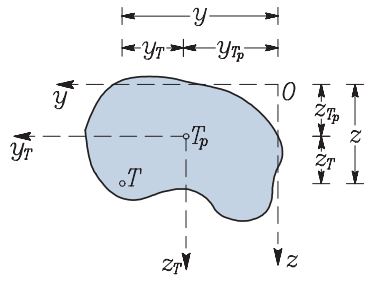
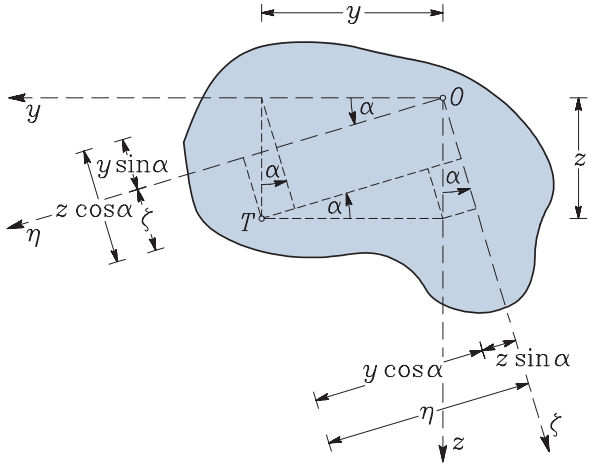


Slika 1.15: Koordinatni osi y_T in z_T potekata skozi težišče T_p prečnega prereza

Zasuk koordinatnega sistema

Sedaj si oglejmo vztrajnostne momente glede na dva med seboj zavrtena koordinatna sistema y, z in η, ζ, ki imata skupno koordinatno izhodišče v poljubni točki O. Kot med osjo y in osjo η označimo z α (slika 1.16). Zvezo med koordinatami poljubne točke T v obeh koordinatnih sistemih podajata enačbi (slika 1.16)

$$\eta = y\cos\alpha + z\sin\alpha, \qquad \zeta = -y\sin\alpha + z\cos\alpha.$$



Slika 1.16: Koordinatna os η je glede na os y zasukana za kot α

Osna vztrajnostna momenta in deviacijski vztrajnostni moment glede na osi η in ζ izračunamo z enačbami:

$$I_\eta = \int_{\mathscr{A}_x} \zeta^2\, dA_x = I_z \sin^2\alpha + 2I_{yz}\sin\alpha\,\cos\alpha + I_y\cos^2\alpha,$$

$$I_\zeta = \int_{\mathscr{A}_x} \eta^2 dA_x = I_z\cos^2\alpha - 2I_{yz}\sin\alpha\,\cos\alpha + I_y\sin^2\alpha,$$

$$I_{\eta\zeta} = -\int\limits_{\mathscr{A}_x} \eta\,\zeta\,dA_x = (I_z - I_y)\sin\alpha\,\cos\alpha + I_{yz}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Zadnje tri enačbe lahko z upoštevanjem zvez

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha), \qquad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

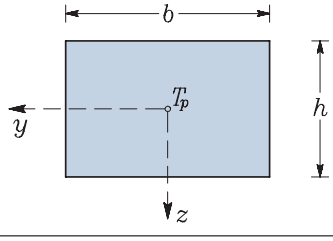
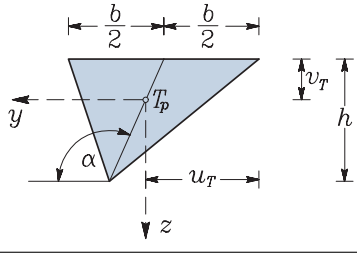
zapišemo z dvojno vrednostjo kota α

$$\boxed{\begin{aligned} I_\eta &= \frac{I_y+I_z}{2} + \frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\,\alpha + I_{yz}\sin 2\,\alpha,\\ I_\zeta &= \frac{I_y+I_z}{2} - \frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\,\alpha - I_{yz}\sin 2\,\alpha,\\ I_{\eta\zeta} &= -\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\,\alpha + I_{yz}\cos 2\,\alpha. \end{aligned}} \tag{1.99}$$

Težiščni vztrajnostni momenti enostavnih likov

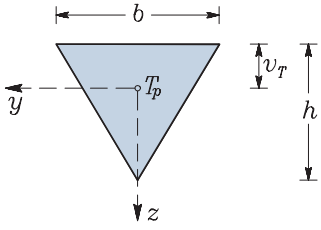
V preglednici 1.1 podajamo težiščne vztrajnostne momente za ravninske like enostavnih oblik. Vztrajnostne momente takih likov izračunamo, če upoštevamo enačbe (1.94), (1.98) in (1.99).

Tabela 1.1: Težiščni vztrajnostni momenti

Pravokotnik 	$I_y^T = \frac{bh^3}{12} = \frac{A_x h^2}{12}$ $I_z^T = \frac{hb^3}{12} = \frac{A_x b^2}{12}$ $I_{yz}^T = 0$ $A_x = bh$
Trikotnik 	$I_y^T = \frac{A_x h^2}{18}, \quad I_{yz}^T = \frac{A_x^2}{9}\psi$ $I_z^T = \frac{A_x b^2}{72}(3+4\psi^2)$ $\psi = \frac{h}{b}\mathrm{ctg}\alpha, \qquad A_x = \frac{bh}{2}$ $v_T = \frac{h}{3}, \qquad u_T = \frac{b}{6}(3-2\psi)$

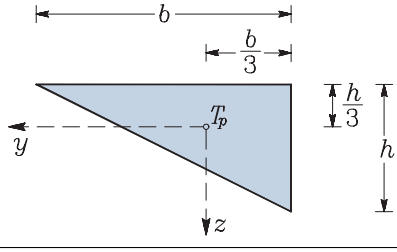
PREGLEDNICA 1.1 (nadaljevanje): Težiščni vztrajnostni momenti

Enakokraki trikotnik



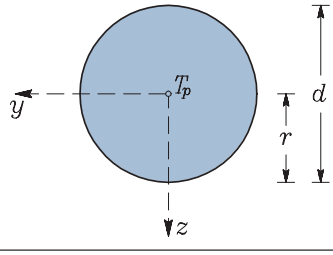
$$I_y^T = \frac{bh^3}{36} = \frac{A_x h^2}{18}$$
$$I_z^T = \frac{hb^3}{48} = \frac{A_x b^2}{24}$$
$$I_{yz} = 0$$
$$A_x = \frac{bh}{2}, \qquad v_T = \frac{h}{3}$$

Pravokotni trikotnik



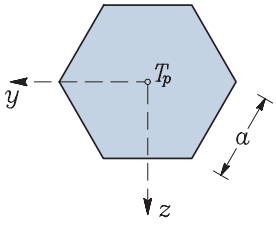
$$I_y^T = \frac{A_x h^2}{18}, \qquad I_z^T = \frac{A_x b^2}{18}$$
$$I_{yz}^T = \frac{A_x^2}{18}$$
$$A_x = \frac{bh}{2}$$

Krog



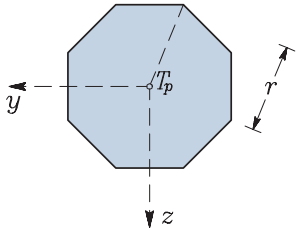
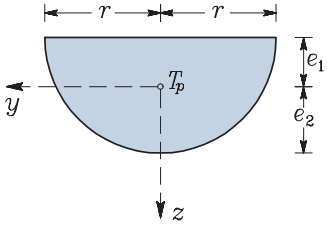
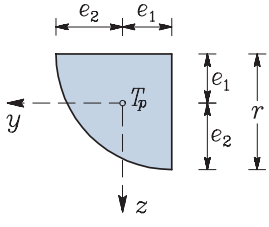
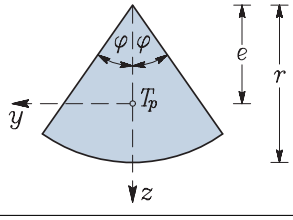
$$I_y^T = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{A_x d^2}{16}$$
$$I_z^T = \frac{\pi d^4}{64}, \qquad I_y^T = I_z^T$$
$$I_{yz}^T = 0$$
$$A_x = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$$

Šesterokotnik

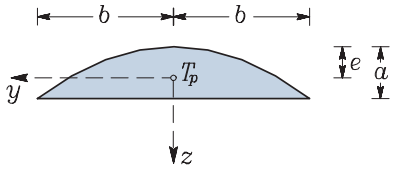
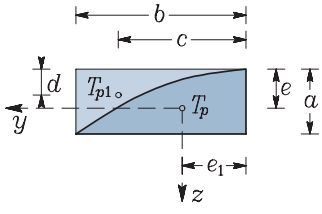


$$I_y^T = \frac{5\sqrt{3}a^4}{16}$$
$$I_z^T = \frac{5\sqrt{3}a^4}{16}, \qquad I_y^T = I_z^T$$
$$I_{yz}^T = 0$$
$$A_x = \frac{3\sqrt{3}\,a^2}{2}$$

PREGLEDNICA 1.1 (nadaljevanje): Težiščni vztrajnostni momenti

Osmerokotnik 	$I_y^T = \frac{1+2\sqrt{2}}{6} r^4$ $I_z^T = \frac{1+2\sqrt{2}}{6} r^4, \qquad I_y^T = I_z^T$ $I_{yz}^T = 0$ $A_x = 2\sqrt{2}\, r^2$
Polkrog 	$I_y^T = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right)$ $I_z^T = \frac{\pi r^4}{8}, \qquad I_{yz}^T = 0$ $A_x = \frac{\pi r^2}{2}$ $e_1 = \frac{4r}{3\pi}, \qquad e_2 = \frac{r}{3\pi}(3\pi - 4)$
Četrtina kroga 	$I_y^T = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$ $I_z^T = r^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right), \qquad I_y^T = I_z^T$ $I_{yz}^T = r^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right), \qquad A_x = \frac{\pi r^2}{4}$ $e_2 = \frac{r}{3\pi}(3\pi - 4), \qquad e_1 = \frac{4r}{3\pi}$
Krožni izsek 	$I_y^T = \frac{r^4}{72\varphi}(18\varphi^2 + 9\varphi \sin 2\varphi - 32 \sin^2 \varphi)$ $I_z^T = \frac{r^4}{8}(2\varphi - \sin 2\varphi), \qquad I_{yz}^T = 0$ $A_x = r^2 \varphi, \qquad e = \frac{2r \sin \varphi}{3\varphi}$

PREGLEDNICA 1.1 (nadaljevanje): Težiščni vztrajnostni momenti

Kvadratna parabola 	$I_y^T = \dfrac{16ba^3}{175}$ $I_z^T = \dfrac{4ab^3}{15}$, $A_x = \dfrac{4ab}{3}$,	$I_{yz}^T = 0$ $e = \dfrac{3a}{5}$
Polovica kvadratne parabole 	$I_y^T = \dfrac{8ba^3}{175}$, $I_{yz}^T = -\dfrac{a^2b^2}{60}$, $e = \dfrac{3a}{5}$, $c = \dfrac{3b}{4}$,	$I_z^T = \dfrac{19ab^3}{480}$ $A_x = \dfrac{2ab}{3}$ $e_1 = \dfrac{3b}{8}$ $d = \dfrac{4a}{10}$

Ekstremne vrednosti osnih vztrajnostnih momentov

Velikost vztrajnostnih momentov I_η in I_ζ v (1.99) se spreminja v odvisnosti od kota α. I_η in I_ζ imata ekstremni vrednosti pri kotih, ki ju določimo iz pogojev za ekstrem

$$\frac{dI_\eta}{d\alpha} = -(I_y - I_z)\sin 2\,\alpha + 2\,I_{yz}\cos 2\,\alpha = 0.$$

Iz te enačbe sledi

$$\mathrm{tg}2\,\alpha_\eta = \frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z}.$$

Z α_η smo označili kot med osema y in η, pri katerem ima I_η ekstremno vrednost. Podobno dobimo za vztrajnostni moment I_ζ

$$\frac{dI_\zeta}{d\alpha} = (I_y - I_z)\sin 2\,\alpha - 2\,I_{yz}\cos 2\,\alpha = 0$$

oziroma

$$\mathrm{tg}2\,\alpha_\zeta = \frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z}.$$

α_ζ je kot med osema y in η, pri katerem ima I_ζ ekstremno vrednost. Ugotovimo lahko, da smo dobili enaka izraza za α_η in α_ζ. Zato lahko uvedemo oznako α_g

$$\alpha_\eta = \alpha_\zeta \equiv \alpha_g.$$

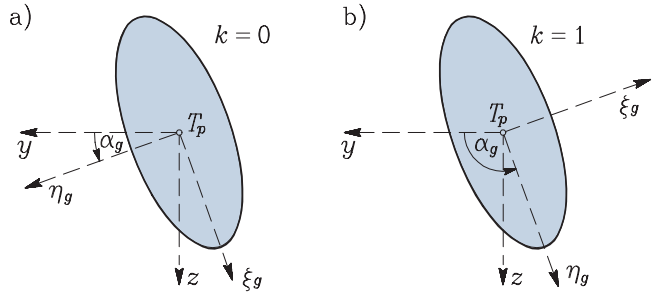
Kot α_g izračunamo iz enačbe

$$\boxed{\mathrm{tg}2\,\alpha_g = \frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z}} \tag{1.100}$$

in dobimo

$$2\,\alpha_g = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z}\right) + k\pi \quad \rightarrow \quad \alpha_g = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z}\right) + k\,\frac{\pi}{2} = \bar{\alpha}_g + k\,\frac{\pi}{2}, \qquad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{1.101}$$

Iz enačbe (1.101) sledi, da imata vztrajnostna momenta I_η in I_ζ ekstremni vrednosti glede na dve med seboj pravokotni osi. Imenujemo ju **glavni vztrajnostni osi** in označimo z η_g, ζ_g, pripadajoča vztrajnostna momenta pa **glavna vztrajnostna momenta** $I_{\eta g}, I_{\zeta g}$. Glavni vztrajnostni osi η_g in ζ_g izberemo tako, da podobno kot enotski vektorji $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ in $\vec{e}_z$ tudi enotski vektorji $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ tvorijo desnosučno bazo. Na sliki 1.17 prikazujemo primera, ko smo v enačbi (1.101) izbrali za k vrednost nič oziroma ena.



Slika 1.17: a) Kot $\alpha_g = \bar{\alpha}_g$, če je $k = 0$ b) Kot $\alpha_g = \bar{\alpha}_g + \pi/2$, če je $k = 1$

Velikosti I_{11} in I_{22} ekstremnih osnih vztrajnostnih momentov dobimo, če α_g iz (1.101) vstavimo v prvo izmed enačb (1.99), pripadajoči deviacijski vztrajnostni moment pa iz tretje izmed enačb (1.99). Za kot $\alpha = \alpha_g$ dobimo

$$I_{11} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\,\alpha_g + I_{yz}\sin 2\,\alpha_g, \tag{1.102}$$

$$I_{12} = -\frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\,\alpha_g + I_{yz}\cos 2\,\alpha_g = 0. \tag{1.103}$$

V enačbi (1.102) prenesemo prvi člen na levo stran in enačbo kvadriramo

$$\left(I_{11} - \frac{I_y + I_z}{2}\right)^2 = \frac{(I_y - I_z)^2}{4}\cos^2 2\,\alpha_g + I_{yz}^2\sin^2 2\,\alpha_g + (I_y - I_z)\,I_{yz}\,\sin 2\,\alpha_g\,\cos 2\,\alpha_g.$$

Če prištejem kvadrat enačbe (1.103)

$$I_{12}^2 = \frac{(I_y - I_z)^2}{4}\sin^2 2\,\alpha_g + I_{yz}^2\cos^2 2\,\alpha_g - (I_y - I_z)\,I_{yz}\,\sin 2\,\alpha_g\,\cos 2\,\alpha_g = 0$$

in dobimo

$$\left(I_{11} - \frac{I_y + I_z}{2}\right)^2 = \frac{(I_y - I_z)^2}{4}(\sin^2 2\,\alpha_g + \cos^2 2\,\alpha_g) + I_{yz}^2(\sin^2 2\,\alpha_g + \cos^2 2\,\alpha_g).$$

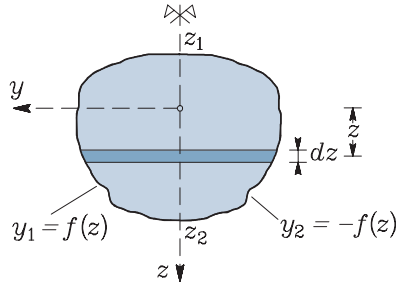
Upoštevamo, da je $\sin^2 2\,\alpha_g + \cos^2 2\,\alpha_g = 1$. Pri korenjenju enačbe moramo upoštevati pozitivni in negativni predznak. Zato dobimo dve rešitvi, I_{11} in I_{22}:

$$\boxed{I_{11,22} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}.} \tag{1.104}$$

Z enačbama (1.100) in (1.104) dobimo le glavni smeri in velikosti glavnih vztrajnostnih momentov, ne vemo pa, kateri glavni smeri pripada večji oziroma manjši glavni vztrajnostni moment iz enačbe (1.104). Zato smo uporabili novo oznako I_{11} oziroma I_{22} za glavna vztrajnostna momenta. Enačba (1.103) kaže, da je **deviacijski vztrajnostni moment glede na glavni vztrajnostni osi enak nič**.

Primer 1.2 *Določimo deviacijski vztrajnostni moment za prečni prerez $\mathscr{A}_x$, ki je simetričen glede na eno izmed koordinatnih osi.*

Vzemimo, da je prerez simetričen glede na os z (slika 1.18).



Slika 1.18: Prečni prerez $\mathscr{A}_x$ je simetričen glede na os z

Rob simetričnega prereza je podan z enačbama

$$y_1 = f(z), \qquad y_2 = -f(z).$$

Deviacijski vztrajnostni moment I_{yz} računamo po enačbi

$$I_{yz} = -\int_{\mathscr{A}_x} y\,z\,dA_x.$$

Integral po ploskvi prevedemo na dvojni integral

$$I_{yz} = -\int_{\mathscr{A}_x} y\,z\,dA_x = \int_{z_1}^{z_2}\int_{-f(z)}^{f(z)} y\,z\,dy\,dz = \int_{z_1}^{z_2} z\left(\int_{-f(z)}^{f(z)} y\,dy\right)dz = \int_{z_1}^{z_2} z\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-f(z)}^{f(z)}\right)dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{2}\left(f^2(z) - f^2(z)\right)\,dz = 0.$$

Dokazali smo, da je deviacijski vztrajnostni moment I_{yz} enak nič, če je ena od osi y ali z simetrijska os prereza. Iz enačbe (1.103) sledi, da sta osi y in z v tem primeru glavni vztrajnostni osi prečnega prereza.

Primer 1.3 *Določimo izraze za vztrajnostne momente glede na poljubni med seboj pravokotni osi η in ζ, če poznamo vztrajnostne momente glede na glavni vztrajnostni osi y in z! Ugotovimo tudi, kaj dobimo v primeru, ko sta glavna osna vztrajnostna momenta enaka!*

Če sta osi y in z glavni vztrajnostni osi, je I_{yz} enak nič. Enačbe (1.99) se poenostavijo

$$
\begin{aligned}
I_\eta &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\,\alpha,\\
I_\zeta &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\,\alpha,\\
I_{\eta\zeta} &= -\frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\,\alpha.
\end{aligned}
$$

Če sta glavna vztrajnostna momenta enaka $(I_y = I_z)$, iz gornjih enačb sledi

$$
I_\eta = I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2}, \qquad I_{\eta\zeta} = 0.
$$

To pomeni, da je v tem primeru deviacijski vztrajnostni moment glede na poljubni pravokotni osi η, ζ enak nič in sta zato tudi osi η in ζ glavni vztrajnostni osi. Taki liki so poljubni enakostranični mnogokotniki (enakostranični trikotnik, kvadrat, pravilni petkotnik), krog, enakokrake zvezde in podobno.

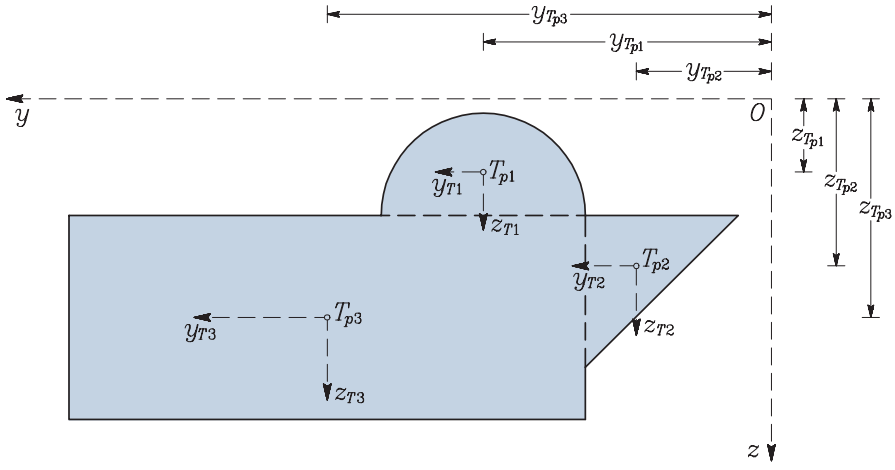
Primer 1.4 *Določimo vztrajnostne momente glede na poljubni osi y in z za prečni prerez, ki ga lahko razdelimo na enostavne geometrijske like (preglednica 1.1). Pri reševanju naloge uporabi enačbe za vzporedno premaknitev koordinatnega sistema (slika 1.15, enačba (1.98)).*

Vzemimo, da imamo prečni prerez, ki ga lahko razdelimo na polkrožno, trikotno in pravokotno površino in da sta osi y in z vzporedni stranicam pravokotnika (slika 1.19).

Iz podanih enačb sledi, da so vztrajnostni momenti glede na osi y in z za primer, ko smo prerez razdelili na n enostavnih površin, enaki:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
I_y &= \sum_{i=1}^{n} I_{yi} = \sum_{i=1}^{n} (I_{yi}^T + z_{T_{pi}}^2\, A_{xi}),\\
I_z &= \sum_{i=1}^{n} I_{zi} = \sum_{i=1}^{n} (I_{zi}^T + y_{T_{pi}}^2\, A_{xi}),\\
I_{yz} &= \sum_{i=1}^{n} I_{yzi} = \sum_{i=1}^{n} (I_{yzi}^T - y_{T_{pi}}\, z_{T_{pi}}\, A_{xi}).
\end{aligned}
}
\tag{1.105}
$$

Pri tem smo upoštevali, da lahko integral po celotnem prerezu A_x razdelimo na integrale po posameznih delnih površinah in tako dobljene vrednosti seštejemo. Težiščne vztrajnostne momente za posamezne enostavne like dobimo v preglednici 1.1.

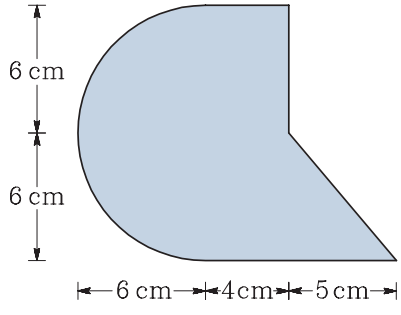


Slika 1.19: Prečni prerez razdelimo na enostavne like

V primeru, da ima prerez odprtino, lahko določimo vztrajnostne momente tako, da od vztrajnostnega momenta $I^{\text{b.o.}}$ za lik brez odprtine odštejemo vztrajnostni moment $I^{\text{od.}}$ odprtine. Za osni vztrajnostni moment I_y bi na ta način dobili:

$$I_y = I^{\text{b.o.}} - I_y^{\text{od.}}.$$

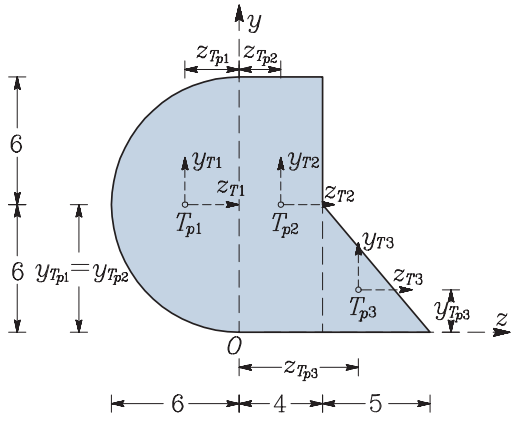
Primer 1.5 *Določimo glavne vztrajnostne momente ter smeri glavnih vztrajnostnih osi glede na težišče za lik, prikazan na sliki 1.20!*



Slika 1.20: Dimenzije in oblika lika

Nalogo rešimo tako, da najprej določimo vztrajnostne momente glede na poljubno izbrani osi y in z, nato pa z uporabo Steinerjevega pravila izračunamo vztrajnostne momente glede na težiščni osi.

1. Razdelitev prereza in izbira koordinatnega sistema (slika 1.21)



Slika 1.21: Prečni prerez razdelimo na polkrog, pravokotnik in trikotnik

2. Določitev lege težišča

$$y_{T_p} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{T_{pi}} A_{xi}}{\sum_{i=1}^{3} A_{xi}}, \qquad z_{T_p} = \frac{\sum_{i=1}^{3} z_{T_{pi}} A_{xi}}{\sum_{i=1}^{3} A_{xi}},$$

$$A_x = \frac{\pi}{2} \cdot 6^2 + 12 \cdot 4 + \frac{5 \cdot 6}{2} = 119.549\,\mathrm{cm}^2,$$

$$y_{T_p} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 6^2 \cdot 6 + 12 \cdot 4 \cdot 6 + \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot \frac{6}{3} \right) \frac{1}{119.549} = 5.50\,\mathrm{cm},$$

$$z_{T_p} = \left(\frac{\pi \cdot 6^2}{2} \left(-\frac{4 \cdot 6}{3 \cdot \pi} \right) + 12 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{6 \cdot 5}{2} \left(4 + \frac{5}{3} \right) \right) \frac{1}{119.549} = 0.31\,\mathrm{cm}.$$

Računanje lege težišča prikažimo še v preglednici 1.2:

Tabela 1.2: Določitev koordinat y_T in z_T

i	A_{xi}	$y_{T_{pi}}$	$z_{T_{pi}}$	$z_{T_{pi}} A_{xi}$	$y_{T_{pi}} A_{xi}$
1	56.55	6.000	−2.546	−144.00	339.29
2	48.00	6.000	2.000	96.00	288.00
3	15.00	2.000	5.667	85.00	30.00
$\sum$	119.55			37.00	657.29

Koordinati težišča sta

$$y_{T_p} = S_z/A_x = 657.29/119.55 = 5.50 \ \ \mathrm{cm},$$
$$z_{T_p} = S_y/A_x = 37/119.55 = 0.31 \ \ \mathrm{cm}.$$

Vztrajnostna momenta I_y, I_z in deviacijski moment I_{yz} izračunamo na dva načina. V prvem primeru izračunamo te količine najprej na osi y in z, nato pa ju po enačbah (1.98) izračunamo glede na težiščni osi y_T in z_T. V drugem primeru računamo vztrajnostne momente takoj na težiščni osi y_T in z_T.

3. Vztrajnostni momenti glede na osi y in z

$$I_y = 6^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\,\pi}\right) + \left(\frac{4\cdot 6}{3\cdot\pi}\right)^2 \frac{\pi\cdot 6^2}{2} + \frac{12\cdot 4^3}{12} + 2^2\cdot 12\cdot 4 + \frac{6\cdot 5}{2}\frac{5^2}{18} + \left(4+\frac{5}{3}\right)^2 \frac{6\cdot 5}{2} =$$
$$= 1267.47\ \mathrm{cm}^4,$$
$$I_z = \frac{\pi\cdot 6^4}{8} + 6^2\frac{\pi\cdot 6^2}{2} + \frac{4\cdot 12^3}{12} + 6^2\cdot 12\cdot 4 + \frac{6\cdot 5}{2}\frac{6^2}{18} + \left(\frac{6}{3}\right)^2 \frac{6\cdot 5}{2} = 4938.69\ \mathrm{cm}^4,$$
$$I_{yz} = \left(\frac{6\cdot 5}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{18} - \left(-\frac{4\cdot 6}{3\cdot\pi}\,6\,\frac{\pi\cdot 6^2}{2} + 6\cdot 2\cdot 12\cdot 4 + \frac{6}{3}\left(4+\frac{5}{3}\right)\frac{5\cdot 6}{2}\right) = 130.47\ \mathrm{cm}^4.$$

Račun vztrajnostnih momentov prikažimo še v preglednici 1.3:

Tabela 1.3: Račun vztrajnostnih momentov za osi y in z

i	A_{xi}	I^T_{yi}	I^T_{zi}	I^T_{yzi}	$y_{T_{pi}}$	$z_{T_{pi}}$	$y^2_{T_{pi}}\,A_{xi}$	$z^2_{T_{pi}}\,A_{xi}$	$y_{T_{pi}}\,z_{T_{pi}}\,A_{xi}$
1	56.55	142.25	508.94	0.00	6.000	−2.546	2035.75	366.69	−884.0
2	48.00	64.00	576.00	0.00	6.000	2.000	1728.00	192.00	576.0
3	15.00	20.83	30.00	12.50	2.000	5.667	60.00	481.67	170.0
$\sum$	119.55	227.08	1114.94	12.50			3823.75	1040.36	−118.0

Vztrajnostna in deviacijski moment so (enačbe (1.105))

$$I_y = 227.08 + 1040.36 = 1267.44\ \ \mathrm{cm}^4,$$
$$I_z = 1114.94 + 3823.75 = 4938.69\ \ \mathrm{cm}^4,$$
$$I_{yz} = 12.5 - (-118) = 130.5\ \ \mathrm{cm}^4.$$

4. Transformacija na težiščni osi y_T in z_T (enačbe (1.98))

$$I^T_y = I_y - z^2_{T_p}\,A_x = 1267.44 - 0.31^2\cdot 119.55 = 1255.99\ \mathrm{cm}^4,$$
$$I^T_z = I_z - y^2_{T_p}\,A_x = 4938.69 - 5.50^2\cdot 119.55 = 1324.83\ \mathrm{cm}^4,$$
$$I^T_{yz} = I_{yz} + y_{T_p}\,z_{T_p}\,A_x = 130.50 + 0.31\cdot 5.50\cdot 119.55 = 333.93\ \mathrm{cm}^4.$$

5. Račun vztrajnostnih momentov glede na težiščni osi y_T in z_T (enačbe (1.105))

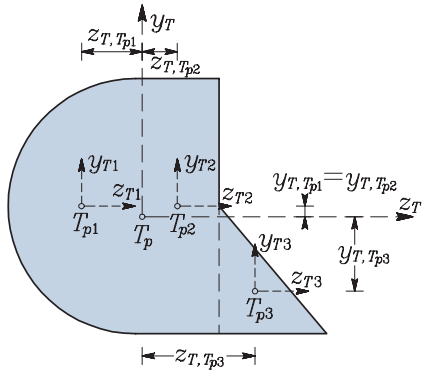
Račun vztrajnostnih momentov na težiščni osi, ne da bi prej izračunali vztrajnostne momente glede na osi y in z, prikazujemo v preglednici 1.4 (glej sliko 1.22):

Tabela 1.4: Vztrajnostni momenti za težiščni osi y_T in z_T

i	A_{xi}	I^T_{yi}	I^T_{zi}	I^T_{yzi}	$y_{T,T_{pi}}$	$z_{T,T_{pi}}$	$y^2_{T,T_{pi}}\,A_{xi}$	$z^2_{T,T_{pi}}\,A_{xi}$	$y_{T,T_{pi}}\,z_{T,T_{pi}}\,A_{xi}$
1	56.55	142.25	508.94	0.00	0.5019	−2.8560	14.24	461.24	−81.06
2	48.00	64.00	576.00	0.00	0.5019	1.6905	12.09	137.17	40.73
3	15.00	20.83	30.00	12.50	−3.4981	5.3572	183.55	430.49	−281.10
$\sum$	119.55	227.08	1114.94	12.50			209.89	1028.91	−321.43

Vztrajnostna in deviacijski moment so (enačbe (1.105))

$$
\begin{aligned}
I_y &= 227.08 + 1028.91 = 1255.99\ \text{cm}^4,\\
I_z &= 1114.94 + 209.89 = 1324.83\ \text{cm}^4,\\
I_{yz} &= 15.5 - (-321.43) = 333.93\ \text{cm}^4.
\end{aligned}
$$



Slika 1.22: Razdalje $y_{T,T_{pi}}$ in $z_{T,T_{pi}}$ glede na težiščni osi y_T in z_T

6. Velikosti glavnih osna vztrajnostnih momentov glede na težišče prečnega prereza (enačba (1.104))

$$
\begin{aligned}
I_{11,22} &= \frac{1256 + 1324.8}{2} + \sqrt{\left(\frac{1256 - 1324.8}{2}\right)^2 + 333.9^2},\\
I_{11} &= 1626.1\ \text{cm}^4, \qquad I_{22} = 954.7\ \text{cm}^4.
\end{aligned}
$$

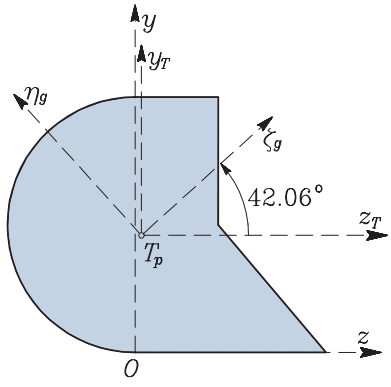
Kot glavnih vztrajnostnih osi izračunamo po enačbi (1.100)

$$
\text{tg}2\,\alpha_g = \frac{2 \cdot 333.9}{1256 - 1324.8} = -9.70 \quad \rightarrow \quad 2\,\alpha_g = -84.1^\circ \pm 180^\circ k \quad \rightarrow \quad \alpha_g = -42.06^\circ \pm \frac{k \cdot 180^\circ}{2}.
$$

Za $k = 0$, dobimo

$$I_{\eta g} = \frac{1256 + 1324.8}{2} + \frac{1256 - 1324.8}{2} \cdot \cos(-84.1^\circ) + 333.9 \cdot \sin(-84.1^\circ) = 954.7\,\mathrm{cm}^4.$$

Na sliki 1.23 prikazujemo glavni vztrajnostni osi η_g in ζ_g.



Slika 1.23: Lega težišča in smeri glavnih vztrajnostnih osia

Podobno izračunamo tudi drugi glavni vztrajnostni moment

$$I_{\zeta g} = \frac{1256 + 1324.8}{2} - \frac{1256 - 1324.8}{2} \cdot \cos(-84.1^\circ) - 333.9 \cdot \sin(-84.1^\circ) = 1625.47\,\mathrm{cm}^4.$$

Prečni prerezi poligonalne oblike

Geometrijske karakteristike prečnih prerezov so definirane s ploskovnimi integrali. Z uporabo Greenovega integralnega izreka oziroma Greenovo formulo[†] lahko površinske integrale izrazimo s krivuljnimi integrali:

$$\int_{\mathscr{A}_x} \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) dA_x = \int_{\mathscr{C}_x} (P_y\, dy + P_z\, dz). \tag{1.106}$$

Funkciji $P_y(y, z)$ in $P_z(y, z)$ sta zvezni in imata zvezna odvoda $\partial P_y/\partial z$ in $\partial P_z/\partial y$ znotraj in na robu območja $\mathscr{A}_x$. $\mathscr{C}_x$ je zvezna mejna krivulja, ki določa prečni prerez $\mathscr{A}_x$. Oglejmo si dva primera:

1. $P_z = 0$, $P_y = \dfrac{y^k\, z^{m+1}}{m+1}$; $\quad k, m = 0, 1, 2, \ldots$

V tem primeru dobimo z Greenovim izrekom

$$\int_{\mathscr{A}_x} y^k\, z^m\, dA_x = -\int_{\mathscr{C}_x} \frac{y^k\, z^{m+1}}{m+1}\, dy. \tag{1.107}$$

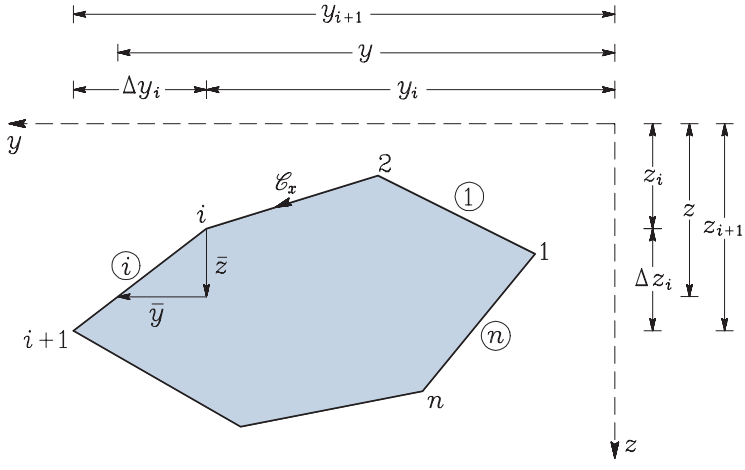
[†] J. Vrabec, Stokesov in Gaussov izrek I, Obzornik za matematiko in fiziko, 36, 1, 1-12, 1989,
J. Vrabec, Stokesov in Gaussov izrek II, Obzornik za matematiko in fiziko, 36, 2, 33-44, 1989.

2. $P_y = 0$, $P_z = \dfrac{y^{k+1}\, z^m}{k+1}$; $\quad k, m = 0, 1, 2, \ldots$

V tem primeru pa je

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} y^k\, z^m\, dA_x = \int\limits_{\mathscr{C}_x} \frac{y^{k+1}\, z^m}{k+1}\, dz. \tag{1.108}$$

Sedaj si oglejmo prečni prerez poligonalne oblike (slika 1.24).



Slika 1.24: Rob prečnega prereza določa poligonalna črta

Ugotovimo lahko, da veljajo naslednje zveze:

$$y = y_i + \bar{y}, \qquad z = z_i + \bar{z}, \qquad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \qquad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i.$$

Iz podobnosti trikotnikov sledi

$$\bar{y} = \frac{\Delta y_i}{\Delta z_i}\, \bar{z}.$$

S tem sta določeni zvezi $y = y(\bar{z})$ in $z = z(\bar{y})$

$$y = y_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta z_i}\, \bar{z}, \qquad z = z_i + \frac{\Delta z_i}{\Delta y_i}\, \bar{y}.$$

Sedaj si oglejmo primer, da je $m = 0$, $k = 0$ in uporabimo enačbo (1.108):

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x = A_x = \int\limits_{\mathscr{C}_x} y\, dz = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{z_i}^{z_{i+1}} y\, dz,$$

kjer je n število robov poligonalnega prečnega prereza. Integral izrazimo z novo spremenljivko $\bar{z}$

$$z = z_i \quad \rightarrow \quad \bar{z} = 0, \qquad z = z_{i+1} \quad \rightarrow \quad \bar{z} = z_{i+1} - z_i = \Delta z_i.$$

Če upoštevamo, da je $dz = d\bar{z}$ in izrazimo y z $\bar{z}$, dobimo

$$A_x = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\Delta z_i} \left(y_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta z_i}\,\bar{z} \right) d\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i\,\Delta z_i + \frac{\Delta y_i}{\Delta z_i}\frac{\Delta z_i^2}{2} \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i \left(y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{2} \right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} + y_i)(z_{i+1} - z_i).$$

Pri računu moramo upoštevati, da je $y_{n+1} = y_1$, $z_{n+1} = z_1$.

V nadaljevanju prikažemo primere za različne vrednosti m in k. Pri tem predstavlja prvi integral izraz po enačbi (1.107), drugi integral pa po enačbi (1.108).

$$\begin{aligned}
m = 0,\ \ k = 0 \quad &\rightarrow \quad A_x = -\int_{\mathscr{C}_x} z\,dy = \underline{\int_{\mathscr{C}_x} y\,dz}, \\
m = 1, k = 0 \quad &\rightarrow \quad S_y = \underline{-\frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}_x} z^2\,dy} = \int_{\mathscr{C}_x} y\,z\,dz, \\
m = 0,\ \ k = 1 \quad &\rightarrow \quad S_z = \underline{-\int_{\mathscr{C}_x} y\,z\,dy} = \underline{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{C}_x} y^2\,dz}, \\
m = 2, k = 0 \quad &\rightarrow \quad I_y = \underline{-\int_{\mathscr{C}_x} \frac{z^3}{3}\,dy} = \underline{\int_{\mathscr{C}_x} y\,z^2\,dz}, \\
m = 0,\ \ k = 2 \quad &\rightarrow \quad I_z = -\int_{\mathscr{C}_x} y^2\,z\,dy = \underline{\int_{\mathscr{C}_x} \frac{y^3}{3}\,dz}, \\
m = 1, k = 1 \quad &\rightarrow \quad I_{yz} = \int_{\mathscr{C}_x} \frac{y\,z^2}{2}\,dy = \underline{-\int_{\mathscr{C}_x} \frac{y^2\,z}{2}\,dz}.
\end{aligned} \tag{1.109}$$

Podčrtani so tisti integrali, s katerimi izračunamo geometrijske karakteristike, podane v nadaljevanju:

$$A_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} + y_i)(z_{i+1} - z_i),$$
$$S_y = -\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^2 + z_i\,z_{i+1} + z_i^2),$$
$$S_z = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} (z_{i+1} - z_i)(y_{i+1}^2 + y_i\,y_{i+1} + y_i^2),$$
$$I_y = -\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^3 + z_{i+1}^2\,z_i + z_{i+1}\,z_i^2 + z_i^3),$$

$$I_z = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(z_{i+1}-z_i)(y_{i+1}^3 + y_{i+1}^2\, y_i + y_{i+1}\, y_i^2 + y_i^3),$$

$$I_{yz} = -\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n}(z_{i+1}-z_i)\left(z_{i+1}(3\, y_{i+1}^2 + 2\, y_{i+1}\, y_i + y_i^2) + z_i(3\, y_i^2 + 2\, y_{i+1}\, y_i + y_{i+1}^2)\right)$$

Pri vseh izrazih velja

$$y_{n+1} = y_1, \qquad z_{n+1} = z_1.$$

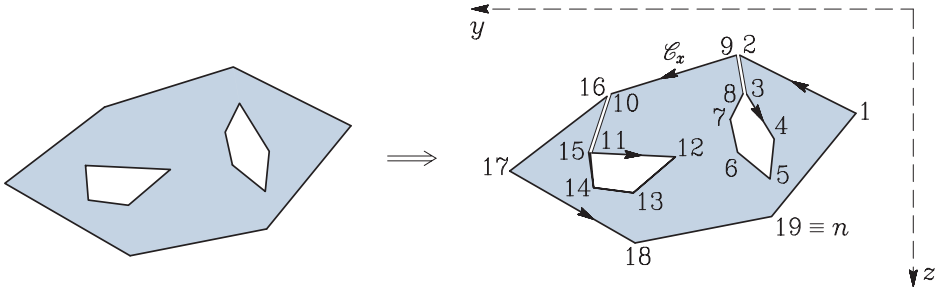
Kordinati težišča y_{T_p} in z_{T_p} določimo iz enačb (1.95)

$$y_{T_p} = \frac{S_z}{A_x}, \qquad z_{T_p} = \frac{S_y}{A_x}.$$

Vztrajnostni momenti glede na vzporedno premaknjeni osi y_T, z_T skozi težišče T_p prečnega prereza izračunamo iz enačb (1.98):

$$I_y^T = I_y - z_{T_p}^2 A_x, \qquad I_z^T = I_z - y_{T_p}^2 A_x, \qquad I_{yz}^T = I_{yz} + y_{T_p}\, z_{T_p}\, A_x.$$

V primeru, ko ima prečni prerez notranje odprtine, moramo vozlišča sklenjene krivulje $\mathscr{C}_x$ podati tako, kot kaže slika 1.25. Po robu prereza vedno potujemo tako, da je material na levi strani, praznina pa na desni.



Slika 1.25: Rob prečnega prereza obkrožimo v pozitivni smeri

1.2.8 Računanje pomikov in zasukov

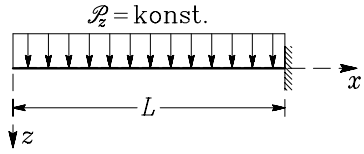
Primer 1.6 *Izračunajmo upogibnico za konzolo, obteženo s konstantno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$ (slika 1.26)! Osi y in z sta glavni vztrajnostni osi. Nalogo rešimo po enačbah* (1.80) *in* (1.87).

Za rešitev diferencialne enačbe upogibnice za navpični pomik w (enačba (1.80))

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}.$$

potrebujemo upogibni moment M_y. V obravnavanem primeru je

$$M_y = -\frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{2}.$$



Slika 1.26: Konzola je obtežena s konstantno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$

Diferencialno enačbo upogibnice

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right) = \frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{2\, E\, I_y}$$

množimo z dx in integriramo (nedoločeno integriranje)

$$\int d\left(\frac{dw}{dx}\right) = \int \frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{2\, E\, I_y} dx \quad \rightarrow \quad \frac{dw}{dx} = \frac{\mathscr{P}_z\, x^3}{6\, E\, I_y} + C_1. \tag{1.110}$$

Zadnjo enačbo še enkrat množimo z dx in integriramo

$$\int dw = \int \left(\frac{\mathscr{P}_z\, x^3}{6\, E\, I_y} + C_1\right) dx \quad \rightarrow \quad w = \frac{\mathscr{P}_z\, x^4}{24\, E\, I_y} + C_1\, x + C_2. \tag{1.111}$$

Konstanti C_1 in C_2 izračunamo iz **robnih pogojev**

$$x = L: \quad w = 0 \quad \text{in} \quad \frac{dw}{dx} = 0. \tag{1.112}$$

Robna pogoja (1.112) izrazimo s pomikom w (enačbi (1.110) in (1.111))

$$\frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{24\, E\, I_y} + C_1\, L + C_2 = 0, \quad \frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{6\, E\, I_y} + C_1 = 0$$

in dobljeni enačbi rešimo

$$C_1 = -\frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{6\, E\, I_y}, \quad C_2 = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{8\, E\, I_y}. \tag{1.113}$$

Konstanti (1.113) vstavimo v (1.110) in (1.111) in dobimo izraz za navpični pomik w in za zasuk ω_y (enačba (1.59)) za poljubno točko na osi nosilca

$$w = \frac{\mathscr{P}_z}{24\, E\, I_y}(x^4 - 4\, L^3\, x + 3\, L^4), \quad \omega_y = -\frac{dw}{dx} = \frac{\mathscr{P}_z}{6\, E\, I_y}(L^3 - x^3).$$

Pomik w_A in zasuk ω_{Ay} točke A pri $x = 0$ sta:

$$w_A = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{8\, E\, I_y}, \qquad \omega_{Ay} = \frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{6\, E\, I_y}.$$

Nalogo rešimo še po enačbah (1.87)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\mathscr{P}_z}{E\, I_y}. \tag{1.114}$$

Enačbo (1.114) štirikrat integriramo (nedoločeno integriranje)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3w}{dx^3} &= \frac{\mathscr{P}_z\,x}{E\,I_y} + C_1,\\
\frac{d^2w}{dx^2} &= \frac{\mathscr{P}_z\,x^2}{2\,E\,I_y} + C_1\,x + C_2,\\
\frac{dw}{dx} &= \frac{\mathscr{P}_z\,x^3}{6\,E\,I_y} + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2\,x + C_3,\\
w &= \frac{\mathscr{P}_z\,x^4}{24\,E\,I_y} + C_1\,\frac{x^3}{6} + C_2\,\frac{x^2}{2} + C_3\,x + C_4.
\end{aligned}
\tag{1.115}
$$

Ker rešujemo diferencialno enačbo četrtega reda, nastopajo v rešitvi štiri konstante. Upoštevati moramo štiri robne pogoje

$$
\begin{aligned}
x = 0: &\quad M_y = 0, \quad N_z = 0,\\
x = L: &\quad w = 0, \quad \omega_y = 0.
\end{aligned}
\tag{1.116}
$$

Ker sta pogoja pri $x = 0$ izražena s silami, sta to **statična robna pogoja**. Pogoja pri $x = L$ sta izražena s pomikom in zasukom in sta zato **kinematična robna pogoja**. Statična robna pogoja izrazimo s pomikom w, če upoštevamo enačbi (1.81) in (1.83)

$$
M_y = -E\,I_y\frac{d^2w}{dx^2}, \quad N_z = -E\,I_y\frac{d^3w}{dx^3} + \mathscr{M}_y. \tag{1.117}
$$

V obravnavanem primeru lahko zapišemo statična robna pogoja takole:

$$
\frac{d^2w}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3w}{dx^3} = 0.
$$

Vse štiri robne pogoje (1.116) zapišemo z upoštevanjem enačbe (1.115)

$$
\begin{aligned}
&C_2 = 0,\\
&C_1 = 0,\\
&\frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{24\,E\,I_y} + C_1\,\frac{L^3}{6} + C_2\,\frac{L^2}{2} + C_3\,L + C_4 = 0,\\
&\frac{\mathscr{P}_z\,L^3}{6\,E\,I_y} + C_1\,\frac{L^2}{2} + C_2\,L + C_3 = 0.
\end{aligned}
$$

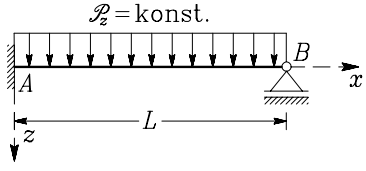
Enačbe rešimo in dobimo $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\mathscr{P}_z\,L^3/(6\,E\,I_y)$, $C_4 = \mathscr{P}_z\,L^4/(8\,E\,I_y)$. Konstanti C_1, C_2, C_3 in C_4 vstavimo v (1.115) in dobimo izraz za navpični pomik w in za zasuk ω_y za poljubno točko na osi nosilca

$$
w = \frac{\mathscr{P}_z}{24\,E\,I_y}(x^4 - 4\,L^3\,x + 3\,L^4), \quad \omega_y = -\frac{dw}{dx} = \frac{\mathscr{P}_z}{6\,E\,I_y}(L^3 - x^3).
$$

Dobili smo enak rezultat, kot v primeru, ko smo reševali diferencialno enačbo drugega reda. Prečno silo N_z in upogibni moment M_y lahko izračunamo iz pomika w po enačbah (1.117)

$$N_z = -E\,I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = -\mathscr{P}_z\,x, \quad M_y = -E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{\mathscr{P}_z\,x^2}{2}.$$

Primer 1.7 *Izračunaj pomike in notranje sile za enkrat statično nedoločen nosilec ($n = 3+1-3\cdot 1 = 1$) na sliki 1.27! Glavni osi prečnega prereza sovpadata s koordinatnima osema y in z*



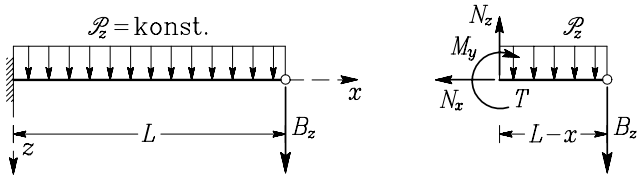
Slika 1.27: Nosilec je obtežen s konstantno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$

Diferencialna enačba drugega reda

Konstrukcija je statično nedoločena. Če jo rešujemo z diferencialno enačbo drugega reda

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E I_y},$$

jo moramo spremeniti v statično določeno konstrukcijo. To lahko naprimer naredimo tako, da odstranimo desno podporo in njen vpliv nadomestimo z reakcijo B_Z, katere velikosti še ne poznamo (slika 1.28).



Slika 1.28: Statično določena konstrukcija je obtežena s podano obtežbo $\mathscr{P}_z$ in neznano silo B_Z

Upogibni moment M_y je

$$M_y = -\frac{\mathscr{P}_z\,(L-x)^2}{2} - B_Z\,(L-x).$$

Diferencialno enačbo upogibnice

$$E\,I_y\,\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\mathscr{P}_z\,(L^2 - 2\,L\,x + x^2)}{2} + B_Z\,(L-x)$$

dvakrat integriramo:

$$E\,I_y\,\frac{dw}{dx} = \frac{\mathscr{P}_z}{2}\left(L^2\,x - L\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + B_Z\left(L\,x - \frac{x^2}{2}\right) + C_1,$$

$$E\,I_y\,w = \frac{\mathscr{P}_z}{2}\left(L^2\,\frac{x^2}{2} - L\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + B_Z\left(L\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1\,x + C_2.$$

Tri neznanke C_1, C_2 in B_Z izračunamo iz robnih pogojev:

$$x = 0: \quad w(0) = 0, \quad \omega_y(0) = -\left.\frac{dw}{dx}\right|_0 = 0,$$
$$x = L: \quad w(L) = 0.$$

Iz prvega pogoja sledi, da je $C_2 = 0$, iz drugega, da je $C_1 = 0$, iz tretjega pa, da je $B_Z = -3\,\mathscr{P}_z\,L/8$. Tako dobimo:

$$w = \frac{\mathscr{P}_z\,x^2}{48\,E\,I_y}(3\,L^2 - 5\,L\,x + 2\,x^2),$$
$$\omega_y = -\frac{dw}{dx} = -\frac{\mathscr{P}_z\,x}{48\,E\,I_y}(6\,L^2 - 15\,L\,x + 8\,x^2),$$
$$M_y = -E\,I_y\,\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\mathscr{P}_z}{8}(-L^2 + 5\,L\,x - 4\,x^2),$$
$$N_z = -E\,I_y\,\frac{d^3w}{dx^3} + \mathscr{M}_y = \mathscr{P}_z\left(\frac{5\,L}{8} - x\right).$$

Prečno silo določa linearna funkcija. Robni vrednosti sta

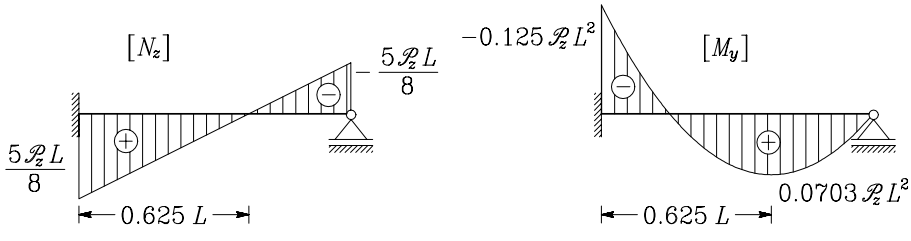
$$N_z(+0) = \frac{5\,\mathscr{P}_z\,L}{8}, \qquad N_z(L-0) = \frac{-3\,\mathscr{P}_z\,L}{8}.$$

Upogibni moment določa kvadratna funkcija. Vrednost pri $x = 0$ je $M_y(+0) = -\mathscr{P}_z\,L^2/8$, pri $x = L$ pa $M_y(L-0) = 0$. Mesto ekstremne vrednosti dobimo iz

$$\frac{dM_y}{dx} = N_z + \mathscr{M}_y = \mathscr{P}_z\left(\frac{5\,L}{8} - x\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{\text{ekst}} = \frac{5\,L}{8} = 0.625\,L.$$

$$M_{y,\text{ekst}} = 0.0703125\,\mathscr{P}_z\,L^2.$$

Diagrama za prečno silo in upogibni moment prikazujemo na sliki 1.29.



Slika 1.29: Diagram prečne sile N_z in upogibnega momenta M_y

Navpični pomik w:

Mesto ekstremne vrednosti pomika w izračunamo iz pogoja:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\mathscr{P}_z}{48\,E\,I_y}(6\,L^2\,x - 15\,L\,x^2 + 8\,x^3) = 0 \quad \rightarrow \quad x\,(6\,L^2 - 15\,L\,x + 8\,x^2) = 0.$$

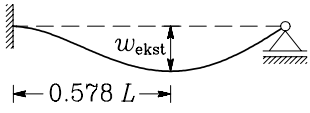
Rešitev je: $x_1 = 0$ ter

$$x_{2,3} = \frac{15\,L \pm \sqrt{15^2 L^2 - 4\cdot 8\cdot 6\,L^2}}{16} \quad \rightarrow \quad x_2 = 1.296\,L, \qquad x_3 = 0.578\,L = x_{\text{ekst}}.$$

Ekstremna velikost pomika:

$$w_{\text{ekst}} = 0.005416\,\frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{48\,E\,I_y}$$

Velja še: $x = 0:\ w = 0$ in $x = L:\ w = 0$. Potek pomika w prikazujemo na sliki 1.30.



Slika 1.30: Potek navpičnega pomika w

Ker B_Z poznamo, lahko reakcije izračunamo iz ravnotežnih enačb za sile, prikazane na sliki 1.28 ali pa iz ravnotežnih pogojev za podpori: $A_X = -N_x(0)$, $A_Z = -N_z(0)$, $M_{Ay} = -M_y(0)$, $B_Z = N_z(L)$.

Nalogo rešimo še po enačbi četrtega reda (1.87)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\mathscr{P}_z}{E\,I_y}. \tag{1.118}$$

Enačbo (1.118) štirikrat integriramo

$$\begin{aligned}
E\,I_y\,\frac{d^3 w}{dx^3} &= \mathscr{P}_z\,x + C_1,\\
E\,I_y\,\frac{d^2 w}{dx^2} &= \mathscr{P}_z\,\frac{x^2}{2} + C_1\,x + C_2,\\
E\,I_y\,\frac{dw}{dx} &= \mathscr{P}_z\,\frac{x^3}{6} + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2\,x + C_3,\\
E\,I_y\,w &= \mathscr{P}_z\,\frac{x^4}{24} + C_1\,\frac{x^3}{6} + C_2\,\frac{x^2}{2} + C_3\,x + C_4.
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Ker rešujemo diferencialno enačbo četrtega reda, nastopajo v rešitvi štiri konstante. Upoštevati moramo štiri robne pogoje (tri kinematične in en statični robni pogoj)

$$\begin{aligned}
x = 0: &\quad w(0) = 0, \quad \omega_y(0) = -\left.\frac{dw}{dx}\right|_0 = 0,\\
x = L: &\quad w(L) = 0, \quad M_y(L-0) = 0.
\end{aligned}$$

Statični robni pogoj izrazimo s pomiki

$$\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{(L-0)} = 0.$$

Izraze (1.119) vstavimo v robne pogoje in izračunamo konstante C_1 do C_4:

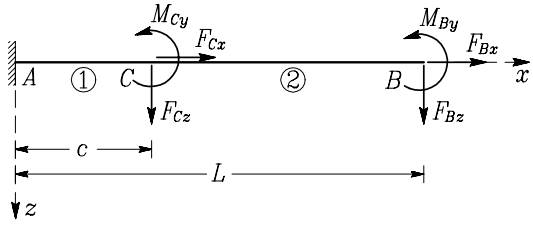
$$C_1 = -\frac{5\,\mathscr{P}_z\,L}{8}, \qquad C_2 = \frac{\mathscr{P}_z\,L^2}{8}, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = 0.$$

Dobimo enak rezultat kot prej:

$$w = \frac{\mathscr{P}_z\,x^2}{48\,E\,I_y}(3\,L^2 - 5\,L\,x + 2\,x^2).$$

Notranje sile lahko izračunamo iz pomika w po enačbah (1.81) in (1.83), reakcije pa iz ravnotežnih enačb za podpori.

Primer 1.8 *Raven konzolni nosilec konstantnega prečnega prereza je vpet v točki A, v točkah C in B pa deluje obtežba F_{Cx}, F_{Cz}, M_{Cy} in F_{Bx}, F_{Bz}, M_{By} (slika 1.31)! Določimo pomika u in w ter zasuk ω_y v krajišču B! Glavni osi prečnega prereza sovpadata s koordinatnima osema y in z.*



Slika 1.31: Konzola je obtežena s točkovnimi silami in s točkovnima momentoma

Pomika u in w ter zasuk ω_y določamo z integriranjem diferencialnih enačb (1.80) in (1.59)

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{E\,A_x}, \qquad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y}{E\,I_y}, \qquad \omega_y = -\frac{dw}{dx}.$$

Ploščina prečnega prereza A_x in vztrajnostni moment prečnega prereza I_y glede na os y se vzdolž osi x ne spreminjata.

Osno silo N_x in upogibni moment M_y izračunamo za vsako polje posebej.

Polje 1 ($0 \le x \le c$):

$$N_x = F_{Cx} + F_{Bx}, \qquad M_y = M_{By} + M_{Cy} - F_{Bz}(L - x) - F_{Cz}(c - x).$$

Polje 2 ($c \le x \le L$):

$$N_x = F_{Bx}, \qquad M_y = M_{By} - F_{Bz}(L - x).$$

Integracijsko območje moramo razdeliti na odseke (polja), znotraj katerih sta notranji količini N_x in M_y zvezni funkciji. Račun pomika u v smeri osi x opravimo za vsako polje posebej

$$E\,A_x \frac{du^{(1)}}{dx} = F_{Cx} + F_{Bx}, \qquad E\,A_x \frac{du^{(2)}}{dx} = F_{Bx}.$$

Enačbi pomnožimo z dx in integriramo

$$E\,A_x u^{(1)} = F_{Cx}\,x + F_{Bx}\,x + C_1, \qquad E\,A_x u^{(2)} = F_{Bx}\,x + C_2. \tag{1.120}$$

Za primere, ko integracijsko območje razdelimo na polja, integracijske konstante določimo iz robnih pogojev in iz **pogojev geometrijske skladnosti**. S pogojem geometrijske skladnosti opišemo zveznost pomikov in zasukov na meji med poljema. Pri določitvi konstant C_1 in C_2 v enačbah (1.120) je robni pogoj

$$x = 0: \quad u^{(1)} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0,$$

pogoj geometrijske skladnosti pa je

$$x = c: \quad u^{(1)} = u^{(2)} \quad \rightarrow \quad F_{Cx}\,c + F_{Bx}\,c = F_{Bx}\,c + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = F_{Cx}\,c.$$

Pomik u v polju 1 je

$$u^{(1)} = \frac{1}{E\,A_x}(F_{Cx} + F_{Bx})x,$$

pomik u v polju 2 pa

$$u^{(2)} = \frac{1}{E\,A_x}(F_{Bx}\,x + F_{Cx}\,c).$$

Pomik točke B je

$$u_B = u^{(2)}(x = L) = \frac{1}{E\,A_x}(F_{Bx}\,L + F_{Cx}\,c).$$

Tudi račun pomika w v smeri osi z opravimo za vsako polje posebej

$$E\,I_y \frac{d^2 w^{(1)}}{dx^2} = -M_{By} - M_{Cy} + F_{Bz}\,(L - x) + F_{Cz}\,(c - x), \qquad E\,I_y \frac{d^2 w^{(2)}}{dx^2} = -M_{By} + F_{Bz}\,(L - x).$$

Enačbi dvakrat integriramo

$$\begin{aligned}
E\,I_y \frac{dw^{(1)}}{dx} &= -M_{By}\,x - M_{Cy}\,x + F_{Bz}\left(L\,x - \frac{x^2}{2}\right) + F_{Cz}\left(c\,x - \frac{x^2}{2}\right) + D_1,\\
E\,I_y\,w^{(1)} &= -M_{By}\frac{x^2}{2} - M_{Cy}\frac{x^2}{2} + F_{Bz}\left(L\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + F_{Cz}\left(c\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + D_1\,x + D_2,\\
E\,I_y \frac{dw^{(2)}}{dx} &= -M_{By}\,x + F_{Bz}\left(L\,x - \frac{x^2}{2}\right) + D_3,\\
E\,I_y\,w^{(2)} &= -M_{By}\frac{x^2}{2} + F_{Bz}\left(L\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + D_3\,x + D_4.
\end{aligned} \tag{1.121}$$

Konstante D_1 do D_4 določimo iz robnih pogojev in pogojev geometrijske skladnosti. Robna pogoja v točki A zapišemo z enačbama:

$$x = 0: \quad w^{(1)} = 0, \qquad \omega_y^{(1)} = -\frac{dw^{(1)}}{dx} = 0.$$

Pogoja geometrijske skladnosti sta

$$x = c: \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \qquad \omega_y^{(1)} = \omega_y^{(2)} \quad \rightarrow \quad \frac{dw^{(1)}}{dx} = \frac{dw^{(2)}}{dx}.$$

Če enačbe (1.121) vstavimo v robna pogoja in pogoja geometrijske skladnosti, lahko izračunamo neznane konstante D_1 do D_4:

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = 0, \qquad D_3 = F_{Cz}\frac{c^2}{2} - M_{Cy}\,c, \qquad D_4 = M_{Cy}\frac{c^2}{2} - F_{Cz}\frac{c^3}{6}.$$

Pomik w v polju 1 je

$$w^{(1)} = \frac{1}{E\,I_y}\left(-M_{By}\frac{x^2}{2} - M_{Cy}\frac{x^2}{2} + F_{Bz}\left(L\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + F_{Cz}\left(c\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right).$$

pomik w v polju 2 pa

$$w^{(2)} = \frac{1}{E\,I_y}\left(-M_{By}\frac{x^2}{2} + F_{Bz}\left(L\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{F_{Cz}\,c^2}{6}(3\,x - c) + \frac{M_{Cy}\,c}{2}(c - 2\,x)\right).$$

Pomik točke B je

$$w_B = w^{(2)}(x = L) = \frac{1}{E\,I_y}\left(-M_{By}\frac{L^2}{2} + F_{Bz}\frac{L^3}{3} - M_{Cy}\frac{2\,L\,c - c^2}{2} + F_{Cz}\frac{3\,L\,c^2 - c^3}{6}\right).$$

Zasuk ω_y v polju 1 je

$$\omega_y^{(1)} = -\frac{dw^{(1)}}{dx} = \frac{1}{E\,I_y}\left(M_{By}\,x + M_{Cy}\,x - F_{Bz}\left(L\,x - \frac{x^2}{2}\right) - F_{Cz}\left(c\,x - \frac{x^2}{2}\right)\right),$$

zasuk ω_y v polju 2 pa

$$\omega_y^{(2)} = -\frac{dw^{(2)}}{dx} = \frac{1}{E\,I_y}\left(M_{By}\,x - F_{Bz}\left(L\,x - \frac{x^2}{2}\right) - F_{Cz}\frac{c^2}{2} + M_{Cy}\,c\right).$$

Zasuk ω_{By} točke B je

$$\omega_{By} = -\frac{dw^{(2)}(x = L)}{dx} = \frac{1}{E\,I_y}\left(M_{By}\,L - F_{Bz}\frac{L^2}{2} + M_{Cy}\,c - F_{Cz}\frac{c^2}{2}\right).$$

Pomike in zasuke v točki B zapišimo še v matrični obliki

$$\left\{\begin{array}{c} u_B \\ \\ w_B \\ \\ \omega_{By} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{L}{E\,A_x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{L^3}{3\,E\,I_y} & -\dfrac{L^2}{2\,E\,I_y} \\ 0 & -\dfrac{L^2}{2\,E\,I_y} & \dfrac{L}{E\,I_y} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_{Bx} \\ \\ F_{Bz} \\ \\ M_{By} \end{array}\right\} +$$

$$+ \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{c}{E\,A_x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3\,L\,c^2 - c^3}{6\,E\,I_y} & -\dfrac{2\,L\,c - c^2}{E\,I_y} \\ 0 & -\dfrac{c^2}{2\,E\,I_y} & \dfrac{c}{E\,I_y} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} F_{Cx} \\ \\ F_{Cz} \\ \\ M_{Cy} \end{array}\right\}$$

ali krajše

$$\{u_B\} = [D_{BB}]\{F_B\} + [D_{BC}]\{F_C\}. \tag{1.122}$$

Če na konzolo deluje le obtežba $\{F_B\}$, je pomik $\{u_B\}$ enak

$$\{\, u_B(\{F_B\})\,\} = [D_{BB}]\{F_B\}.$$

Če pa deluje le obtežba $\{F_C\}$, je pomik $\{u_B\}$ enak

$$\{\, u_B(\{F_C\})\,\} = [D_{BC}]\{F_C\}.$$

Če delujeta obe obtežbi istočasno, velja enačba (1.122). Vidimo torej, da velja **zakon superpozicije**, ki ga zapišemo z enačbo

$$\{\, u_B(\{F_B\} + \{F_C\})\,\} = \{\, u_B(\{F_B\})\,\} + \{\, u_B(\{F_C\})\,\}.$$

To pomeni, da lahko pomik neke točke konstrukcije zaradi vpliva skupine sil izračunamo kot vsoto pomikov zaradi vpliva vsake posamezne sile. **Zakon superpozicije velja le, če je zveza med pomiki in obtežbo linearna. Pri teoriji, ki jo obravnavamo, to je majhne pomike in linearno elastični material**, je zveza med pomiki in obtežbo linearna, zato velja zakon superpozicije.

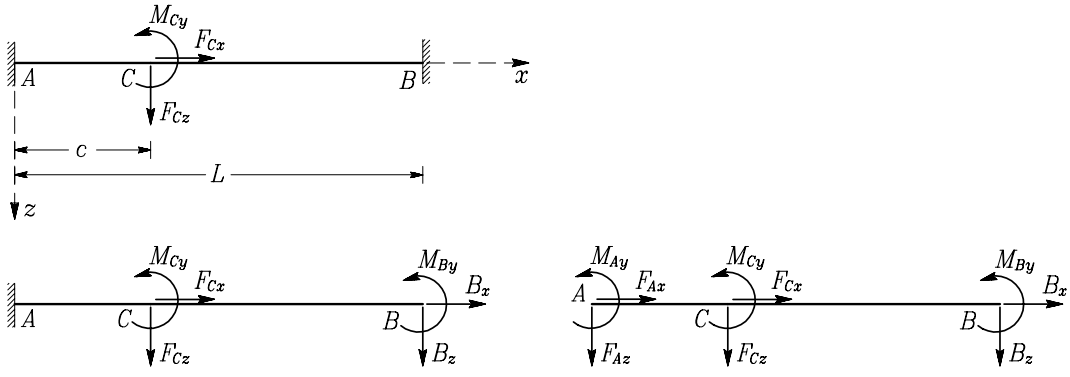
Primer 1.9 *Obojestransko vpeti nosilec je obremenjen s točkovnimi silami in momentom pri $x = c$ (slika 1.32). Osi y in z sta glavni vztrajnostni osi prečnega prereza. Izračunajmo reakciji in vpetostni moment v podpori B!*

Če je nosilec vpet na obeh krajiščih, so predpisani naslednji kinematični pogoji

$$u_{Ax} = \omega_{Ay} = u_{Az} = u_{Bx} = \omega_{By} = u_{Bz} = 0.$$

Nosilec je trikrat statično nedoločen $n = 3 + 3 - 3 \cdot 1 = 3$. Šestih reakcij $A_x, M_{Ay}, A_z, B_x, M_{By}$ in B_z ne moremo določiti iz treh ravnotežnih pogojev. Zato odstranimo podporo v točki B in njen vpliv

nadomestimo z ustreznimi reakcijami B_x, M_{By} in B_z. Te določimo tako, da je izpolnjeno kinematičnim robnim pogojem na mestu odstranjene podpore: $u_{Bx} = \omega_{By} = u_{Bz} = 0$.



Slika 1.32: Statično nedoločeni nosilec in enakovredni statično določeni nosileca

Na osnovi rezultatov prejšnjega primera in z upoštevanjem ustreznih robnih pogojev lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
u_B &= \frac{L}{E\,A_x} B_x + \frac{c}{E\,A_x} F_{Cx} = 0, \\
\omega_{By} &= -\frac{L^2}{2\,E\,I_y} B_z + \frac{L}{E\,I_y} M_{By} - \frac{c^2}{2\,E\,I_y} F_{Cz} + \frac{c}{E\,I_y} M_{Cy} = 0, \\
w_B &= \frac{L^3}{3\,E\,I_y} B_z - \frac{L^2}{2\,E\,I_y} M_{By} + \frac{3\,c^2\,L - c^3}{6\,E\,I_y} F_{Cz} - \frac{2\,c\,L - c^2}{2\,E\,I_y} M_{Cy} = 0.
\end{aligned}
$$

To je sistem treh linearnih enačb za tri neznanke B_x, M_{By} in B_z. Njegova rešitev je

$$
\begin{aligned}
B_x &= -\frac{c}{L} F_{Cx}, \\
M_{By} &= \left(\left(\frac{c}{L}\right)^3 - \left(\frac{c}{L}\right)^2 \right) L\,F_{Cz} - \left(3\left(\frac{c}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{L}\right) \right) M_{Cy}, \\
B_z &= \left(2\left(\frac{c}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{L}\right)^2 \right) F_{Cz} - 6\left(\left(\frac{c}{L}\right)^2 - \left(\frac{c}{L}\right) \right) \frac{M_{Cy}}{L}.
\end{aligned}
\tag{1.123}
$$

Notranje sile izračunamo iz ravnotežnih pogojev za sile, prikazane na sliki 1.32. Za polje 1 dobimo:

$$
N_x = F_{Cx} + B_x, \quad N_z = F_{Cz} + B_z, \quad M_y = -B_z\,(L - x) - F_{Cz}\,(c - x) + M_{By} + M_{Cy},
$$

za polje 2 pa:

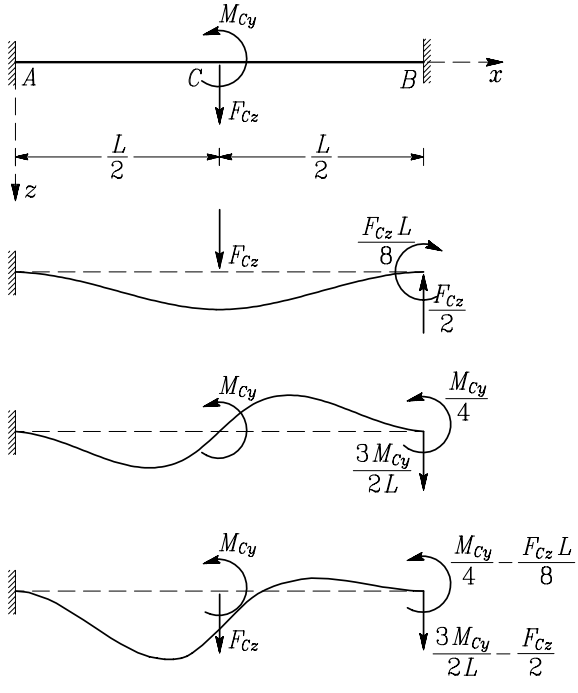
$$
N_x = B_x, \quad N_z = B_z, \quad M_y = -B_z\,(L - x) + M_{By}.
$$

Reakcije v podpori A izračunamo iz ravnotežnih pogojev:

$$
\begin{aligned}
A_x &= -F_{Cx} - B_x = \left(\frac{c}{L} - 1\right) F_{Cx}, \\
A_z &= -F_{Cz} - B_z = \left(-2\left(\frac{c}{L}\right)^3 + 3\left(\frac{c}{L}\right)^2 - 1\right) F_{Cz} + \left(\left(\frac{c}{L}\right)^2 - \left(\frac{c}{L}\right)\right) \frac{6\,M_{Cy}}{L}, \\
M_{Ay} &= -M_{Cy} - M_{By} + F_{Cz}\,c + B_z\,L = \\
&= \left(\left(\frac{c}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{L}\right) + 1\right) c\,F_{Cz} - \left(3\left(\frac{c}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{L}\right) + 1\right) M_{Cy}.
\end{aligned}
\tag{1.124}
$$

Za posebni primer, ko je $c = 0.5\,L$, dobimo

$$
B_z = -\frac{1}{2}\,F_{Cz} + \frac{3}{2}\frac{M_{Cy}}{L}, \qquad M_{By} = -\frac{1}{8}\,L\,F_{Cz} + \frac{1}{4}\,M_{Cy}.
$$



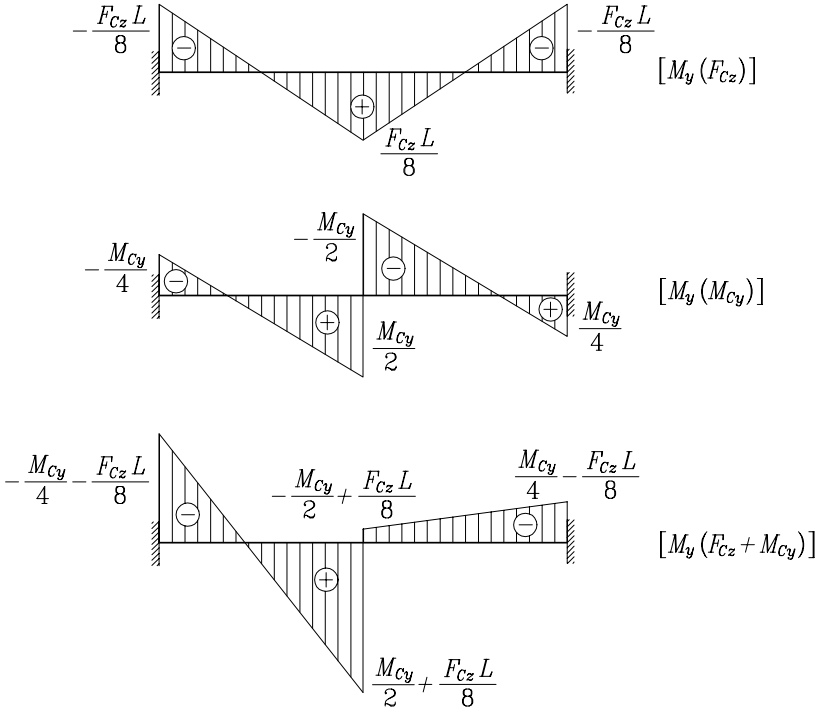
Slika 1.33: Deformirana lega nosilca zaradi obtežb F_{Cz} in M_{Cy} in njunega skupnega vpliva

Na sliki 1.33 prikazujemo deformiranje nosilca posebej zaradi sile F_{Cz} in posebej zaradi momenta M_{Cy}. Vidimo, da sta obe upogibnici taki, da sta pomika in zasuka v obeh podporah enaka nič. Upogibnica zaradi sile F_{Cz} je simetrična na simetrijsko os nosilca, upogibnica zaradi momenta M_{Cy} pa je anti-

simetrična. Upogibni moment M_y izračunamo iz ravnotežnih enačb za vsako obtežbo posebej

$$
\begin{aligned}
x = 0: \quad & \sum M_y^A = 0 \quad \rightarrow \quad M_y(F_{Cz}) = -\frac{F_{Cz}\,L}{8}, \qquad M_y(M_{Cy}) = -\frac{M_{Cy}}{4}. \\
x = L/2: \quad & \sum M_y^C = 0 \quad \rightarrow \quad M_y(F_{Cz}) = \frac{F_{Cz}\,L}{8}, \qquad M_y^{\text{levo}}(M_{Cy}) = \frac{M_{Cy}}{2}, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad M_y^{\text{desno}}(M_{Cy}) = -\frac{M_{Cy}}{2}.
\end{aligned}
$$

Ker vzdolž nosilca ni prečne obtežbe, je diagram upogibnih momentov odsekoma linearen. V podporah je upogibni moment različen od nič. Upogibni moment na sredini nosilca je nezvezen, saj na tem mestu deluje točkovni moment M_{Cy}. Poteka upogibnega momenta zaradi sile F_{Cz} in zaradi momenta M_{Cy} sta prikazujemo na sliki 1.34.

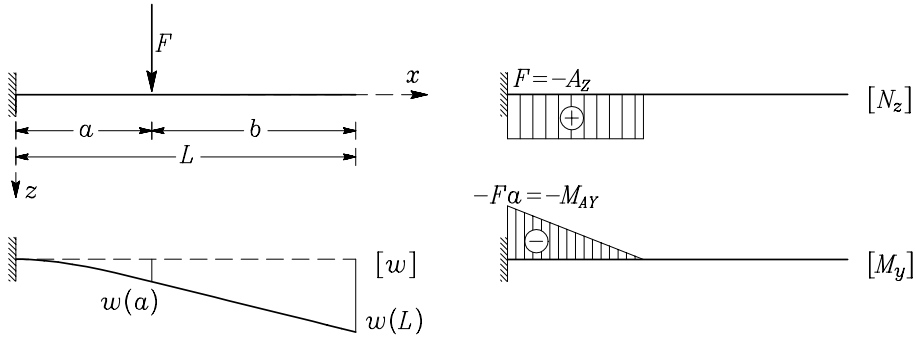


Slika 1.34: Upogibni moment M_y zaradi obtežb F_{Cz} in M_{Cy} in njunega skupnega učinkovanja

V preglednici 1.5 podajamo izraze za pomike in zasuke ter reakcije za različno podprte in obtežene nosilce z ravno osjo. V preglednici so narisani tudi diagrami prečne sile ter upogibnega momenta. Če so pomiki znani, izračunamo prečno silo N_z po drugi izmed enačb (1.83), upogibni moment M_y pa po prvi izmed enačb (1.81). V preglednici so z A_z, M_{Ay}, B_z in M_{Bz} označene vpetostne reakcije v podporah A in B.

Tabela 1.5: Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

a) Upogibnica konzole obtežene s silo F



Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{F\,x^2}{6\,E\,I_y}(3\,a - x), \quad \omega_{y1} = -\frac{F\,x}{2\,E\,I_y}(2\,a - x).$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{F\,a^2}{6\,E\,I_y}(3\,x - a), \quad \omega_{y2} = -\frac{F\,a^2}{2\,E\,I_y}.$$

Pomik in zasuk pri $x = a$:

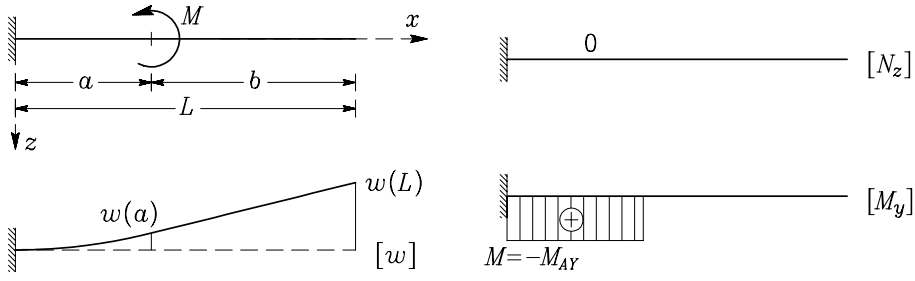
$$w(a) = \frac{F\,a^3}{3\,E\,I_y}, \quad \omega_y(a) = -\frac{F\,a^2}{2\,E\,I_y}.$$

Pomik in zasuk pri $x = L$:

$$w(L) = \frac{F\,a^2}{6\,E\,I_y}(3\,L - a), \quad \omega_y(L) = -\frac{F\,a^2}{2\,E\,I_y}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

b) Upogibnica konzole obtežene z momentom M



Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = -\frac{M\,x^2}{2\,E\,I_y}, \quad \omega_{y1} = \frac{M\,x}{E\,I_y}.$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{M\,a}{2\,E\,I_y}(a - 2\,x), \quad \omega_{y2} = \frac{M\,a}{E\,I_y}.$$

Pomik in zasuk pri $x = a$:

$$w(a) = -\frac{M\,a^2}{2\,E\,I_y}, \quad \omega_y(a) = \frac{M\,a}{E\,I_y}.$$

Pomik in zasuk pri $x = L$:

$$w(L) = \frac{M\,a}{2\,E\,I_y}(a - 2\,L), \quad \omega_y(L) = \frac{M\,a}{E\,I_y}.$$