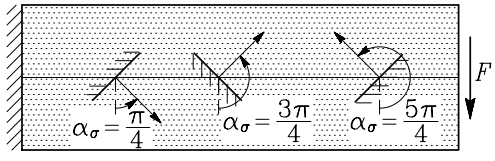
Smeri glavnih normalnih napetosti vzdolž osi nosilca

Vzdolž nevtralne osi oklepajo normale ravnin glavnih napetosti s smerjo x naslednje kote

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y}\, z = 0 \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{tg} 2\,\alpha_\sigma = -\frac{2\,\sigma_{xz}}{0} = \pm\infty$$

$$2\,\alpha_\sigma = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\,\pi}{2},\ \pm\ldots \qquad \rightarrow \qquad \alpha_\sigma = \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\,\pi}{4},\ \pm\ldots$$

Naklon ravnin glavnih napetosti je torej $\pi/4$ oziroma $3\pi/4$ (slika 1.123).



Slika 1.123: Smeri glavnih normalnih napetosti vzdolž osi nosilca

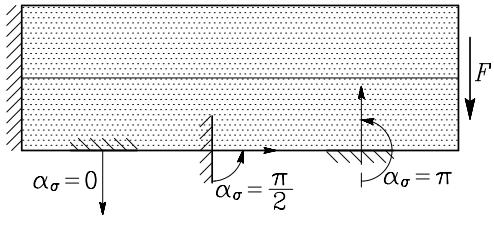
Smeri glavnih normalnih napetosti vzdolž robov nosilca

Vzdolž robov nosilca $\pm h/2$ pa dobimo

$$S_y^*(\pm h/2) = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xz} = -\frac{N_z\, S_y^*(z = \pm h/2)}{b^*(z = \pm h/2)\, I_y} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha_\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,\alpha_\sigma = \pm 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\,\pi, \ldots \quad \rightarrow \quad \alpha_\sigma = 0, \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\pi, \ldots$$

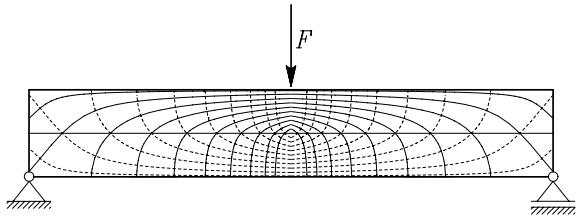
Naklon ravnin glavnih napetosti na zgornjem in spodnjem robu je 0 ali $\pi/2$ (slika 1.124).



Slika 1.124: Smeri glavnih normalnih napetosti vzdolž robu nosilca

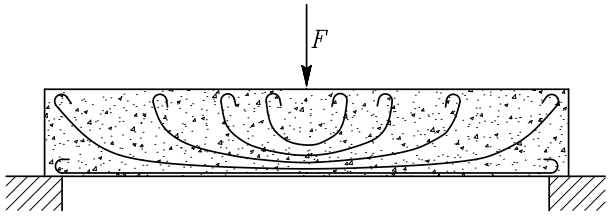
Velja torej, da v obravnavanem primeru oklepajo trajektorije glavnih napetosti vzdolž nevtralne osi kote 45° glede na to os, vzdolž robov nosilca pa ima ena skupina trajektorij smer pravokotno na rob, druga pa smer roba.

Na sliki 1.125 je prikazan potek trajektorij glavnih napetosti v prostoležečem nosilcu iz homogenega in izotropnega materiala. Na nosilec deluje sila na polovici razpetine. Neprekinjene črte predstavljajo smeri glavnih tlačnih napetosti, črtkane pa smeri glavnih nateznih napetosti.

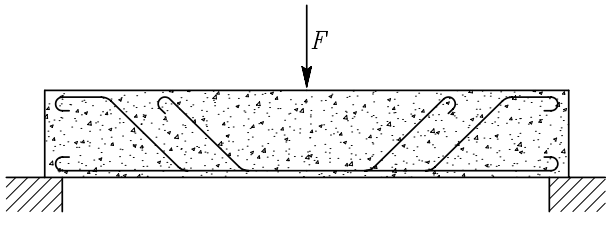


Slika 1.125: Potek trajektorij glavnih normalnih napetosti v prostoležečem nosilcu

Trajektorije glavnih napetosti so pomembne pri armiranem betonu. Beton je krhek material in že pri razmeroma majhnih nateznih napetostih razpoka. Da se konstrukcija ne bi porušila, vanjo vstavimo jeklene palice (“armaturo”), ki namesto betona prevzamejo natezne napetosti. Najboljša namestitev teh palic je v smeri trajektorij nateznih napetosti (slika 1.126). Tako oblikovana armatura bi zelo zapletla račun in izdelavo armirano betonskih konstrukcij. Zato se armaturo oblikuje tako, da le približno sledi smeri nateznih trajektorij. Primer prikazujemo na sliki 1.127.



Slika 1.126: Optimalna namestitev armature



Slika 1.127: Običajna lega armature

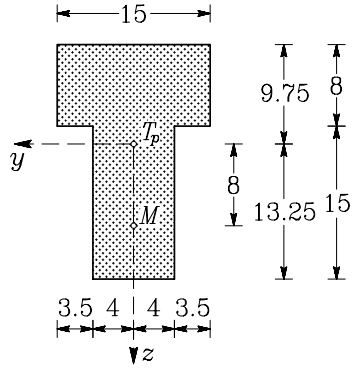
Primer 1.32 *V prečnem prerezu linijskega nosilca v ravnini (x, z) delujeta prečna sila $N_z = -2.25$ kN in upogibni moment $M_y = -2.25$ kNm. Določi smer in velikost glavnih normalnih napetosti v točki M s koordinatama $y = 0$ cm in $z = 8$ cm! Dimenzije prečnega prereza podajamo na sliki 1.128.*

Karakteristike prečnega prereza smo izračunali v primeru 1.16. Vzdolžna normalna napetost σ_{xx}^M v točki M je

$$\sigma_{xx}^M = \frac{M_y}{I_y} z_M = \frac{-225000}{10825} 8 = -166.282 \ \mathrm{N/cm^2}.$$

Strižna napetost σ_{xz}^M v točki M je

$$\sigma_{xz}^M = -\frac{N_z\, S_y^*(z=8)}{b^*(z=8)\, I_y}.$$



Slika 1.128: Dimenzije T prereza

Statični moment S_y delnega prereza $\mathscr{A}_x^*$ izračunamo po enačbi (1.195), ki smo jo izpeljali v primeru 1.16

$$S_y^*(z=8) = 4\cdot 8^2 - 702.25 = -446.25\ \mathrm{cm}^3.$$

Strižna napetost σ_{xz}^M v točki M je torej

$$\sigma_{xz}^M = \frac{2250\cdot(-446.25)}{8\cdot 10825} = -11.594\ \mathrm{N/cm}^2.$$

Velikosti glavnih normalnih napetosti v točki M sta

$$\sigma_{11}^M = \frac{1}{2}\left[-166.282 + \sqrt{166.282^2 + 4\cdot 11.594^2}\right] = 0.805\ \mathrm{N/cm}^2,$$
$$\sigma_{22}^M = \frac{1}{2}\left[-166.282 - \sqrt{166.282^2 + 4\cdot 11.594^2}\right] = -167.086\ \mathrm{N/cm}^2.$$

Ravnine glavnih normalnih napetosti so

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_\sigma^M = -\frac{2\cdot 11.594}{166.282} = -0.139$$

$$2\,\alpha_\sigma^M = -7.939^\circ + k\,\pi, \quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$$

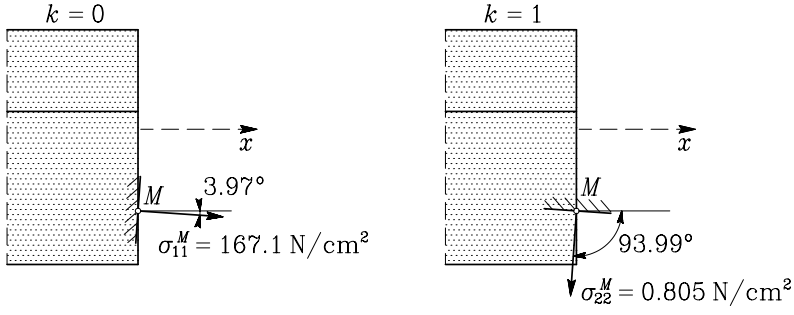
Za $k = 0$ je $2\,\alpha_\sigma = -7.939^\circ$ in $\alpha_\sigma = -3.969^\circ$. Normalna napetost v ravnini z naklonskim kotom normale $\alpha_\sigma = -3.969^\circ$ je

$$\sigma_{22}^M = -\frac{166.282}{2} - \frac{166.282}{2}\cos(-7.939^\circ) + 11.594\sin(-7.939^\circ) = -167.086\ \mathrm{N/cm}^2.$$

Za $k = -1$ je $2\,\alpha_\sigma = -187.939°$ in $\alpha_\sigma = -93.969°$. Normalna napetost v ravnini z naklonskim kotom normale $\alpha_\sigma = -93.969°$ je

$$\sigma_{11}^M = -\frac{166.282}{2} - \frac{166.282}{2}\cos(-187.939°) + 11.594\sin(-187.939°) = 0.805\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Glavne normalne napetosti v točki M prikazujemo na sliki 1.129.



Slika 1.129: Smeri in velikosti glavnih normalnih napetosti v točki M

Ekstremni vrednosti strižne napetosti v točki M sta

$$\tau_{OMANNUMERAL2} = \pm\frac{1}{2}(0.805 + 167.086) = \pm 83.945\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Ravnine ekstremnih strižnih napetosti v točki M so

$$\mathrm{tg}\,2\,\alpha_\tau = \frac{-166.282}{2\,(-11.594)} = 7.171,$$
$$2\,\alpha_\tau = -82.061° + k\,\pi, \quad k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots .$$

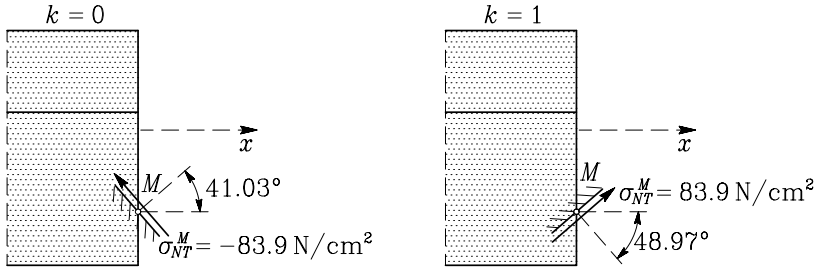
Za $k = 0$ je $2\,\alpha_\tau = 82.061°$ in $\alpha_\tau = 41.031°$. Strižna napetost v ravnini z normalo $\alpha_\sigma = 41.031°$ je

$$\sigma_{NT} = -\frac{166.282}{2}\sin(82.061°) - 11.594\cos(82.061°) = -83.954\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Za $k = -1$ je $2\alpha_\tau = -97.939°$ in $\alpha_\sigma = -48.969°$. Strižna napetost v ravnini z normalo $\alpha_\sigma = -48.969°$ je

$$\sigma_{NT} = -\frac{166.282}{2}\sin(-97.939°) - 11.594\cos(-97.939°) = 83.954\ \mathrm{N/cm^2}.$$

Ekstremne strižne napetosti v točki M prikazujemo na sliki 1.130.



Slika 1.130: Smeri in velikosti glavnih strižnih napetosti v točki M

1.5 Strižni in prečni normalni napetosti v nosilcu s spremenljivim prečnim prerezom

Obravnavamo nosilec z ravno osjo, katerega geometrija je podana z lego osi nosilca in obliko prečnega prereza v poljubni točki na osi nosilca. Prečni prerezi so posod pravokotni na os nosilca, ki poteka skozi težišča prečnih prerezov.

1.5.1 Krivočrtne koordinate ploskve ter diferencial ploščine ploskve

V parametrski obliki zapišemo enačbo ploskve $\mathscr{S}$ z enačbami †

$$x = f_1(q_1, q_2), \quad y = f_2(q_1, q_2), \quad z = f_3(q_1, q_2) \tag{1.217}$$

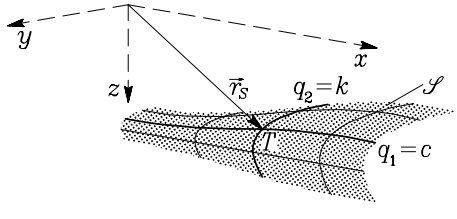
oziroma

$$\vec{r}_S = \vec{f}(q_1, q_2). \tag{1.218}$$

Z x, y in z so označene pravokotne Kartezične koordinate, q_1 in q_2 sta posplošeni koordinati. Če vzamemo za q_1 konstantno vrednost, na primer $q_1 = c$, dobimo enačbe koordinatne krivulje

$$x = f_1(c, q_2), \quad y = f_2(c, q_2), \quad z = f_3(c, q_2), \tag{1.219}$$

ki se nahaja na ploskvi $\mathscr{S}$, podani z enačbami (1.217). Za različne konstantne vrednosti posplošenih koordinat q_1 in q_2 dobimo mrežo koordinatnih krivulj na ploskvi $\mathscr{S}$ (slika 1.131).



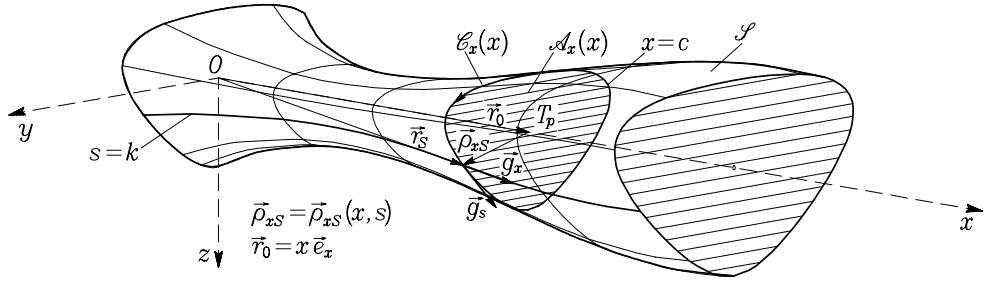
Slika 1.131: Koordinatne krivulje ploskve $\mathscr{S}$

† I. Vidav, Diferencialna geometrija, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1989.

Presečišče koordinatnih krivulj $q_1 = c$ in $q_2 = k$ določa točko T. Odvoda krajevnega vektorja $\vec{r}_S$, ki določa točko T na ploskvi $\mathscr{S}$, po koordinatah q_1 in q_2 sta bazna vektorja v točki T. Označimo ju z $\vec{g}_1$ in $\vec{g}_2$

$$\boxed{\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_1}, \qquad \vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial q_2}.} \tag{1.220}$$

Obravnavajmo nosilec z ravno osjo ter spremenljivim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x(x)$ (slika 1.132).



Slika 1.132: Prečni prerez $\mathscr{A}_x(x)$ nosilca se vzdolž osi x spreminja

Krajevni vektor $\vec{r}_S$ poljubne točke na mejni ploskvi $\mathscr{S}$ zapišemo z enačbo

$$\vec{r}_S = \vec{r}_0 + \vec{\rho}_S = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z. \tag{1.221}$$

Če želimo določiti krivočrtne koordinate mejne ploskve $\mathscr{S}$ nosilca, moramo izbrati posplošeni koordinati q_1 in q_2. Če za posplošeni koordinati izberemo x in $s = \bar{s}/C_x(x)$ (glej sliko 1.132)

$$\boxed{q_1 = x, \qquad q_2 = s,} \tag{1.222}$$

lahko zapišemo (1.221) takole:

$$\vec{r}_S = x\,\vec{e}_x + y(x,s)\,\vec{e}_y + z(x,s)\,\vec{e}_z. \tag{1.223}$$

Z $\bar{s}$ je označena dolžina krivočrtne koordinate s od izbrane začetne točke do poljubne točke na mejni črti $\mathscr{C}_x(x)$, s $C_x(x)$ pa dolžina mejne črte $\mathscr{C}_x(x)$. Bazna vektorja $\vec{g}_x$ in $\vec{g}_s$ sta v tem primeru podana z enačbama (glej tudi sliki 1.132 in 1.133)

$$\vec{g}_x = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial x} = \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x}\,\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x}\,\vec{e}_z, \qquad \vec{g}_s = \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s}\,\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial s}\,\vec{e}_z. \tag{1.224}$$

Na sliki 1.133a je prikazana koordinatna krivulja $x = \mathrm{c}$, na sliki 1.133b pa koordinatna krivulja $s = \mathrm{k}$.

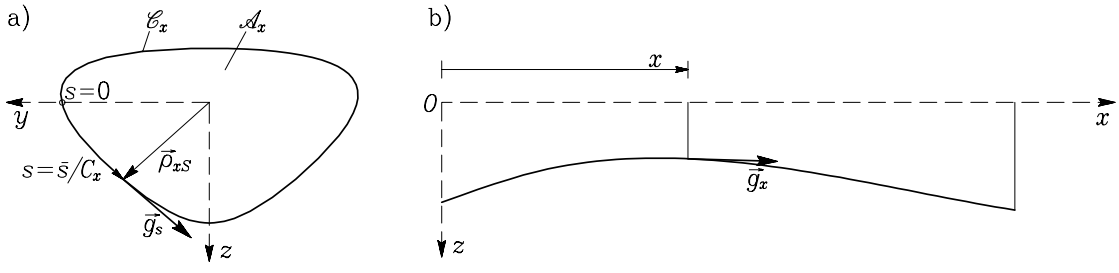
Ploščino dS diferencialno majhnega dela mejne ploskve $\mathscr{S}$ izračunamo po enačbi [†]

$$\boxed{dS = \sqrt{E\,G - F^2}\,dx\,ds.} \tag{1.225}$$

[†] I. Vidav, Diferencialna geometrija, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1989.

Z E, G in F so označeni izrazi

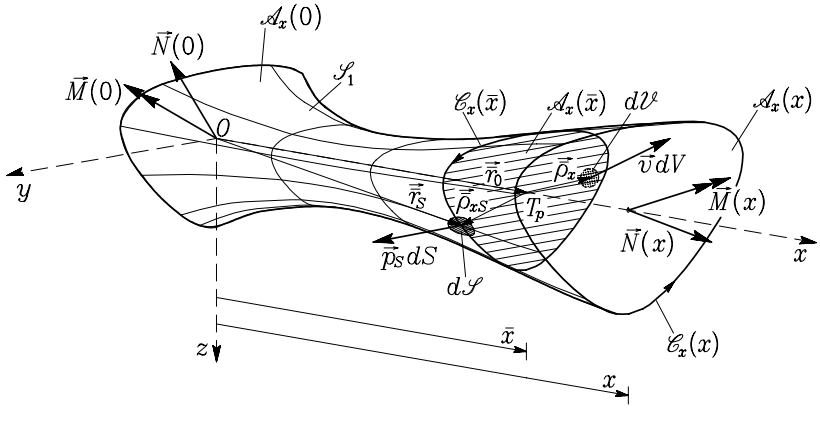
$$
\begin{aligned}
E &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial x} = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \\
G &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial s} = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2, \\
F &= \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{r}_S}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial s}.
\end{aligned}
\tag{1.226}
$$



Slika 1.133: a) Koordinatna krivulja $x = \mathrm{c}$, b) Koordinatna krivulja $s = \mathrm{k}$

1.5.2 Ravnotežne enačbe za nosilec s spremenljivim prečnim prerezom

Obravnavamo del nosilca dolžine x, ki zavzema območje $\mathscr{V}_1$, določeno s ploskvami $\mathscr{A}_{x0}$, $\mathscr{A}_x$ in $\mathscr{S}_1$. Odstranjeni desni del nosilca nadomestimo z notranjo silo $\vec{N}$ in z notranjim momentom $\vec{M}$ (slika 1.134).



Slika 1.134: Na nosilec delujejo zunanja obtežba $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$ ter notranja sila $\vec{N}$ in notranji moment $\vec{M}$

Z $\vec{N}(0)$ in $\vec{M}_R(0)$ sta označeni rezultanti obtežb $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$ na ploskvi $\mathscr{A}_x(0)$

$$\vec{N}(0) = \int\limits_{\mathscr{A}_x(0)} \vec{p}_S \, dA, \qquad \vec{M}_R(0) = \int\limits_{\mathscr{A}_x(0)} \vec{\rho}_x \times \vec{p}_S \, dA.$$

Krajevni vektor $\vec{r}_0$ točke na osi nosilca, v kateri nosilec prerežemo, ima smer koordinatne osi x

$$\vec{r}_0 = x \, \vec{e}_x. \tag{1.227}$$

Ravnotežna pogoja za obravnavani del nosilca

$$\vec{R} = \vec{0}, \qquad \vec{M}_R^O = \vec{0} \tag{1.228}$$

izrazimo z zunanjo površinsko obtežbo $\vec{p}_S$, s prostorninsko obtežbo $\vec{v}$, z notranjo silo $\vec{N}$ in z notranjim momentom $\vec{M}$. Prvi ravnotežni pogoj je (glej enačbo (1.13))

$$\begin{aligned} &\vec{N}(0) + \int\limits_{\mathscr{S}_1} \vec{p}_S \, dS + \int\limits_{\mathscr{V}_1} \vec{v} \, dV + \vec{N}(x) = \\ &= \vec{N}(0) + \int\limits_0^x \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}_x(\bar{x})} \vec{p}_S(\bar{x}, s) \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(\bar{x})} \vec{v}(\bar{x}, y, z) \, dA_x \Bigg) d\bar{x} + \vec{N}(x) = \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.229}$$

Količine E, G in F so odvisne od x in s. Izraz v oglatem oklepaju v enačbi (1.229) označimo s $\vec{\mathscr{P}}(x)$ in ga imenujemo **linijska obtežba**

$$\boxed{\vec{\mathscr{P}}(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_x(x)} \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(x)} \vec{v} \, dA_x.} \tag{1.230}$$

Tako je

$$\vec{N}(0) + \int\limits_0^x \vec{\mathscr{P}}(\bar{x}) \, d\bar{x} + \vec{N}(x) = \vec{0}. \tag{1.231}$$

Če želimo zapisati diferencialno enačbo za neznano silo $\vec{N}(x)$ v poljubnem prečnem prerezu, enačbo (1.231) odvajamo po x. Tako dobimo prvo izmed **ravnotežnih enačb** ravnega linijskega nosilca, ki smo jo izpeljali že pri Statiki (ravnotežna enačba za prečni prerez) †

$$\boxed{\frac{d\vec{N}(x)}{dx} + \vec{\mathscr{P}}(x) = \vec{0}.} \tag{1.232}$$

† M. Stanek, G. Turk, Statika I, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1996.

Tudi momentni ravnotežni pogoj izrazimo z zunanjima obtežbama $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$ ter z notranjo silo $\vec{N}$ in notranjim momentom $\vec{M}$ (glej (1.17))

$$\vec{M}_R(0) + \int\limits_{\mathscr{S}_1} \vec{\bar{r}}_S \times \vec{p}_S \, dS + \int\limits_{\mathscr{V}_1} \vec{\bar{r}} \times \vec{v} \, dV + \vec{r}_0 \times \vec{N}(x) + \vec{M}(x) = \vec{M}_R(0) +$$
$$+ \int\limits_0^x \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}_x(\bar{x})} \vec{\bar{r}}_S \times \vec{p}_S(\bar{x}, y, z) \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(\bar{x})} \vec{\bar{r}} \times \vec{v}(\bar{x}, y, z) \, dA_x \Bigg) d\bar{x} + \vec{r}_0 \times \vec{N}(x) + \vec{M}(x) = \vec{0}, \tag{1.233}$$

kjer krajevna vektorja $\vec{\bar{r}}_S$ in $\vec{\bar{r}}$ opisujeta točke v integracijskih območjih $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{V}_1$:

$$\vec{\bar{r}}_S = \vec{\bar{r}}_0 + \vec{\bar{\rho}}_{xS}, \qquad \vec{\bar{r}} = \vec{\bar{r}}_0 + \vec{\bar{\rho}}_x. \tag{1.234}$$

Upoštevamo enačbi (1.2) in (1.234)

$$\begin{aligned} &\vec{M}_R(0) + \int\limits_0^x \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}_x(\bar{x})} \vec{\bar{r}}_0 \times \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(\bar{x})} \vec{\bar{r}}_0 \times \vec{v} \, dA_x \Bigg) d\bar{x} + \\ &+ \int\limits_0^x \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}_x(\bar{x})} \vec{\bar{\rho}}_{xS} \times \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(\bar{x})} \vec{\bar{\rho}}_x \times \vec{v} \, dA_x \Bigg) d\bar{x} + \vec{r}_0 \times \vec{N}(x) + \vec{M}(x) = \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.235}$$

Vektor $\vec{\bar{r}}_0$ je neodvisen od y in z, zato ga lahko izpostavimo iz integralov po $\mathscr{C}_x(x)$ in $\mathscr{A}_x(x)$

$$\begin{aligned} &\vec{M}_R(0) + \int\limits_0^x \vec{\bar{r}}_0 \times \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}_x(\bar{x})} \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(\bar{x})} \vec{v} \, dA_x \Bigg) d\bar{x} + \\ &+ \int\limits_0^x \Bigg(\int\limits_{\mathscr{C}_x(\bar{x})} \vec{\bar{\rho}}_{xS} \times \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(\bar{x})} \vec{\bar{\rho}}_x \times \vec{v} \, dA_x \Bigg) d\bar{x} + \vec{r}_0 \times \vec{N}(x) + \vec{M}(x) = \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.236}$$

Izraz v prvem oklepaju smo že v enačbi (1.230) označili s $\vec{\mathscr{P}}(x)$, izraz v drugem oklepaju pa označimo z $\vec{\mathscr{M}}(x)$ in imenujemo **linijska momentna obtežba**

$$\boxed{\vec{\mathscr{M}}(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_x(x)} \vec{\bar{\rho}}_{xS} \times \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2} \, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x(x)} \vec{\bar{\rho}}_x \times \vec{v} \, dA_x.} \tag{1.237}$$

Iz (1.236) dobimo

$$\vec{M}_R(0) + \int\limits_0^x \vec{\bar{r}}_0 \times \vec{\mathscr{P}}(\bar{x}) \, d\bar{x} + \int\limits_0^x \vec{\mathscr{M}}(\bar{x}) \, d\bar{x} + \vec{r}_0 \times \vec{N}(x) + \vec{M}(x) = \vec{0}. \tag{1.238}$$

Enačbo (1.238) odvajamo po x

$$\vec{r}_0 \times \vec{\mathscr{P}}(x) + \vec{\mathscr{M}}(x) + \frac{d\vec{r}_0}{dx} \times \vec{N}(x) + \vec{r}_0 \times \frac{d\vec{N}(x)}{dx} + \frac{d\vec{M}(x)}{dx} = \vec{0}. \tag{1.239}$$

Ker je (glej enačbo (1.227))

$$\frac{d\vec{r}_0}{dx} = \vec{e}_x,$$

dobimo

$$\vec{r}_0 \times \left(\vec{\mathscr{P}}(x) + \frac{d\vec{N}(x)}{dx} \right) + \vec{\mathscr{M}}(x) + \vec{e}_x \times \vec{N}(x) + \frac{d\vec{M}(x)}{dx} = \vec{0}. \tag{1.240}$$

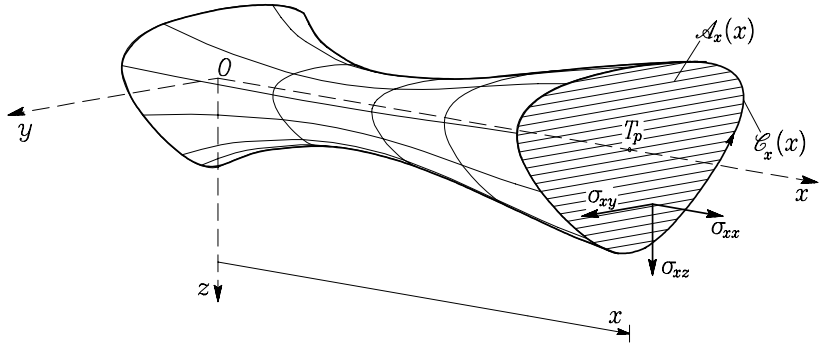
Upoštevamo prvo ravnotežno enačbo (1.232) in dobimo drugo **ravnotežno enačbo** za nosilec[†]

$$\boxed{\frac{d\vec{M}(x)}{dx} + \vec{e}_x \times \vec{N}(x) + \vec{\mathscr{M}}(x) = \vec{0}.} \tag{1.241}$$

Linijska obtežba $\vec{\mathscr{P}}(x)$ predstavlja nadomestno obtežbo računskega modela nosilca z enoto N/m. Linijska momentna obtežba $\vec{\mathscr{M}}(x)$ pa predstavlja nadomestno momentno obtežbo z enoto Nm/m. Površinsko in prostorninsko obtežbo $\vec{p}_S(x, y, z)$ in $\vec{v}(x, y, z)$, ki sta funkciji treh spremenljivk, integriramo po prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$ oziroma vzdolž njegove meje $\mathscr{C}_x$ in tako dobimo funkciji ene spremenljivke.

1.5.3 Strižni in prečni normalni napetosti v nosilcu s spremenljivim prerezom

Pri upogibu ravnega nosilca s spremenljivim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x(x)$ računamo razen vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} tudi strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} (slika 1.135).



Slika 1.135: V nosilcu upoštevamo vzdolžno normalno napetost in prečni strižni napetosti

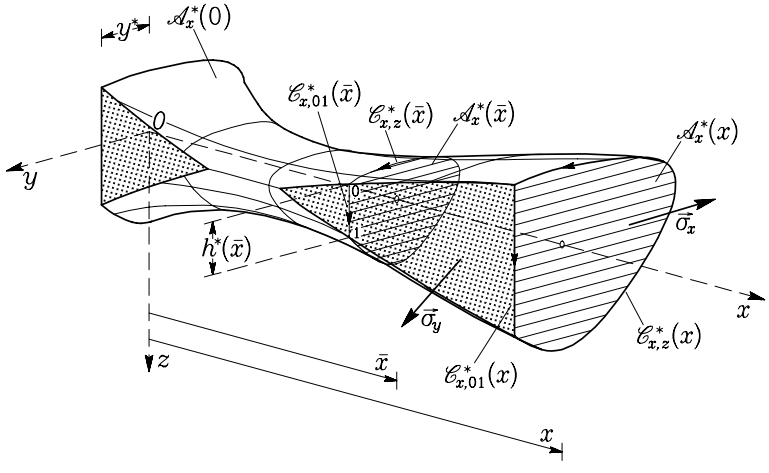
Pri izpeljavi enačb za račun pomikov u, v in w (enačbe (1.80) in (1.87)) ter enačbe za vzdolžno normalno napetost σ_{xx} (enačba (1.88)) v ravnem nosilcu s konstantnim prečnim prerezom smo predpostavili, da sta

[†] M. Stanek, G. Turk, Statika I, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1996.

od nič različni le vzdolžna normalna deformacija ε_{xx} in vzdolžna normalna napetost σ_{xx}. Pri izpeljavi teh enačb smo upoštevali le kinematične enačbe in Hookov zakon, nismo pa upoštevali ravnotežnih enačb. V tem razdelku izpeljemo enačbe za σ_{xy}, σ_{xz}, σ_{yy} in σ_{zz} iz ravnotežnih enačb za ustrezni del nosilca.

Izpeljava enačb za račun strižne napetosti σ_{xy} in prečne normalne napetosti σ_{yy}

Vzemimo del nosilca od $\bar{x} = 0$ do $\bar{x} = x$ ter ga odrežimo pri $y = y^* = \text{konst}$ (slika 1.136).



Slika 1.136: Nosilec odrežemo pri $y = y^*$ in obravnavamo odrezani del nosilca

Zapišimo ravnotežne enačbe za ta del nosilca:

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x^*(0)} \vec{p}_S(0,y,z)\,dA_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x(x,y,z)\,dA_x + \\ + \int\limits_0^x \left(\int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}^*(\bar{x})} \vec{p}_S(\bar{x},s)\,\sqrt{E\,G - F^2}\,ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(\bar{x})} \vec{v}(\bar{x},y,z)\,dA_x + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(\bar{x})} \vec{\sigma}_y(\bar{x},y^*,z)\,ds \right) d\bar{x} = \vec{0}. \tag{1.242}$$

Z $\mathscr{A}_x^*$ označimo del prečnega prereza, ki ga določa prerez z ravnino $y = y^*$ (slika 1.136). Zato je ta del prečnega prereza odvisen tudi od y^*, vendar zaradi krajšega zapisa tega v enačbi ne bomo zapisali. Razdaljo od točke 0 do 1 označimo s $h^*(x)$ in je tudi odvisna od y^*, vendar v enačbah te odvisnosti ne bomo zapisali. Upoštevamo, da so E, G in F odvisni od x in s. Del v oglatem oklepaju označimo z $\vec{\mathscr{F}}^*(x)$ in predstavlja nadomestno linijsko obtežbo zaradi zunanje obtežbe na mejni črti $\mathscr{C}_{x,z}^*$ ter na delu prereza $\mathscr{A}_x^*$ in zaradi napetosti $\vec{\sigma}_y$ v prerezu $\mathscr{C}_{x,01}^*$

$$\vec{\mathscr{F}}^*(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S\,\sqrt{E\,G - F^2}\,ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{v}\,dA_x + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_y\,ds = \vec{\mathscr{P}}^*(x) + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_y\,ds, \tag{1.243}$$

kjer je s $\vec{\mathscr{P}}^{\,*}(x)$ označena linijska obtežba zaradi zunanje obtežbe na delu prereza $\mathscr{A}_x^*$

$$\vec{\mathscr{P}}^{\,*}(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2}\, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{v}\, dA_x. \tag{1.244}$$

Enačbo (1.242) krajše zapišemo takole:

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x^*(0)} \vec{p}_S\, dA_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \int\limits_0^x \vec{\mathscr{F}}^{\,*}(\bar{x})\, d\bar{x} = \vec{0}. \tag{1.245}$$

Z odvajanjem ravnotežne enačbe (1.245) po x dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{F}}^{\,*}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_y\, ds = \vec{0} \tag{1.246}$$

oziroma

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \int\limits_0^{h^*(x)} \vec{\sigma}_y\, ds = \vec{0}. \tag{1.247}$$

Če predpostavimo, da se $\vec{\sigma}_y$ vzdolž meje $\mathscr{C}_{x,01}^*$ ne spreminja, sledi

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \vec{\sigma}_y\, h^*(x) = \vec{0}. \tag{1.248}$$

Iz enačbe (1.248) izrazimo $\vec{\sigma}_y$

$$\vec{\sigma}_y = -\frac{1}{h^*(x)} \left(\vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x \right). \tag{1.249}$$

Po množenju (1.249) z enotskim vektorjem $\vec{e}_x$, dobimo izraz za strižno napetost σ_{yx}

$$\boxed{\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = -\frac{1}{h^*(x)} \left(\mathscr{P}_x^* + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \sigma_{xx}\, dA_x \right),} \tag{1.250}$$

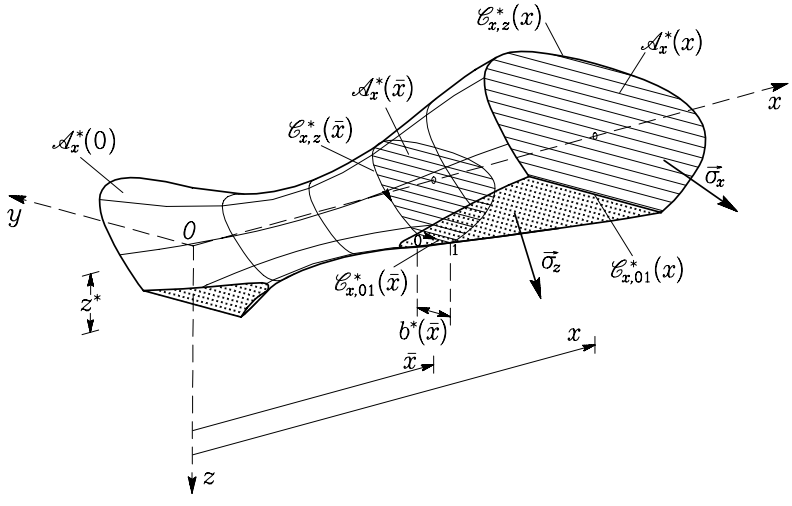
po množenju (1.249) z enotskim vektorjem $\vec{e}_y$ pa izraz za prečno normalno napetost σ_{yy}

$$\boxed{\sigma_{yy} = -\frac{1}{h^*(x)} \left(\mathscr{P}_y^* + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \sigma_{xy}\, dA_x \right).} \tag{1.251}$$

V enačbah (1.250) in (1.251) nastopa odvod integrala po $\mathscr{A}_x^*(x)$. Ta odvod lahko določimo le, če vemo, kako se prečni prerez $\mathscr{A}_x^*(x)$ spreminja v odvisnosti od x. Način določitve tega odvoda pokažemo v primeru 1.34.

Izpeljava enačb za račun strižne napetosti σ_{xz} in prečne normalne napetosti σ_{zz}

Vzemimo del nosilca od $\bar{x} = 0$ do $\bar{x} = x$ ter ga odrežimo pri $z = z^* = \text{konst}$ (slika 1.137).



Slika 1.137: Nosilec odrežemo pri $z = z^*$ in obravnavamo odrezani del nosilca

Zapišimo ravnotežne enačbe za ta nosilec:

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x^*(0)} \vec{p}_S(0,y,z)\,dA_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x(x,y,z)\,dA_x + \\ + \int\limits_0^x \left(\int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}\,*(\bar{x})} \vec{p}_S(\bar{x},s)\sqrt{E\,G - F^2}\,ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(\bar{x})} \vec{v}(\bar{x},y,z)\,dA_x + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(\bar{x})} \vec{\sigma}_z(\bar{x},y,z^*)\,ds \right) d\bar{x} = \vec{0}. \tag{1.252}$$

Upoštevamo, da so E, G in F odvisni od x in s. Del v oglatem oklepaju označimo z $\vec{\mathscr{F}}^*(x)$ in predstavlja nadomestno linijsko obtežbo zaradi zunanje obtežbe na mejni črti $\mathscr{C}_{x,z}^*$ ter na delu prereza $\mathscr{A}_x^*$ in zaradi napetosti $\vec{\sigma}_z$ v prerezu $\mathscr{C}_{x,01}^*$

$$\vec{\mathscr{F}}^*(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S\sqrt{E\,G - F^2}\,ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{v}\,dA_x + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_z\,ds = \vec{\mathscr{P}}^*(x) + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_z\,ds, \tag{1.253}$$

kjer je s $\vec{\mathscr{P}}^{\,*}(x)$ označena linijska obtežba zaradi zunanje obtežbe na delu prereza $\mathscr{A}_x^*$

$$\vec{\mathscr{P}}^{\,*}(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2}\, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{v}\, dA_x. \tag{1.254}$$

Enačbo (1.252) krajše zapišemo takole

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x^*(0)} \vec{p}_S\, dA_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \int\limits_0^x \vec{\mathscr{F}}^{\,*}(\bar{x})\, d\bar{x} = \vec{0}. \tag{1.255}$$

Z odvajanjem ravnotežne enačbe (1.255) po x dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{F}}^{\,*}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \int\limits_{\mathscr{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_z\, ds = \vec{0} \tag{1.256}$$

oziroma

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \int\limits_0^{b^*(x)} \vec{\sigma}_z\, ds = \vec{0}. \tag{1.257}$$

Če predpostavimo, da se $\vec{\sigma}_z$ vzdolž meje $\mathscr{C}_{x,01}^*$ **ne spreminja**, sledi

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x + \vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \vec{\sigma}_z\, b^*(x) = \vec{0} \tag{1.258}$$

in lahko iz enačbe (1.258) izrazimo $\vec{\sigma}_z$

$$\vec{\sigma}_z = -\frac{1}{b^*(x)} \left(\vec{\mathscr{P}}^{\,*} + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x\, dA_x \right). \tag{1.259}$$

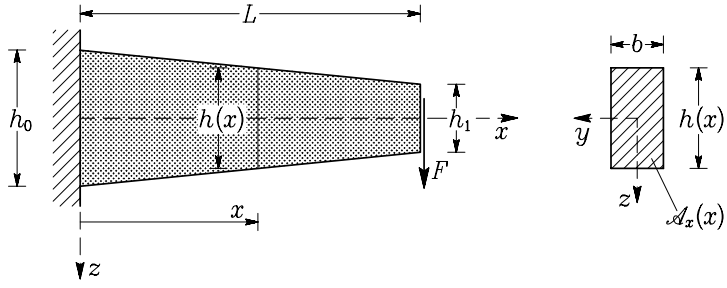
Po množenju (1.259) z enotskim vektorjem $\vec{e}_x$, dobimo izraz za strižno napetost σ_{zx}

$$\boxed{\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = -\frac{1}{b^*(x)} \left(\mathscr{P}_x^* + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \sigma_{xx}\, dA_x \right),} \tag{1.260}$$

po množenju (1.259) z enotskim vektorjem $\vec{e}_z$ pa izraz za prečno normalno napetost σ_{zz}

$$\boxed{\sigma_{zz} = -\frac{1}{b^*(x)} \left(\mathscr{P}_z^* + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \sigma_{xz}\, dA_x \right).} \tag{1.261}$$

Primer 1.33 *Izračunajmo strižno napetost σ_{xz} v nosilcu pravokotnega prečnega prereza s širino b in spremenljivo višino $h(x)$ (slika 1.138). Strižno napetost izračunajmo v prerezih $x = 0$, $x = L/2$ in $x = L$.*



Slika 1.138: Geometrijski podatki in obtežba

Strižno napetost σ_{zx} izračunamo po enačbi (1.176)

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = -\frac{1}{b^*(x)} \left(\mathscr{P}_x^* + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \sigma_{xx}\, dA_x \right),$$

kjer je (glej (1.254))

$$\vec{\mathscr{P}}^*(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S \sqrt{E\,G - F^2}\, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \vec{v}\, dA_x.$$

Ker je $\mathscr{P}_x^*$ enak nič in $b^* \equiv b$, sledi

$$\sigma_{xz} = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x} \left(\int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \sigma_{xx}\, dA_x \right)$$

Osi y in z sta glavni vztrajnostni osi prečnega prereza $\mathscr{A}_x$. Vzdolžno normalno napetost σ_{xx} izrazimo z notranjimi silami

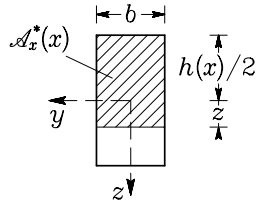
$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y}\, z - \frac{M_z}{I_z}\, y.$$

Ker je od nič različen le upogibni moment M_y, je

$$\sigma_{xz} = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x} \left(\int\limits_{\mathscr{A}_x^*(x)} \frac{M_y}{I_y}\, z\, dA_x \right)$$

Če diferencial dA_x ploščine prečnega prereza izrazimo s širino b prereza ($dA_x = b\,dz$), lahko ploskovni integral prevedemo na linijskega (slika 1.139)

$$\sigma_{xz} = -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_{-h(x)/2}^{z} \frac{M_y}{I_y}\,\bar{z}\,b\,d\bar{z}\right)$$



Slika 1.139: Del prečnega prereza $\mathscr{A}_x^*(x)$

Upoštevamo pravilo odvajanja pod integralskim znakom[†]

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + \beta'(y)\,f[\beta(y),y] - \alpha'(y)\,f[\alpha(y),y]$$

in dobimo

$$\sigma_{xz} = -\frac{1}{b}\int\limits_{-h(x)/2}^{z} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M_y}{I_y}\,\bar{z}\,b\right)d\bar{z} - \frac{h'(x)}{2}\frac{M_y(x)}{I_y(x)}\frac{(-)h(x)}{2} =$$

$$= -\frac{1}{b}\int\limits_{-h(x)/2}^{z} \left(\frac{dM_y}{dx}\frac{\bar{z}}{I_y} + M_y\,\bar{z}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{I_y}\right)\right)b\,d\bar{z} + \frac{M_y}{I_y}\frac{h\,h'}{4}.$$

Z $\beta'(y)$ je označen odvod $d\beta/dy$, z $\alpha'(y)$ odvod $d\alpha/dy$, s $h'(x)$ pa odvod dh/dx. Upoštevamo, da je ($I_y' = dI_y/dx$)

$$\frac{dM_y}{dx} = N_z, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{I_y}\right) = -\frac{I_y'}{I_y^2}, \quad I_y = \frac{b\,h^3(x)}{12}, \quad I_y' = \frac{b\,h^2(x)\,h'(x)}{4}$$

in dobimo

$$\sigma_{xz} = -\frac{1}{b}\int\limits_{-h(x)/2}^{z} \left(\frac{N_z}{I_y} - \frac{I_y'\,M_y}{I_y^2}\right)\bar{z}\,b\,d\bar{z} + \frac{M_y}{I_y}\frac{h\,h'}{4} = -\frac{1}{b}\left(\frac{N_z}{I_y} - \frac{I_y'\,M_y}{I_y^2}\right)S_y^* + \frac{M_y}{I_y}\frac{h\,h'}{4}.$$

[†] I. Vidav, Diferencialna geometrija, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije, Ljubljana, 1989.

S S_y^* označimo statični moment delnega prereza $\mathscr{A}_x^*$ glede na os y

$$S_y^* = \int\limits_{-h(x)/2}^{z} \bar{z}\, b\, d\bar{z} = \frac{b}{2}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

Če (26) in (26) upoštevamo v (26), zapišemo strižno napetost σ_{xz} takole

$$\sigma_{xz} = -\frac{N_z\, S_y^*}{b\, I_y} + \frac{M_y\, h'}{4\, h\, I_y}\left(6\, z^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \sigma_{xz,k} + \sigma_{xz,s}.$$

Del strižne napetosti, označen s $\sigma_{xz,k}$ ima enako obliko, kot v primeru nosilca s konstantnim prečnim prerezom. Del, označen z $\sigma_{xz,s}$ predstavlja vpliv spreminjanja prečnega prereza.

Če upoštevamo spreminjanje višine nosilca po enačbi

$$h(x) = h_0\left(1 - \frac{x}{2\, L}\right),$$

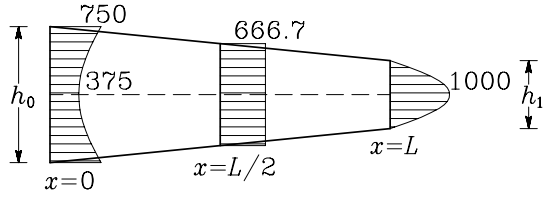
je odvod h' enak

$$h'(x) = -\frac{h_0}{2\, L}.$$

Upoštevamo torej, da je $h_1 = h_0/2$ (slika 1.138). V tem primeru strižno napetost σ_{xz} izračunamo po enačbi

$$\sigma_{xz} = -\frac{N_z}{2\, I_y(x)}\left(z^2 - \frac{h^2(x)}{4}\right) - \frac{M_y(x)\, h_0}{8\, h(x)\, L\, I_y(x)}\left(6\, z^2 - \frac{h^2(x)}{2}\right).$$

Za velikosti $N_z = F = 5$ kN, $M_y = -F\,(L - x)$, $L = 2$ m, $b = 5$ cm, $h_0 = 20$ cm in $h_1 = 10$ cm, je potek strižne napetosti σ_{xz} za prečne prereze $x = 0$, $x = L/2$ in $x = L$, prikazan na sliki 1.140.



Slika 1.140: Potek strižne napetosti σ_{xz} za prečne prereze $x = 0$, $x = L/2$ in $x = L$

1.6 Pomiki linijskega nosilca z upoštevanjem strižnih deformacij

Bernoulli-Eulerjeva teorija nosilcev, ki smo jo izpeljali v razdelku 1.2, ne upošteva vpliva strižnih deformacij na pomike. V tem razdelku bomo izpeljali enačbe za račun pomikov nosilca z ravno osjo, ki vključujejo tudi vpliv strižnih deformacij. Vpliv strižnih deformacij na pomike moramo upoštevati pri

kratkih nosilcih. V primeru vitkih nosilcev, ko je razmerje med višino nosilca in dolžino majhno (0.1 ali manj), je napaka pri računu navpičnega pomika, ki jo naredimo, če zanemarimo vpliv strižne deformacije, zanemarljiva (glej preglednico 5.2 in primer 5.25 v poglavju 5).

Izpeljati želimo enačbe za račun pomikov nosilca, s katerimi na preprost način upoštevamo tudi vpliv strižnih deformacij. Obravnavamo ravninski primer v ravnini x, z. Osi y in z sta glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza. Vektor pomika $\vec{u}$ je funkcija koordinat x in z. Funkcijo $\vec{u}$ razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog $z = 0$

$$\vec{u}(x,z) = \vec{u}(x,0) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}\right)_{z=0} z^2 + \cdots . \tag{1.262}$$

Preprost izraz za pomik $\vec{u}$, s katerim upoštevamo vpliv strižnih deformacij, dobimo, če upoštevamo le prva dva člena na desni strani enačbe (1.262)

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + z\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right)_{z=0} . \tag{1.263}$$

Z $\vec{u}_0$ smo označili pomik na osi nosilca $\vec{u}_0 = \vec{u}(x,0) = u(x)\,\vec{e}_x + w(x)\,\vec{e}_z$. Ker sta vektorja $\vec{u}_0$ in $(\partial\vec{u}/\partial z)_{z=0}$ odvisna le od koordinate x, lahko izraz (1.263) zapišemo takole:

$$\vec{u} = u(x)\,\vec{e}_x + w(x)\,\vec{e}_z + z\left(\left.\frac{\partial u_x(x,z)}{\partial z}\right|_{z=0}\vec{e}_x + \left.\frac{\partial u_z(x,z)}{\partial z}\right|_{z=0}\vec{e}_z\right) . \tag{1.264}$$

Koordinati u_x in u_z pomika $\vec{u}$ sta

$$u_x = u + z\left.\frac{\partial u_x}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad u_z = w + z\left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=0} . \tag{1.265}$$

Če predpostavimo, da je specifična sprememba D_{zz} dolžine vlakna v smeri osi z zanemarljiva, lahko zapišemo, da je $\varepsilon_{zz} = 0$ oziroma

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 1 \cdot \left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{1.266}$$

Zasuk φ_z **vlakna v smeri** osi z izračunamo z enačbo (glej M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998, enačbi (1.33) in (1.43))

$$\varphi_z \approx R_z = \sqrt{\left(-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)^2},$$

v kateri upoštevamo, da so spremembe dolžin vlaken in zasuki vlaken majhni. Ker obravnavamo ravninski primer, pri katerem je $u_y = 0$, sledi

$$\varphi_z(x) \approx R_z = \left.\frac{\partial u_x}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{1.267}$$

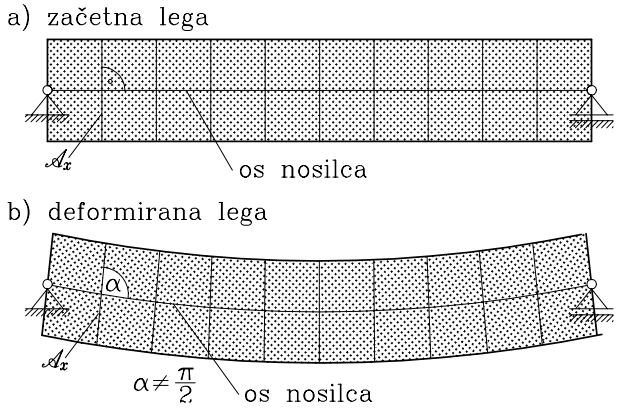
in lahko zapišemo pomike u_x, u_y in u_z takole:

$$u_x(x,z) = u(x) + z\,\varphi_z(x), \quad u_y(x,z) = 0, \quad u_z(x,z) = w(x). \tag{1.268}$$

Z upoštevanjem enačbe (1.268) zapišemo deformaciji ε_{xx} in ε_{xz} takole:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{dx} = \frac{du}{dx} + z\,\frac{d\varphi_z}{dx}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z\right) \tag{1.269}$$

Z enačbami (1.268) je privzeto, da prečni prerez ostane raven tudi po deformiranju (u_x je linearna fukcija z), ne zahtevamo pa, da je pravokoten na deformirano os nosilca (ne zahtevamo, da je ε_{xz} enak nič) - (slika 1.141).



Slika 1.141: Začetna in deformirana lega nosilca

Če upoštevamo enoosno napetostno stanje za vzdolžno normalno napetost $\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx}$ ter Hookov zakon za strižno napetost $\sigma_{xz} = 2\,G\,\varepsilon_{xz}$ (E je modul elastičnosti, G pa strižni modul materiala), sledi

$$\sigma_{xx}(x,z) = E\left(\frac{du}{dx} + z\,\frac{d\varphi_z}{dx}\right), \quad \sigma_{xz}(x) = G\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z\right). \tag{1.270}$$

Iz enačbe (1.270) sledi, da je σ_{xz} po višini prereza **konstanten**. Osno silo N_x, upogibni moment M_y in prečno silo N_z izračunamo po enačbah (1.9)) in (1.10))

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,dA_x = E\,A_x\,\frac{du}{dx},\\
M_y &= \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,z\,dA_x = \int_{\mathscr{A}_x} E\left(\frac{du}{dx} + z\,\frac{d\varphi_z}{dx}\right) z\,dA_x = E\,I_y\,\frac{d\varphi_z}{dx},\\
N_z &= \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xz}\,dA_x = \int_{\mathscr{A}_x} G\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z\right) dA_x = G\,A_x\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z\right).
\end{aligned} \tag{1.271}$$

Upoštevali smo, da poteka os z skozi težišče prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ in je integral $\int_{\mathscr{A}_x} z\, dA_x = 0$. Vztrajnostni moment I_y prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ je definiran po enačbi (1.74): $I_y = \int_{\mathscr{A}_x} z^2\, dA_x$.

Ker se σ_{xz} po višini prereza spreminja (glej primer 4.1 v učbeniku M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998), moramo namesto druge izmed enačb (1.270) za strižno napetost σ_{xz} pisati

$$\sigma_{xz}(x,z) = G\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z(x,z)\right). \tag{1.272}$$

Če bi upoštevali zasuk φ_z po enačbi (1.272), nebi imeli več enodimenzionalnega računskega modela. Da pa vseeno upoštevamo spreminjanje strižne napetosti po prečnem prerezu in zadržimo enodimenzionalni računski model, **spremenimo drugo izmed enačb** (1.270) tako, da jo množimo s faktorjem k ter vzamemo, da sta pomik w in zasuk φ_z odvisna le od x

$$\sigma_{xz}(x) = k\,G\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z(x)\right). \tag{1.273}$$

Če (1.273) vstavimo v tretjo izmed (1.271), dobimo

$$N_z = k\,G\,A_x\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_z\right). \tag{1.274}$$

V literaturi je podanih več različnih definicij faktorja k. Zanimiva je definicija, ki jo podaja Cowper.[†] Za prečni prerez pravokotne in krožne oblike je k enak

$$k_p = \frac{10\,(1+\nu)}{12+11\,\nu}, \qquad k_k = \frac{6\,(1+\nu)}{7+6\,\nu}. \tag{1.275}$$

Faktor k lahko izračunamo tudi po enačbi $k_y = 1/\kappa_y$ oziroma $k_z = 1/\kappa_z$. S κ_y in κ_z sta označena strižna oblikovna koeficienta, ki ju računamo v razdelku 5.1.2. Za pravokotni prerez dobimo $\kappa_y = \kappa_z = 1.2$, za krožni prerez pa $\kappa_y = \kappa_z = 10/9$. V preglednici 1.20 prikazujemo nekaj vrednosti koeficientov k za različne vrednosti ν.

Tabela 1.20: Vrednosti koeficientov k po Cowperjevih enačbah

ν	0.0	0.25	0.5	$1/\kappa$
k_p	0.833	0.847	0.857	0.833
k_k	0.857	0.882	0.900	0.900

Zvezo med pomikoma u, w in zasukom φ_z ter obtežbami $\mathscr{P}_x$, $\mathscr{P}_z$ in $\mathscr{M}_y$ dobimo, če v enačbah (1.30) in (1.31)

$$\frac{dN_x}{dx} + \mathscr{P}_x = 0, \quad \frac{dN_z}{dx} + \mathscr{P}_z = 0, \quad \frac{dM_y}{dx} - N_z + \mathscr{M}_y = 0 \tag{1.276}$$

[†] G.R. Cowper, The Shear Coefficient in Timoshenkos Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, June, 1966.

upoštevamo prvi dve izmed enačb (1.271) ter enačbo (1.274)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)+\mathscr{P}_x=0,\\
&\frac{d}{dx}\left(k\,G\,A_x\left(\frac{dw}{dx}+\varphi_z\right)\right)+\mathscr{P}_z=0,\\
&\frac{d}{dx}\left(E\,I_y\,\frac{d\varphi_z}{dx}\right)-k\,G\,A_x\left(\frac{dw}{dx}+\varphi_z\right)+\mathscr{M}_y=0.
\end{aligned}} \tag{1.277}$$

Če so E, G, A_x, I_y in k konstante, sledi

$$\boxed{\begin{aligned}
&E\,A_x\,\frac{d^2u}{dx^2}+\mathscr{P}_x=0,\\
&k\,G\,A_x\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d\varphi_z}{dx}\right)+\mathscr{P}_z=0,\\
&E\,I_y\frac{d^2\varphi_z}{dx^2}-k\,G\,A_x\left(\frac{dw}{dx}+\varphi_z\right)+\mathscr{M}_y=0.
\end{aligned}} \tag{1.278}$$

Enačbe (1.277) oziroma (1.278) določajo **Timošenkovo teorijo** nosilcev, v matematičnem smislu pa predstavljajo sistem navadnih diferencialnih enačb za pomika u in v ter zasuk φ_z.

Če želimo rešiti diferencialne enačbe, moramo poznati ustrezne robne pogoje. Robne pogoje običajno podajamo na začetku ($x=0$) in na koncu ($x=L$) nosilca. Prvi enačbi v sistemu (1.278), ki ni povezana z drugima dvema, pripadata dva tipa robnih pogojev

$$u=u_p \qquad \text{ali} \qquad N_x=E\,A_x\,\frac{du}{dx}=N_{xp},$$

kjer u_p in N_{xp} pomenita predpisani vrednosti vzdolžnega pomika in osne sile. Drugi in tretji enačbi v sistemu (1.278) pripadajo naslednji robni pogoji

$$w=w_p \qquad \text{ali} \qquad N_z=k\,G\,A_x\left(\frac{dw}{dx}+\varphi_z\right)=N_{zp},$$

in

$$\varphi_z=\varphi_{zp} \qquad \text{ali} \qquad M_y=E\,I_y\,\frac{d\varphi_z}{dx}=M_{yp},$$

kjer so w_p, φ_{zp}, N_{zp} in M_{yp} predpisane vrednosti pomika, zasuka, prečne sile in upogibnega momenta na mestu, kjer je robni pogoj predpisan. Najpogosteje so predpisane vrednosti pomikov, zasukov oziroma sil in momentov enake nič. Povdariti še moramo, da v isti točki ne moremo istočasno predpisati pomika in ustrezne notranje sile. Na primer: za $x=0$ ne moremo predpisati, da je $w=0$ in $N_z=0$.

Druga in tretja enačba v sistemu (1.278) sta med seboj povezani. Enačbi lahko preuredimo tako, da dobimo dve nepovezani enačbi. Če tretjo enačbo v (1.278) odvajamo po x

$$\begin{aligned} E\,I_y \frac{d^3\varphi_z}{dx^3} - k\,G\,A_x \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\varphi_z}{dx}\right) + \frac{d\mathscr{M}_y}{dx} = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad k\,G\,A_x \frac{d\varphi_z}{dx} = E\,I_y \frac{d^3\varphi_z}{dx^3} - k\,G\,A_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d\mathscr{M}_y}{dx} \end{aligned} \tag{1.279}$$

in to vstavimo v drugo enačbo sistema (1.278), dobimo enačbo za račun zasuka φ_z prečnega prereza $\mathscr{A}_x$

$$\boxed{E\,I_y \frac{d^3\varphi_z}{dx^3} + \mathscr{P}_z + \frac{d\mathscr{M}_y}{dx} = 0.} \tag{1.280}$$

Izpeljimo še diferencialno enačbo za w. Najprej drugo enačbo v (1.278) dvakrat odvajamo po x in izrazimo $d^3\varphi_z/dx^3$

$$\frac{d^3\varphi_z}{dx^3} = -\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{k\,G\,A_x}\frac{d^2\mathscr{P}_z}{dx^2}. \tag{1.281}$$

Če v prvi izmed enačb (1.279) upoštevamo (1.281) ter drugo enačbo sistema (1.278), zapišemo

$$E\,I_y \left(-\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{1}{k\,G\,A_x}\frac{d^2\mathscr{P}_z}{dx^2}\right) + \mathscr{P}_z + \frac{d\mathscr{M}_y}{dx} = 0$$

in po preureditvi dobimo enačbo za navpični pomik w

$$\boxed{E\,I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = \mathscr{P}_z + \frac{d\mathscr{M}_y}{dx} - \frac{E\,I_y}{k\,G\,A_x}\frac{d^2\mathscr{P}_z}{dx^2}.} \tag{1.282}$$

Če bi obravnavali nosilec v ravnini x, y, bi namesto (1.267) zapisali

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0} = -\varphi_y(x),$$

namesto (1.268)

$$u_x(x,y) = u(x) - y\,\varphi_y(x), \quad u_y(x,y) = v(x), \quad u_z(x,y) = 0,$$

namesto (1.269)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - y\,\frac{d\varphi_y}{dx}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \varphi_y\right),$$

namesto prvih dveh enačb (1.271) in enačbe (1.274) pa bi morali zapisati

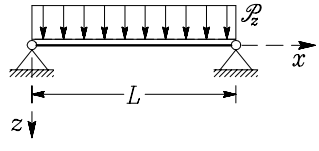
$$N_x = E\,A_x \frac{du}{dx}, \quad M_z = E\,I_z \frac{d\varphi_y}{dx}, \quad N_y = k\,G\,A_x \left(\frac{dv}{dx} - \varphi_y\right)$$

ter namesto (1.277) enačbe

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)+\mathscr{P}_x=0,\\
&\frac{d}{dx}\left(k\,G\,A_x\left(\frac{dv}{dx}-\varphi_y\right)\right)+\mathscr{P}_y=0,\\
&\frac{d}{dx}\left(E\,I_z\,\frac{d\varphi_y}{dx}\right)+k\,G\,A_x\left(\frac{dv}{dx}-\varphi_y\right)+\mathscr{M}_z=0.
\end{aligned}}$$

Enačbe Timošenkove teorije nosilcev za ravninski primer izpelje Cowper [†] tako, da integrira ravnotežne enačbe gibanja delca po prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$. Ustrezne enačbe za primer prostorskega nosilca so izpeljane v članku Staneka.[‡]

Primer 1.34 *Po Timošenkovi teoriji nosilcev izračunajmo pomike in zasuke osi ter zasuke prečnih prerezov prostoležečega nosilca pravokotnega prereza višine h in širine b, ki je po vsej dolžini obtežen z enakomerno obtežbo $\mathscr{P}_z$ (slika 1.142)! Rezultate primerjajmo s tehnično teorijo nosilcev ter z rezultati, ki jih dobimo, če nalogo rešujemo z bolj točnim dvodimenzionalnim računskim modelom z upoštevanjem ravninskega napetostnega stanja.*



Slika 1.142: Prostoležeči nosilec, obtežen s konstantno linijsko obtežbo

Enačbi (1.280) in (1.282) ob upoštevanju dane obtežbe zapišemo takole:

$$E\,I_y\frac{d^3\varphi_z}{dx^3}=-\mathscr{P}_z,\qquad E\,I_y\frac{d^4w}{dx^4}=\mathscr{P}_z. \tag{1.283}$$

Robna pogoja v krajiščih sta: $w=0$ in $M_y=0$. Če upoštevamo drugo izmed enačb (1.271), potem lahko namesto $M_y=0$ upoštevamo $d\varphi_z/dx=0$. Najprej prvo izmed enačb (1.283) trikrat integriramo in dobimo

$$\varphi_z=\frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,x^3}{6}+\frac{C_1\,x^2}{2}+C_2\,x+C_3\right). \tag{1.284}$$

[†] G.R. Cowper, The Shear Coefficient in Timoshenkos Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, June, 1966.

[‡] M. Stanek, Strižni oblikovni koeficienti ravnega grednega nosilca, 17. Jugoslovanski kongres racionalne in uporabne mehanike, Zbornik del, str. 25-30, Zadar, 1986.

Vidimo, da moramo iz robnih pogojev določiti tri integracijske konstante C_1, C_2 in C_3. Ker lahko za zasuke φ_z zapišemo le dva robna pogoja

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad \frac{d\varphi_z}{dx} = 0, \\ x = L: &\quad \frac{d\varphi_z}{dx} = 0, \end{aligned}$$

lahko iz njiju izračunamo le dve konstanti

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\varphi_z}{dx}\right|_{x=0} &= \frac{1}{E\,I_y}\,C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0, \\ \left.\frac{d\varphi_z}{dx}\right|_{x=L} &= \frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,L^2}{2} + C_1\,L\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{\mathscr{P}_z\,L}{2}. \end{aligned}$$

Zasuk φ_z lahko sedaj zapišemo v naslednji obliki

$$\varphi_z = \frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,x^3}{6} + \frac{\mathscr{P}_z\,L\,x^2}{4} + C_3\right). \tag{1.285}$$

Pomike izračunamo z integriranjem zadnje enačbe sistema diferencialnih enačb (1.278)

$$-\mathscr{P}_z\,x + \frac{\mathscr{P}_z\,L}{2} - k\,G\,A_x\left(\frac{dw}{dx} + \frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,x^3}{6} + \frac{\mathscr{P}_z\,L\,x^2}{4} + C_3\right)\right) = 0.$$

Iz zadnje enačbe izrazimo dw

$$dw = \left(\frac{1}{k\,G\,A_x}\left(-\mathscr{P}_z\,x + \frac{\mathscr{P}_z\,L}{2}\right) - \frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,x^3}{6} + \frac{\mathscr{P}_z\,L\,x^2}{4} + C_3\right)\right)dx$$

in dobimo

$$w = \frac{1}{k\,G\,A_x}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,x^2}{2} + \frac{\mathscr{P}_z\,L\,x}{2}\right) - \frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,x^4}{24} + \frac{\mathscr{P}_z\,L\,x^3}{12} + C_3\,x\right) + C_4. \tag{1.286}$$

Konstanti C_3 in C_4 določimo iz robnih pogojev za pomika

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad w = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0, \\ x = L: &\quad w = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{E\,I_y}\left(-\frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{24} + \frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{12} + C_3\,L\right) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{\mathscr{P}_z\,L^3}{24}. \end{aligned}$$

Pomik $w(x)$ in zasuk $\varphi_z(x)$ lahko sedaj zapišemo v zaključeni obliki:

$$w(x) = \frac{\mathscr{P}_z\,x}{2\,k\,G\,A_x}\,(L - x) - \frac{\mathscr{P}_z\,x}{24\,E\,I_y}\,(-x^3 + 2\,L\,x^2 - L^3), \tag{1.287}$$

$$\varphi_z(x) = \frac{\mathscr{P}_z}{E\,I_y}\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{L\,x^2}{4} - \frac{L^3}{24}\right). \tag{1.288}$$

Sistem diferencialnih enačb (1.278) lahko rešimo tudi s programom Mathematica:

```
dif1 = k Gm Ax (w''[x] + fiz'[x]) == -Pz;
dif2 = Em Iy fiz''[x] - k Gm Ax (w'[x] + fiz[x]) == 0;

rob1 = w[0]==0;        rob2 = w[L]==0;
rob3 = fiz'[0]==0;     rob4 = fiz'[L]==0;

res=DSolve[{dif1,dif2,rob1,rob2,rob3,rob4},{w[x],fiz[x]},x];

Print[" w(x) = ", Expand[ w[x] /. res[[1,1]] ] ];
Print[" fiz(x) = ", fiz[x] /. res[[1,2]] ];

                    3                   2                 3                 4
          L Pz x   L  Pz x        Pz x        L Pz x        Pz x
w(x) = --------- + -------- - --------- - -------- + --------
       2 Ax Gm k   24 Em Iy   2 Ax Gm k   12 Em Iy   24 Em Iy

          -(L^3 Pz)    L Pz x^2     Pz x^3
fiz(x) = --------- + ------- - -------
          24 Em Iy    4 Em Iy   6 Em Iy
```

Enačbi (1.287) in (1.288) lahko preuredimo, pri tem da upoštevamo, da je $G = E/[2(1+\nu)]$ in $A_x = b\,h$:

$$w(x) = \frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{24\,E\,I_y}\left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L}\right) + \frac{\mathscr{P}_z\,L^2\,2\,(1+\nu)}{2\,k\,E\,b\,h}\left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \tag{1.289}$$

in

$$\varphi_z(x) = \frac{\mathscr{P}_z\,L^3}{24\,E\,I_y}\left(-4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right). \tag{1.290}$$

Zasuk osi nosilca dw/dx lahko izračunamo iz (1.289). Če upoštevamo tudi, da je $I_y = b\,h^3/12$ in $k = k_p = 10\,(1+\nu)/(12+11\,\nu)$, lahko enačbo (1.289) zapišemo tudi takole:

$$w(x) = \frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{24\,E\,I_y}\left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right) + \left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{24+22\,\nu}{10}\left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\right) \equiv w_T. \tag{1.291}$$

Po tehnični teoriji (Bernoulli-Eulerjeva teorija nosilcev) brez upoštevanja vpliva strižnih deformacij, dobimo

$$w = \frac{\mathscr{P}_z\,L^4}{24\,E\,I_y}\left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L}\right) \equiv w_{BE}, \tag{1.292}$$

kar predstavlja prvi del enačbe (1.291). Sledi, da drugi del v (1.291) predstavlja vpliv strižne deformacije.

Če nalogo rešimo po ravninskem napetostnem stanju, dobimo †

$$w(x,0) = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{24\, E\, I_y}\left(\left(\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L}\right) + \left(\frac{h}{L}\right)^2\left(\frac{24+15\,\nu}{10}\right)\left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\right) \equiv w_{RN}. \tag{1.293}$$

Prvi del je enak, kot v izrazu (1.291). Če primerjamo enačbi (1.291) in (1.293), vidimo, da je razmerje pomikov zaradi strižne deformacije po Timošenkovi teoriji in po ravninskem napetostnem stanju tako

$$\frac{w_{\mathrm{T}}}{w_{\mathrm{RN}}} = \frac{24+22\,\nu}{24+15\,\nu}. \tag{1.294}$$

Ker se ν lahko spreminja med 0 in 0.5, ima izraz (1.294) vrednosti med 1.00 in 1.11, razlike v pomikih pa so še manjše.

V preglednici 1.21 primerjajmo nekaj numeričnih rezultatov za različna razmerja h/L in različne vrednosti ν.

Tabela 1.21: Razmerja pomikov na sredini nosilca po enačbah (1.291), (1.292) in (1.293)

h/L	$\nu = 0$		$\nu = 0.25$		$\nu = 0.5$	
	$w_{\mathrm{T}}/w_{\mathrm{RN}}$	$w_{\mathrm{BE}}/w_{\mathrm{RN}}$	$w_{\mathrm{T}}/w_{\mathrm{RN}}$	$w_{\mathrm{BE}}/w_{\mathrm{RN}}$	$w_{\mathrm{T}}/w_{\mathrm{RN}}$	$w_{\mathrm{BE}}/w_{\mathrm{RN}}$
0.5	1.000	0.676	1.023	0.643	1.043	0.613
0.25	1.000	0.893	1.008	0.878	1.015	0.864
0.125	1.000	0.971	1.002	0.966	1.004	0.962
0.1	1.000	0.981	1.001	0.978	1.003	0.975
0.05	1.000	0.995	1.000	0.994	1.001	0.994

Z w_T je označen pomik po Timošenkovi teoriji, z w_{BE} pomik po Bernoulli-Eulerjevi teoriji (razdelek 1.2.5), z w_{RN} pa pomik izračunan po ravninskem napetostnem stanju. Iz rezultatov v preglednici 1.21 sledi, da vpliva prečnih sil na pomike pri kratkih nosilcih ne smemo zanemariti.

Zapišimo še izraza za $w(L/2)$ in $\varphi_z(0)$, ki ju dobimo po Timošenkovi teoriji:

$$w(L/2) = \frac{5\,\mathscr{P}_z\, L^4}{384\, E\, I_y} + \frac{\mathscr{P}_z\, L^2}{8\, k\, G\, A_x}, \qquad \varphi_z(0) = -\frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{24\, E\, I_y}. \tag{1.295}$$

Enak rezultat (enačbi (1.295)) dobimo z izrekom o virtualnih silah (glej primer 5.25 v poglavju 5). Po Bernoulli-Eulerjevi teoriji dobimo, da je $w(L/2) = 5\,\mathscr{P}_z\, L^4/384\, E\, I_y$ (preglednica 1.5f), po ravninskem napetostnem stanju pa

$$w(L/2) = \frac{5\,\mathscr{P}_z\, L^4}{384\, E\, I_y} + \frac{\mathscr{P}_z\, L^2}{16\,(1+\nu)\, G\, A_x}\left(\frac{12}{5} + \frac{3\,\nu}{2}\right). \tag{1.296}$$

† I.H. Shames, C.L. Dym, , Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1985.

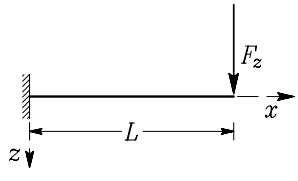
Za pravokotni prerez in $\nu = 0$ je $k_p = 0.8333$, $w(L/2)$ po enačbah (1.295) in (1.296) pa

$$w(L/2) = \frac{5\,\mathscr{P}_z\,L^4}{384\,E\,I_y} + 0.15\,\frac{\mathscr{P}_z\,L^2}{G\,A_x},$$

za $\nu = 0.3$ pa $k_p = 0.84967$, $w(L/2)$ po enačbah (1.295) in (1.296) pa

$$w(L/2) = \frac{5\,\mathscr{P}_z\,L^4}{384\,E\,I_y} + 0.147\,\frac{\mathscr{P}_z\,L^2}{G\,A_x} \qquad w(L/2) = \frac{5\,\mathscr{P}_z\,L^4}{384\,E\,I_y} + 0.137\,\frac{\mathscr{P}_z\,L^2}{G\,A_x}.$$

Primer 1.35 *Izračunajmo pomike osi ter zasuke prečnih prerezov pravokotne oblike s širino b in višino h za konzolo, ki je v nepodprtem krajišču obtežena s silo F_z (slika 1.143)! Navpični pomik nepodprtega krajišča izračunajmo po Timošenkovi teoriji, ter te rezultate primerjamo z rešitvijo dvodimenzionalnega problema (ravninsko napetostno stanje) in rešitvijo bolj točnega dvodimenzionalnega modela (ravninsko napetostno stanje). Pokažimo tudi, kolikšen je vpliv pečnih sil na pomik.*



Slika 1.143: Konzola je v prostem krajišču obtežena s silo F_z

Po Timošenkovi teoriji dobimo

$$w(x) = \frac{F_z}{6\,E\,I_y}\,(3\,L\,x^2 - x^3) + \frac{F_z\,x}{k\,G\,A_x}, \qquad \varphi_z(x) = \frac{F_z}{2\,E\,I_y}\,(x^2 - 2\,L\,x).$$

Poudarimo, da moramo pri **vpeti podpori upoštevati robni pogoj** $\varphi_z = 0$ in ne pogoja $dw/dx = 0$. Za $x = L$ dobimo

$$w_{\mathrm{T}}(L) = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y} + \frac{F_z\,L}{k\,G\,A_x} = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y}\left(1 + \frac{1+\nu}{2\,k}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right), \qquad \varphi_z(L) = -\frac{F_z\,L^2}{2\,E\,I_y}. \tag{1.297}$$

Enak rezultat (enačbi (1.297)) dobimo z izrekom o virtualnih silah (glej primer 5.25 v poglavju 5). Če nalogo rešimo z dvodimenzionalnim ravninskim modelom ob predpostavki ravninskega napetostnega stanja, ter upoštevanjem robnega pogoja $[(\partial u_x/\partial z)_{x=0,z=0}]$, dobimo (M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998)

$$w_{\mathrm{OMTT}}(L) = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y} + \frac{3\,F_z\,L}{2\,G\,A_x} = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y}\left(1 + \frac{3\,(1+\nu)}{4}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right), \qquad \varphi_z(L) = -\frac{F_z\,L^2}{2\,E\,I_y}. \tag{1.298}$$

Navpična pomika iz enačb (1.297) in (1.298) zapišimo za primer $\nu = 0.3$ in $k = 10\,(1+0.3)/(12+11\cdot 0.3) = 0.8497$:

$$w_{\mathrm{T}}(L) = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y}\left(1+0.765\left(\frac{h}{L}\right)^2\right), \qquad w_{\mathrm{OMTT}}(L) = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y}\left(1+0.975\left(\frac{h}{L}\right)^2\right). \tag{1.299}$$

```
dif1 = kGAx (w''[x] + fiz'[x]) == 0;
dif2 = EIy fiz''[x] - kGAx (w'[x] + fiz[x]) == 0;

rob1 = w[0]==0;                rob2 = fiz[0]==0;
rob3 = fiz'[L]==0;             rob4 = kGAx (w'[L] + fiz[L])==F;

res=DSolve[{dif1,dif2,rob1,rob2,rob3,rob4},{w[x],fiz[x]},x];

wr[x_] = w[x] /. res[[1,1]];          fizr[x_] = fiz[x] /. res[[1,2]];

Print[" w(x) = ",Expand[wr[x]]];      Print[" fiz(x) = ",fizr[x]];
Print[" w(L) = ",Expand[wr[L]]];      Print[" fiz(L) = ",fizr[L]];


                     2       3
        F x     F L x     F x
w(x)  = ---- + ------ - -----
        kGAx    2 EIy     6 EIy
                          2
          -2 F L x + F x
fiz(x) = ---------------
                2 EIy
                   3
        F L     F L
w(L)  = ---- + -----
        kGAx    3 EIy
                2
          -(F L )
fiz(L) = -------
           2 EIy
```

Zadnji rezultat lahko primerjamo še s pomikom, ki ga dobimo, če upoštevamo, da ostane v vpeti podpori cel prerez raven ($u_x = 0$ po celem prerezu $x = 0$). Enačbo za $w(L)$ za konzolo pravokotnega prečnega prereza, ki je v prostem krajišču obtežena s točkovno silo ter za primer $\nu = 0.3$, podaja Timošenko v knjigi[†]

$$w_{\mathrm{RN}}(L) = \frac{F_z\,L^3}{3\,E\,I_y}\left(1+0.7125\left(\frac{h}{L}\right)^2 - 0.105\left(\frac{h}{L}\right)^3\right) \tag{1.300}$$

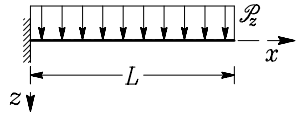
[†] S. Timoshenko, Strength of Materials, Part 1, Third Edition, D. Van Nostrand Company, Inc., Princenton, New Yersey, 1958.

Po Bernoulli-Eulerjevi teoriji dobimo, da je $w(L) = F_z\, L^3/3\, E\, I_y$ (preglednica 1.5a).

Tabela 1.22: Pomiki z različnimi računskimi modeli pri različnih vrednostih h/L

h/L	0.5	0.25	0.125	0.1	0.05
$w_{\mathrm{T}}/w_{\mathrm{RN}}$	1.023	1.005	1.001	1.001	1.000
$w_{\mathrm{BE}}/w_{\mathrm{RN}}$	0.858	0.959	0.989	0.993	0.998
$w_{\mathrm{OMTT}}/w_{\mathrm{RN}}$	1.068	1.017	1.004	1.003	1.001

Primer 1.36 *Izračunajmo pomik in zasuk prečnega prereza pri $x = L$ za primer konzole, ki je obtežena z enakomerno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$ (slika 1.144).*



Slika 1.144: Konzola je v obtežena z enakomerno linijsko obtežbo sl! $\mathscr{P}_z$

Timošenkova teorija ob upoštevanju robnega pogoja $\varphi_z = 0$ v vpeti podpori:

$$w_{\mathrm{T}}(L) = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{8\, E\, I_y} + \frac{\mathscr{P}_z\, L^2}{2\, k\, G\, A_x} = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{8\, E\, I_y}\left(1 + \frac{2\,(1+\nu)}{3\, k}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right), \qquad \varphi_z(L) = -\frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{6\, E\, I_y}.$$

Enak rezultat (enačba (31)) dobimo z izrekom o virtualnih silah (glej primer 5.25 v poglavju 5). Navpični pomik $w_{\mathrm{RE}}(L)$ za primer $\nu = 0.3$ in $k = 10\,(1+0.3)/(12+11\,0.3) = 0.8497$ je:

$$w_{\mathrm{T}}(L) = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{8\, E\, I_y}\left(1 + 1.02\left(\frac{h}{L}\right)^2\right).$$

Po Bernoulli-Eulerjevi teoriji dobimo, da je $w_{\mathrm{BE}}(L) = \mathscr{P}_z\, L^4/8\, E\, I_y$ (preglednica 1.5c). Vpliv prečnih sil v odvisnosti od razmerja h/L podajamo v preglednici 1.23.

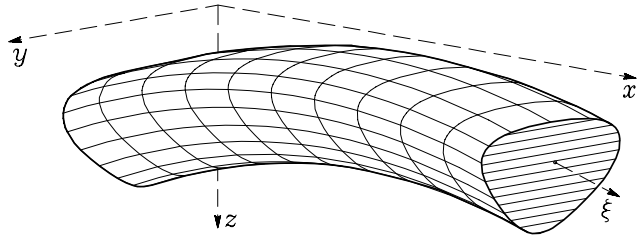
Tabela 1.23: Vpliv prečnih sil na pomike pri različnih vrednostih h/L

h/L	0.5	0.25	0.125	0.1	0.05
$w_{\mathrm{BE}}/w_{\mathrm{T}}$	0.797	0.940	0.984	0.990	0.997

```
dif1 = kGAx (w''[x] + fiz'[x]) == -Pz;
dif2 = EIy fiz''[x] - kGAx (w'[x] + fiz[x]) == 0;

rob1 = w[0]==0;          rob2 = fiz[0]==0;
rob3 = fiz'[L]==0;       rob4 = kGAx (w'[L] + fiz[L])==0;

res=DSolve[{dif1,dif2,rob1,rob2,rob3,rob4},{w[x],fiz[x]},x];

wr[x_] = Expand[w[x] /. Res[[1,1]]];
fizr[x_] = Expand[fiz[x] /. Res[[1,2]]];

Print[" w(x) = ",wr[x]];              Print[" fiz(x) = ",fizr[x]];
Print[" w(L) = ",wr[L]];              Print[" fiz(L) = ",fizr[L]];
                    2     2     2          3       4
       L Pz x   Pz x     L  Pz x    L Pz x    Pz x
w(x) = ------ - ------ + -------- - ------- + ------
        kGAx    2 kGAx    4 EIy      6 EIy    24 EIy
            2                2       3
         -(L  Pz x)   L Pz x    Pz x
fiz(x) = ---------- + ------- - -----
           2 EIy       2 EIy    6 EIy
        2         4
       L  Pz     L  Pz
w(L) = ------ + -----
       2 kGAx    8 EIy
            3
         -(L  Pz)
fiz(L) = --------
          6 EIy
```

1.7 Nosilec z ukrivljeno osjo

V tem razdelku obravnavamo linijski nosilec z ukrivljeno osjo. Omejimo se na primer, ko je os nosilca ravninska krivulja v ravnini x, z. Izpeljemo tenzor deformacij glede na ukrivljene koordinatne osi, enačbe za vzdolžno normalno, za strižno in za prečno normalno napetost v ravnini prečnega prereza. Izpeljemo tudi enačbe za račun pomikov ter zasuka.



Slika 1.145: Primer dela ukrivljenega nosilca z osjo, vzporedno ravnini x, z