1.7.1 Tenzor deformacij glede na ukrivljene koordinate

Če so točke začetne konfiguracije $\vec{r}(\xi,\eta,\zeta)$ podane z ukrivljenimi telesnimi koordinatami ξ,η,ζ, potem zapišemo vektor $d\vec{r}$ z enačbo

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}\,d\zeta = \vec{g}_\xi\,d\xi + \vec{g}_\eta\,d\eta + \vec{g}_\zeta\,d\zeta.$$

Koordinate ξ,η,ζ določajo krivočrtni koordinatni sistem. Bazni vektorji $\vec{g}_\xi$, $\vec{g}_\eta$ in $\vec{g}_\zeta$ so definirani z enačbami

$$\vec{g}_\xi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}, \qquad \vec{g}_\eta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}, \qquad \vec{g}_\zeta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}. \tag{1.301}$$

Pri referenčnem opisu zapišemo vektor $\vec{r}\,'$, ki določa lego točk v trenutni konfiguraciji, z enačbo †

$$\vec{r}\,'(\xi,\eta,\zeta,t) = \vec{r} + \vec{u}(\xi,\eta,\zeta,t).$$

Diferencial $d\vec{r}\,'$ vektorja $\vec{r}\,'$ pri nekem izbranem času $t = t_k$ je:

$$d\vec{r}\,' = \frac{\partial\vec{r}\,'}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\vec{r}\,'}{\partial\eta}\,d\eta + \frac{\partial\vec{r}\,'}{\partial\zeta}\,d\zeta = \vec{g}\,'_\xi\,d\xi + \vec{g}\,'_\eta\,d\eta + \vec{g}\,'_\zeta\,d\zeta,$$

kjer smo uporabili oznake

$$\vec{g}\,'_\xi = \vec{g}_\xi + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi}, \qquad \vec{g}\,'_\eta = \vec{g}_\eta + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\eta}, \qquad \vec{g}\,'_\zeta = \vec{g}_\zeta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\zeta}. \tag{1.302}$$

Kvadrat dolžine vektorja $d\vec{r}$ izračunamo s skalarnim produktom $d\vec{r}\cdot d\vec{r}$. Na kratko ga zapišemo z enačbo

$$(dr)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \sum_i\sum_j \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\,d\xi_i\,d\xi_j, \quad i,j = \xi,\eta,\zeta.$$

Podobno zapišemo kvadrat dolžine vektorja $d\vec{r}\,'$:

$$(dr')^2 = d\vec{r}\,'\cdot d\vec{r}\,' = \sum_i\sum_j \vec{g}\,'_i\cdot\vec{g}\,'_j\,d\xi_i\,d\xi_j, \quad i,j = \xi,\eta,\zeta.$$

Izračunamo razliko kvadratov dolžin $(dr')^2$ in $(dr)^2$

$$(dr')^2 - (dr)^2 = \sum_i\sum_j (\,\vec{g}\,'_i\cdot\vec{g}\,'_j - \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\,)\,d\xi_i\,d\xi_j, \quad i,j = \xi,\eta,\zeta.$$

Komponente E_{ij} tenzorja velikih deformacij $[\,E\,]$ so definirane z izrazom †

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\,\vec{g}\,'_i\cdot\vec{g}\,'_j - \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\,) = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{g}_i + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi_i}\right)\cdot\left(\vec{g}_j + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi_j}\right) - \vec{g}_i\cdot\vec{g}_j\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi_i}\cdot\vec{g}_j + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi_j}\cdot\vec{g}_i + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi_i}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi_j}\right), \quad i,j = \xi,\eta,\zeta.$$

† M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, FGG, 1998.

Če so specifične spremembe dolžin, spremembe pravih kotov in spremembe smeri majhne količine, lahko tretji člen v oklepaju v zadnji enačbi zanemarimo in zapišemo izraz za komponente ε_{ij}, $(i, j = \xi, \eta, \zeta)$ tenzorja majhnih deformacij $[\,\varepsilon\,]$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_i} \cdot \vec{g}_j + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi_j} \cdot \vec{g}_i\right), \quad i, j = \xi, \eta, \zeta. \tag{1.303}$$

Če vektor pomika $\vec{u}$ razstavimo v smeri baznih vektorjev $\vec{g}_\xi$, $\vec{g}_\eta$ in $\vec{g}_\zeta$

$$\vec{u} = u_\xi\, \vec{g}_\xi + u_\eta\, \vec{g}_\eta + u_\zeta\, \vec{g}_\zeta,$$

zapišemo komponente ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij takole:

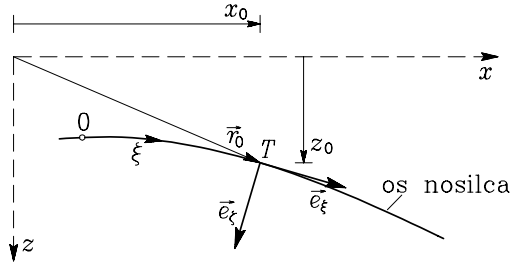
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\right), \quad i, j = \xi, \eta, \zeta. \tag{1.304}$$

V primeru uporabe krivočrtnih koordinat je dimenzija komponent tenzorja odvisna od dimenzij krivočrtnih koordinat ξ_i. Zato so lahko dimenzije posameznih tenzorskih komponent različne med seboj. Tenzorske komponente niso “fizikalne”komponente tenzorja (glej tudi primer 1.40). **Fizikalne komponente** $\bar{\varepsilon}_{ij}$ tenzorja deformacij $[\,\varepsilon\,]$ so definirane z enačbo †

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{(\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i)\,(\vec{g}_j \cdot \vec{g}_j)}}, \quad i, j = \xi, \eta, \zeta. \tag{1.305}$$

1.7.2 Pomiki ter vzdolžna normalna napetost

Os nosilca določa ravninska krivulja v ravnini x, z. Dolžino od neke izbrane točke O na osi nosilca, do poljubne točke T na osi nosilca, označimo s parametrom ξ. Enotski vektor, ki leži na tangenti na os nosilca in ima smer naraščajoče vrednosti parametra ξ, označimo z $\vec{e}_\xi$. Enotski vektor v ravnini x, z, ka ga dobimo, če vektor $\vec{e}_\xi$ zavrtimo v pozitivni smeri za $3\,\pi/2$, označimo z $\vec{e}_\zeta$. Enotske vektorje $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ desnoročnega potujočega triroba vzdolž osi nosilca izberemo tako, da je $\vec{e}_\eta$ vzporeden z $\vec{e}_y$ (slika 1.146).



Slika 1.146: Enotska vektorja potujočega triroba $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\zeta$ na osi nosilca

† M. Saje, S. Srpčič, Tenzorski račun, Katedra za mehaniko, FAGG, VTOZD Gradbeništvo in geodezija, Ljubljana, 1988, T.J. Chung, Applied Continuum Mechanics, Cambridge University Press, 1996.

Kartezični koordinati x_0, z_0 točke T na osi nosilca izrazimo v odvisnosti od parametra ξ

$$x_0 = x_0(\xi), \qquad z_0 = z_0(\xi). \tag{1.306}$$

Krajevni vektor $\vec{r}_0$ je torej

$$\vec{r}_0 = (x_0, 0, z_0). \tag{1.307}$$

Enotski vektorji $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ spremljajočega triroba so določeni z enačbami

$$\vec{e}_\xi = \frac{d\vec{r}_0}{d\xi} = \left(\frac{dx_0}{d\xi}, 0, \frac{dz_0}{d\xi}\right) \quad \vec{e}_\eta = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_\zeta = \vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta. \tag{1.308}$$

Koordinate ξ, η, ζ določajo ortogonalni krivočrtni koordinatni sistem. V nadaljevanju izrazimo odvoda enotskih vektorjev $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\zeta$ po parametru ξ z upognjenostjo κ osi nosilca. V primeru ravninske krivulje definiramo upognjenost κ z enačbama (1.346) in (1.356) (glej primer 1.39)

$$\frac{d\vec{e}_\xi}{d\xi} = \kappa\, \vec{e}_\zeta \tag{1.309}$$

oziroma takole:

$$\kappa = \frac{d\vec{e}_\xi}{d\xi} \cdot \vec{e}_\zeta = \frac{z_0''}{\sqrt{(1 - z_0'^2)^3}} = \frac{\dfrac{d^2 z_0}{dx_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{dz_0}{dx_0}\right)^2\right)^3}}. \tag{1.310}$$

Odvod $d\vec{e}_\zeta/d\xi$ izrazimo s κ po enačbi (1.349) (glej primer 1.39)

$$\frac{d\vec{e}_\zeta}{d\xi} = -\kappa\, \vec{e}_\xi. \tag{1.311}$$

Z $\vec{r}$ označimo krajevni vektor do poljubnega delca v nosilcu (slika 1.147)

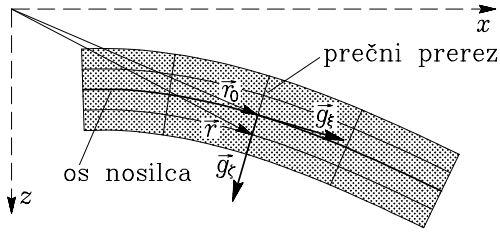
$$\vec{r} = \vec{r}_0(\xi) + \zeta\, \vec{e}_\zeta = x_0(\xi)\, \vec{e}_x + z_0(\xi)\, \vec{e}_z + \zeta\, \vec{e}_\zeta(\xi). \tag{1.312}$$

Bazna vektorja krivočrtnega koordinatnega sistema (slika 1.147) sta definirana z enačbama (1.301)

$$\vec{g}_\xi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi}, \quad \vec{g}_\zeta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta}. \tag{1.313}$$

Če upoštevamo (1.312) v (1.313), sledi

$$\vec{g}_\xi = \frac{dx_0}{d\xi}\, \vec{e}_x + \frac{dz_0}{d\xi}\, \vec{e}_z + \zeta\, \frac{d\vec{e}_\zeta}{d\xi}, \qquad \vec{g}_\zeta = \vec{e}_\zeta. \tag{1.314}$$



Slika 1.147: Ortogonalni krivočrtni koordinatni sistem

Upoštevamo še prvo izmed enačb (1.308) in enačbo (1.311) ter zapišemo bazna vektorje takole

$$\vec{g}_\xi = (1 - \zeta\,\kappa)\,\vec{e}_\xi, \qquad \vec{g}_\zeta = \vec{e}_\zeta. \tag{1.315}$$

Pomik $\vec{u}$ sestavimo iz pomika $\vec{u}_0$ na osi nosilca ter pomika $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_\xi$ zaradi zasuka prečnega prereza

$$\vec{u} = \vec{u}_0(\xi) + \vec{\omega}(\xi) \times \vec{\rho}_\xi, \quad \vec{u}_0 = u_\xi(\xi)\,\vec{e}_\xi + u_\zeta(\xi)\,\vec{e}_\zeta, \tag{1.316}$$

kjer z $\vec{\omega}$ in $\vec{\rho}_\xi$ označimo

$$\vec{\omega}(\xi) = (0, \omega_\eta, 0), \quad \vec{\rho}_\xi(\xi) = (0, 0, \zeta). \tag{1.317}$$

Pri tem predpostavimo, da prečni prerez ostane raven tudi po deformiranju. Komponenti u_ξ in u_ζ sta pomika točke na osi nosilca. Če (1.317) upoštevamo v (1.316), dobimo

$$\vec{u} = (u_\xi + \zeta\,\omega_\eta)\,\vec{e}_\xi + u_\zeta\,\vec{e}_\zeta.$$

Za komponente ε_{ij} tenzorja majhnih deformacij (enačba (1.303)) potrebujemo odvode pomikov (glej (1.309) in (1.311))

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} &= \left(\frac{du_\xi}{d\xi} + \zeta\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi}\right)\vec{e}_\xi + (u_\xi + \zeta\,\omega_\eta)\,\frac{d\vec{e}_\xi}{d\xi} + \frac{du_\zeta}{d\xi}\,\vec{e}_\zeta + u_\zeta\,\frac{d\vec{e}_\zeta}{d\xi} = \\
&= \left(\frac{du_\xi}{d\xi} + \zeta\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa\right)\vec{e}_\xi + \left((u_\xi + \zeta\,\omega_\eta)\,\kappa + \frac{du_\zeta}{d\xi}\right)\vec{e}_\zeta, \\
\frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} &= \omega_\eta\,\vec{e}_\xi.
\end{aligned} \tag{1.318}$$

Komponente tenzorja deformacij zapišemo z upoštevanjem (1.315) in (1.318) takole:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \cdot \vec{g}_\xi = \left(\frac{du_\xi}{d\xi} + \zeta\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa\right)(1 - \zeta\,\kappa), \\
\varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \cdot \vec{g}_\zeta = \omega_\eta\,\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\zeta = 0, \\
\varepsilon_{\xi\zeta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \cdot \vec{g}_\xi + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \cdot \vec{g}_\zeta\right) = \frac{1}{2}\left(\omega_\eta\,(1 - \zeta\,\kappa) + (u_\xi + \zeta\,\omega_\eta)\,\kappa + \frac{du_\zeta}{d\xi}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\omega_\eta + u_\xi\,\kappa + \frac{du_\zeta}{d\xi}\right).
\end{aligned} \tag{1.319}$$

Če upoštevamo še Navier–Bernoullijevo hiptezo $\varepsilon_{\xi\zeta} = 0$, dobimo:

$$\varepsilon_{\xi\zeta} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_\eta = -u_\xi\,\kappa - \frac{du_\zeta}{d\xi}}. \tag{1.320}$$

Napetost $\sigma_{\xi\xi}$ izračunamo po enačbi

$$\sigma_{\xi\xi} = E\,\bar{\varepsilon}_{\xi\xi}. \tag{1.321}$$

Z $\bar{\varepsilon}_{\xi\xi}$ je označena fizikalna komponenta tenzorja majhnih deformacij, ki jo izračunamo po enačbi (1.305) (glej tudi primer 1.40)

$$\bar{\varepsilon}_{\xi\xi} = \frac{\varepsilon_{\xi\xi}}{\sqrt{(\vec{g}_\xi\cdot\vec{g}_\xi)\,(\vec{g}_\xi\cdot\vec{g}_\xi)}} = \frac{\varepsilon_{\xi\xi}}{\vec{g}_\xi\cdot\vec{g}_\xi}. \tag{1.322}$$

Skalarni produkt $\vec{g}_\xi\cdot\vec{g}_\xi$ zapišemo zaradi (1.315) takole:

$$\vec{g}_\xi\cdot\vec{g}_\xi = (1-\zeta\,\kappa)^2. \tag{1.323}$$

Vzdolžno normalno napetost $\sigma_{\xi\xi}$ dobimo iz (1.321), če upoštevamo(1.322), (1.323) ter prvo izmed enačb (1.319):

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{E}{(1-\zeta\,\kappa)}\left(\frac{du_\xi}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa + \zeta\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi}\right). \tag{1.324}$$

Osna sila N_ξ in upogibni moment M_η sta po definiciji podana z enačbama:

$$\begin{aligned} N_\xi &= \int\limits_{\mathscr{A}_\xi} \sigma_{\xi\xi}\,dA_\xi = E\left(\frac{du_\xi}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa\right)\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa} + E\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi}\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa},\\ M_\eta &= \int\limits_{\mathscr{A}_\xi} \zeta\,\sigma_{\xi\xi}\,dA_\xi = E\left(\frac{du_\xi}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa\right)\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa} + E\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi}\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta^2\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}. \end{aligned} \tag{1.325}$$

Če uporabimo oznake:

$$\bar{A}_\xi = \int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}, \quad \bar{S}_\eta = \int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}, \quad \bar{I}_{\eta\eta} = \int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta^2\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa},$$

dobimo

$$\begin{aligned} N_\xi &= E\left(\frac{du_\xi}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa\right)\bar{A}_\xi + E\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi}\,\bar{S}_\eta,\\ M_\eta &= E\left(\frac{du_\xi}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa\right)\bar{S}_\eta + E\,\frac{d\omega_\eta}{d\xi}\,\bar{I}_{\eta\eta}. \end{aligned} \tag{1.326}$$

Iz enačb (1.326) izrazimo kinematične količine s statičnimi količinami:

$$\begin{aligned} \frac{du_\xi}{d\xi} - u_\zeta\,\kappa &= \frac{\bar{I}_{\eta\eta}\,N_\xi}{E\,(\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta} - \bar{S}_\eta^2)} - \frac{\bar{S}_\eta\,M_\eta}{E\,(\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta} - \bar{S}_\eta^2)},\\ \frac{d\omega_\eta}{d\xi} &= -\frac{\bar{S}_\eta\,N_\xi}{E\,(\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta} - \bar{S}_\eta^2)} + \frac{A_\xi\,M_\eta}{E\,(\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta} - \bar{S}_\eta^2)}. \end{aligned} \tag{1.327}$$

Pomika u_ξ in u_ζ ter zasuk ω_η izračunamo iz enačb (1.320) ter (1.327). Izraz za normalno napetost $\sigma_{\xi\xi}$ dobimo, če (1.327) vstavimo v (1.324):

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \frac{1}{(\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta}-\bar{S}_\eta^2)\,(1-\zeta\,\kappa)}\left(\left(\bar{I}_{\eta\eta}\,N_\xi-\bar{S}_\eta\,M_\eta\right)+\zeta\left(-\bar{S}_\eta\,N_\xi+\bar{A}_\xi\,M_\eta\right)\right)=\\ &= \frac{1}{(\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta}-\bar{S}_\eta^2)\,(1-\zeta\,\kappa)}\left(\left(\bar{I}_{\eta\eta}-\zeta\,\bar{S}_\eta\right)N_\xi+\left(-\bar{S}_\eta+\zeta\,\bar{A}_\xi\right)M_\eta\right).\end{aligned} \tag{1.328}$$

Enačbo (1.328) preuredimo tako, da vpeljemo koeficient m po enačbi

$$\bar{S}_\eta=\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}=\frac{m\,A_\xi}{\kappa}\quad\rightarrow\quad\boxed{m=\frac{\kappa}{A_\xi}\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}.} \tag{1.329}$$

Z A_ξ je označena ploščina prečnega prereza $\mathscr{A}_\xi$. Izrazimo še $\bar{A}_\xi$ in $\bar{I}_{\eta\eta}$ s koeficientom m:

$$\begin{aligned}\bar{A}_\xi &= \int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}=\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{(\zeta\,\kappa+1-\zeta\,\kappa)}{1-\zeta\,\kappa}dA_\xi=\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\kappa\,\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}+\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}dA_\xi=m\,A_\xi+A_\xi=\\ &=(m+1)\,A_\xi\end{aligned} \tag{1.330}$$

in

$$\begin{aligned}\bar{I}_{\eta\eta} &= \int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta^2 dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}=\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\left(-\frac{1}{\kappa}\right)\left(\zeta-\frac{\zeta}{1-\zeta\,\kappa}\right)dA_\xi=-\frac{1}{\kappa}\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\zeta\,dA_\xi+\frac{1}{\kappa}\int\limits_{\mathscr{A}_\xi}\frac{\zeta\,dA_\xi}{1-\zeta\,\kappa}=0+\frac{m\,A_\xi}{\kappa^2}=\\ &=\frac{m\,A_\xi}{\kappa^2}.\end{aligned} \tag{1.331}$$

Upštevali smo, da poteka η os skozi težišče prečnega prereza $\mathscr{A}_\xi$. Izraze, ki nastopajo v enačbi (1.328), zapišemo s količinami A_ξ, m in κ, če upoštevamo (1.330), (1.331) in (1.329):

$$\begin{aligned}&\bar{A}_\xi\,\bar{I}_{\eta\eta}-\bar{S}_\eta^2=(m+1)\,A_\xi\,\frac{m\,A_\xi}{\kappa^2}-\frac{m^2\,A_\xi^2}{\kappa^2}=\frac{m\,A_\xi^2}{\kappa^2},\\ &\bar{I}_{\eta\eta}-\zeta\,\bar{S}_\eta=\frac{m\,A_\xi}{\kappa^2}-\zeta\,\frac{m\,A_\xi}{\kappa}=\frac{m\,A_\xi}{\kappa^2}(1-\zeta\,\kappa),\\ &-\bar{S}_\eta+\zeta\,\bar{A}_\xi=-\frac{m\,A_\xi}{\kappa}+\zeta\,(m+1)\,A_\xi=-\frac{A_\xi}{\kappa}\left((1-\zeta\,\kappa)\,m-\zeta\,\kappa\right).\end{aligned} \tag{1.332}$$

V izraz za normalno napetost $\sigma_{\xi\xi}$ (1.328) vstavimo (1.332) in dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \frac{\kappa^2}{m\,A_\xi^2}\frac{1}{(1-\zeta\,\kappa)}\left(\frac{m\,A_\xi}{\kappa^2}\,(1-\zeta\,\kappa)\,N_\xi-\frac{A_\xi}{\kappa}\left[\,(1-\zeta\,\kappa)\,m-\zeta\,\kappa\,\right]M_\eta\right)=\\ &=\frac{N_\xi}{A_\xi}+\frac{\kappa}{A_\xi}\left(\frac{\zeta\,\kappa}{(1-\zeta\,\kappa)\,m}-1\right)M_\eta.\end{aligned}$$

Če m izrazimo s količino e po enačbi

$$m = \frac{e}{(1/\kappa) - e} \quad \rightarrow \quad \boxed{e = \frac{m}{\kappa\,(1+m)},} \tag{1.333}$$

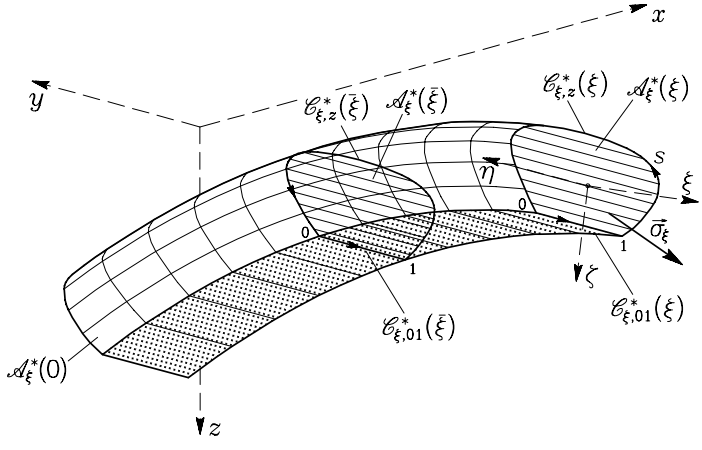
zapišemo normalno napetost $\sigma_{\xi\xi}$ v obliki

$$\boxed{\sigma_{\xi\xi} = \frac{N_\xi}{A_\xi} + \frac{\kappa}{A_\xi}\,\frac{\zeta - e}{(1-\zeta\,\kappa)\,e}\,M_\eta.} \tag{1.334}$$

Napetost $\sigma_{\xi\xi}$ zaradi upogibnega momenta M_η je enaka nič, ko je $\zeta - e = 0$. To pomeni, da določa količina e razdaljo ζ, pri kateri je napetost $\sigma_{\xi\xi}$ zaradi upogibnega momenta M_η enaka nič.

1.7.3 Strižna in prečna normalna napetost

Vzemimo del nosilca od $\bar{\xi} = 0$ do $\bar{\xi} = \xi$ ter ga odrežimo pri $\zeta = \zeta^* = \text{konst}$ (slika 1.148).



Slika 1.148: Obravnavamo del nosilca dolžine ξ z delnim prečnim prerezom $\mathscr{A}^*_x$

Zapišimo ravnotežno enačbo za ta del nosilca:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{A}^*_\xi(0)} \vec{p}_S(0,\eta,\zeta)\,dA_\xi + \int\limits_{\mathscr{A}^*_\xi(\xi)} \vec{\sigma}_\xi(\xi,\eta,\zeta)\,dA_\xi + \\
&+ \int\limits_0^\xi \left(\int\limits_{\mathscr{C}^*_{\xi,z}(\bar{\xi})} \vec{p}_S(\bar{\xi},s)\,ds + \int\limits_{\mathscr{A}^*_\xi(\bar{\xi})} \vec{v}(\bar{\xi},\eta,\zeta)\,dA_\xi + \int\limits_{\mathscr{C}^*_{\xi,01}(\bar{\xi})} \vec{\sigma}_\zeta(\bar{\xi},\eta,\zeta^*)\,ds \right) d\bar{\xi} = \vec{0}.
\end{aligned} \tag{1.335}$$

Z s označimo parameter, s katerim opišemo lego točk na mejni črti $\mathscr{C}^*_{\xi,z}$. Del v oglatem oklepaju označimo z $\vec{\mathscr{F}}^*(\xi)$ in predstavlja nadomestno linijsko obtežbo zaradi zunanje obtežbe na mejni črti $\mathscr{C}^*_{\xi,z}$

ter na delu prereza $\mathscr{A}_\xi^*$ in zaradi napetosti $\vec{\sigma}_\zeta$ vzdolž meje $\mathscr{C}_{\xi,01}^*$

$$\vec{\mathscr{F}}^*(\xi) = \int\limits_{\mathscr{C}_{\xi,z}^*(\xi)} \vec{p}_S\, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*(\xi)} \vec{v}\, dA_\xi + \int\limits_{\mathscr{C}_{\xi,01}^*(\xi)} \vec{\sigma}_\zeta\, ds = \vec{\mathscr{P}}^*(\xi) + \int\limits_{\mathscr{C}_{\xi,01}^*(\xi)} \vec{\sigma}_\zeta\, ds. \tag{1.336}$$

S $\vec{\mathscr{P}}^*(\xi)$ označimo zunanjo linijsko obtežbo za del prereza $\mathscr{A}_\xi^*$

$$\vec{\mathscr{P}}^*(\xi) = \int\limits_{\mathscr{C}_{\xi,z}^*(\xi)} \vec{p}_S\, ds + \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*(\xi)} \vec{v}\, dA_\xi. \tag{1.337}$$

Enačbo (1.335) krajše zapišemo takole:

$$\int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*(0)} \vec{p}_S\, dA_\xi + \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*(\xi)} \vec{\sigma}_\xi\, dA_\xi + \int\limits_0^\xi \vec{\mathscr{F}}^*(\bar{\xi})\, d\bar{\xi} = \vec{0}. \tag{1.338}$$

Z odvajanjem ravnotežne enačbe (1.338) po ξ dobimo (upoštevamo, da je prvi člen konstanten)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*} \vec{\sigma}_\xi\, dA_\xi + \vec{\mathscr{F}}^* = \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*} \vec{\sigma}_\xi\, dA_\xi + \vec{\mathscr{P}}^* + \int\limits_{\mathscr{C}_{\xi,01}^*} \vec{\sigma}_\zeta\, ds = \vec{0}. \tag{1.339}$$

Z b^* označimo dolžino meje $\mathscr{C}_{\xi,01}^*$ od točke 0, do točke 1. Upoštevamo, da je $\mathscr{A}_\xi^*$ konstanten ter predpostavimo, da se $\vec{\sigma}_\zeta$ vzdolž meje $\mathscr{C}_{\xi,01}^*$ ne spreminja

$$\int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*} \frac{\partial \vec{\sigma}_\xi}{\partial \xi}\, dA_\xi + \vec{\mathscr{P}}^* + \vec{\sigma}_\zeta\, b^* = \vec{0}. \tag{1.340}$$

Iz enačbe (1.340) izrazimo $\vec{\sigma}_\zeta$

$$\vec{\sigma}_\zeta = -\frac{1}{b^*} \left(\vec{\mathscr{P}}^* + \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*} \frac{\partial \vec{\sigma}_\xi}{\partial \xi}\, dA_\xi \right). \tag{1.341}$$

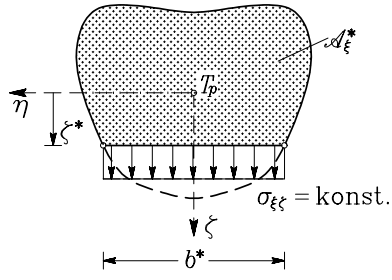
Po množenju (1.341) z enotskim vektorjem $\vec{e}_\xi$, dobimo izraz za strižno napetost $\sigma_{\zeta\xi}$

$$\boxed{\sigma_{\zeta\xi} = \sigma_{\xi\zeta} = -\frac{1}{b^*} \left(\mathscr{P}_\xi^* + \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*} \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi}\, dA_\xi \right),} \tag{1.342}$$

po množenju (1.341) z enotskim vektorjem $\vec{e}_\zeta$ pa izraz za prečno normalno napetost $\sigma_{\zeta\zeta}$

$$\boxed{\sigma_{\zeta\zeta} = -\frac{1}{b^*}\left(\mathscr{P}_\zeta^* + \int\limits_{\mathscr{A}_\xi^*} \frac{\partial \sigma_{\xi\zeta}}{\partial \xi}\, dA_\xi\right).} \tag{1.343}$$

Pri izpeljavi enačb (1.342) in (1.343) smo predpostavili, da sta strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ ter prečna normalna napetost $\sigma_{\zeta\zeta}$ vzdolž črte, ki je vzporedna osi η, konstantni (slika 1.149).



Slika 1.149: Strižna napetosti $\sigma_{\xi\zeta}$ v prečnem prerezu $\mathscr{A}_\xi^*$

Primer 1.37 *Določimo izraz za račun vzdolžne normalne napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ v nosilcu z ukrivljeno osjo za različna razmerja krivinskega polmera r proti višin h prereza. Tako dobljene napetosti primerjamo z rezultati za nosilec z ravno osjo. Pri izpeljavi upoštevajmo, da je osna sila N_ξ enaka nič in da ima nosilec prečni prerez pravokotne oblike*

Nosilec z ravno osjo:

$$\sigma_{\xi\xi}(\zeta = h/2) = \frac{M_\eta}{W_\eta} = \frac{M_\eta\, 6}{b\, h^2} = \frac{M_\eta\, 6}{A_\xi\, h}\,\frac{r}{r} \quad \rightarrow \quad \sigma_{\xi\xi}\,\frac{A_\xi\, r}{M_\eta} = 6\,\frac{r}{h}.$$

Nosilec z ukrivljeno osjo:

$$\sigma_{\xi\xi}(\zeta = h/2) = \frac{M_\eta}{A_\xi\, r}\,\frac{h/2 - e}{[1 - h/(2\,r)]\, e}, \quad e = r - \frac{h}{\ln\left(\dfrac{1 + h/(2\,r)}{1 - h/(2\,r)}\right)}.$$

Enačbo preuredimo in dobimo

$$\sigma_{\xi\xi}\,\frac{A_\xi\, r}{M_\eta} = \frac{\dfrac{h}{2} - \left(r - \dfrac{h}{\ln\left(\dfrac{1 + h/(2\,r)}{1 - h/(2\,r)}\right)}\right)}{\left(1 - \dfrac{h}{2\,r}\right)\left(r - \dfrac{h}{\ln\left(\dfrac{1 + h/(2\,r)}{1 - h/(2\,r)}\right)}\right)} = \frac{\dfrac{h}{2\,r} - \left(1 - \dfrac{\dfrac{h}{r}}{\ln\left(\dfrac{1 + h/(2\,r)}{1 - h/(2\,r)}\right)}\right)}{\left(1 - \dfrac{h}{2\,r}\right)\left(1 - \dfrac{\dfrac{h}{r}}{\ln\left(\dfrac{1 + h/(2\,r)}{1 - h/(2\,r)}\right)}\right)}.$$

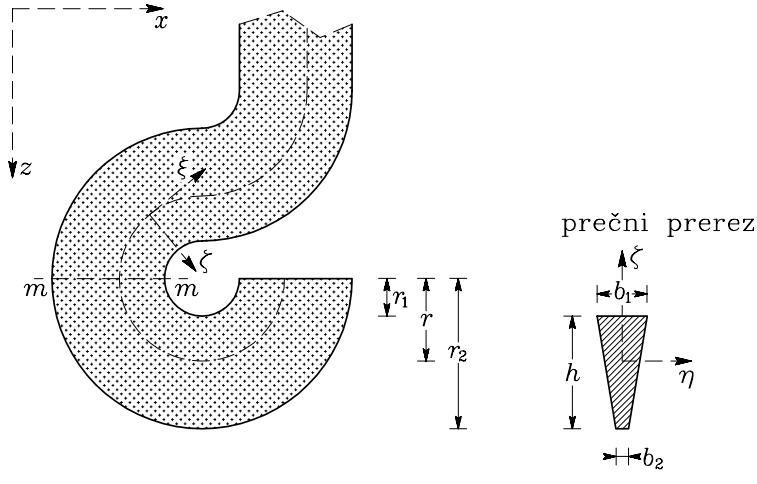
Rezultate za $\sigma_{\xi\xi}\, A_\xi\, r/M_\eta$ za različna razmerja r/h podajamo v preglednici 1.24.

Tabela 1.24: Vrednosti izraza $\sigma_{\xi\xi}\, A_\xi\, r/M_\eta$ za različna razmerja r/h

r/h	Ravna os	Ukrivljena os	Napaka [%]
1	6	9.14	34.4
2	12	14.40	16.7
3	18	20.24	11.1
4	24	26.17	8.3
10	60	62.06	3.3

Iz prikazane preglednice sledi, da pri razmerju $r/h > 10$ lahko uporabimo za račun normalnih napetosti enčbo, ki velja za nosilec z ravno osjo. Napaka, ki jo v tem primeru naredimo, je manjša od 3.3%.

Primer 1.38 *Za kljuko na sliki 1.150 določimo potek vzdolžne normalne napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ v prečnem prerezu $m - m$! Pri tem je sila $F = 20$ kN, velikosti razdalj b_1, b_2, h, r_1 in r_2 pa so: $b_1 = 4$ cm, $b_2 = 1$ cm, $h = 9$ cm, $r_1 = 3$ cm in $r_2 = 12$ cm.*



Slika 1.150: Geometrija kljuke

Vzdolžno normalno napetost $\sigma_{\xi\xi}$ izračunamo po enačbi (1.334)

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{N_\xi}{A_\xi} + \frac{\kappa}{A_\xi}\,\frac{(\zeta - e)\, M_\eta}{(1 - \zeta\,\kappa)\, e}.$$

Ploščina prečnega prereza A_ξ je

$$A_\xi = \frac{b_1 + b_2}{2}\, h = \frac{4+1}{2}\, 9 = 22.5\ \mathrm{cm}^2.$$

Razdalja r do težišča

$$r = r_1 + y_0 = r_1 + \frac{b_1 + 2\,b_2}{b_1 + b_2}\,\frac{h}{3} = 3 + \frac{4 + 2\cdot 1}{4+1}\cdot\frac{9}{3} = 6.6\ \mathrm{cm}.$$

Izraz za m za prečni prerez trapezne oblike podaja Timošenko [†]

$$\begin{aligned} m &= \frac{r}{A_\xi}\left(\left(b_2 + \frac{r_2\,(b_1 - b_2)}{h}\right)\ln\frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2)\right) - 1 = \\ &= \frac{6.6}{22.5}\left(\left(1 + \frac{12\,(4-1)}{9}\right)\ln\frac{12}{3} - (4-1)\right) - 1 = 0.153232, \end{aligned}$$

razdalja e pa je (enačba (1.333))

$$e = \frac{m}{\kappa\,(1+m)}.$$

Ukrivljenosti osi κ izračunamo po enačbi $|\kappa| = 1/r = 0.151515\ \mathrm{cm}^{-1}$.[‡] Ukrivljenost κ je lahko pozitivna ali negativna. Če je vektor odvoda $d\vec{e}_\xi/d\xi$ usmerjen v smeri vektorja $\vec{e}_\zeta$, je κ pozitivna, sicer pa je negativna. Razdalja e za obravnavani primer je:

$$e = \frac{0.153232}{0.151515\,(1 + 0.153232)} = 0.876952\ \mathrm{cm}.$$

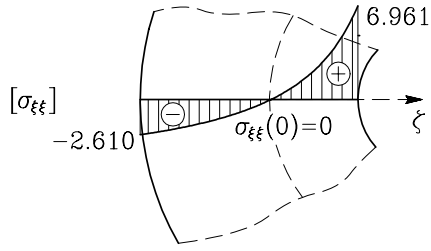
Za račun vzdolžne normalne napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ potrebujemo koordinati $\zeta_1 = r - 3 = 3.6$ cm in $\zeta_2 = -(r_2 - r) = -5.4$ cm. Ker je $N_\xi = F = 20$ kN in $M_\eta = F\,r = 132$ kNcm, izračunamo vzdolžno normalno napetost na obeh robovih takole:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\zeta_1) &= \frac{N_\xi}{A_\xi} + \frac{\kappa}{A_\xi}\,\frac{\zeta_1 - e}{(1 - \zeta_1\,\kappa)\,e}\,M_\eta = \\ &= \frac{20}{22.5} + \frac{0.151515}{22.5}\,\frac{(3.6 - 0.876952)\,132}{(1 - 3.6\cdot 0.151515)\,0.876952} = 6.96113\ \mathrm{kN/cm^2}, \\ \sigma_{\xi\xi}(\zeta_2) &= \frac{N_\xi}{A_\xi} + \frac{\kappa}{A_\xi}\,\frac{\zeta_2 - e}{(1 - \zeta_2\,\kappa)\,e}\,M_\eta = \\ &= \frac{20}{22.5} + \frac{0.151515}{22.5}\,\frac{(-5.4 - 0.876952)\,132}{(1 + 5.4\cdot 0.151515)\,0.876952} = -2.61043\ \mathrm{kN/cm^2}. \end{aligned}$$

Na sliki 1.151 prikazujemo potek vzdolžne normalne napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ v prečnem prerezu $m - m$.

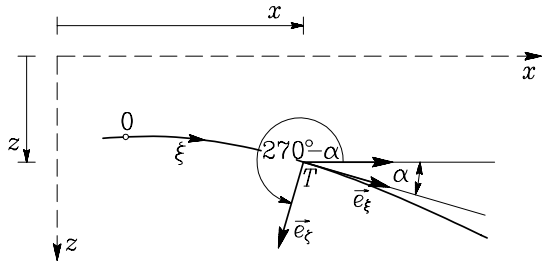
[†] S. Timoshenko, Strength of Materials, Part 1, Third Edition, D. Van Nostrand Company, Inc., Princenton, New Yersey, 1958.

[‡] M. Stanek, G. Turk, Statika II, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1996.



Slika 1.151: Potek vzdolžne normalne napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ v prečnem prerezu $m-m$

Primer 1.39 *Zapišimo definicijo ukrivljenosti κ ravninske krivulje v ravnini x, z (slika 1.152).*



Slika 1.152: Enotska vektorja $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\zeta$

Ukrivljenost zapiši z odvodom dz/dx! S ξ označimo dolžino krivulje od izbrane točke O na krivulji, do poljubne točke T na krivulji.

Z $\vec{e}_\xi$ označimo enotski vektor, ki leži na tangenti na krivuljo in ima smer naraščajočega parametra ξ. Z α označimo kot med pozitivno smerjo abcisne osi x in med vektorjem $\vec{e}_\xi$. Pozitivna smer vektorja $\vec{e}_\zeta$ je določena tako, da vektor $\vec{e}_\xi$ zavrtimo v pozitivni smeri za kot $270°$. V tem primeru je $\vec{e}_\eta \| \vec{e}_y$. Vektorja $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\zeta$ zapišemo s kotom α

$$\vec{e}_\xi = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z, \tag{1.344}$$

$$\vec{e}_\eta = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z, \tag{1.345}$$

Ukrivljenost ravninske krivulje definiramo z enačbo

$$\frac{d\vec{e}_\xi}{d\xi} = \kappa\,\vec{e}_\zeta \tag{1.346}$$

Če (1.344) odvajamo po ξ in upoštevamo (1.345), dobimo

$$\frac{d\vec{e}_\xi}{d\xi} = (-\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_z)\,\frac{d\alpha}{d\xi} = \vec{e}_\zeta\,\frac{d\alpha}{d\xi}. \tag{1.347}$$

Iz primerjave med (1.346) in (1.347) sledi, da je

$$\kappa = \frac{d\alpha}{d\xi}. \tag{1.348}$$

Ukrivljenost, ki jo definiramo z enačbo (1.346), je lahko pozitivna ali negativna količina ali pa je enaka nič.[†] Če enačbo (1.345) odvajamo po ξ in upoštevamo (1.344) in (1.348), dobimo

$$\frac{d\vec{e}_\zeta}{d\xi} = (-\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_z)\,\frac{d\alpha}{d\xi} = -\vec{e}_\xi\,\frac{d\alpha}{d\xi} = -\kappa\,\vec{e}_\xi. \tag{1.349}$$

Vzemimo sedaj primer, da je krivulja določena z enačbo

$$z = f(x). \tag{1.350}$$

Ker določa odvod $dz/dx \equiv z' = f'(x)$ smerni koeficient tangente

$$z' = \mathrm{tg}\alpha, \tag{1.351}$$

sledi

$$\alpha = \mathrm{arctg} z'. \tag{1.352}$$

Enačbo odvajamo po x

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d(\mathrm{arctg} z')}{dx} = \frac{1}{1-z'^2}\,\frac{dz'}{dx}$$

in dobimo

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{dx}\,dx = \frac{1}{1-z'^2}\,\frac{dz'}{dx}\,dx = \frac{z''}{1-z'^2}\,dx. \tag{1.353}$$

Zapišimo diferencial $d\xi$

$$d\xi = \sqrt{1+z'^2}\,dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{d\xi}{\sqrt{1+z'^2}}. \tag{1.354}$$

ter iz enačb (1.353) in (1.354) dobimo:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{d\xi}\,\sqrt{1+z'^2} = \frac{z''}{1-z'^2}, \tag{1.355}$$

iz enačb (1.348) in (1.355) pa izraz za ukrivljenost κ

$$\kappa = \frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{z''}{\sqrt{(1-z'^2)^3}}. \tag{1.356}$$

Primer 1.40 *Določimo specifično spremembo dolžine D_ξ materialnega vlakna, ki ima pred deformiranjem smer osi ξ. Količina D_ξ je definirana z enačbo (glej enačbi 1.35 in 1.46 v M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles)*

[†] V primeru prostorske krivulje ukrivljenost κ definiramo tako, da je lahko le pozitivna količina ali pa enaka nič $\kappa = |d\vec{e}_\xi/d\xi|$.

$$D_\xi = \frac{|\vec{g}_\xi'|\,d\xi - |\vec{g}_\xi|\,d\xi}{|\vec{g}_\xi|\,d\xi}. \tag{1.357}$$

Enačbo (1.357) preoblikujemo

$$D_\xi = \frac{|\vec{g}_\xi'| - |\vec{g}_\xi|}{|\vec{g}_\xi|} = \sqrt{\frac{\vec{g}_\xi' \cdot \vec{g}_\xi'}{\vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi}} - 1. \tag{1.358}$$

Upoštevamo enačbo (1.302)

$$\vec{g}_\xi' = \vec{g}_\xi + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi}$$

in dobimo

$$\vec{g}_\xi' \cdot \vec{g}_\xi' = \left(\vec{g}_\xi + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi}\right) \cdot \left(\vec{g}_\xi + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi}\right) = \vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi + 2\,\vec{g}_\xi \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi}.$$

Za majhne pomike in zasuke lahko nelinearne člene zanemarimo

$$\vec{g}_\xi' \cdot \vec{g}_\xi' \approx \vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi + 2\,\vec{g}_\xi \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} = \vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi + 2\,\varepsilon_{\xi\xi}. \tag{1.359}$$

Enačbo (1.359) vstavimo v (1.358)

$$D_\xi = \sqrt{\frac{\vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi + 2\,\varepsilon_{\xi\xi}}{\vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2\,\varepsilon_{\xi\xi}}{\vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi}} - 1.$$

V primeru majhnih deformacij je drugi člen pod korenom majhen v primerjavi z 1. Kvadratni koren nadomestimo s potenčno vrsto in upoštevamo le konstantni in linearni člen:[†]

$$D_\xi = \frac{\varepsilon_{\xi\xi}}{\vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi}.$$

Specifična sprememba dolžine D_ξ je v primeru majhnih deformacij enaka fizikalni komponenti normalne deformacije $D_\xi \approx \bar{\varepsilon}_{\xi\xi}$. Zato je

$$\bar{\varepsilon}_{\xi\xi} = \frac{\varepsilon_{\xi\xi}}{\vec{g}_\xi \cdot \vec{g}_\xi}.$$

1.8 Enačbe gibanja nosilca

V tem razdelku zapišemo enačbe gibanja za linijski nosilec. S takimi enačbami računamo pomike nosilca, na katerega delujeta linijska obtežba $\vec{\mathscr{P}}(x,t)$ in linijska momentna obtežba $\vec{\mathscr{M}}(x,t)$, ki se s časom spreminjata. Enačbo gibanja za delec telesa smo izpeljali v drugem razdelku knjige M. Stanek,

† $$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}x^2 + \cdots .$$

G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{v} = \rho \, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{1.360}$$

ki jo lahko zapišemo tudi takole

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \left(\vec{v} - \rho \, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) = \vec{0}. \tag{1.361}$$

Izraz $-\rho \, (\partial^2 \vec{u} / \partial t^2)$ predstavlja vztrajnostno silo. V razdelku 1.2.3 smo za linijski nosilec definirali linijsko obtežbo $\vec{\mathscr{P}}$ z enačbo (1.14)

$$\vec{\mathscr{P}}(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_x} \vec{p}_S \, dC_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x} \vec{v} \, dA_x \tag{1.362}$$

ter linijsko momentno obtežbo $\vec{\mathscr{M}}$ z enačbo (1.21)

$$\vec{\mathscr{M}}(x) = \int\limits_{\mathscr{C}_x} \vec{\rho}_x \times \vec{p}_S \, dC_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x} \vec{\rho}_x \times \vec{v} \, dA_x. \tag{1.363}$$

Če v izrazih (1.362) in (1.363) upoštevamo še vztrajnostno silo, zapišemo linijsko obtežbo $\vec{\mathscr{P}}^{\,*}$ takole:

$$\vec{\mathscr{P}}^{\,*} = \vec{\mathscr{P}} - \rho \int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \, dA_x \tag{1.364}$$

linijsko momentno obtežbo $\vec{\mathscr{M}}^{\,*}$ pa takole:

$$\vec{\mathscr{M}}^{\,*} = \vec{\mathscr{M}} - \rho \int\limits_{\mathscr{A}_x} \vec{\rho}_x \times \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \, dA_x. \tag{1.365}$$

Predpostavili smo, da se gostota ρ materiala ne spreminja. Ravnotežni enačbi (1.16) in (1.25) za nosilec z ravno osjo, ki je obtežen tako, da se obtežba s časom spreminja, dobimo, če v (1.16) upoštevamo (1.364), v (1.25) pa (1.365):

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial x} + \vec{\mathscr{P}}(x) - \rho \int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \, dA = \vec{0}, \qquad \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} + \vec{e} \times \vec{N} + \vec{\mathscr{M}}(x) - \rho \int\limits_{\mathscr{A}_x} \vec{\rho}_x \times \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \, dA_x = \vec{0}. \tag{1.366}$$

Če enačbi (1.58) za pomika u_y in u_z ter enačbo (1.60) za pomik u_x

$$u_y = v, \qquad u_z = w, \qquad u_x = u - \frac{dv}{dx} \, y - \frac{dw}{dx} \, z$$

dvakrat odvajamo po času t

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2}\,y - \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}\,z,$$

zapišemo drugi odvod pomika $\vec{u}$ po času z enačbo

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2}\,y - \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2}\,z\right)\vec{e}_x + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\vec{e}_y + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\vec{e}_z,$$

enačbi (1.366) pa v skalarni obliki takole (glej tudi (1.30), (1.31) in (1.59))

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x} + \mathscr{P}_x - \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\\
&\frac{\partial N_y}{\partial x} + \mathscr{P}_y - \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,\\
&\frac{\partial N_z}{\partial x} + \mathscr{P}_z - \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x} + \mathscr{M}_x = 0,\\
&\frac{\partial M_y}{\partial x} - N_z + \mathscr{M}_y + \rho\,I_y\,\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2} = 0,\\
&\frac{\partial M_z}{\partial x} + N_y + \mathscr{M}_z - \rho\,I_z\,\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1.367}$$

Upoštevali smo, da sta y in z os glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza. Z upoštevanjem (1.86) in (1.367), zapišemo enačbe gibanja za nosilec takole (spremembo temperature in krčenje ne upoštevamo)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(E\,A_x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathscr{P}_x = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\,I_z\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho\,I_z\,\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\,\partial t^2} - \mathscr{P}_y + \frac{\partial \mathscr{M}_z}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\,I_y\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho\,I_y\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2} - \mathscr{P}_z - \frac{\partial \mathscr{M}_y}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

Vpliv členov $\rho\,I_z\,(\partial^4 v/\partial x^2\,\partial t^2)$ in $\rho\,I_y\,(\partial^4 w/\partial x^2\,\partial t^2)$ na pomika v in w je običajno majhen,[†] zato lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\,I_z\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mathscr{P}_y + \frac{\partial \mathscr{M}_z}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E\,I_y\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \rho\,A_x\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mathscr{P}_z - \frac{\partial \mathscr{M}_y}{\partial x} = 0.
\end{aligned}$$

[†] W. Nowacki, Dynamics of Elastic Systems, Chapman & Gall, ltd., London, 1963.

Enačbe, ki upoštevajo tudi vpliv osne in prečnih sil na pomika v in w ter enačbo gibanja zaradi torzijske obtežbe podajata Nowacki pa tudi Brčić.[†]

[†] W. Nowacki, Dynamics of Elastic Systems, Chapman & Gall, Itd., London, 1963,
V. Brčić, Dinamika konstrukcija, Graevinska knjiga, Beograd, 1981.

2 Enakomerna torzija

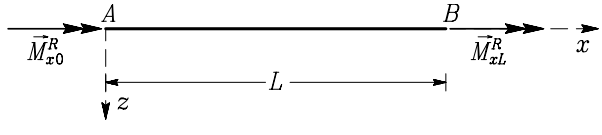
Pri upogibu z osno silo je nosilec obtežen tako, da je zasuk ω_x okrog vzdolžne osi nosilca enak nič. S pojmom **torzija nosilca** opišemo tako deformiranje nosilca, da je zasuk ω_x od nič različen.

Enakomerna torzija ravnega nosilca je tako obtežen nosilec, pri katerem je torzijski moment M_x **konstanten** vzdolž celotne osi nosilca. Razen tega je nosilec tako podprt, da nikjer ni preprečena **izbočitev** prečnega prereza.[†]

2.1 Enačbe enakomerne torzije

Raven nosilec s konstantnim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x$ je obtežen le v krajiščih s točkovnima torzijskima momentoma $\vec{M}^R_{x0} = -M_{\mathrm{tor}}\,\vec{e}_x$ in $\vec{M}^R_{xL} = M_{\mathrm{tor}}\,\vec{e}_x$ enakih velikosti M_{tor} in nasprotnih smeri (slika 2.1)

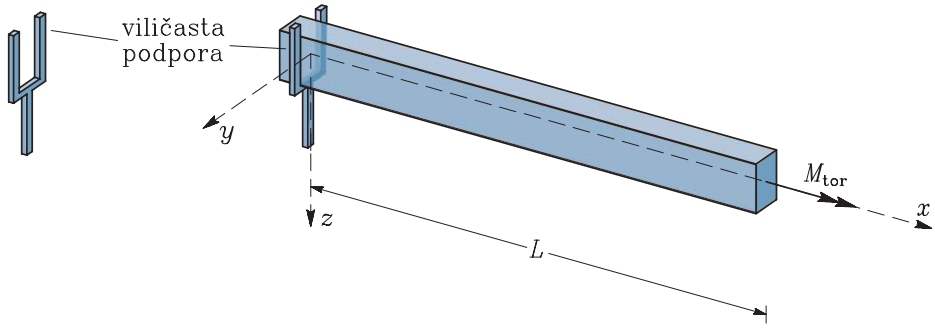
$$\vec{M}^R_{x0} + \vec{M}^R_{xL} = \vec{0}. \tag{2.1}$$



Slika 2.1: Nosilec je obtežen le v obeh krajiščih s torzijskima momentoma $\vec{M}^R_{x0}$ in $\vec{M}^R_{xL}$

Izbočitev oziroma deplanacija kateregakoli prečnega prereza ne bo ovirana, če nosilec podpremo z **viličasto podporo**. Taka podpora prepreči zasuk prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ in pomike v smereh y in z. Na sliki 2.2 je prikazan nosilec, ki je v točki $x = L$ obtežen s torzijskim momentom M_{tor}, v točki $x = 0$ pa podprt z viličasto podporo.

[†] V primeru, ko je v nekem prečnem prerezu preprečena izbočitev, nastane vzdolžna normalna napetost σ_{xx}. To pa je primer **neenakomerne torzije**. Enakomerno torzijo imenujemo tudi neovirana torzija, neenakomerno torzijo pa ovirana torzija.



Slika 2.2: Viličasta podpora prepreči le zasuk okrog vzdolžne osi nosilca in pomika v prečni smeri prereza

V obravnavanem primeru je izmed šestih notranjih sil N_x, N_y, N_z, M_x, M_y in M_z od nič različen le torzijski moment M_x

$$M_x = M_{\text{tor}} = \text{konst.} \tag{2.2}$$

Z opazovanjem tako podprtega in obteženega nosilca ugotovimo, da se pojavijo le spremembe pravih kotov v ravninah (x, y) in (x, z), ostale deformacije pa lahko zanemarimo

$$\varepsilon_{xy} \neq 0, \qquad \varepsilon_{xz} \neq 0, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{xx} \approx \varepsilon_{yy} \approx \varepsilon_{zz} \approx \varepsilon_{yz} \approx 0. \tag{2.4}$$

Iz enačb (2.3) in (2.4) sledi, da se prečni prerez deformira le pravokotno na ravnino prečnega prereza (se izboči), v ravnini prereza pa velikosti in oblike ne spremeni.

Enačbe enakomerne torzije izpeljemo, če enačbe (2.3) in (2.4) upoštevamo v osnovnih enačbah linearne teorije elastičnosti (kinematične enačbe, ravnotežne enačbe, Hookov zakon). Z upoštevanjem **Hookovega zakona** dobimo

$$\boxed{\sigma_{xy} = 2\,G\,\varepsilon_{xy}, \qquad \sigma_{xz} = 2\,G\,\varepsilon_{xz},} \tag{2.5}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0. \tag{2.6}$$

G je strižni modul materiala.

Ker je nosilec obtežen le s torzijskima momentoma M_{x0}^R in M_{xL}^R, je prostorninska obtežba enaka nič

$$v_x = v_y = v_z = 0. \tag{2.7}$$

V **ravnotežnih enačbah** za poljubni delec znotraj nosilca upoštevamo enačbe (2.5 – 2.7) in dobimo

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0} \tag{2.8}$$

ter

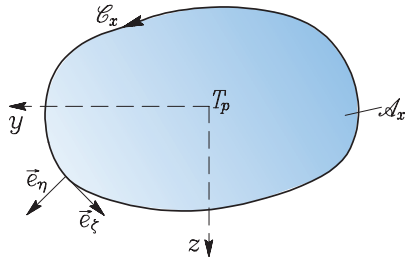
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(y,z), \qquad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xz} = \sigma_{xz}(y,z). \tag{2.9}$$

Iz enačb (2.9) sledi, da mora biti ravnotežna enačba (2.8) izpolnjena v območju prečnega prereza $\mathscr{A}_x$. Iz enačb (2.9) sledi, da se strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz} vzdolž osi x ne spreminjata, enačba (2.5) pa pove, da enako velja za strižni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz}

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(y,z), \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}(y,z). \tag{2.10}$$

Robni pogoji za mejno ploskev brez krajnih ploskev $\mathscr{A}_{x0}$ in $\mathscr{A}_{xL}$ (plašč nosilca):

Enotski vektor v smeri zunanje normale na mejno ploskev brez krajnih ploskev $\mathscr{A}_{x0}$ in $\mathscr{A}_{xL}$ nosilca označimo z $\vec{e}_\eta$, v smeri tangente na mejno črto $\mathscr{C}_x$ prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ pa z $\vec{e}_\zeta$ (slika 2.3). Enotski vektor $\vec{e}_\zeta$ leži v ravnini (y,z), vektor $\vec{e}_\xi$ pa sovpada z vektorjem $\vec{e}_X$.



Slika 2.3: Enotska vektorja v smeri zunanje normale na mejno ploskev nosilca in v smeri tangente na mejno črto prečnega prereza

Če upoštevamo enačbe (2.6) in dejstvo, da je na mejni ploskvi z zunanjo normalo $\vec{e}_\eta$ vektor zunanje obtežbe $\vec{p}_\eta$ enak nič, zapišemo robne pogoje takole:

$$p_{\eta x} = \sigma_{xy}\, e_{\eta y} + \sigma_{xz}\, e_{\eta z} = 0, \quad p_{\eta y} = \sigma_{yx}\, e_{\eta x} = 0, \qquad p_{\eta z} = \sigma_{zx}\, e_{\eta x} = 0. \tag{2.11}$$

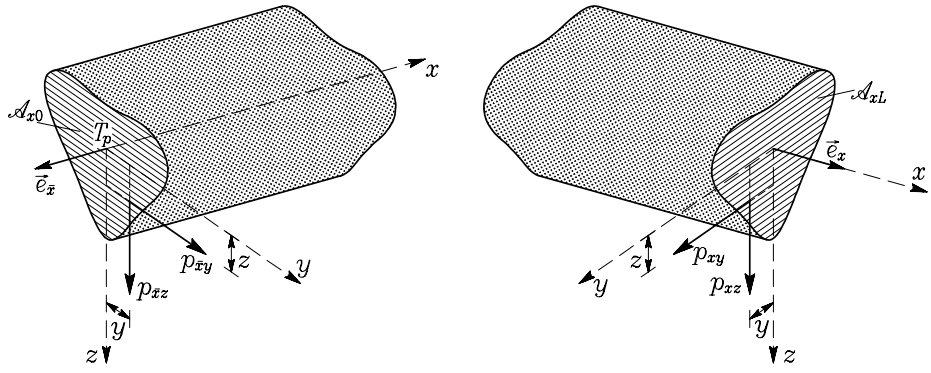
Ker je pri nosilcu s konstantnim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x$ smerni kosinus $e_{\eta x}$ enak nič, dobi robni pogoj za enakomerno torzijo naslednjo obliko

$$\mathscr{C}_x: \quad \sigma_{xy}(y,z)\, e_{\eta y} + \sigma_{xz}(y,z)\, e_{\eta z} = 0. \tag{2.12}$$

Robni pogoji za mejni ploskvi $\mathscr{A}_{x0}$ in $\mathscr{A}_{xL}$:

Za mejno ploskev $\mathscr{A}_{x0}$ sta obtežbi $p_{\bar{x}y}$ in $p_{\bar{x}z}$ enakovredni torzijskemu momentu M^R_{x0} ($\vec{M}^R_{x0} = M^R_{x0}\, \vec{e}_x$), za mejno ploskev $\mathscr{A}_{xL}$ pa sta obtežbi p_{xy} in p_{xz} enakovredni torzijskemu momentu M^R_{xL} ($\vec{M}^R_{xL} = M^R_{xL}\, \vec{e}_x$) po enačbah (slika 2.4)

$$M^R_{x0} = \int\limits_{\mathscr{A}_{x0}} (y\, p_{\bar{x}z} - z\, p_{\bar{x}y})\, dA_x, \quad M^R_{xL} = \int\limits_{\mathscr{A}_{xL}} (y\, p_{xz} - z\, p_{xy})\, dA_x.$$



Slika 2.4: Obtežba na ploskev $\mathscr{A}_{x0}$ ter $\mathscr{A}_{xL}$

Upoštevamo, da je $\vec{p}_{\bar{x}} = \vec{\sigma}_x\, e_{\bar{x}x} + \vec{\sigma}_y\, e_{\bar{x}y} + \vec{\sigma}_z\, e_{\bar{x}z}$ in $\vec{p}_x = \vec{\sigma}_x\, e_{xx} + \vec{\sigma}_y\, e_{xy} + \vec{\sigma}_z\, e_{xz}$. Sledi, da je $p_{\bar{x}y} = -\sigma_{xy}$, $p_{\bar{x}z} = -\sigma_{xz}$ oziroma $p_{xy} = \sigma_{xy}$, $p_{xz} = \sigma_{xz}$ in dobimo

$$M_{x0}^R = -\int\limits_{\mathscr{A}_{x0}} (y\,\sigma_{xz} - z\,\sigma_{xy})\, dA_x, \quad M_{xL}^R = \int\limits_{\mathscr{A}_{xL}} (y\,\sigma_{xz} - z\,\sigma_{xy})\, dA_x.$$

Sedaj zapišimo **kinematične enačbe** za deformacije ob upoštevanju enačb (2.4) in (2.10)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u_x = u_x(y,z), \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad u_y = u_y(x,z), \tag{2.14}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad u_z = u_z(x,y), \tag{2.15}$$

$$2\,\varepsilon_{xy}(y,z) = \frac{\partial u_y(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(y,z)}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u_y(x,z)}{\partial x} = 2\,\varepsilon_{xy}(y,z) - \frac{\partial u_x(y,z)}{\partial y}, \tag{2.16}$$

$$2\,\varepsilon_{xz}(y,z) = \frac{\partial u_z(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(y,z)}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u_z(x,y)}{\partial x} = 2\,\varepsilon_{xz}(y,z) - \frac{\partial u_x(y,z)}{\partial z}, \tag{2.17}$$

$$2\,\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_z(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x,z)}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u_z(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial u_y(x,z)}{\partial z}, \tag{2.18}$$

$$\omega_x = \omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u_y(x,z)}{\partial z}\right), \tag{2.19}$$

$$\omega_y = \omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial z} - \frac{\partial u_z(x,y)}{\partial x}\right), \tag{2.20}$$

$$\omega_z = \omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y(x,z)}{\partial x} - \frac{\partial u_x(y,z)}{\partial y}\right). \tag{2.21}$$

Iz enačbe (2.16) vidimo, da je $\partial u_y/\partial x$ neodvisen od x, kar pomeni, da je $u_y(x,z)$ linearna funkcija od x (a in b sta konstanti)

$$u_y = f(z)\,(a + b\,x).$$

Iz enačbe (2.17) vidimo, da je $\partial u_z/\partial x$ neodvisen od x, kar pomeni, da je $u_z(x,y)$ linearna funkcija od x (c in d sta konstanti)

$$u_z = F(y)\,(c + d\,x).$$

Enačbo (2.18) vstavimo v (2.19)

$$\omega_x = \frac{\partial u_z(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial u_y(x,z)}{\partial z}. \tag{2.22}$$

Iz enačbe (2.22) sledi, da je $\partial u_y/\partial z$ neodvisen od z. Zato je $u_y(x,z)$ linearna funkcija od z (A in B sta konstanti)

$$u_y = (A + B\,z)(a + b\,x). \tag{2.23}$$

Iz enačbe (2.22) sledi tudi, da je $\partial u_z/\partial y$ neodvisen od y. Zato je $u_z(x,y)$ linearna funkcija od y (C in D sta konstanti)

$$u_z = (C + D\,y)(c + d\,x). \tag{2.24}$$

Enačbi (2.23) in (2.24) vstavimo v (2.22) in ugotovimo, da je zasuk ω_x **linearna funkcija** od x

$$\omega_x = K + \alpha\,x = \omega_x(x), \tag{2.25}$$

kjer sta K in α konstanti. Konstanta α je **specifični torzijski zasuk**

$$\alpha = \frac{d\omega_x}{dx}. \tag{2.26}$$

Enačbo (2.22) integriramo od točke $T_1(0,z_0)$ do točke $T(y,z_0)$ znotraj prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ in dobimo (slika 2.5a)

$$\int_0^y \frac{\partial u_z(x,\bar{y})}{\partial \bar{y}}\,d\bar{y} = \int_0^y \omega_x(x)\,d\bar{y} = \omega_x(x)\int_0^y d\bar{y} \quad\rightarrow\quad u_z(x,y) - u_z(x,0) = \omega_x\,y. \tag{2.27}$$

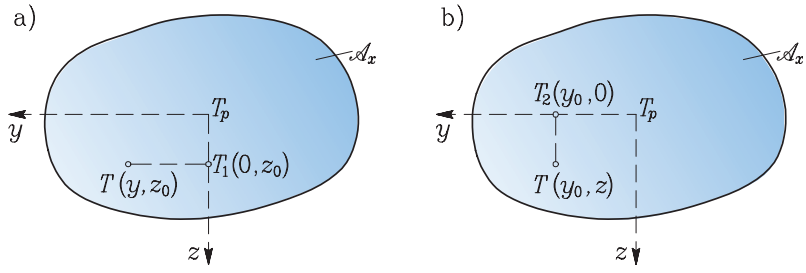
Upoštevali smo, da je koordinata x pri integriranju vzdolž osi y konstanta in je zato $dx = 0$

$$du_z = \frac{\partial u_z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u_z}{\partial y}\,dy: \quad dx = 0 \quad\rightarrow\quad \int_0^y \frac{\partial u_z}{\partial \bar{y}}\,d\bar{y} = \int_0^y du_z = u_z(x,y) - u_z(x,0).$$

Če (2.22) integriramo od $T_2(y_0,0)$ do točke $T(y_0,z)$ znotraj $\mathscr{A}_x$, dobimo (slika 2.5b)

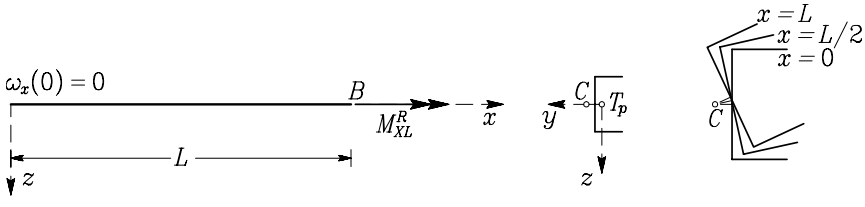
$$\int_0^z \frac{\partial u_y(x,\bar{z})}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} = \int_0^z -\omega_x(x)\,d\bar{z} = -\omega_x(x)\int_0^z d\bar{z} \quad\rightarrow\quad u_y(x,z) - u_y(x,0) = -\omega_x\,z. \tag{2.28}$$

Upoštevali smo, da je koordinata x je pri integriranju vzdolž osi z konstantna.



Slika 2.5: a) Pot integriranja v smeri y b) Pot integriranja v smeri z

Točko, okoli katere se prečni prerez v primeru enakomerne torzije zasuče, imenujemo **torzijsko središče** prereza in jo označimo s $C(y_C, z_C)$.[†] Na sliki 2.6 je prikazan primer, ko težišče T_p in torzijsko središče C prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ ne sovpadata.



Slika 2.6: Torzijsko središče $C(y_C, z_C)$ je točka, okoli katere se prečni prerez zavrti

Enačbe za račun torzijskega središča podajamo v razdelkih 2.2 in 2.6. Pomika u_y in u_z torzijskega središča C sta torej enaka nič. Če to upoštevamo v (2.27) in v (2.28), dobimo

$$\begin{aligned} y = y_C: \qquad & u_z(x, y_C) = u_z(x, 0) + \omega_x\, y_C = 0, \\ z = z_C: \qquad & u_y(x, z_C) = u_y(x, 0) - \omega_x\, z_C = 0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Iz (2.29) izrazimo pomika $u_z(x, 0)$ in $u_y(x, 0)$

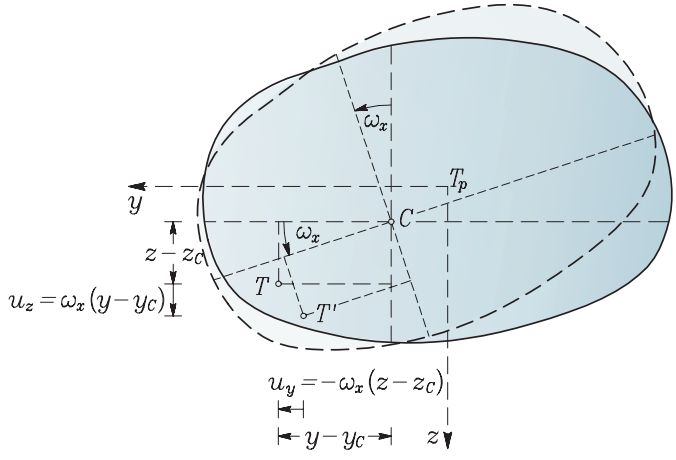
$$u_z(x, 0) = -\omega_x\, y_C, \qquad u_y(x, 0) = \omega_x\, z_C$$

in ju vstavimo v enačbi (2.27) in (2.28)

$$\boxed{u_y(x, z) = -\omega_x(z - z_C), \qquad u_z(x, y) = \omega_x(y - y_C).} \tag{2.30}$$

Pomika u_y in u_z v poljubni točki T smo izrazili z zasukom ω_x in razdaljama te točke od torzijskega središča C (slika 2.7).

[†] Koordinati torzijskega središča y_C, z_C sta geometrijski karakteristiki prečnega prereza. To pomeni, da sta odvisni le od oblike in dimenzij prečnega prereza nosilca. Če ima prečni prerez simetrijsko os, leži torzijsko središče na tej osi. Določanje koordinat y_C, z_C je opisano v razdelkih 2.2, 2.3, 2.4 in 2.6.



Slika 2.7: Grafični prikaz pomikov u_y in u_z pri enakomerni torziji

Če enačbi (2.26) in (2.30) vstavimo v (2.16) in (2.17), izrazimo strižni deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} s pomikom u_x in s specifičnim torzijskim zasukom α

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{xy}(y,z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial y} - \alpha(z - z_C)\right), \\ \varepsilon_{xz}(y,z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial z} + \alpha(y - y_C)\right). \end{aligned}} \tag{2.31}$$

Popolni diferencial pomika u_x zapišemo zaradi enačbe (2.13) takole:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}\, dz. \tag{2.32}$$

Ko enačbi (2.31) vstavimo v (2.32), sledi

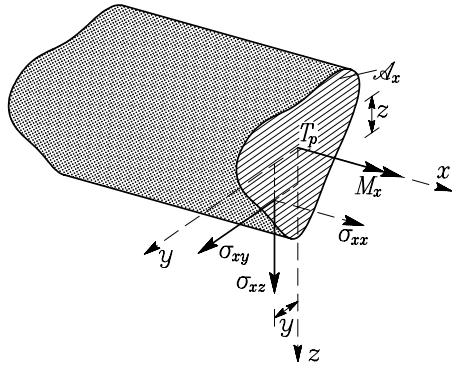
$$\boxed{du_x = (2\,\varepsilon_{xy}(y,z) + \alpha(z - z_C))\; dy + (2\,\varepsilon_{xz}(y,z) - \alpha(y - y_C))\; dz.} \tag{2.33}$$

Pri reševanju enačb enakomerne torzije moramo upoštevati še zvezo med torzijskim momentom M_x ter napetostima σ_{xy} in σ_{xz} (slika 2.8)

$$\boxed{M_x = \int_{\mathscr{A}_x} (\sigma_{xz}\, y - \sigma_{xy}\, z)\, dA_x} \tag{2.34}$$

ter pogoja, da sta prečni sili N_y in N_z enaki nič

$$N_y = \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xy}\, dA_x = 0, \qquad N_z = \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xz}\, dA_x = 0. \tag{2.35}$$



Slika 2.8: Torzijski moment M_x je definiran glede na težišče prečnega prereza $\mathscr{A}_x$

Zapišimo še enačbi za zasuka ω_y in ω_z (glej enačbe (2.20), (2.21), (2.26) in (2.30))

$$\begin{aligned} \omega_y = \omega_{zx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial z} - \alpha\,(y - y_C)\right), \\ \omega_z = \omega_{xy} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x(y,z)}{\partial y} + \alpha\,(z - z_C)\right). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Prikazane enačbe enakomerne torzije lahko rešujemo po **metodi pomikov** ali po **metodi napetosti**. Če ravnotežne enačbe izrazimo s pomiki, potem enačbe enakomerne torzije rešujemo po metodi pomikov. Če pa ravnotežne enačbe izrazimo z napetostmi, moramo upoštevati še kompatibilnostne pogoje, ki jih tudi izrazimo z napetostmi. Računanje napetosti iz ravnotežnih enačb in kompatibilnostnih pogojev je metoda napetosti.

2.2 Reševanje enačb enakomerne torzije po metodi pomikov

Ravnotežno enačbo enakomerne torzije (2.8)

$$\mathscr{A}_x: \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

izrazimo s pomikom u_x, če upoštevamo (2.5) in (2.31)

$$\sigma_{xy} = 2\,G\,\varepsilon_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \alpha\,(z - z_C)\right), \quad \sigma_{xz} = 2\,G\,\varepsilon_{xz} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \alpha\,(y - y_C)\right). \tag{2.37}$$

Tako dobimo

$$\mathscr{A}_x: \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0. \tag{2.38}$$

Če (2.37) vstavimo v (2.12), potem tudi robni pogoj izrazimo s pomikom u_x

$$\mathscr{C}_x : \quad \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \alpha\,(z - z_C)\right) e_{\eta y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \alpha\,(y - y_C)\right) e_{\eta z} = 0. \tag{2.39}$$

Popolni diferencial pomika $u_x(y, z)$ (enačba (2.33)) izrazimo z izbočitveno funkcijo $\Phi(y, z)$ po enačbi

$$du_x = \alpha\, d\Phi(y, z) = \alpha \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dz\right). \tag{2.40}$$

Enačbo (2.40) integriramo od točke $T(y_0, z_0)$, do poljubne točke $T(y, z)$ znotraj prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ in dobimo

$$u_x - u_{x0} = \alpha\,(\Phi - \Phi_0). \tag{2.41}$$

Z $u_{x0} \equiv u_x(y_0, z_0)$ in $\Phi_0 \equiv \Phi(y_0, z_0)$ sta označeni intagracijski konstanti. Enačbo (2.41) vstavimo v (2.38)

$$\mathscr{A}_x : \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0} \tag{2.42}$$

in v (2.39)

$$\mathscr{C}_x : \quad \boxed{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - (z - z_C)\right) e_{\eta y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + (y - y_C)\right) e_{\eta z} = 0.} \tag{2.43}$$

Tudi koordinati y_C in z_C torzijskega središča C izrazimo z izbočitveno funkcijo Φ. Pri enakomerni torziji sta prečni sili N_y in N_z enaki nič

$$N_y = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xy}\, dA_x = 0, \qquad N_z = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xz}\, dA_x = 0. \tag{2.44}$$

Napetosti σ_{xy} in σ_{xz} izrazimo z izbočitveno funkcijo Φ, če v (2.37) upoštevamo (2.41)

$$\sigma_{xy} = 2\,G\,\varepsilon_{xy} = \alpha\,G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - (z - z_C)\right), \qquad \sigma_{xz} = 2\,G\,\varepsilon_{xz} = \alpha\,G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + (y - y_C)\right). \tag{2.45}$$

Enačbi (2.45) vstavimo v (2.44) in dobimo

$$\alpha\,G \left(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dA_x - \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, dA_x + z_C \int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x\right) = 0,$$

$$\alpha\,G \left(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dA_x + \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, dA_x - y_C \int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x\right) = 0.$$

Upoštevamo, da sta $S_y = \int_{\mathscr{A}_x} z\, dA_x = 0$ in $S_z = \int_{\mathscr{A}_x} y\, dA_x = 0$, ter dobimo enačbi za račun koordinat torzijskega središča y_C in z_C

$$\boxed{y_C = \frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dA_x, \qquad z_C = -\frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dA_x.} \tag{2.46}$$

Koordinati y_C, z_C torzijskega središča C v enačbi (2.43) zapišimo z integralom vzdolž mejne črte $\mathscr{C}_x$. To dosežemo, če v Greenovem integralnem izreku (enačba (1.106))

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) dA_x = \int\limits_{\mathscr{C}_x} (P_y\, dy + P_z\, dz) \tag{2.47}$$

upoštevamo, da je $P_y = 0$ in $P_z = \Phi$. Tako dobimo

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dA_x = \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dz. \tag{2.48}$$

Če pa vzamemo, da je $P_z = 0$ in $P_y = \Phi$, sledi

$$-\int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dA_x = \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dy. \tag{2.49}$$

Koordinati strižnega središča (2.46) izrazimo z integralom vzdolž mejne črte $\mathscr{C}_x$, če (2.48) in (2.49) vstavimo v (2.46)

$$y_C = -\frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dy, \qquad z_C = -\frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dz. \tag{2.50}$$

Sedaj lahko robni pogoj (2.43) izrazimo z integralom vzdolž mejne črte $\mathscr{C}_x$:

$$\mathscr{C}_x : \quad \boxed{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z - \frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dz \right) e_{\eta y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y + \frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dy \right) e_{\eta z} = 0.} \tag{2.51}$$

Izbočitveno funkcijo Φ izračunamo iz diferencialne enačbe (2.42), če upoštevamo robni pogoj (2.51). Diferencialno enačbo rešimo numerično. Določanje izbočitvene funkcije Φ je ravninska naloga v ravnini prečnega prereza $\mathscr{A}_x$. Izbočitvena funkcija je odvisna od oblike in velikosti prečnega prereza $\mathscr{A}_x$.

V enačbi (2.34) upoštevamo (2.45) in dobimo

$$M_x = \alpha\, G \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(y^2 + z^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, z \right) dA_x. \tag{2.52}$$

Z I_x označimo **torzijski vztrajnostni moment**

$$I_x = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(y^2 + z^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, z \right) dA_x = I_y + I_z + \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\, y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, z \right) dA_x, \tag{2.53}$$

in dobimo enačbo za račun specifičnega torzijskega zasuka α

$$\alpha = \frac{M_x}{G\, I_x}. \tag{2.54}$$

Reševanje enačb enakomerne torzije po metodi pomikov poteka takole:

- Iz (2.42) in (2.51) izračunamo izbočitveno funkcijo Φ
- Iz (2.46) izračunamo koordinati y_C in z_C torzijskega središča C
- Iz (2.53) izračunamo torzijski vztrajnostni moment I_x
- Iz (2.54) izračunamo specifični torzijski zasuk α
- Iz (2.45) izračunamo strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz}
- Deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} izračunamo iz (2.5)
- Torzijski zasuk ω_x izračunamo iz (2.25). Konstanto K dobimo, če upoštevamo, da je zasuk prereza, v katerem je postavljena viličasta podpora, enak nič
- Pomik $u_x - u_{x0}$ izračunamo iz enačbe (2.41). Če vzamemo, da je pomik u_{x0} točke $T(y_0, z_0)$ enak nič, dobimo iz 2.41 pomik u_x glede na točko $T(y_0, z_0)$
- Pomika u_y in u_z izračunamo iz enačbe (2.30)
- Zasuka ω_y in ω_z dobimo iz enačbe (2.36)

Na ta način izračunamo vse neznanke: u_x, u_y, u_z, ω_x, ω_y, ω_z, σ_{xy}, σ_{xz}, ε_{xy} in ε_{xz}.

Obstaja še **druga definicija torzijskega središča**, ki jo opisujemo v razdelku 2.6.2. Po tej definiciji izračunamo koordinati torzijskega središča po enačbah

$$y_C\, I_y + z_C\, I_{yz} = -I_{\Phi y}, \quad y_C\, I_{yz} + z_C\, I_z = I_{\Phi z}. \tag{2.55}$$

Z $I_{\Phi y}$ in $I_{\Phi z}$ označimo

$$I_{\Phi y} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, \Phi\, dA_x, \quad I_{\Phi z} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, \Phi\, dA_x, \tag{2.56}$$

kjer je Φ izbočitvena funkcija. Iz (2.55) izračunamo koordinati y_C, z_C takole:

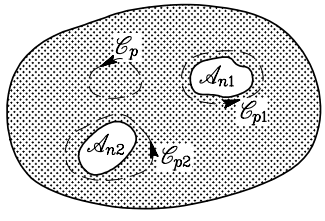
$$\boxed{y_C = -\frac{I_z\, I_{\Phi y} + I_{yz}\, I_{\Phi z}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}, \quad z_C = \frac{I_y\, I_{\Phi z} + I_{yz}\, I_{\Phi y}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}.} \tag{2.57}$$

2.3 Reševanje enačb enakomerne torzije po metodi napetosti

Pri reševanju enačb enakomerne torzije po metodi napetosti izračunamo napetosti iz ravnotežnih enačb in kompatibilnostnih pogojev. Iz enačbe (2.31) vidimo, da imamo za račun pomika u_x iz deformacij ε_{xy} in ε_{xz} na razpolago dve enačbi. To pomeni, da sta deformaciji ε_{xy} in ε_{xz} med seboj odvisni. Odvisnost med deformacijama ε_{xy} in ε_{xz} določajo kompatibilnostni pogoji †

$$\oint_{\mathscr{C}_p} du_x = 0, \qquad \oint_{\mathscr{C}_{pi}} du_x = 0, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.58}$$

S $\mathscr{C}_p$ je označena poljubna sklenjena krivulja znotraj integracijskega območja $\mathscr{A}_x$, N je število odprtin $\mathscr{A}_{ni}$ v prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$, $\mathscr{C}_{pi}$ so poljubne sklenjene krivulje, ki odprtine obkrožajo. Na sliki 2.9 prikazujemo prečni prerez $\mathscr{A}_x$ z dvema odprtinama $\mathscr{A}_{n1}$ in $\mathscr{A}_{n2}$ ter sklenjene krivulje $\mathscr{C}_p$, $\mathscr{C}_{p1}$ in $\mathscr{C}_{p2}$.



Slika 2.9: Prečni prerez z dvema odprtinama

Izraz (2.33) vstavimo v prvo od enačb (2.58) in dobimo

$$\oint_{\mathscr{C}_p} du_x = \oint_{\mathscr{C}_p} \Big(\big(2\,\varepsilon_{xy} + \alpha(z - z_C)\big)\, dy + \big(2\,\varepsilon_{xz} - \alpha(y - y_C)\big)\, dz \Big) = 0. \tag{2.59}$$

Če v Greenovem integralnem izreku (2.47), ki ga zapišemo za območje $\mathscr{A}_p$, ki ga določa sklenjena krivulja $\mathscr{C}_p$, upoštevamo, da je

$$P_z = 2\,\varepsilon_{xz} - \alpha(y - y_C), \qquad P_y = 2\,\varepsilon_{xy} + \alpha(z - z_C).$$

zapišemo enačbo (2.59) takole:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathscr{C}_p} du_x &= \oint_{\mathscr{C}_p} \Big(\big(2\,\varepsilon_{xy} + \alpha(z - z_C)\big)\, dy + \big(2\,\varepsilon_{xz} - \alpha(y - y_C)\big)\, dz \Big) = \\ &= 2 \int_{\mathscr{A}_p} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \alpha \right) dA_x = 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

† M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1998.

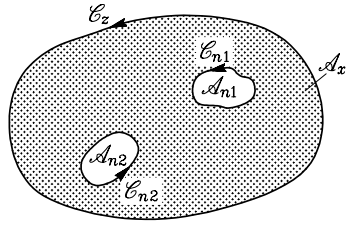
Ker je $\mathscr{C}_p$ **poljubna** krivulja znotraj integracijskega območja $\mathscr{A}_x$, je enačba 2.60 identično izpolnjena le, če je †

$$\mathscr{A}_x : \qquad \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \alpha = 0 \tag{2.61}$$

za vsako točko znotraj območja $\mathscr{A}_x$.

Pri večkrat sovisnih območjih (prerezi z eno ali več odprtin) morajo biti izpolnjeni kompatibilnostni pogoji tudi vzdolž sklenjenih krivulj $\mathscr{C}_{pi}$ $(i = 1, \ldots, N)$ (druga izmed enačb (2.58)). Za krivulje $\mathscr{C}_{pi}$ $(i = 1, \ldots, N)$ lahko izberemo tudi mejne črte $\mathscr{C}_{ni}$ notranjih odprtin $\mathscr{A}_{ni}$ (slika 2.10)

$$\oint_{\mathscr{C}_{ni}} du_x = 0, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.62}$$



Slika 2.10: Prerez $\mathscr{A}_x$ določajo zunanja mejna krivulja $\mathscr{C}_z$ ter notranje mejne krivulje $\mathscr{C}_{ni}$

Enačbe (2.62) lahko z upoštevanjem enačb (2.47) in (2.59) zapišemo takole:

$$\oint_{\mathscr{C}_{ni}} (\varepsilon_{xy}\, dy + \varepsilon_{xz}\, dz) = \alpha\, A_{ni}, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.63}$$

Z A_{ni} označimo ploščino notranje odprtine $\mathscr{A}_{ni}$, ki jo določa mejna črta $\mathscr{C}_{ni}$. Enačbi (2.61) in (2.63) izrazimo z napetostmi (enačbi (2.5))

$$\mathscr{A}_x : \qquad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - 2\,\alpha\, G = 0, \tag{2.64}$$

$$\mathscr{C}_{ni} : \qquad \oint_{\mathscr{C}_{ni}} (\sigma_{xy}\, dy + \sigma_{xz}\, dz) = 2\,\alpha\, G\, A_{ni}, \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{2.65}$$

Enačba (2.64) in enačbe (2.65) predstavljajo pogoj za enoličnost pomika u_x, izražen z napetostima.

Da bi bilo reševanje enačb enakomerne torzije čim lažje, vpeljemo znotraj integracijskega območja $\mathscr{A}_x$ in

† M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, FGG, Ljubljana, 1998 (primer 1.10).