Ekstremna vrednost napetosti $\sigma_{\xi\zeta}$ nastopi vzdolž robov $\eta = \pm t/2$

$$\sigma_{\xi\zeta,\mathrm{ekst}} = \pm \frac{M_x}{I_x}\, t_{\max}. \tag{2.175}$$

Račun torzijskega vztrajnostnega momenta I_x

$$I_x = 2 \int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi \, dA_x = 2 \int\limits_0^{C_s} \left(\int\limits_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{t^2}{4} - \eta^2 \right) d\eta \right) d\zeta =$$

$$= 2 \int\limits_0^{C_s} \left(\frac{t^2}{4}\eta - \frac{\eta^3}{3} \right) \Bigg|_{-t/2}^{t/2} d\zeta = 2 \int\limits_0^{C_s} \left(\left(\frac{t^2}{4}\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\frac{t^3}{8} \right) - \left(-\frac{t^2}{4}\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\frac{t^3}{8} \right) \right) d\zeta = 2 \int\limits_0^{C_s} \frac{t^3}{6} d\zeta.$$

Torzijski vztrajnostni moment ozkega pravokotnika je torej

$$I_x = \int\limits_0^{C_s} \frac{t^3}{3}\, d\zeta. \tag{2.176}$$

Če je t konstanten vzdolž ζ, lahko zapišemo

$$I_x = \frac{t^3}{3} \int\limits_0^{C_s} d\zeta = \frac{t^3\, C_s}{3}.$$

V primeru tankostenskega prečnega prereza, ki je sestavljen iz ozkih pravokotnikov z dolžinami h_i in debelinami t_i, določimo torzijski vztrajnostni moment po enačbi (slika 2.36)

$$I_x = \sum_i \int\limits_0^{h_i} \frac{t_i^3}{3}\, d\zeta = \frac{1}{3} \sum_i t_i^3\, h_i. \tag{2.177}$$

V nadaljevanju pokažimo, da je za nosilce z odprtim tankostenskim prerezom Φ_φ iz enačbe (2.135) enak nič:

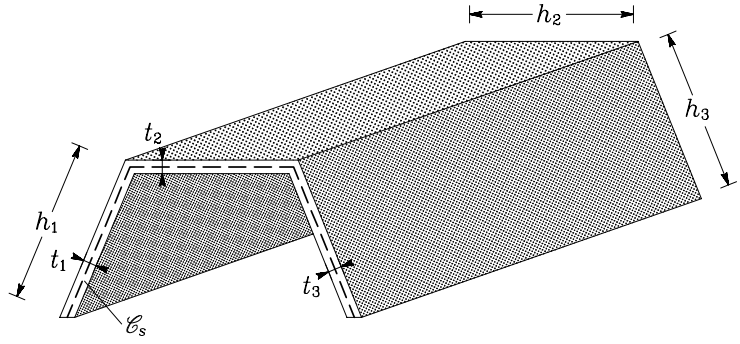
$$\Phi_\varphi = \int\limits_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz \right).$$

Z upoštevanjem enačb (2.168) in (2.166) zapišemo integrand z enačbo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dy - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dz = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\, dz. \tag{2.178}$$

Nosilec s tankostenskim prečnim prerezom obravnavamo s srednjo črto prečnega prereza, za katero velja, da je $d\eta = 0$. Če v (2.73) upoštevamo, da je $d\eta = 0$, dobimo

$$dy = e_{\zeta y}\, d\zeta, \qquad dz = e_{\zeta z}\, d\zeta.$$



Slika 2.36: Tankostenski prerez opišemo s srednjo črto $\mathscr{C}_s$ prečnega prereza in z debelino t stene nosilca

Ko upoštevamo še (2.70), dobimo

$$dy = -e_{\eta z}\, d\zeta, \qquad dz = e_{\eta y}\, d\zeta. \tag{2.179}$$

Ker je po enačbi (2.77)

$$e_{\eta z} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \qquad e_{\eta y} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

zapišemo (2.178) takole:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(e_{\eta z}\, e_{\eta z} + e_{\eta y}\, e_{\eta y})\, d\zeta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\, d\zeta.$$

Zato je

$$\Phi_\varphi = \int\limits_{T_0}^{T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dy - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz \right) = -\int\limits_{T_0}^{T} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\, d\zeta. \tag{2.180}$$

Ker nosilce s tankostenskim prečnim prerezom obravnavamo s srednjo črto prečnega prereza, iz (2.173) sledi

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = -2\,\eta|_{\eta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_\varphi = 0. \tag{2.181}$$

To pomeni, da pomožno izbočitveno funkcijo Φ_P iz enačbe (2.138) pri nosilcih z odprtim tankostenskim prečnim prerezom računamo z enačbo

$$\Phi_P = -2\, A_P. \tag{2.182}$$

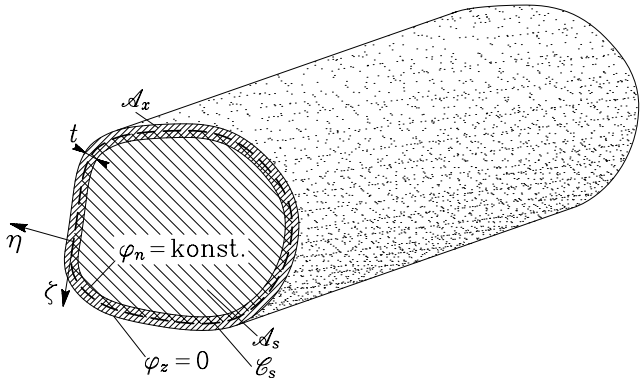
2.4.2 Nosilci z zaprtim tankostenskim prečnim prerezom

Posebej obravnavamo nosilce s tankostenskim prerezom z eno odprtino in nosilce s tankostenskim prerezom z več odprtinami.

Nosilec s tankostenskim prečnim prerezom z eno odprtino

Prečni prerez $\mathscr{A}_x$ nosilca s tankostenskim prečnim prerezom z odprtino opišemo s srednjo črto prečnega prereza $\mathscr{C}_s$ in z debelino stene t nosilca. Dolžino srednje črte označimo s C_s. Lego točk srednje črte prečnega prereza določa koordinata ζ. Koordinata η je pravokotna na srednjo črto prečnega prereza. Debelina stene t je veliko manjša od dolžine srednje črte C_s (slika 2.37)

$$t \ll C_s.$$



Slika 2.37: Tankostenski prerez z eno odprtino

Na osnovi membranske analogije lahko sklepamo: če je debelina stene t tankostenskega prereza konstantna ali če se le malo spreminja, se napetostna funkcija φ spreminja le s koordinato η

$$t \approx \text{konst.} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \approx 0. \tag{2.183}$$

Ob istih predpostavkah, kot pri nosilcu z odprtim tankostenskim prerezom, računamo napetostno funkcijo φ iz diferencialne enačbe

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 2 = 0. \tag{2.184}$$

Po dvakratni integraciji dobimo

$$\varphi = -\eta^2 + C_1\,\eta + C_2.$$

Vrednosti konstant C_1 in C_2 izračunamo iz robnih pogojev, pri čemer izberemo, da je φ na zunanjem robu enak nič:

$$\eta = \frac{t}{2}: \quad \varphi \equiv \varphi_z = -\frac{t^2}{4} + C_1\,\frac{t}{2} + C_2 = 0, \qquad \eta = -\frac{t}{2}: \quad \varphi \equiv \varphi_n = -\frac{t^2}{4} - C_1\,\frac{t}{2} + C_2.$$

Enačbi rešimo in dobimo konstanti C_1 in C_2

$$C_1 = -\frac{\varphi_n}{t}, \qquad C_2 = \frac{\varphi_n}{2} + \frac{t^2}{4}$$

ter izraz za napetostno funkcijo φ

$$\varphi = \frac{t^2}{4} - \eta^2 - \frac{\varphi_n}{t}\,\eta + \frac{\varphi_n}{2}. \tag{2.185}$$

Strižna napetost $\sigma_{\xi\eta}$ je enaka nič, strižno napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ pa dobimo, če enačbo (2.185) upoštevamo v (2.171)

$$\sigma_{\xi\eta} = 0, \qquad \sigma_{\xi\zeta} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{M_x}{I_x}\left(2\,\eta + \frac{\varphi_n}{t}\right). \tag{2.186}$$

Račun torzijskega vztrajnostnega momenta I_x:

$$\begin{aligned}
I_x &= 2\int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x + 2\,\varphi_n\, A_n = \\
&= 2\oint\limits_{\mathscr{C}_s}\left\{\int\limits_{-t/2}^{t/2}\left(\left(\frac{t^2}{4} - \eta^2\right) + \left(-\frac{\varphi_n}{t}\eta + \frac{\varphi_n}{2}\right)\right) d\eta\right\} d\zeta + 2\,\varphi_n\, A_n = \\
&= \oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t^3}{3}\, d\zeta + 2\oint\limits_{\mathscr{C}_s}\left(-\frac{\varphi_n}{t}\frac{\eta^2}{2} + \frac{\varphi_n}{2}\,\eta\right)\Bigg|_{-t/2}^{t/2} d\zeta + 2\,\varphi_n\, A_n = \\
&= \oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t^3}{3} d\zeta + 2\,\varphi_n \oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t}{2}\, d\zeta + 2\,\varphi_n\, A_n = \oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t^3}{3}\, d\zeta + 2\,\varphi_n\left(\frac{A_x}{2} + A_n\right) = \oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t^3}{3}\, d\zeta + 2\,\varphi_n\, A_s.
\end{aligned}$$

Z A_s označimo ploščino ploskve $\mathscr{A}_s$, ki jo določa srednja črta $\mathscr{C}_s$. Torzijski vztrajnostni moment tankostenskeg prereza z eno odprtino je

$$I_x = \oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t^3}{3}\, d\zeta + 2\,\varphi_n\, A_s. \tag{2.187}$$

Vrednost napetostne funkcije φ_n na notranjem robu odprtine izračunamo tako, da zapišemo kompatibilnostni pogoj vzdolž **srednje črte** prečnega prereza tankostenskega nosilca

$$\oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{d\varphi}{d\eta}\, d\zeta = -2\, A_s.$$

Ker integriramo vzdolž srednje črte $\mathscr{C}_s$, je $\eta = 0$

$$\left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \left.\left(-2\,\eta - \frac{\varphi_n}{t}\right)\right|_{\eta=0} = -\frac{\varphi_n}{t}.$$

Upoštevamo, da je φ_n vzdolž notranjega roba konstanten in dobimo

$$\oint\limits_{\mathscr{C}_s} -\frac{\varphi_n}{t}\, d\zeta = -2\, A_s \quad \rightarrow \quad \varphi_n = \frac{2\, A_s}{\displaystyle\oint\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{d\zeta}{t}}. \tag{2.188}$$

Izraz za napetostno funkcijo φ_n na notranjem robu odprtine po enačbi (2.188) vstavimo v izraz (2.187) za torzijski vztrajnostni moment prečnega prereza in dobimo

$$I_x = \oint\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{t^3}{3}\, d\zeta + \frac{4\, A_s^2}{\oint\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{d\zeta}{t}}. \tag{2.189}$$

Vzemimo, da je debelina stene t konstantna. Tedaj je strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ enaka (glej enačbi (2.186) in (2.188))

$$\sigma_{\xi\zeta} = \frac{M_x}{I_x}\left(2\,\eta + \frac{2\,A_s}{C_s}\right).$$

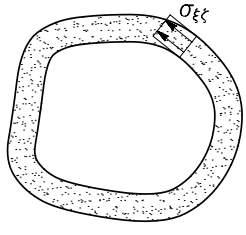
Običajno obravnavamo take primere, da sta C_s in $\sqrt{A_s}$ istega velikostnega reda. Zato velja

$$2\eta \leq t \ll \frac{2A_s}{C_s}$$

in sledi, da lahko pri računu strižne napetosti $\sigma_{\xi\zeta}$ prvi člen v primerjavi z drugim zanemarimo. Strižno napetost računamo po enačbi

$$\sigma_{\xi\zeta} = \frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_n}{t}. \tag{2.190}$$

Napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ je v smeri osi η oziroma “po debelini” stene konstantna (slika 2.38).



Slika 2.38: Strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ se v zaprtem tankostenskem prerezu po debelini stene ne spreminja

Podobno velja pri računu torzijskega vztrajnostnega momenta I_x. Za konstantno debelino t je

$$I_x = \oint\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{t^3}{3}\, d\zeta + \frac{4\, A_s^2}{\oint\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{d\zeta}{t}} = C_s\, t\left(\frac{t^2}{3} + \left(\frac{2\,A_s}{C_s}\right)^2\right). \tag{2.191}$$

Ker je

$$t \ll \frac{2\,A_s}{C_s},$$

sledi, da je prvi člen v enačbi (2.191) zanemarljiv v primerjavi z drugim. Torzijski vztrajnostni moment I_x računamo po enačbah (glej enačbi (2.187) in (2.189))

$$I_x = 2\,\varphi_n\,A_s = \frac{4\,A_s^2}{\displaystyle\oint_{\mathscr{C}_s} \frac{d\zeta}{t}}. \tag{2.192}$$

Prvo izmed enačb (2.192) vstavimo v (2.190) in dobimo izraz za strižno napetost v obliki

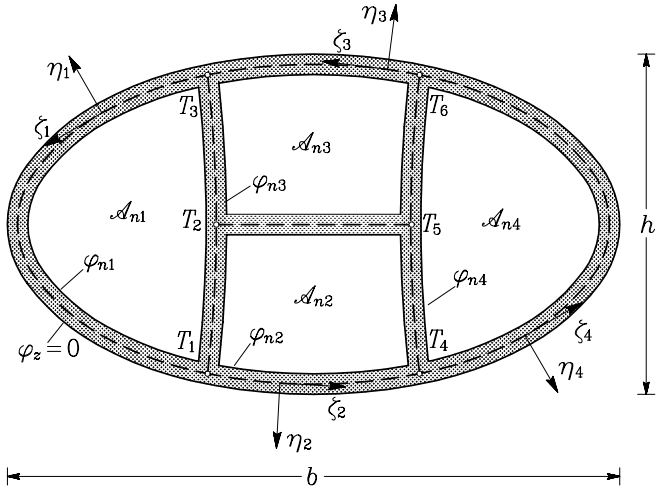
$$\sigma_{\xi\zeta} = \frac{M_x}{2\,A_s\,t}. \tag{2.193}$$

Druga izmed enačb (2.192) ter enačba (2.193) sta **Bredtovi formuli**.† Specifični torzijski zasuk α izračunamo z enačbo

$$\alpha = \frac{M_x}{G\,I_x} = \frac{M_x}{4\,G\,A_s^2} \oint_{\mathscr{C}_s} \frac{d\zeta}{t}.$$

Nosilec s tankostenskim prečnim prerezom z več odprtinami

Vzemimo primer nosilca s tankostenskim prečnim prerezom, ki ima štiri odprtine (slika 2.39).



Slika 2.39: Tankostenski prerez nosilca s štirimi odprtinami

Nosilec ima tankostenski prečni prerez, če je debelina stene t veliko manjša od prečnih dimenzij b in h nosilca

$$t \ll b \quad \text{in} \quad t \ll h.$$

† Rudolf Bredt, nemški inženir (1842–1900)

Če je debelina stene t približno konstantna, se velikost napetostne funkcije φ vzdolž koordinate ζ ne spreminja veliko. Zato je

$$\varphi \approx \text{konst.} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = \varphi(\eta). \tag{2.194}$$

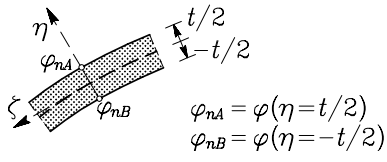
V tem primeru določamo napetostno funkcijo φ iz enačbe

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 2 = 0. \tag{2.195}$$

Po dvakratnem integriranju dobimo izraz za napetostno funkcijo φ

$$\varphi = -\eta^2 + C_1\,\eta + C_2. \tag{2.196}$$

Konstanti C_1 in C_2 izračunamo iz robnih pogojev. Vrednost napetostne funkcije pri $\eta = t/2$ označimo s φ_{nA}, pri $\eta = -t/2$ pa z φ_{nB} (slika 2.40).



Slika 2.40: Del stene tankostenskega prečnega prereza

Iz pogojev

$$\eta = t/2: \qquad \varphi = \varphi_{nA} \quad \rightarrow \quad \varphi_{nA} = -\frac{t^2}{4} + C_1\,\frac{t}{2} + C_2,$$
$$\eta = -t/2: \qquad \varphi = \varphi_{nB} \quad \rightarrow \quad \varphi_{nB} = -\frac{t^2}{4} - C_1\,\frac{t}{2} + C_2$$

dobimo iskani konstanti

$$C_1 = \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}, \qquad C_2 = \frac{\varphi_{nA} + \varphi_{nB}}{2} + \frac{t^2}{4}. \tag{2.197}$$

Ko ju vstavimo v enačbo (2.196), dobimo

$$\varphi = -\eta^2 + \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}\,\eta + \frac{\varphi_{nA} + \varphi_{nB}}{2} + \frac{t^2}{4}. \tag{2.198}$$

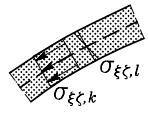
Strižni napetosti $\sigma_{\xi\eta}$ in $\sigma_{\xi\zeta}$ določata enačbi

$$\sigma_{\xi\eta} = 0, \qquad \sigma_{\xi\zeta} = -\frac{M_x}{I_x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{M_x}{I_x}\left(2\,\eta - \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}\right). \tag{2.199}$$

Tudi pri tankostenskih nosilcih z več odprtinami je prvi člen v izrazu za $\sigma_{\xi\zeta}$ v enačbi (2.199) v primerjavi z drugim majhen. Strižno napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ zato računamo po enačbi

$$\sigma_{\xi\zeta} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}. \tag{2.200}$$

Strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ je po debelini stene nosilca skoraj konstantna (slika 2.41).



Slika 2.41: Velikost linearno potekajočega dela strižne napetosti je v primerjavi s konstantnim zanemarljiv

Torzijski vztrajnostni moment I_x določa enačba (2.93)

$$I_x = 2\int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x + 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni}. \tag{2.201}$$

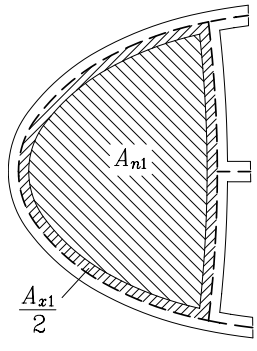
Upoštevamo enačbo (2.198) za napetostno funkcijo φ in izvršimo integriranje

$$\begin{aligned}
I_x &= 2\int\limits_{\mathscr{A}_x} \varphi\, dA_x + 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni} = \\
&= 2\int\limits_{\mathscr{C}_s}\left[\int\limits_{-t/2}^{t/2}\left(-\eta^2 + \frac{\varphi_{nA}-\varphi_{nB}}{t}\,\eta + \frac{\varphi_{nA}+\varphi_{nB}}{2} + \frac{t^2}{4}\right) d\eta\right] d\zeta + 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni} = \\
&= 2\int\limits_{\mathscr{C}_s}\left(-\frac{\eta^3}{3} + \left(\frac{\varphi_{nA}-\varphi_{nB}}{t}\right)\frac{\eta^2}{2} + \left(\frac{\varphi_{nA}+\varphi_{nB}}{2} + \frac{t^2}{4}\right)\eta\right)\Bigg|_{-t/2}^{t/2} d\zeta + 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni} = \\
&= 2\int\limits_{\mathscr{C}_s}\left(-\frac{1}{3}\frac{t^3}{8} + \frac{1}{3}\left(-\frac{t^3}{8}\right) + \frac{\varphi_{nA}-\varphi_{nB}}{2\,t}\left(\frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{4}\right) + \frac{\varphi_{nA}+\varphi_{nB}}{2}t + \frac{t^3}{4}\right) d\zeta + 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni} = \\
&= \int\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{t^3}{3}\, d\zeta + 2\int\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{\varphi_{nA}+\varphi_{nB}}{2}\, t\, d\zeta + 2\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{ni}.
\end{aligned} \tag{2.202}$$

$\mathscr{C}_s$ je srednja črta prečnega prereza. Da bi integral, v katerem nastopata napetostni funkciji φ_A in φ_B preoblikovali, zapišimo zadnja člena v enačbi (2.202) za prikazani prečni prerez s štirimi odprtinami (slika 2.39):

$$
\begin{aligned}
&2\int\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{\varphi_{nA}+\varphi_{nB}}{2}\,t\,d\zeta + 2\sum_{i=1}^{4}\varphi_{ni}\,A_{ni} = \\
&= 2\Bigg(\int\limits_{T_3}^{T_1}\frac{\varphi_{n1}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{\varphi_{n1}+\varphi_{n2}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_2}^{T_3}\frac{\varphi_{n1}+\varphi_{n3}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_1}^{T_4}\frac{\varphi_{n2}}{2}\,t\,d\zeta + \\
&+ \int\limits_{T_4}^{T_5}\frac{\varphi_{n2}+\varphi_{n4}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_5}^{T_2}\frac{\varphi_{n2}+\varphi_{n3}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_5}^{T_6}\frac{\varphi_{n3}+\varphi_{n4}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_6}^{T_3}\frac{\varphi_{n3}}{2}\,t\,d\zeta + \int\limits_{T_4}^{T_6}\frac{\varphi_{n4}}{2}\,t\,d\zeta\Bigg) + \\
&+ 2\left(\varphi_{n1}\,A_{n1} + \varphi_{n2}\,A_{n2} + \varphi_{n3}\,A_{n3} + \varphi_{n4}\,A_{n4}\right) = \\
&= 2\,\varphi_{n1}\left(\frac{A_{x1}}{2} + A_{n1}\right) + 2\,\varphi_{n2}\left(\frac{A_{x2}}{2} + A_{n2}\right) + 2\,\varphi_{n3}\left(\frac{A_{x3}}{2} + A_{n3}\right) + 2\,\varphi_{n4}\left(\frac{A_{x4}}{2} + A_{n4}\right).
\end{aligned}
\tag{2.203}
$$

Z A_{xi} označimo ploščino prečnega prereza, ki obkroža odprtino $\mathscr{A}_{ni}$ (slika 2.42).



Slika 2.42: A_{xi} je ploščina stene prečnega prereza, ki pripada odprtini $\mathscr{A}_{ni}$

Če v enačbi (2.203) označimo površino odprtine do srednje črte $\mathscr{C}_{si}$ z A_{si}, dobi izraz za torzijski vztrajnostni moment (enačba (2.202)) naslednjo obliko:

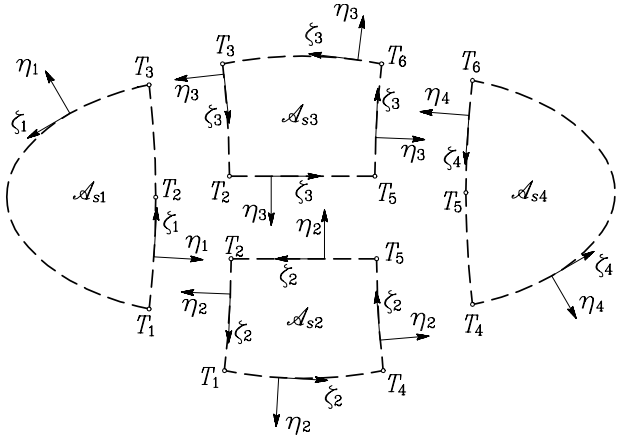
$$
I_x = \int\limits_{\mathscr{C}_s}\frac{t^3}{3}\,d\zeta + 2\sum_{i=1}^{N}\varphi_{ni}\,A_{si}. \tag{2.204}
$$

Ker je debelina sten t majhna, prvi člen običajno zanemarimo. Torzijski vztrajnostni moment tenkostenskih prerezov z več odprtinami računamo po enačbi

$$
\boxed{I_x = 2\sum_{i=1}^{N}\varphi_{ni}\,A_{si}.} \tag{2.205}
$$

Vrednosti napetostne funkcije φ_{ni} vzdolž notranjih mejnih črt izračunamo tako, da zapišemo **kompatibilnostni pogoj za vsako srednjo** črto $\mathscr{C}_{si}$ (slika 2.43), ki določa ploskev $\mathscr{A}_{si}$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathscr{C}_{s1}} \frac{d\varphi}{d\eta_1}\, d\zeta_1 &= -2\, A_{s1}, \qquad & \oint_{\mathscr{C}_{s2}} \frac{d\varphi}{d\eta_2}\, d\zeta_2 &= -2\, A_{s2}, \\ \oint_{\mathscr{C}_{s3}} \frac{d\varphi}{d\eta_3}\, d\zeta_3 &= -2\, A_{s3}, \qquad & \oint_{\mathscr{C}_{s3}} \frac{d\varphi}{d\eta_4}\, d\zeta_4 &= -2\, A_{s4}. \end{aligned} \tag{2.206}$$



Slika 2.43: Srednje črte $\mathscr{C}_{s1}$, $\mathscr{C}_{s2}$, $\mathscr{C}_{s3}$ in $\mathscr{C}_{s4}$

Odvode $d\varphi/d\eta_i$ dobimo iz enačbe (2.198)

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = -2\,\eta + \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}. \tag{2.207}$$

Ker integriramo vzdolž osi $\eta = 0$, sledi

$$\left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}. \tag{2.208}$$

Kompatibilnostne pogoje za srednje črte $\mathscr{C}_{si}$ (enačbe (2.206)) zapišemo zopet za primer na sliki 2.39 oziroma 2.43:

$$
\begin{aligned}
\int_{T_3}^{T_1} \frac{0-\varphi_{n1}}{t(\zeta_1)}\,d\zeta_1 + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\varphi_{n2}-\varphi_{n1}}{t(\zeta_1)}\,d\zeta_1 + \int_{T_2}^{T_3} \frac{\varphi_{n3}-\varphi_{n1}}{t(\zeta_1)}\,d\zeta_1 &= -2\,A_{s1},\\
\int_{T_1}^{T_4} \frac{0-\varphi_{n2}}{t(\zeta_2)}\,d\zeta_2 + \int_{T_4}^{T_5} \frac{\varphi_{n4}-\varphi_{n2}}{t(\zeta_2)}\,d\zeta_2 + \int_{T_5}^{T_2} \frac{\varphi_{n3}-\varphi_{n2}}{t(\zeta_2)}\,d\zeta_2 + \int_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_{n1}-\varphi_{n2}}{t(\zeta_2)}\,d\zeta_2 &= -2\,A_{s2},\\
\int_{T_2}^{T_5} \frac{\varphi_{n2}-\varphi_{n3}}{t(\zeta_3)}\,d\zeta_3 + \int_{T_5}^{T_6} \frac{\varphi_{n4}-\varphi_{n3}}{t(\zeta_3)}\,d\zeta_3 + \int_{T_6}^{T_3} \frac{0-\varphi_{n3}}{t(\zeta_3)}\,d\zeta_3 + \int_{T_3}^{T_2} \frac{\varphi_{n1}-\varphi_{n3}}{t(\zeta_3)}\,d\zeta_3 &= -2\,A_{s3},\\
\int_{T_4}^{T_6} \frac{0-\varphi_{n4}}{t(\zeta_4)}\,d\zeta_4 + \int_{T_6}^{T_5} \frac{\varphi_{n3}-\varphi_{n4}}{t(\zeta_4)}\,d\zeta_4 + \int_{T_5}^{T_4} \frac{\varphi_{n2}-\varphi_{n4}}{t(\zeta_4)}\,d\zeta_4 &= -2\,A_{s4}.
\end{aligned}
$$

Po ureditvi sledi

$$
\begin{aligned}
-\varphi_{n1} \oint_{\mathscr{C}_{s1}} \frac{d\zeta_1}{t(\zeta_1)} + \varphi_{n2} \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\zeta_1}{t(\zeta_1)} + \varphi_{n3} \int_{T_2}^{T_3} \frac{d\zeta_1}{t(\zeta_1)} &= -2\,A_{s1},\\
\varphi_{n1} \int_{T_2}^{T_1} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} - \varphi_{n2} \oint_{\mathscr{C}_{s2}} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} + \varphi_{n3} \int_{T_5}^{T_2} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} + \varphi_{n4} \int_{T_4}^{T_5} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} &= -2\,A_{s2},\\
\varphi_{n1} \int_{T_3}^{T_2} \frac{d\zeta_3}{t(\zeta_3)} + \varphi_{n2} \int_{T_2}^{T_5} \frac{d\zeta_3}{t(\zeta_3)} - \varphi_{n3} \oint_{\mathscr{C}_{s3}} \frac{d\zeta_3}{t(\zeta_3)} + \varphi_{n4} \int_{T_5}^{T_6} \frac{d\zeta_3}{t(\zeta_3)} &= -2\,A_{s3},\\
\varphi_{n2} \int_{T_5}^{T_4} \frac{d\zeta_4}{t(\zeta_4)} + \varphi_{n3} \int_{T_6}^{T_5} \frac{d\zeta_4}{t(\zeta_4)} - \varphi_{n4} \oint_{\mathscr{C}_{s4}} \frac{d\zeta_4}{t(\zeta_4)} &= -2\,A_{s4}.
\end{aligned}
\tag{2.209}
$$

Sistem enačb za račun napetostnih funkcij φ_{ni} na notranjih mejnih črtah (enačbe (2.209)) zapišimo simbolično takole (enačbe smo pomnožili z minus ena):

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \varphi_{n3} \\ \varphi_{n4} \end{bmatrix}
= 2 \begin{bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \\ A_{s3} \\ A_{s4} \end{bmatrix}. \tag{2.210}
$$

Če ima prečni prerez nosilca N odprtin, je sistem enačb (2.210) N–tega reda

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \vdots \\ \varphi_{nN} \end{bmatrix}
= 2 \begin{bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \\ \vdots \\ A_{sN} \end{bmatrix}. \tag{2.211}
$$

Diagonalne člene a_{ii} računamo z enačbo

$$a_{ii} = \oint\limits_{\mathscr{C}_{si}} \frac{d\zeta_i}{t(\zeta_i)}, \tag{2.212}$$

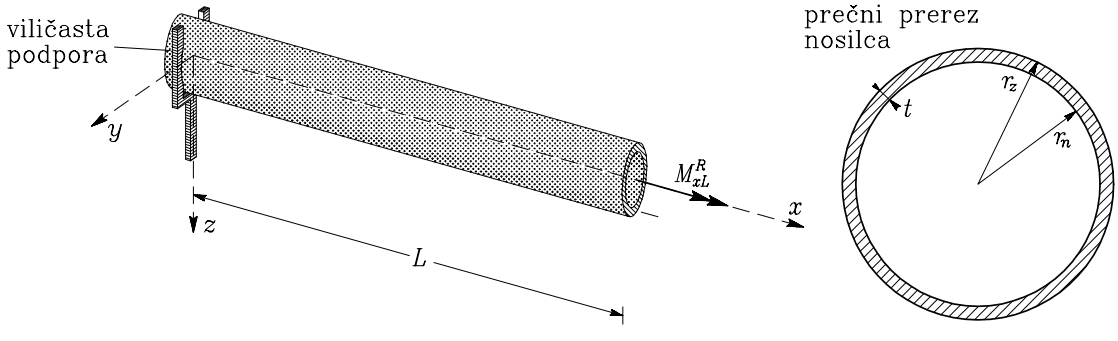
zunajdiagonalne pa z enačbo

$$a_{ij} = -\int\limits_{\mathscr{L}_{i(j)}} \frac{d\zeta_i}{t(\zeta_i)}, \quad a_{ji} = -\int\limits_{\mathscr{L}_{j(i)}} \frac{d\zeta_j}{t(\zeta_j)}, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.213}$$

Koordinata ζ_i določa lego točk srednje črte prečnega prereza okrog ploskve $\mathscr{A}_{ni}$. Z $\mathscr{L}_{i(j)}$ označimo del srednje črte $\mathscr{C}_{si}$, kjer ploskve $\mathscr{A}_{si}$ meji na ploskve $\mathscr{A}_{sj}$, z $\mathscr{L}_{j(i)}$ pa del srednje črte $\mathscr{C}_{sj}$, vzdolž katerega ploskve $\mathscr{A}_{sj}$ meji na ploskve $\mathscr{A}_{si}$. Koeficienti a_{ij} so od nič različni le, če ploskve $\mathscr{A}_{si}$ meji na ploskve $\mathscr{A}_{sj}$. Matrika koeficientov sistema enačb (2.211) je **simetrična**. Rešitev sistema enačb (2.211) daje robne vrednosti φ_{ni}.

2.5 Primeri

Primer 2.1 *Določimo strižno napetost v zaprtem tankostenskem prerezu zaradi enakomerne torzije! Pri tem uporabimo najprej enačbe za krožni kolobar, nato pa enačbe za tankostenski prerez. Izračunajmo tudi torzijski vztrajnostni moment na oba načina!*
Podatki: $M_{xL}^R = 100\,000\,\mathrm{Ncm}$, $r_z = 5\,\mathrm{cm}$, $r_n = 4.5\,\mathrm{cm}$, $t = 0.5\,\mathrm{cm}$ *(slika 2.44).*



Slika 2.44: Nosilec s prečnim prerezom v obliki krožnega kolobarja je obtežen s torzijskim momentom

Krožni kolobar:

Rezultirajočo strižno napetost izračunamo po enačbi:

$$\tau_x = \frac{2\,M_x}{\pi\,r_z^4\,(1-k^4)}\sqrt{y^2+z^2}, \qquad k = \frac{r_n}{r_z} = \frac{4.5}{5} = 0.9.$$

Vrednosti rezultirajoče strižne napetosti na zunanjem in na notranjem robu kolobarja:

$$\tau_x = \frac{2 \cdot 100\,000}{\pi\, 5^4\,(1-0.9^4)}\, 5 = 1\,480.94\ \mathrm{N/cm^2}, \quad \tau_x = \frac{2 \cdot 100\,000}{\pi\, 5^4\,(1-0.9^4)}\, 4.5 = 1\,332.85\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Srednja vrednost je $(1480.94 + 1332.85)/2 = 1406.89$ N/cm^2. Torzijski vztrajnostni moment I_x je

$$I_x = \frac{\pi\, r_z^4}{2}(1-k^4) = \frac{\pi\, 5^4}{2}(1-0.9^4) = 337.62\ \mathrm{cm}^4.$$

Tankostenski nosilec:

Strižno napetost izračunamo po enačbi (2.193)

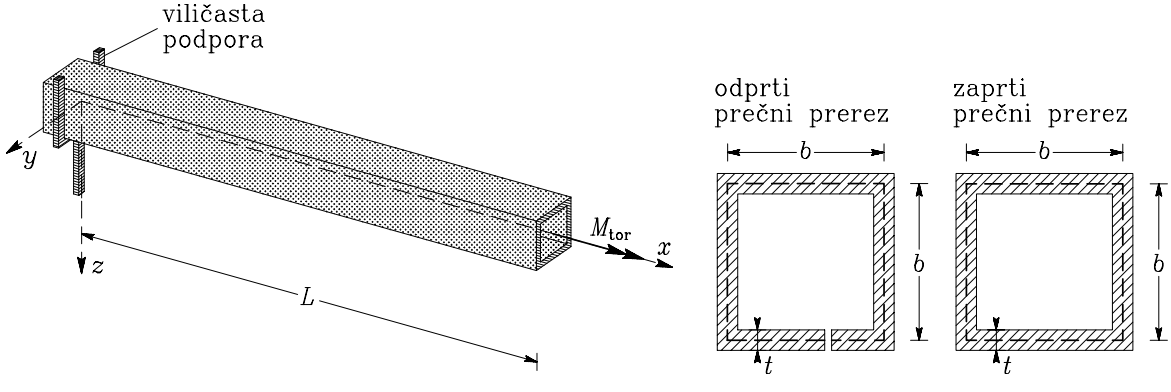
$$\sigma_{\xi\zeta} = \frac{M_x}{2\, A_s\, t} = \frac{100\,000}{2 \cdot \pi \cdot 4.75^2 \cdot 0.5} = 1410.79\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x določimo po enačbi (2.193) ($r_s = 4.75$ cm)

$$I_x = \frac{4\, A_s^2}{\oint\limits_{\mathscr{C}_s} \frac{d\zeta}{t}} = \frac{4\,(\pi\, 4.75^2\,)^2}{2 \cdot \pi \cdot 4.75\,/\,0.5} = 336.69\ \mathrm{cm}^4.$$

Razlika v računu strižne napetosti in torzijskega vztrajnostnega momenta na oba prikazana načina je 0.3%.

Primer 2.2 *Izračunajmo največji torzijski moment M_{tor} na nosilcu, prikazanem na sliki 2.45, tako da bodo strižne napetosti zaradi torzije manjše od $\tau_{\max} = 9.5\,\mathrm{kN/cm^2}$ in da bo zasuk pri $x = L$ manjši od $\omega_{x,\max} = 0.2$ radianov! Obravnavajmo odprti in zaprti prečni prerez z dimenzijami $b = 20\,\mathrm{cm}$ in $t = 0.9\,\mathrm{cm}$ (slika 2.45). Strižni modul je $G = 10\,000\,\mathrm{kN/cm^2}$, dolžina nosilca pa je $L = 2\,\mathrm{m}$.*



Slika 2.45: Nosilec ima lahko odprti in zaprti prečni prerez

Prikazana viličasta podpora dovoljuje izbočitev prečnega prereza $u_x \neq 0$, preprečuje pa zasuk prereza $\omega_x = 0$ in prečne pomike. Podpora pri $x = L$ preprečuje prečne pomike, dovoljuje pa zasuke in izbočitev prečnega prereza.

Torzijski moment M_x se vzdolž osi nosilca ne spreminja

$$M_x = M_{\text{tor}}.$$

Odprti prerez

Največjo napetost $\sigma_{\xi\zeta,\max}$ v odprtem prerezu izračunamo po enačbi (2.164), torzijski vztrajnostni moment I_x pa po enačbi (2.177). Iz pogoja $\sigma_{\xi\zeta,\max} \leq \tau_{\max}$ lahko določimo največji moment M_x

$$\sigma_{\xi\zeta,\max} = \frac{M_x}{I_x} t \leq \tau_{\max}, \quad I_x = \frac{1}{3} t^3\, 4\, b = 19.44\ \text{cm}^4 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad M_x \leq \frac{\tau_{\max}\, I_x}{t} = \frac{9.5 \cdot 19.44}{0.9} = 205\ \text{kNcm} = 2.05\ \text{kNm}.$$

Torzijski zasuk ω_x se linearno spreminja vzdolž nosilca (enačba (2.25))

$$\omega_x = \omega_{x0} + \alpha\, x.$$

V našem primeru je $\omega_{x0} = 0$. Specifični torzijski zasuk α izračunamo iz enačbe (2.87)

$$\alpha = \frac{M_x}{G\, I_x}.$$

Največji zasuk je v točki B. Iz pogoja $\omega_{x,L} \leq \omega_{x,\max}$ izračunamo največji moment M_x

$$\omega_{x,L} = \alpha\, L = \frac{M_x\, L}{G\, I_x} \leq \omega_{x,\max} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad M_x \leq \frac{\omega_{x,\max}\, G\, I_x}{L} = \frac{0.2 \cdot 10^4 \cdot 19.44}{200} = 194\ \text{kNcm} = 1.94\ \text{kNm}.$$

V tem primeru je odločilen pogoj $\omega_{xL} \leq \omega_{x,\max}$, saj je največji moment M_x zaradi tega pogoja manjši od momenta zaradi pogoja $\sigma_{\xi\zeta,\max} \leq \tau_{\max}$.

Zaprti prerez

Napetosti $\sigma_{\xi\zeta,\max}$ izračunamo po enačbi (2.193). Iz pogoja $\sigma_{\xi\zeta,\max} \leq \tau_{\max}$ izračunamo največji moment M_x

$$\sigma_{\xi\zeta,\max} = \frac{M_x}{2\, A_s\, t_{\min}} = \frac{M_x}{2\, b^2\, t} \leq \tau_{\max} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad M_x \leq \tau_{\max}\, 2\, b^2\, t = 9.5 \cdot 2 \cdot 20^2 \cdot 0.9 = 6\,840\ \text{kNcm} = 68.4\ \text{kNm}.$$

Torzijski vztrajnostni moment I_x izračunamo po enačbi (2.193)

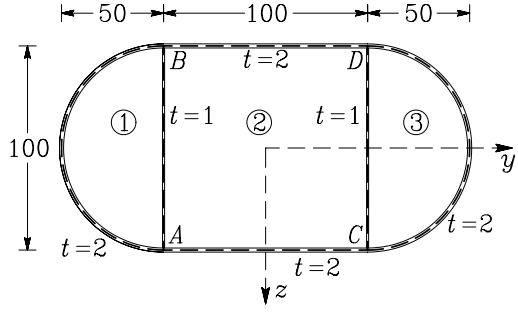
$$I_x = \frac{4 \cdot (b^2)^2}{4\, b\, /\, t} = b^3\, t = 7\,200\ \text{cm}^4.$$

Iz pogoja $\omega_{x,L} \leq \omega_{x,\max}$ izračunamo največji moment M_x

$$\omega_{x,L} = \alpha\, L = \frac{M_x\, L}{G\, I_x} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \frac{M_x\, L}{G\, I_x} \leq \omega_{x,\max} \quad \rightarrow \quad M_x \leq \frac{\omega_{x,\max}\, G\, I_x}{L} = 72\,000\,\mathrm{kNcm} = 720\,\mathrm{kNm}.$$

V tem primeru je bil odločilen pogoj za napetosti, saj je M_x zaradi tega pogoja precej nižji od M_x, ki ga določimo iz pogoja za zasuk. Izkaže se torej, da s tem, ko zapremo prečni prerez izredno povečamo togost konstrukcije, ki se poveča kar za 371-krat (720/1.94), medtem ko se nosilnost glede na največjo strižno napetost poveča za 33-krat (68.4/2.05).

Primer 2.3 *Določimo največjo strižno napetost, ki nastopi v prikazanem tankostenskem prečnem prerezu (slika 2.46) pri enakomerni torzijski obremenitvi $M_x = 100\,\mathrm{Nm}$. Določimo tudi strižno napetost v rebru med odprtinama 1 in 2!*

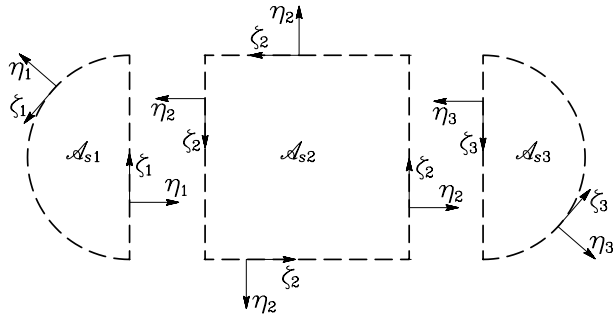


Slika 2.46: Tankostenski prerez s tremi odprtinami (dimenzije so v cm)

Vrednosti napetostne funkcije φ_i vzdolž notranjih odprtin dobimo iz sistema enačb

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \varphi_{n3} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \\ A_{s3} \end{bmatrix}.$$

Koordinatne sisteme η_i, ζ_i $(i = 1, 2, 3)$ za vse tri odprtine prikazujemo na sliki 2.47.



Slika 2.47: Smer integriranja po srednjih črtah $\mathscr{C}_{si}$

Enačbi za strižno napetost in torzijski vztrajnostni moment sta

$$\sigma_{\xi\zeta} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_{nA}-\varphi_{nB}}{t}, \qquad I_x = 2\sum_{i=1}^{3}\varphi_{ni}\,A_{si}.$$

Koeficiente a_{ij} izračunamo po enačbah (2.212) in (2.213)

$$a_{ii} = \oint\limits_{\mathscr{C}_{si}} \frac{d\zeta_i}{t(\zeta_i)}, \qquad a_{ij} = -\int\limits_{\mathscr{L}_{i(j)}} \frac{d\zeta_i}{t(\zeta_i)}.$$

Koordinata ζ_i določa lego točk srednje črte prečnega prereza okrog odprtine $\mathscr{A}_{ni}$, $\mathscr{L}_{i(j)}$ pa del srednje črte $\mathscr{C}_i$, kjer odprtina $\mathscr{A}_{ni}$ meji na odprtino $\mathscr{A}_{nj}$.

$$a_{11} = \oint\limits_{\mathscr{C}_{s1}} \frac{d\zeta_1}{t(\zeta_1)} = \frac{1}{1}\,100 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 50 = 178.54 = a_{33},$$

$$a_{22} = \oint\limits_{\mathscr{C}_{s2}} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} = \frac{1}{1}\,(100+100) + \frac{1}{2}\,(100+100) = 300,$$

$$a_{12} = -\int\limits_{A}^{B} \frac{d\zeta_1}{t(\zeta_1)} = -\frac{1}{1}\cdot 100 = -100,$$

$$a_{21} = -\int\limits_{B}^{A} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} = -\frac{1}{1}\cdot 100 = -100,$$

$$a_{13} = 0 = a_{31},$$

$$a_{23} = -\int\limits_{C}^{D} \frac{d\zeta_2}{t(\zeta_2)} = -\frac{1}{1}\cdot 100 = -100 = a_{32}.$$

Ploščine odprtin do srednje črte prereza so:

$$A_{s1} = \frac{\pi \cdot 50^2}{2} = 3927.0\,\mathrm{cm}^2 = A_{s3}, \quad A_{s2} = 100^2 = 10000\,\mathrm{cm}^2.$$

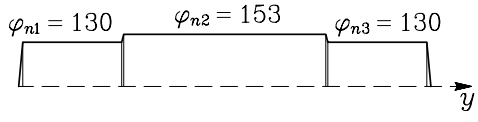
Tako dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} 178.54 & -100 & 0 \\ -100 & 300 & -100 \\ 0 & -100 & 178.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \varphi_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7854.0 \\ 20000 \\ 7854.0 \end{bmatrix},$$

iz katerega izračunamo neznane vrednosti napetostne funkcije na meji odprtin

$$\varphi_{n1} = 129.80, \quad \varphi_{n2} = 153.20, \quad \varphi_{n3} = 129.80.$$

Potek napetostne funkcije vzdolž osi y prikazujemo na sliki 2.48.



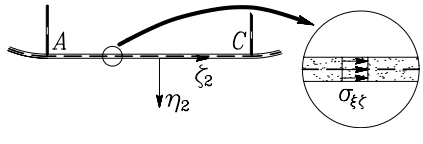
Slika 2.48: Napetostna funkcija vzdolž osi y

Torzijski vztrajnostni moment I_x je

$$I_x = 2\,(129.80 \cdot 3927 \cdot 2 + 153.20 \cdot 10000) = 5102767\,\mathrm{cm}^4.$$

Strižna napetost v robu AC je (slika 2.49)

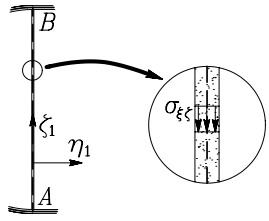
$$\sigma_{\xi\zeta,AC} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_z - \varphi_{n2}}{t} = -\frac{10000}{5102767}\frac{0 - 153.20}{2} = 0.15\,\mathrm{N/cm}^2.$$



Slika 2.49: Strižna napetost na zunanjem robu AC

Strižna napetost v rebru AB (glede na ζ_1) je (slika 2.50)

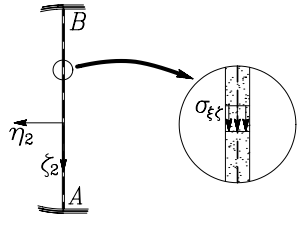
$$\sigma_{\xi\zeta,AB} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_{n2} - \varphi_{n1}}{t} = -\frac{10000}{5102767}\frac{153.20 - 129.80}{1} = -0.0459\,\mathrm{N/cm}^2.$$



Slika 2.50: Strižna napetost v rebru AB

Strižna napetost v rebru BA (glede na ζ_2) je (slika 2.51)

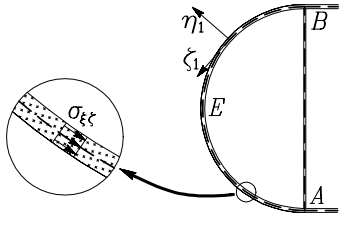
$$\sigma_{\xi\zeta,BA} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_{n1}-\varphi_{n2}}{t} = -\frac{10000}{5102767}\frac{129.80-153.20}{1} = 0.0459\,\mathrm{N/cm^2}.$$



Slika 2.51: Strižna napetost v rebru BA

Strižna napetost v robu BEA je (slika 2.52)

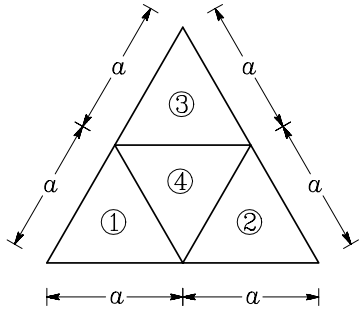
$$\sigma_{\xi\zeta,BEA} = -\frac{M_x}{I_x}\frac{\varphi_z-\varphi_{n1}}{t} = -\frac{10000}{5102767}\frac{0-129.80}{2} = 0.127\,\mathrm{N/cm^2}.$$



Slika 2.52: Strižna napetost v robu BEA

Največja strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ je v robovih AC in BD.

Primer 2.4 *Določimo vrednosti φ_i napetostne funkcije φ vzdolž notranjih robov odprtin i za prečni prerez na sliki 2.53!*



Slika 2.53: Prečni prerez s štirimi odprtinami

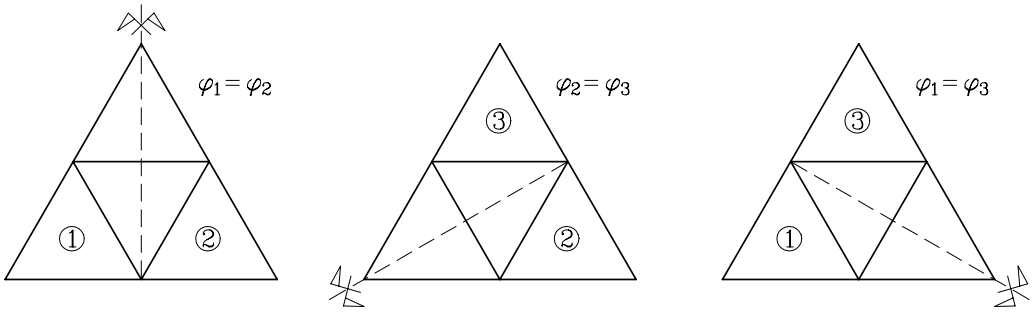
Za prikazani primer dobimo naslednji sistem linearnih enačb za račun napetostnih funkcij φ_i

$$\begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 300 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \\ \varphi_{n3} \\ \varphi_{n4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\sqrt{3} \\ 50\sqrt{3} \\ 50\sqrt{3} \\ 50\sqrt{3} \end{bmatrix}, \tag{2.214}$$

iz katerega izračunamo neznane vrednosti napetostne funkcije na robovih odprtin

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0.577 \ \mathrm{cm}^2, \quad \varphi_4 = 0.866 \ \mathrm{cm}^2.$$

Iz rezultatov sledi, da dobimo enake vrednosti za napetostne funkcije φ_i, ki ležijo simetrično glede na simetrijske osi prečnega prereza (slika 2.54).



Slika 2.54: Za odprtine simetrične glede na simetrijsko os so vrednosti napetostnih funkcij enake

Velikost sistema linearnih enačb (2.214) lahko zmanjšamo, če v naprej upoštevamo simetrijo. Iz sistema enačb (2.214) vzamemo le prvo in četrto enačbo, v v katerih upoštevamo, da so $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Na ta način dobimo sistem dveh linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} 300 & -100 \\ -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\sqrt{3} \\ 50\sqrt{3} \end{bmatrix}. \tag{2.215}$$

Vidimo, da dobimo nesimetrični sistem enačb. Če želimo problem rešiti s simetričnim sistemom enačb, moramo zaradi pogoja $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ sešteti prve tri vrstice in prve tri stolpce v matriki v (2.214). Seštejemo pa tudi prve tri koeficiente v stolpcu na desni strani sistema enačb. Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} 900 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150\sqrt{3} \\ 50\sqrt{3} \end{bmatrix}. \tag{2.216}$$

Pokažimo splošni postopek, s katerim lahko ob upoštevanju enakosti nekaterih neznanih količin zmanjšamo sistem enačb. Najprej izrazimo neznanke φ_1, φ_2, φ_3 in φ_4 z neznankama φ_1 in φ_4 po enačbi

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

ali krajše

$$\{\varphi\} = [T]\{\varphi'\}. \tag{2.217}$$

Če enačbe (2.214) zapišemo krajše

$$[A]\{\varphi\} = \{b\}$$

in upoštevamo (2.217), sledi

$$[A][T]\{\varphi'\} = \{b\}.$$

To enačbo z leve množimo s transponirano matriko matrike $[T]$ in dobimo

$$[T]^T[A][T]\{\varphi'\} = [T]^T\{b\}$$

oziroma

$$[A']\{\varphi'\} = \{b'\}.$$

Matrika

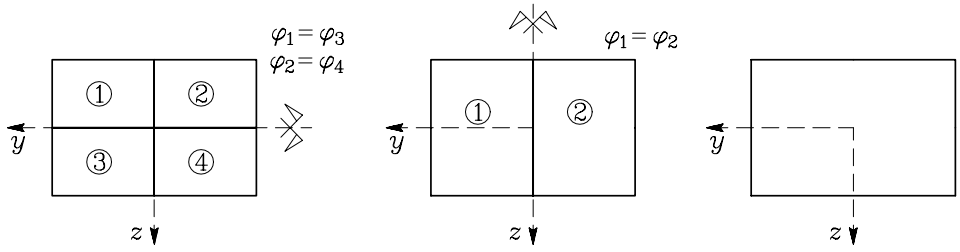
$$[A'] = [T]^T[A][T] = \begin{bmatrix} 900 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix}$$

je simetrična, stolpec

$$\{b'\} = [T]^T\{b\} = \begin{bmatrix} 150\sqrt{3} \\ 50\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

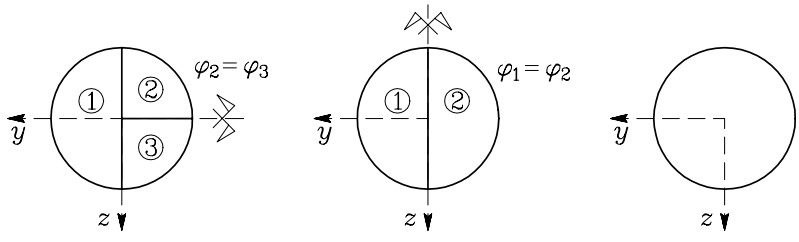
pa predstavlja ustrezno desno stran sistema enačb.

Ker je velikost strižne napetosti v rebru odvisna od razlike vrednosti napetostnih funkcij sosednjih odprtin, je strižna napetost v rebru, ki ima enaki vrednosti φ na obeh straneh rebra, enaka nič. To pomeni, da lahko dvojno simetrični prečni prerez s štirimi odprtinami obravnavamo kot prečni prerez z eno odprtino (slika 2.55). Zaradi simetrijske osi z je $\varphi_1 = \varphi_2$ in $\varphi_3 = \varphi_4$, zaradi simetrijske osi y pa $\varphi_3 = \varphi_1$ in $\varphi_2 = \varphi_4$. Iz teh enačb sledi, da je $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$.



Slika 2.55: Prerez s štirimi odprtinami lahko obravnavamo kot prerez z eno odprtin

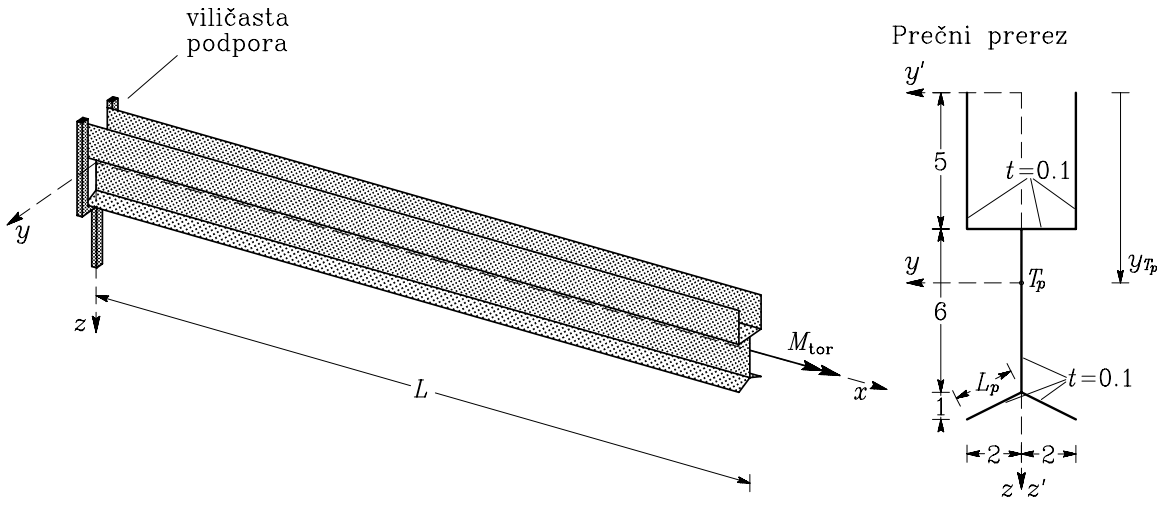
Podobno velja za primer na sliki 2.56.



Slika 2.56: Prerez s tremi odprtinami, ki ga lahko obravnavamo kot prerez z eno odprtino

Najprej upoštevamo simetrijsko os y in zaradi $\varphi_2 = \varphi_3$ primer obravnavamo kot prerez z dvema odprtinama. S tem dobimo prerez, ki je simetričen glede na os z. Z upoštevanjem te simetrijske osi sledi $\varphi_1 = \varphi_2$. To pomeni, da notranja rebra ne prevzamejo strižne napetosti in prerez lahko obravnavamo kot prerez z eno odprtino.

Primer 2.5 *Izračunajmo napetosti in pomike v nosilcu z odprtim tankostenskim prečnim prerezom na sliki 2.57. Torzijski moment* $M_{\mathrm{tor}} = 1000\,\mathrm{Ncm}$, *modul elastičnosti materiala* $E = 20 \cdot 10^6\,\mathrm{N/cm^2}$, *Poissonov koeficient* $\nu = 0.3$, *dolžina nosilca* L *pa* $100\,\mathrm{cm}$.



Slika 2.57: Geometrijski podatki prečnega prereza nosilca

Dolžina L_p poševnega dela je

$$L_p = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2.236\,\mathrm{cm}.$$

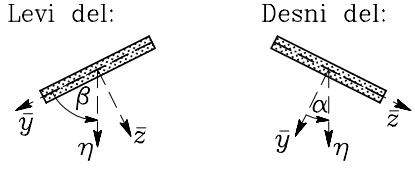
Ploščina A_x prečnega prereza je

$$A_x = 5 \cdot 0.1 \cdot 2 + 4 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot L_p \cdot 2 = 3.494\,\mathrm{cm}^2.$$

Navpična koordinata z'_T težišča prečnega prereza je

$$z'_T = \frac{L_p \cdot 0.2 \cdot 11.5 \cdot 2 + 6 \cdot 0.2 \cdot 8 + 4 \cdot 0.1 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 0.1 \cdot 2.5}{A_x} = 6.979\,\mathrm{cm}.$$

Za določitev izbočitvene funkcije po enačbah (2.154) in (2.156) moramo poznati vztrajnostni momenta I_z glede na težišče prečnega prereza. Izračunajmo vztrajnostna momenta I_η za poševna dela (slika 2.58).



Slika 2.58: Koordinatne osi poševnih delov prečnega prereza

Za levi del dobimo: $I_{\bar{y}} = L_p\, 0.2^3/12 = 0.001491\ \mathrm{cm}^4$, $I_{\bar{z}} = L_p^3\, 0.2/12 = 0.1863\ \mathrm{cm}^4$, $\beta = 63.44°$:

$$I_\eta = \frac{I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}}}{2} + \frac{I_{\bar{y}} - I_{\bar{z}}}{2} \cos 2\,\beta = 0.1494\,\mathrm{cm}^4.$$

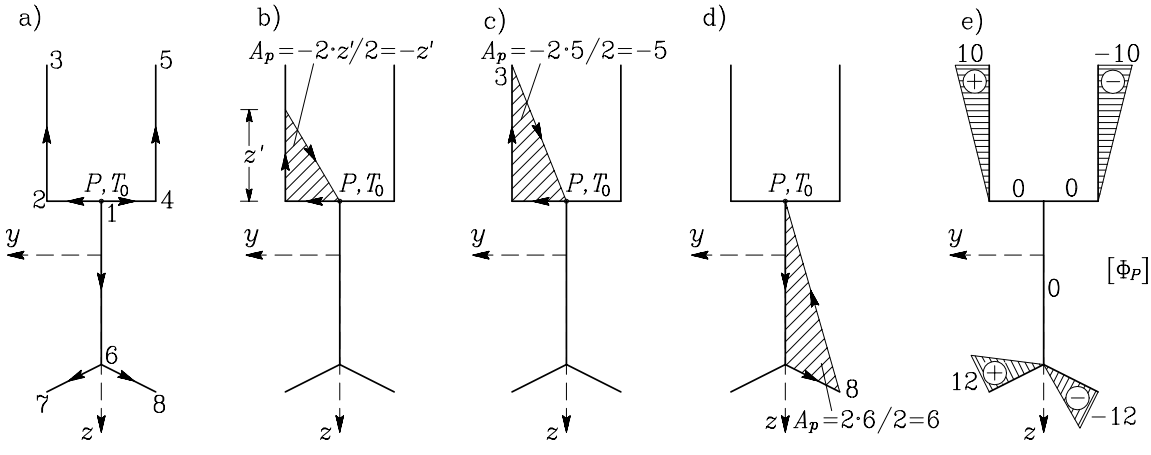
Za desni del dobimo: $I_{\bar{y}} = L_p^3\, 0.2/12 = 0.1863\ \mathrm{cm}^4$, $I_{\bar{z}} = L_p\, 0.2^3/12 = 0.001491\ \mathrm{cm}^4$, $\alpha = 26.57°$:

$$I_\eta = \frac{I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}}}{2} + \frac{I_{\bar{y}} - I_{\bar{z}}}{2} \cos 2\,\alpha = 0.1494\ \mathrm{cm}^4.$$

Vztrajnostni moment na težiščno z os je:

$$I_z = \left(\frac{5 \cdot 0.1^3}{12} + 2^2 \cdot 5 \cdot 0.1\right) \cdot 2 + \frac{0.1 \cdot 4^3}{12} + \frac{6 \cdot 0.2^3}{12} + (0.1494 + 1^2 \cdot 2.236 \cdot 0.2) \cdot 2 = 5.731\ \mathrm{cm}^4.$$

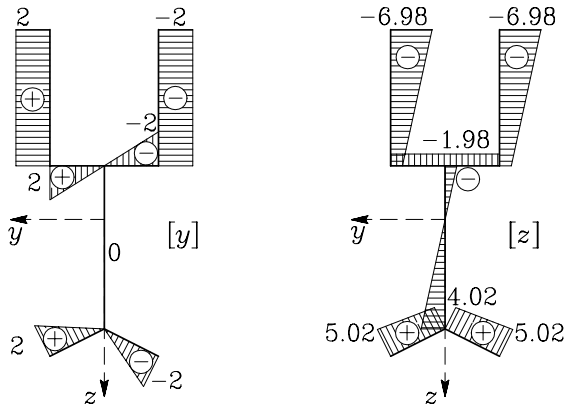
Za račun pomožne izbočitvene funkcije izberemo točki P in T_0 v točki 1 s koordinatama $y_1 = 0$ cm in $z_1 = -1.979$ cm. Zato je $z_P = -1.979$ cm. Na sliki 2.59a prikazujemo številke vozlišč, smer integriranja za račun pomožne izbočitvene funkcije $\Phi_P = -2\,A_P$ (enačba (2.182)). Na sliki 2.59b je označena ploščina A_P za točko, ki je za z' nad točko P. Vidimo, da je ploščina A_P in s tem tudi pomožna izbočitvena funkcija Φ_P linearna funkcija. Na slikah 2.59c in 2.59d sta ploščini A_P za točki 3 in 8, na sliki 2.59e pa je diagram poteka pomožne izbočitvene funkcije.



Slika 2.59: Določitev pomožne izbočitvene funkcije Φ_P

$$\Phi_{P3} = 2\,\frac{2 \cdot 5}{2} = 10\ \mathrm{cm}^2, \qquad \Phi_{P5} = -10\ \mathrm{cm}^2,$$
$$\Phi_{P7} = 2\,\frac{6 \cdot 2}{2} = 12\ \mathrm{cm}^2, \qquad \Phi_{P8} = -12\ \mathrm{cm}^2.$$

Na sliki 2.60 prikazujemo potek koordinat y in z.



Slika 2.60: Diagrama koordinat y in z

Integral $I_{\Phi Pz} = \int_{\mathscr{A}_x} y\,\Phi_P\,dA_x$ (enačba 2.152) lahko prevedemo na integral produkta dveh funkcij $I_{\Phi Pz} = t\int_{\mathscr{L}} f(s)\,g(s)\,ds$. V petem poglavju bomo izpeljali in uporabljali enačbo za račun integrala produkta dveh funkcij, od katerih je vsaj ena linearna. Glede na to, da sta v našem primeru tako y kot Φ_P linearni, lahko uporabimo enačbo (5.25)

$$I = A_g\,f(x_{T_g}) = A_f\,g(x_{T_f})$$

in dobimo

$$I_{\Phi Pz} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\,\Phi_P\,dA_x = 0.1\cdot\frac{10\cdot 5}{2}\cdot 2\cdot 2 + 0.2\cdot\frac{12\cdot 2.236}{2}\,\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2 = 17.16\,\mathrm{cm}^5.$$

Integrala $I_{\Phi Py} = \int_{\mathscr{A}_x} z\,\Phi_P\,dA_x$ in $S_{\Phi P} = \int_{\mathscr{A}_x} \Phi_P\,dA_x$ (enačba 2.152) sta zaradi antisimetrije funkcije Φ_P enaka nič (glej sliki 2.59 in 2.60). Koordinati y_C in z_C torzijskega središča C izračunamo po enačbi (2.157)

$$y_C = 0, \qquad z_C = z_P + \frac{I_{\Phi Pz}}{I_z} = -1.979 + 2.993 = 1.014\,\mathrm{cm}.$$

Konstanti A in B izračunamo po (2.156):

$$A = -\frac{I_{\Phi Pz}}{I_z} = -2.993\,\mathrm{cm}, \qquad B = 0\,\mathrm{cm}.$$

Izbočitveno funkcijo Φ izračunamo po enačbi (2.154).

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_P + A\,y = \Phi_P - 2.993\,y.$$

Vrednosti izbočitvene funkcije v značilnih točkah prereza prikazujemo v preglednici 2.2.

Tabela 2.2: Izbočitvena funkcija Φ [cm^2] in pomiki $\bar{u}_x$, u_y, u_z [cm] v značilnih točkah prečnega prereza

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Φ_i	0.000	-5.987	4.014	5.987	-4.014	0.000	6.014	-6.014
$\bar{u}_{xi}$	0.0000	-0.0239	0.0160	0.0239	-0.0160	0.0000	0.0240	-0.0240
u_{yi}	1.194	1.194	3.188	1.194	3.188	-1.199	-1.598	-1.598
u_{zi}	0.000	0.000	0.798	0.798	-0.797	-0.798	0.798	-0.798

Torzijski vztrajnostni moment I_x izračunamo po enačbi (2.177)

$$I_x = \frac{1}{3}\sum_i t_i^3\, h_i = \frac{1}{3}\left(0.1^3 \cdot 5 \cdot 2 + 0.1^3 \cdot 4 + 0.2^3 \cdot 6 + 0.2^3 \cdot 2.236 \cdot 2\right) = 0.03259\,\mathrm{cm}^4.$$

Strižni modul G je

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)} = \frac{20 \cdot 10^6}{2\,(1+0.3)} = 7.692 \cdot 10^6\,\mathrm{N/cm}^2,$$

specifični torzijski zasuk α pa (2.54)

$$\alpha = \frac{M_x}{G\,I_x} = 0.003989\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

Pomik u_x izračunamo z enačbo (2.41) oziroma (2.146), kjer upoštevamo, da je $T_0 \equiv T_1$ ter $\Phi_1 = 0$

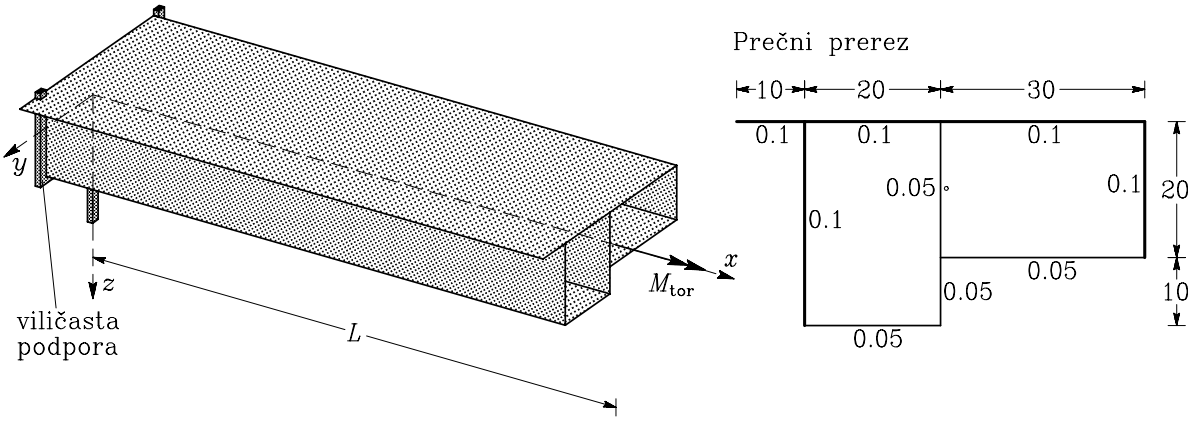
$$\bar{u}_{xi} = u_{xi} - u_{x1} = \alpha\,(\Phi - \Phi_1) = \alpha\,\Phi.$$

Pomike $\bar{u}_x$ posameznih točk prikazujem v preglednici 2.2. Za račun pomikov $u_y = -\omega_x\,(z - z_C)$ in $u_z = \omega_x\,(y - y_C)$ (enačba (2.30)) v prečnem prerezu $x = L$ potrebujemo zasuk ω_x, ki ga v primeru, da je zasuk $\omega_x(0)$ pri $x = 0$ enak nič, izračunamo po enačbi (2.25)

$$\omega_x(L) = \alpha\,L = 0.003989 \cdot 100 = 0.3989\,\mathrm{radianov}.$$

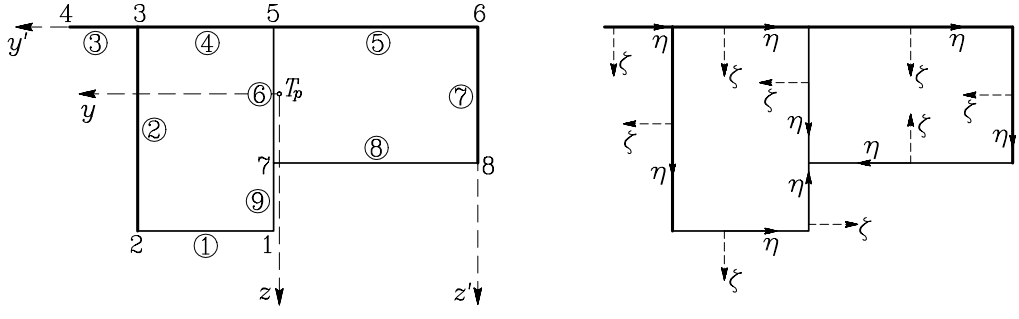
Pomike u_y in u_z v značilnih točkah prečnega prereza prikazujemo v preglednici 2.2.

Primer 2.6 *Izračunajmo pomike in napetosti v nosilcu z zaprtim tankostenskim prerezom na sliki 2.61. Nosilec dolžine $L = 400\,\mathrm{cm}$ je obremenjen na enakomerno torzijo s torzijskim momentom $M_x = 15000\,\mathrm{Ncm}$. Strižni modul materiala je $G = 75000\,\mathrm{N/cm}^2$.*



Slika 2.61: Geometrija obravnavanega nosilca (vse razdalje so v cm)

Na sliki 2.62 prikazujemo izbrane številke vozlišč in elementov ter izbrano smer ζ vzdolž srednje črte prečnega prereza.



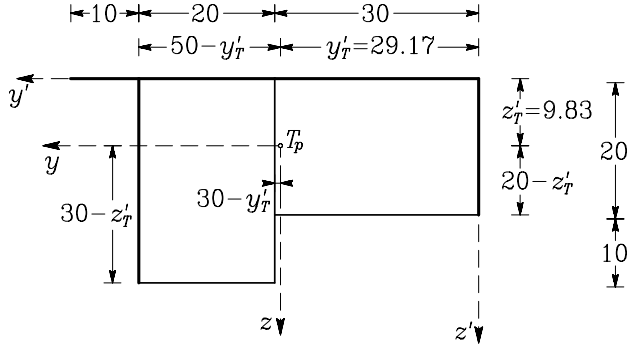
Slika 2.62: Številke vozlišč ter elementov in izbrana smer ζ

Izračunajmo najprej ploščino prečnega prereza in koordinati težišča v koordinatnem sistemu y', z':

$$A_x = 0.1\,(60 + 20 + 30) + 0.05\,(30 + 30 + 20) = 15.0\,\text{cm}^2,$$
$$S_y = 30 \cdot 0.1 \cdot 15 + 30 \cdot 0.05 \cdot 15 + 20 \cdot 0.1 \cdot 10 + 30 \cdot 0.05 \cdot 20 + 20 \cdot 0.05 \cdot 30 = 147.5\,\text{cm}^3,$$
$$S_z = 60 \cdot 0.1 \cdot 30 + 20 \cdot 0.05 \cdot 40 + 30 \cdot 0.05 \cdot 15 + 30 \cdot 0.1 \cdot 50 + 30 \cdot 0.05 \cdot 30 = 437.5\,\text{cm}^3,$$
$$y'_T = S_z/A_x = 29.167\,\text{cm},$$
$$z'_T = S_y/A_x = 9.833\,\text{cm}.$$

Vztrajnostni momenti glede na težiščni osi y in z (slika 2.63) so

$$
\begin{aligned}
I_y &= \frac{60\cdot 0.1^3}{12} + z_T'^2\cdot 60\cdot 0.1 + \frac{20\cdot 0.05^3}{12} + (30-z_T')^2\cdot 20\cdot 0.05 + \\
&+ \frac{30\cdot 0.05^3}{12} + (20-z_T')^2\cdot 30\cdot 0.05 + \frac{0.1\cdot 30^3}{12} + (15-z_T')^2\cdot 30\cdot 0.1 + \\
&+ \frac{0.05\cdot 30^3}{12} + (15-z_T')^2\cdot 30\cdot 0.05 + \frac{0.1\cdot 20^3}{12} + (10-z_T')^2\cdot 20\cdot 0.1 = 1666.26\ \mathrm{cm}^4, \\
I_z &= \frac{0.1\cdot 60^3}{12} + (30-y_T')^2\cdot 60\cdot 0.1 + \frac{0.05\cdot 50^3}{12} + (y_T'-25)^2\cdot 50\cdot 0.05 + \\
&+ \frac{20\cdot 0.1^3}{12} + y_T'^2\cdot 20\cdot 0.1 + \frac{30\cdot 0.05^3}{12} + (30-y_T')^2\cdot 30\cdot 0.05 + \\
&+ \frac{30\cdot 0.1^3}{12} + (50-y_T')^2\cdot 30\cdot 0.1 = 5372.92\ \mathrm{cm}^4, \\
I_{yz} &= -[\,-60\cdot 0.1\cdot z_T'\cdot(30-y_T') - 30\cdot 0.05\cdot(20-z_T')\cdot(y_T'-15) + \\
&+ 20\cdot 0.05\cdot(30-z_T')\cdot(40-y_T') + 30\cdot 0.1\cdot(15-z_T')\cdot(50-y_T') + \\
&+ 30\cdot 0.05\cdot(30-y_T')\cdot(15-z_T') - 20\cdot 0.1\cdot(10-z_T')\cdot y_T'\,] = -272.917\ \mathrm{cm}^4.
\end{aligned}
$$



Slika 2.63: Težiščni osi y in z

Račun velikosti napetostne funkcije φ_{n1} in φ_{n2} na notranjih robovih odprtin. Kompatibilnostna pogoja za račun φ_{n1} in φ_{n2} zapišemo v obliki:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \end{bmatrix}
= 2\begin{bmatrix} A_{s1} \\ A_{s2} \end{bmatrix}.
$$

Pri tem je

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = a_{22} = \frac{20+30}{0.1} + \frac{20+30}{0.05} = 1500, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{20}{0.05} = -400, \\
&b_1 = b_2 = 2\cdot 20\cdot 30 = 1200\ \mathrm{cm}^2.
\end{aligned}
$$

Rešitev sistema enačb je

$$\varphi_{n1} = \varphi_{n2} = 1.091\ \mathrm{cm}^2.$$

Sedaj lahko izračunamo torzijski vztrajnostni moment I_x po enačbi (2.205)

$$I_x = 2 \sum_{i=1}^{N} \varphi_{ni}\, A_{si} = 2 \cdot 1.09091 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 2 = 2618.18\ \mathrm{cm}^4.$$

Izbočitveno funkcijo Φ izračunamo po enačbi (2.154)

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_P + A\, y - B\, z - \frac{S_{\Phi P}}{A_x}.$$

Pomožno izbočitveno funkcijo Φ_P izračunamo po enačbi (2.139)

$$\Phi_P = \Phi_\varphi - 2\, A_P.$$

Funkcijo Φ_φ izračunamo po enačbi (2.180)

$$\Phi_\varphi = -\int_{T_0}^{T} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\, d\zeta.$$

Ker je pri nosilcih s tankostenskim prečnim prerezom $\varphi = \varphi(\eta)$ (enačba (2.180)), zapišemo gornji izraz takole:

$$\Phi_\varphi = -\int_{T_0}^{T} \frac{d\varphi}{d\eta}\, d\zeta.$$

Ker integriramo vzdož osi $\eta = 0$, sledi iz (2.208)

$$\left.\frac{d\varphi}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}$$

oziroma

$$\Phi_\varphi = -\int_{T_0}^{T} \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}\, d\zeta.$$

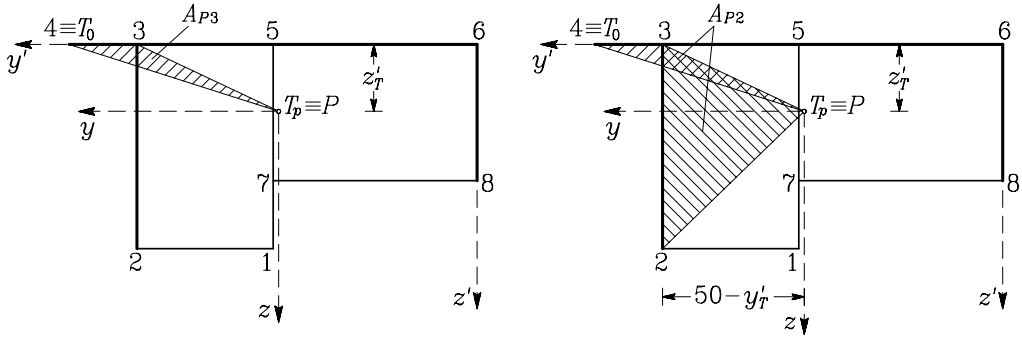
Pomožno izbočitveno funkcijo Φ_P izračunamo torej po enačbi

$$\Phi_P = -\int_{T_0}^{T} \frac{\varphi_{nA} - \varphi_{nB}}{t}\, d\zeta - 2\, A_P.$$

Izračunajmo najprej funkcijo Φ_φ za vozlišča 1 do 8. Za točko T_0 izberemo točko 4. Pri tem upoštevamo, da v točko 7 pridemo iz treh strani (po elementu 9, po elementu 8 in po elementu 6).

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\varphi 4} = 0,\\
&\Phi_{\varphi 3} = 0,\\
&\Phi_{\varphi 2} = -\frac{(0-\varphi_{n1})}{0.1}\,30 = \frac{\varphi_{n1}\,30}{0.1} = 327.273,\\
&\Phi_{\varphi 1} = \Phi_{\varphi 2} - \frac{(0-\varphi_{n1})}{0.05}\,20 = \Phi_{\varphi 2} + \frac{\varphi_{n1}\,20}{0.05} = 763.636,\\
&\Phi_{\varphi 7}\,(\text{el.}9) == \Phi_{\varphi 1} - \frac{(0-\varphi_{n1})}{0.05}\,10 = \Phi_{\varphi 1} + \frac{\varphi_{n1}\,10}{0.05} = 981.818,\\
&\Phi_{\varphi 5} = -\frac{(\varphi_{n1}-0)}{0.1}\,20 = -\frac{\varphi_{n1}\,20}{0.1} = -218.182,\\
&\Phi_{\varphi 6} = \Phi_{\varphi 5} - \frac{(\varphi_{n2}-0)}{0.1}\,30 = \Phi_{\varphi 5} - \frac{\varphi_{n2}\,30}{0.1} = -545.455,\\
&\Phi_{\varphi 8} = \Phi_{\varphi 6} - \frac{(\varphi_{n2}-0)}{0.1}\,20 = \Phi_{\varphi 6} - \frac{\varphi_{n2}\,20}{0.1} = -763.636,\\
&\Phi_{\varphi 7}\,(\text{el. }8) = \Phi_{\varphi 8} - \frac{(\varphi_{n2}-0)}{0.05}\,30 = \Phi_{\varphi 8} - \frac{\varphi_{n2}\,30}{0.05} = -1418.18,\\
&\Phi_{\varphi 7}\,(\text{el. }6) = \Phi_{\varphi 5} - \frac{(\varphi_{n1}-\varphi_{n2})}{0.05}\,20 = \Phi_{\varphi 5} = -218.182.
\end{aligned}
\tag{2.218}
$$

Izračunajmo še delež $-2\,A_P$ v enotah cm^2. Z $2\,A_P$ označimo dvojno velikost ploščine, ki jo določajo del srednje črte od T_0 do T ter premici $\overline{TP}$ in $\overline{PT_0}$ (glej razdelek 2.3.3). Pri tem moramo upoštevati, če smer T_0, T, $\overline{TP}$, $\overline{PT_0}$ obkroža ploskev $\mathscr{A}_P$ v pozitivni ali v negativni smeri. Za točko P izberemo koordinatno izhodišče ($y_P = z_P = 0$) (glej sliko 2.64):



Slika 2.64: Določitev ploščin A_P za vozlišči 3 in 2

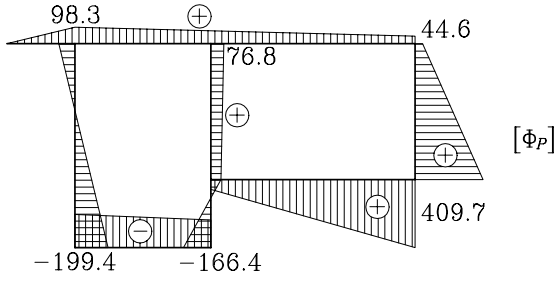
$$
\begin{aligned}
&-2\,A_{P4} = 0,\\
&-2\,A_{P3} = 10\,z_T' = 98.333,\\
&-2\,A_{P2} = -2\,A_{P3} - 30\,(50 - y_T') = -526.667,\\
&-2\,A_{P1} = -2\,A_{P2} - 20\,(30 - z_T') = -930.000,\\
&-2\,A_{P7}\,(\text{el.}9) = -2\,A_{P1} + 10\,(30 - y_T') = -921.667,\\
&-2\,A_{P5} = -2\,A_{P3} + 20\,z_T' = 295.000,\\
&-2\,A_{P6} = -2\,A_{P5} + 30\,z_T' = 590.000,\\
&-2\,A_{P8} = -2\,A_{P6} + 20\,y_T' = 1173.333,\\
&-2\,A_{P7}\,(\text{el.}8) = -2\,A_{P8} + 30\,(20 - z_T') = 1478.333,\\
&-2\,A_{P7}\,(\text{el.}6) = -2\,A_{P5} - 20\,(30 - y_T') = 278.333.
\end{aligned}
\tag{2.219}
$$

Vrednosti pomožne izbočitvene funkcije v vozliščih izračunamo tako, da (2.218) in (2.219) seštejemo. Vrednosti Φ_{Pi} za vozlišča prereza podajamo v preglednici 2.3.

Tabela 2.3: Pomožna izbočitvena funkcija Φ_P [cm^2] in pomiki $\bar{u}_x$, u_y, u_z [cm] v značilnih točkah prečnega prereza

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Φ_{Pi}	-166.4	-199.4	98.33	0.000	76.82	44.55	60.15	409.7
y_i	0.833	20.83	20.83	30.83	0.833	-29.17	0.8333	-29.17
z_i	20.17	20.17	-9.833	-9.833	-9.833	-9.833	10.17	10.17
Φ_i	-161.6	-108.9	95.83	40.38	-11.47	-172.4	33.89	254.8
$\bar{u}_{xi}$	-0.01493	-0.01090	0.00473	0.00050	-0.00346	-0.01576	0.00000	0.01687
u_{yi}	-0.7473	-0.7473	0.1694	0.1694	0.1694	0.1694	-0.4417	-0.4417
u_{zi}	-0.0693	0.5418	0.5418	0.8474	-0.0693	-0.9860	-0.0693	-0.9860

Potek pomožne izbočitvene funkcije Φ_P prikazujemo na sliki 2.65.



Slika 2.65: Pomožna izbočitvena funkcija Φ_P