 Zveza med izbočitveno in napetostno funkcijo

Iz primerjave med izrazi (2.45) in (2.66) sledi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (z - z_C), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (y - y_C). \tag{2.130}$$

Izberemo poljubno točko $P(y_P, z_P)$ in (2.130) zapišemo takole:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (z - z_P) + (z_P - z_C) = \frac{\partial \Phi_P}{\partial y} + (z_P - z_C), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (y - y_P) - (y_P - y_C) = \frac{\partial \Phi_P}{\partial z} - (y_P - y_C) \end{aligned} \tag{2.131}$$

kjer je

$$\frac{\partial \Phi_P}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (z - z_P), \qquad \frac{\partial \Phi_P}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - (y - y_P). \tag{2.132}$$

Totalni diferencial izbočitvene funkcije $\Phi(y, z)$ zapišemo z upoštevanjem (2.131) takole:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dz = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz + (z - z_P)\, dy + (z_P - z_C)\, dy - (y - y_P)\, dz - (y_P - y_C)\, dz \end{aligned} \tag{2.133}$$

in integriramo od točke $T_0(y_0, z_0)$ do točke $T(y, z)$

$$\Phi = \Phi_0 + \int\limits_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz \right) + \int\limits_{T_0}^{T} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right) + \int\limits_{T_0}^{T} (z_P - z_C)\, dy - \int\limits_{T_0}^{T} (y_P - y_C)\, dz. \tag{2.134}$$

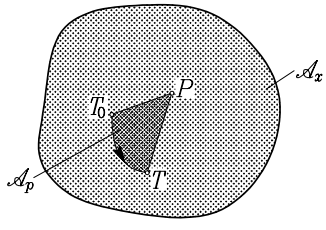
Uporabimo oznako Φ_φ

$$\Phi_\varphi = \int\limits_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz \right) \tag{2.135}$$

in upoštevamo, da je

$$\int\limits_{T_0}^{T} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right) = -2\, A_P, \tag{2.136}$$

kjer z A_P označimo ploščino ploskve $\mathscr{A}_P$, ki jo določajo krivulja od T_0 do T, ter premici $\overline{TP}$ in $\overline{PT_0}$ (slika 2.30).



Slika 2.30: Ploščina A_P

Tako dobimo

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_\varphi - 2\, A_P + (z_P - z_C)\,(y - y_0) - (y_P - y_C)\,(z - z_0). \tag{2.137}$$

Če uporabimo oznake

$$\Phi_P = \int\limits_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz \right) - 2\, A_P = \Phi_\varphi - 2\, A_P, \tag{2.138}$$

$$A = z_P - z_C, \quad B = y_P - y_C, \quad c = -(z_P - z_C)\, y_0 + (y_P - y_C)\, z_0, \tag{2.139}$$

zapišemo izraz (2.137) v obliki

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_P + A\, y - B\, z + c. \tag{2.140}$$

Funkcija Φ_P je pomožna izbočitvena funkcija. Dokažimo enačbo (2.136)! Ker je vrednost integralov

$$\int\limits_{T}^{P} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right), \quad \int\limits_{P}^{T_0} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right) \tag{2.141}$$

enaka nič, lahko drugi integral v 2.134 zapišemo takole:

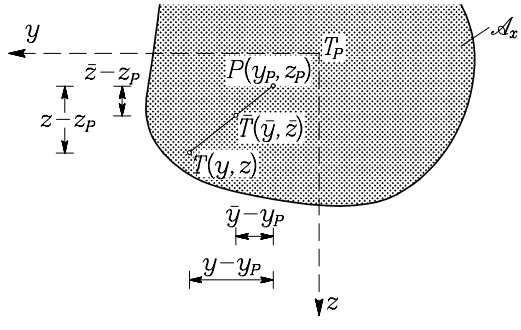
$$\int_{T_0}^{T} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right) = \int_{T_0}^{T} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right) + \int_{T}^{P} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right) + \int_{P}^{T_0} \left((z - z_P)\, dy - (y - y_P)\, dz \right). \tag{2.142}$$

Da je prvi izmed integralov (2.141) enak nič pokažemo, če y in z označimo z $\bar{y}$ in $\bar{z}$

$$\int_{T}^{P} \left((\bar{z} - z_P)\, d\bar{y} - (\bar{y} - y_P)\, d\bar{z} \right) \tag{2.143}$$

ter upoštevamo, da je (glej sliko 2.31)

$$\bar{z} = \frac{z - z_P}{y - y_P} (\bar{y} - y_P) + z_P, \quad d\bar{z} = \frac{z - z_P}{y - y_P}\, d\bar{y}. \tag{2.144}$$



Slika 2.31: Integral vzdolž premice $\overline{TP}$

Izraz (2.144) vstavimo v (2.143) ter integriramo (y in z sta konstanti)

$$\int_{T}^{P} \left[(\bar{z} - z_P)\, d\bar{y} - (\bar{y} - y_P)\, d\bar{z} \right] =$$

$$= \int_{T}^{P} \left(\left(\frac{z - z_P}{y - y_P} (\bar{y} - y_P) + z_P \right) - z_P \right) d\bar{y} - \int_{T}^{P} (\bar{y} - y_P) \frac{z - z_P}{y - y_P}\, d\bar{y} =$$

$$= \left(\frac{z - z_P}{y - y_P} \frac{\bar{y}^2}{2} - y_P \frac{z - z_P}{y - y_P} \bar{y} + z_P \bar{y} - z_P \bar{y} \right) \Bigg|_{y}^{y_P} + \left(-\frac{z - z_P}{y - y_P} \frac{\bar{y}^2}{2} + y_P \frac{z - z_P}{y - y_P} \bar{y} \right) \Bigg|_{y}^{y_P} = 0.$$

Na enak način pokažemo, da je drugi izmed integralov (2.141) enak nič. Če v Greenovem integralnem izreku (2.47)

$$\int\limits_{\mathscr{C}_x} (\,P_y\,dy + P_z\,dz) = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}\right) dA$$

upoštevamo, da je $P_y = (z - z_P)$ in $P_z = -(y - y_P)$, zapišemo (2.142) takole:

$$\int\limits_{T_0}^{T} [\,(z - z_P)\,dy - (y - y_P)\,dz] = \int\limits_{\mathscr{A}_P} (-1 - 1)\,dA = -2\,A_P. \tag{2.145}$$

Pomik u_x zapišemo takole (enačba (2.41)):

$$u_x - u_{x0} = \alpha\,(\Phi - \Phi_0). \tag{2.146}$$

Z u_{x0} je opisan premik nosilca v smeri osi x kot togega telesa. Izraz $u_x - u_{x0}$ predstavlja pomik v smeri osi x zaradi deformiranja nosilca (relativno glede na točko T_0). Ta pomik označimo z $\bar{u}_x$. Če upoštevamo (2.140) v (2.146), zapišemo pomik $\bar{u}_x$ takole:

$$\bar{u}_x = u_x - u_{x0} = \alpha\,(\Phi_P + A\,y - B\,z + c) = \alpha\,\Phi_P + \alpha\,A\,y - \alpha\,B\,z + \alpha\,c. \tag{2.147}$$

Izraze (2.231) za torzijsko središče v razdelku 2.6.2 zapišemo s pomikom $\bar{u}_x$ zaradi deformiranja nosilca

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} \bar{u}_x\,dA_x = 0, \qquad \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\,\bar{u}_x\,dA_x = 0, \qquad \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\,\bar{u}_x\,dA_x = 0. \tag{2.148}$$

V enačbe (2.148) vstavimo izraz (2.147)

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathscr{A}_x} (\alpha\,\Phi_P + \alpha\,A\,y - \alpha\,B\,z + \alpha\,c)\,dA_x = 0,\\ &\int\limits_{\mathscr{A}_x} y\,(\alpha\,\Phi_P + \alpha\,A\,y - \alpha\,B\,z + \alpha\,c)\,dA_x = 0,\\ &\int\limits_{\mathscr{A}_x} z\,(\alpha\,\Phi_P + \alpha\,A\,y - \alpha\,B\,z + \alpha\,c)\,dA_x = 0 \end{aligned} \tag{2.149}$$

in upoštevamo, da sta osi y in z v težišču prečnega prereza $\mathscr{A}_x$. Tako dobimo iz prve izmed enačb (2.149) konstanto c

$$c = -\frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \Phi_P\,dA_x, \tag{2.150}$$

iz druge in tretje izmed enačb (2.149) pa enačbi

$$A\,I_z + B\,I_{yz} + \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\,\Phi_P\,dA_x = 0, \qquad -A\,I_{yz} - B\,I_y + \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\,\Phi_P\,dA_x = 0. \tag{2.151}$$

Če vpeljemo oznake

$$S_{\Phi P} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \Phi_P \, dA_x, \qquad I_{\Phi P z} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y \, \Phi_P \, dA_x, \qquad I_{\Phi P y} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z \, \Phi_P \, dA_x \tag{2.152}$$

zapišemo konstanto c iz enačbe (2.150)

$$c = -\frac{S_{\Phi P}}{A_x}, \tag{2.153}$$

in izbočitveno funkcijo Φ (enačba (2.140))

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_P + A\,y - B\,z - \frac{S_{\Phi P}}{A_x}. \tag{2.154}$$

Enačbi (2.151) zapišemo z upoštevanjem enačbe (2.152)

$$A\,I_z + B\,I_{yz} = -I_{\Phi P z}, \quad B\,I_y + A\,I_{yz} = I_{\Phi P y}. \tag{2.155}$$

Rešitev sistema enačb (2.155) je

$$A = -\frac{I_y\,I_{\Phi P z} + I_{yz}\,I_{\Phi P y}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}, \qquad B = \frac{I_z\,I_{\Phi P y} + I_{yz}\,I_{\Phi P z}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}. \tag{2.156}$$

Če (2.156) vstavimo v (2.139), sledi

$$\boxed{y_C = y_P - \frac{I_z\,I_{\Phi P y} + I_{yz}\,I_{\Phi P z}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}, \qquad z_C = z_P + \frac{I_y\,I_{\Phi P z} + I_{yz}\,I_{\Phi P y}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}.} \tag{2.157}$$

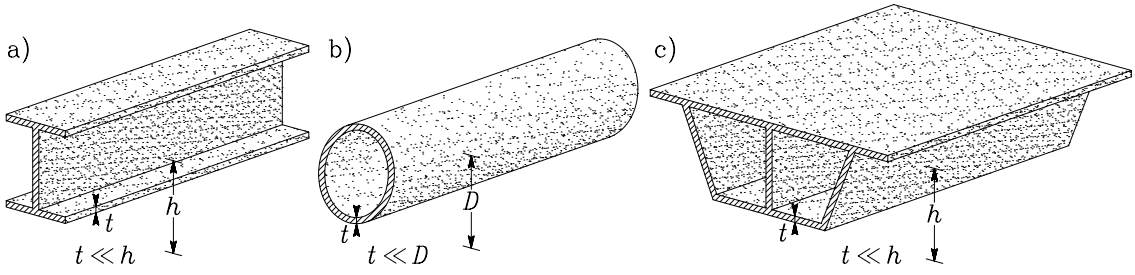
Izbočitveno funkcijo Φ (enačba (2.154)) zapišemo, če upoštevamo (2.157) in (2.153), takole:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_P - \frac{I_y\,I_{\Phi P z} + I_{yz}\,I_{\Phi P y}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,y - \frac{I_z\,I_{\Phi P y} + I_{yz}\,I_{\Phi P z}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,z - \frac{S_{\Phi P}}{A_x}. \tag{2.158}$$

Pomik $u_x - u_{x0}$ izračunamo z enačbo (2.146). Specifični torzijski zasuk α izračunamo iz enačbe (2.54), torzijski vztrajnostni moment I_x pa z enačbo (2.53) ali (2.93). Enačbe (2.157) in (2.158) bomo uporabili pri nosilcih s tankostenskim prečnim prerezom, uporabimo pa jih lahko za poljuben prerez nosilca.

2.4 Enakomerna torzija nosilcev s tankostenskim prerezom

Inženirske konstrukcije so velikokrat sestavljene iz nosilcev s prečnim prerezom, ki ima debelino t stene prečnega prereza veliko manjšo od širine ali višine prečnega prereza (slika 2.32). To so **nosilci s tankostenskim prečnim prerezom**.



Slika 2.32: Nekaj primerov nosilcev s tankostenskim prerezom:
a) I prerez b) cev c) škatlasti prerez

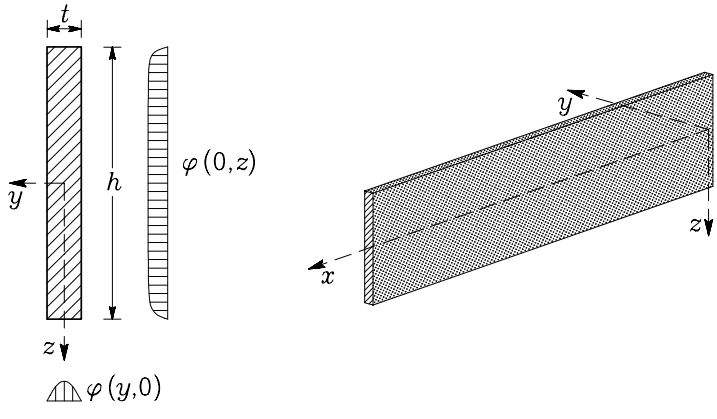
Ker se enačbe enakomerne torzije za take nosilce precej poenostavijo, jih v nadaljevanju obravnavamo posebej. Pri tem ločeno obravnavamo nosilce z odprtim tankostenskim prečnim prerezom in nosilce z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom. I prerez na sliki 2.32 je primer nosilca z odprtim tankostenskim prečnim prerezom, cev in škatlasti prerez sta primera nosilca z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom.

2.4.1 Nosilci z odprtim tankostenskim prečnim prerezom

Posebej obravnavamo ozek pravokotni prerez in odprti tankostenski prerez poljubne oblike.

Ozek pravokotni prerez

Na sliki 2.33 prikazujemo ozek pravokotni prečni prerez širine t in višine h nosilca, za katerega velja, da je



Slika 2.33: Ozek pravokotni prerez ter potek napetostne funkcije φ

Prikazujemo tudi potek napetostne funkcije φ vzdolž osi y in z. Obliko napetostne funkcije določimo z analitično rešitvijo za pravokotni prečni prerez. Enaki zaključki sledijo z upoštevanjem membranske

analogije. Če membrano napnemo na okvir v obliki ozkega pravokotnika in na membrano delujemo z enakomernim pritiskom, ima deformirana membrana obliko, kot jo prikazuje slika 2.33. Iz slike sledi, da je pogoj

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx 0 \tag{2.159}$$

izpolnjen v vseh točkah pravokotnika razen v neposredni bližini robov $z = \pm h/2$. Ob upoštevanju (2.159) diferencialna enačba za določanje napetostne funkcije (2.85) dobi obliko

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + 2 = 0. \tag{2.160}$$

Po dvakratni integraciji

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = -2 \quad \rightarrow \quad \int d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = -2\int dy \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dy} = -2\,y + C_1$$
$$\int d\varphi = -2\int y\,dy + C_1\int dy$$

dobimo izraz za napetostno funkcijo φ

$$\varphi = -y^2 + C_1\,y + C_2. \tag{2.161}$$

Z upoštevanjem robnih pogojev

$$y = \pm\frac{1}{2}t: \qquad \varphi_z = 0$$

izračunamo konstanti C_1 in C_2

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{t^2}{4}.$$

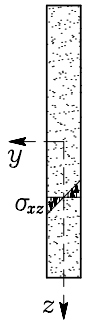
Napetostna funkcija φ je torej kvadratna funkcija koordinate v prečni smeri

$$\varphi = \frac{t^2}{4} - y^2. \tag{2.162}$$

Če enačbo (2.162) uporabimo v izrazih za račun napetosti (2.66) oziroma (2.95), dobimo

$$\sigma_{xy} = \alpha\,G\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \qquad \sigma_{xz} = -\alpha\,G\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{M_x}{I_x}\,2\,y. \tag{2.163}$$

Iz enačbe (2.163) sledi, da se strižna napetost σ_{xz} v smeri osi y linearno spreminja (slika 2.34).



Slika 2.34: Potek strižne napetosti σ_{xz} v ozkem pravokotniku vzdolž osi y

Napetost σ_{xz} ima ekstremni vrednosti vzdolž robov $y = \pm t/2$, vzdolž srednje črte ($y = 0$) pa je enaka nič

$$\sigma_{xz,ekst} = \pm \frac{M_x}{I_x}\, t. \tag{2.164}$$

Pri računu torzijskega vztrajnostnega momenta I_x upoštevamo, da se napetostna funkcija φ spreminja le z y. Zato lahko prevedemo integral po prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$ na linijski integral vzdolž koordinatne osi y. Upoštevamo torej, da je $dA_x = h\, dy$. Zato je

$$I_x = 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x = 2\, h \int\limits_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{t^2}{4} - y^2 \right) dy = 2\, h \left(\frac{t^2}{4} y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-t/2}^{t/2} =$$
$$= 2\, h \left(\left(\frac{t^2}{4} \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \frac{t^3}{8} \right) - \left(-\frac{t^2}{4} \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \frac{t^3}{8} \right) \right) = 2\, h\, t^3\, \frac{4}{24} = \frac{h\, t^3}{3}.$$

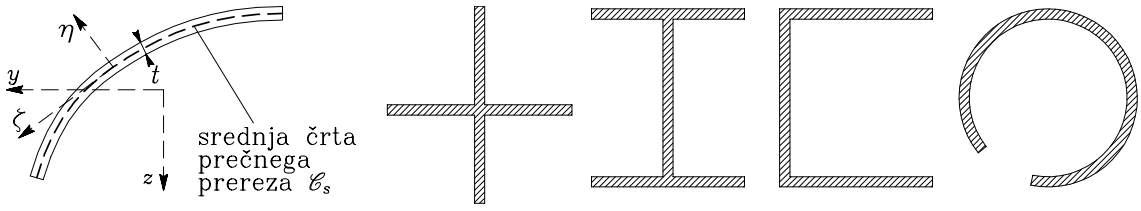
Torzijski vztrajnostni moment I_x ter strižno napetost $\sigma_{xz,\mathrm{ekst}}$ ozkega pravokotnika sta torej

$$I_x = \frac{h\, t^3}{3}, \qquad \sigma_{xz,\mathrm{ekst}} = \frac{3\, M_x}{h\, t^2}. \tag{2.165}$$

Odprti tankostenski prerez poljubne oblike

Prečni prerez odprtega tankostenskega nosilca opišemo s **srednjo črto** $\mathscr{C}_s$ stene in z debelino t stene nosilca. Lega točk srednje črte prečnega prereza je določena z ločno koordinato ζ. Koordinata η je pravokotna na srednjo črto prečnega prereza. S C_s je označena dolžina srednje črte tankostenskega prečnega prereza. Debelina stene t tankostenskega prereza je veliko manjša od dolžine srednje črte C_s (slika 2.35)

$$t \ll C_s.$$



Slika 2.35: Naravni koordinatni sistem in nekaj značilnih tipov odprtih tankostenskih prerezov

Če je debelina stene t tankostenskega prereza konstantna ali pa se le malo spreminja, se napetostna funkcija φ spreminja le v odvisnosti od koordinate η

$$t \approx \text{konst.} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \varphi(\eta). \tag{2.166}$$

Ta pogoj ni izpolnjen le v neposredni bližini robov $\zeta = 0$ in $\zeta = C_s$. Najprej zapišimo Poissonovo diferencialno enačbo (2.85)

$$\mathscr{A}_x : \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 = 0$$

v **naravnem koordinatnem sistemu**. Pri tem upoštevamo, da je

$$y = y(\eta, \zeta), \qquad z = z(\eta, \zeta). \tag{2.167}$$

Prva odvoda napetostne funkcije φ po y in po z sta:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}, \tag{2.168}$$

druga odvoda napetostne funkcije φ po y in po z pa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Če upoštevamo zveze

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta\,\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right), \\
\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \\
&= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta\,\partial \zeta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta\,\partial\zeta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)$$

ter enačbo (2.166), dobimo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2=\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\left(\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2\right)+$$
$$+\frac{d\varphi}{d\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\eta}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\eta}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial y}{\partial\zeta}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)\right)+2=0.$$

Upoštevamo enačbe (2.70) in (2.77)

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=e_{\eta y},\quad \frac{\partial\eta}{\partial z}=e_{\eta z},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}=e_{\zeta y}=-e_{\eta z},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial z}=e_{\zeta z}=e_{\eta y}.$$

ter (2.74)

$$\frac{\partial y}{\partial\eta}=e_{\eta y},\qquad \frac{\partial y}{\partial\zeta}=e_{\zeta y},\qquad \frac{\partial z}{\partial\eta}=e_{\eta z},\qquad \frac{\partial z}{\partial\zeta}=e_{\zeta z}$$

in sledi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2=\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\left(e_{\eta y}^2+e_{\eta z}^2\right)+\frac{d\varphi}{d\eta}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\left(e_{\eta y}^2+e_{\eta z}^2\right)+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\left(e_{\zeta y}^2+e_{\zeta z}^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\eta}{\partial y\,\partial z}\left(e_{\eta y}\,e_{\eta z}-e_{\eta z}\,e_{\eta y}+e_{\eta z}\,e_{\eta y}-e_{\eta y}\,e_{\eta z}\right)\right)+2=0.$$

Ker je $e_{\eta y}^2+e_{\eta z}^2=1$ in $e_{\zeta y}^2+e_{\zeta z}^2=1$, sledi

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\frac{d\varphi}{d\eta}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)+2=0.}\tag{2.169}$$

Tudi strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} zapišimo glede na naravni koordinatni sistem η, ζ:

$$\sigma_{xy}=\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{M_x}{I_x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right),$$
$$\sigma_{xz}=-\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{M_x}{I_x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right).$$

Upoštevamo še enačbo (2.166) in dobimo

$$\sigma_{xy} = \frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Iz prve izmed enačb (2.97)b† in ob upoštevanju (2.6) zapišemo strižno deformacijo $\sigma_{\xi\eta}$

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{xy}\, e_{\xi x}\, e_{\eta y} + \sigma_{xz}\, e_{\xi x}\, e_{\eta z} + \sigma_{xy}\, e_{\xi y}\, e_{\eta x} + \sigma_{xz}\, e_{\xi z}\, e_{\eta x}.$$

Smerni kosinusi so

$$e_{\xi x} = 1, \qquad e_{\xi y} = 0, \qquad e_{\xi z} = 0 \tag{2.170}$$

in zato izraz za strižno napetost $\sigma_{\xi\eta}$ zapišemo takole:

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{xy}\, e_{\eta y} + \sigma_{xz}\, e_{\eta z} = \frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(e_{\eta y}\, e_{\eta z} - e_{\eta y}\, e_{\eta z}\right) = 0.$$

Podobno velja za $\sigma_{\xi\zeta}$ (tretja izmed enačb (2.97)b v †)

$$\sigma_{\xi\zeta} = \sigma_{xy}\, e_{\xi x}\, e_{\zeta y} + \sigma_{xz}\, e_{\xi x}\, e_{\zeta z} + \sigma_{xy}\, e_{\xi y}\, e_{\zeta x} + \sigma_{xz}\, e_{\xi z}\, e_{\zeta x}.$$

Ob upoštevanju vrednosti za smerne kosinuse (2.170) in enačbe (2.70) dobimo

$$\sigma_{\xi\zeta} = \sigma_{xy}\, e_{\zeta y} + \sigma_{xz}\, e_{\zeta z} = -\sigma_{xy}\, e_{\eta z} + \sigma_{xz}\, e_{\eta y} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left(e_{\eta y}^2 + e_{\eta z}^2\right) = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}.$$

Dobili smo

$$\sigma_{\xi\eta} = 0, \qquad \sigma_{\xi\zeta} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}. \tag{2.171}$$

V primeru, da srednjo črto prečnega prereza nadomestimo s črto poligonalne oblike, sta odvoda $\partial^2\eta/\partial y^2$ in $\partial^2\eta/\partial z^2$ enaka nič in lahko diferencialno enačbo (2.169) za določanje napetostne funkcije φ zapišemo takole:

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 2 = 0. \tag{2.172}$$

Po dvakratni integraciji in upoštevanju robnih pogojev $\eta = \pm t/2 \;\rightarrow\; \varphi_z = 0$ dobimo izraz za napetostno funkcijo φ

$$\varphi = \frac{t^2}{4} - \eta^2. \tag{2.173}$$

Iz (2.171) in (2.173) izrazimo strižni napetosti $\sigma_{x\eta}$ in $\sigma_{x\zeta}$ takole:

$$\sigma_{\xi\eta} = 0, \qquad \sigma_{\xi\zeta} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{M_x}{I_x}\,2\,\eta. \tag{2.174}$$

† M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1998.