Izračunajmo še izraze (2.152):

$$S_{\Phi P} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \Phi_P \, dA_x, \quad I_{\Phi P z} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y \, \Phi_P \, dA_x, \quad I_{\Phi P y} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z \, \Phi_P \, dA_x.$$

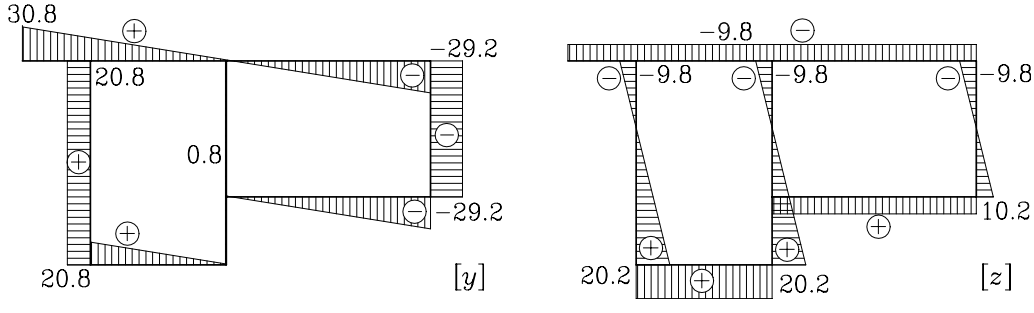
Najprej izračunajmo $S_{\Phi P}$:

$$\begin{aligned} S_{\Phi P} = & \frac{\Phi_{P3} \cdot 10 \cdot 0.1}{2} + \frac{(\Phi_{P3} + \Phi_{P5}) \cdot 20 \cdot 0.1}{2} + \frac{(\Phi_{P5} + \Phi_{P6}) \cdot 30 \cdot 0.1}{2} + \\ & + \frac{(\Phi_{P6} + \Phi_{P8}) \cdot 20 \cdot 0.1}{2} + \frac{(\Phi_{P8} + \Phi_{P7}) \cdot 30 \cdot 0.05}{2} + \frac{(\Phi_{P5} + \Phi_{P7}) \cdot 20 \cdot 0.05}{2} + \\ & + \frac{(\Phi_{P3} + \Phi_{P2}) \cdot 30 \cdot 0.1}{2} + \frac{(\Phi_{P2} + \Phi_{P1}) \cdot 20 \cdot 0.05}{2} + \frac{(\Phi_{P7} + \Phi_{P1}) \cdot 10 \cdot 0.05}{2} = \\ & = 920.455 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Izraza $I_{\Phi P z}$ in $I_{\Phi P y}$ izračunamo po enačbi (5.27) za integral produkta dveh linearnih funkcij:

$$I_{AB} = \frac{L_{AB} \, t}{6} \left[f_A \left(2 \, g_A + g_B \right) + f_B \left(2 \, g_B + g_A \right) \right].$$

Vrednosti koordinat y in z vozlišč prečnega prereza podajamo v preglednici 2.3, njuna diagrama pa prikazujemo na sliki 2.66.



Slika 2.66: Diagrama koordinat y in z

Vrednost $I_{\Phi P y}$ dobimo z integriranjem produkta z in Φ_P

$$\begin{aligned} I_{\Phi P y} = & \frac{10 \cdot 0.1}{6} \Phi_{P3} \left(2 \, z_3 + z_4 \right) + \frac{20 \cdot 0.1}{6} \left[\Phi_{P3} \left(2 \, z_3 + z_5 \right) + \Phi_{P5} \left(2 \, z_5 + z_3 \right) \right] + \\ & + \frac{30 \cdot 0.1}{6} \left[\Phi_{P5} \left(2 \, z_5 + z_6 \right) + \Phi_{P6} \left(2 \, z_6 + z_5 \right) \right] + \frac{20 \cdot 0.05}{6} \left[\Phi_{P2} \left(2 \, z_2 + z_1 \right) + \Phi_{P1} \left(2 \, z_1 + z_2 \right) \right] + \\ & + \frac{30 \cdot 0.05}{6} \left[\Phi_{P7} \left(2 \, z_7 + z_8 \right) + \Phi_{P8} \left(2 \, z_8 + z_7 \right) \right] + \frac{30 \cdot 0.1}{6} \left[\Phi_{P3} \left(2 \, z_3 + z_2 \right) + \Phi_{P2} \left(2 \, z_2 + z_3 \right) \right] + \\ & + \frac{20 \cdot 0.05}{6} \left[\Phi_{P5} \left(2 \, z_5 + z_7 \right) + \Phi_{P7} \left(2 \, z_7 + z_5 \right) \right] + \frac{10 \cdot 0.05}{6} \left[\Phi_{P7} \left(2 \, z_7 + z_1 \right) + \Phi_{P1} \left(2 \, z_1 + z_6 \right) \right] + \\ & + \frac{20 \cdot 0.1}{6} \left[\Phi_{P6} \left(2 \, z_6 + z_8 \right) + \Phi_{P8} \left(2 \, z_8 + z_6 \right) \right] = -6338.13 \text{ cm}^5 \end{aligned}$$

vrednost $I_{\Phi Pz}$ pa z integriranjem produkta y in Φ_P

$$
\begin{aligned}
I_{\Phi Pz} = {} & \frac{10\cdot 0.1}{6}\,\Phi_{P3}\,(2\,y_3+y_4) + \frac{20\cdot 0.1}{6}\,[\Phi_{P3}\,(2\,y_3+y_5)+\Phi_{P5}\,(2\,y_5+y_3)\,]+\\
& + \frac{30\cdot 0.1}{6}\,[\Phi_{P5}\,(2\,y_5+y_6)+\Phi_{P6}\,(2\,y_6+y_5)\,] + \frac{20\cdot 0.05}{6}\,[\Phi_{P2}\,(2\,y_2+y_1)+\Phi_{P1}\,(2\,y_1+y_2)\,]+\\
& + \frac{30\cdot 0.05}{6}\,[\Phi_{P7}\,(2\,y_7+y_8)+\Phi_{P8}\,(2\,y_8+y_7)\,] + \frac{30\cdot 0.1}{6}\,[\Phi_{P3}\,(2\,y_3+y_2)+\Phi_{P2}\,(2\,y_2+y_3)\,]+\\
& + \frac{20\cdot 0.05}{6}\,[\Phi_{P5}\,(2\,y_5+y_7)+\Phi_{P7}\,(2\,y_7+y_5)\,] + \frac{10\cdot 0.05}{6}\,[\Phi_{P7}\,(2\,y_7+y_1)+\Phi_{P1}\,(2\,y_1+y_6)\,]+\\
& + \frac{20\cdot 0.1}{6}\,[\Phi_{P6}\,(2\,y_6+y_8)+\Phi_{P8}\,(2\,y_8+y_6)\,] = -23890.7\,\mathrm{cm}^5.
\end{aligned}
$$

Konstanti A in B izračunamo iz enačb (2.156)

$$
A = -\frac{I_y\,I_{\Phi Pz}+I_{yz}\,I_{\Phi Py}}{I_y\,I_z-I_{yz}^2} = 4.28896\,\mathrm{cm}, \qquad B = \frac{I_z\,I_{\Phi Py}+I_{yz}\,I_{\Phi Pz}}{I_y\,I_z-I_{yz}^2} = -3.10133\,\mathrm{cm}.
$$

Koordinati torzijskega središča izračunamo iz enačb (2.139)

$$
y_C = y_P - B = 3.10133\,\mathrm{cm}, \qquad z_C = z_P - A = -4.28896\,\mathrm{cm}.
$$

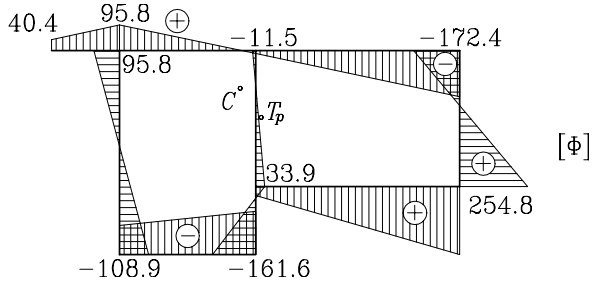
Izbočitveno funkcijo Φ izračunamo po enačbi (2.154). Ker konstanta Φ_0 ne vpliva na velikost izbočitvene funkcije Φ, izberemo, da je

$$
\Phi_0 = 0 \tag{2.220}
$$

in pišemo

$$
\Phi = \Phi_P + A\,y - B\,z - \frac{S_{\Phi P}}{A_x} = \Phi_P + 4.28896\,y + 3.10133\,z - 61.3636.
$$

Vrednosti izbočitvene funkcije Φ v vozliščih podajamo v preglednici (2.3). Potek izbočitvene funkcije Φ prikazujemo na sliki 2.67.



Slika 2.67: Izbočitvena funkcija Φ ter lega torzijskega središča C

Pomik u_x izračunamo po enačbi (2.146), kjer za T_0 izberemo vozlišče 7. Zato je $T_0 \equiv T_7$:

$$
\bar{u}_{xi} = u_{xi} - u_{x7} + \alpha(\Phi - \Phi_7).
$$

Specifični torzijski zasuk α je

$$\alpha = \frac{15000}{7.5 \cdot 10^4 \cdot 2618.18} = 0.00007639\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

Pomike $\bar{u}_{xi}$ posameznih točk glede na vozlišče 7 prikazujemo v preglednici 2.3.

Za račun pomikov $u_y = -\omega_x\,(z - z_C)$ in $u_z = \omega_x\,(y - y_C)$ (enačba (2.30)) v prečnem prerezu $x = L$ potrebujemo zasuk ω_x, ki ga v primeru, da je zasuk $\omega_x(0)$ pri $x = 0$ enak nič, izračunamo po enačbi (2.25)

$$\omega_x(L) = \alpha\,L = 0.00007639 \cdot 400 = 0.03056\,\text{radianov}.$$

Pomike u_y in u_z v vozliščih prečnega prereza prikazujemo v preglednici 2.3.

2.6 Strižno in torzijsko središče

V literaturi obstajajo različne definicije strižnega in torzijskega središča. V tem razdelku prikažemo dve različni definiciji strižnega in dve različni definiciji torzijskega središča ter enačbe za račun njunih koordinat.

2.6.1 Strižno središče

Definicija strižnega središča je zasnovana na definiciji upogiba z osno silo oziroma upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi. Oglejmo si dve definiciji upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi.[†]

Prva definicija upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi

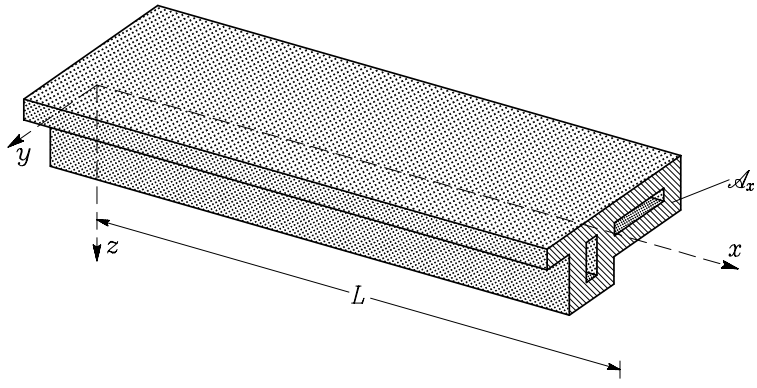
Saint-Venantov problem predstavlja reševanje osnovnih enačb linearne teorije elastičnosti (kinematičnih enačb, ravnotežnih enačb in enačb Hookovega zakona) za primer linijskega nosilca s konstantnim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x$ (slika 2.68), če predpostavimo, da je

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0. \tag{2.221}$$

Pri tem predpostavimo, da je nosilec obtežen le v krajnih prerezih $x = 0$ in $x = L$.

Rešitev enačb pokaže, da se odvod $\partial\omega_x/\partial x$ zasuka elementa prečnega prereza okrog vzdolžne osi od točke do točke prečnega prereza spreminja. Izraz $\partial\omega_x/\partial x$ predstavlja relativni zasuk dveh enako ležečih elementov sosednih prečnih prerezov.

[†] Y.C. Fung, An Introduction to the Theory of Aeroelasticity, John Wiley & Sons, New York, 1955.

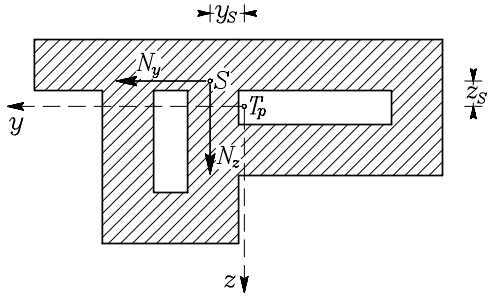


Slika 2.68: Obravnavamo linijski nosilec s kostantnim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x$

Upogib brez zasuka lahko definiramo z zahtevo, da je povprečna vrednost $\partial\omega_x/\partial x$ po celem prečnem prerezu enaka nič

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial\omega_x}{\partial x}\, dA_x = 0. \tag{2.222}$$

Strižno središče S je točka prečnega prereza, skozi katero potekata prečni sili N_y in N_z, da v nosilcu nastane deformacijsko stanje, ki ustreza enačbi (2.222) (slika 2.69).



Slika 2.69: Če prečni sili N_y in N_z delujeta v strižnem središču S, nastopa upogib brez zvijanja

Pri taki definiciji upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi je lega strižnega središča odvisna od Poissonovega količnika ν. Izraza za koordinati y_S, z_S strižnega središča, ki ustreza pogoju (2.222), podaja več avtorjev. Oglejmo si tri primere.

Goodier podaja izraz za koordinato z_S ob predpostavki (2.222) †

$$
\begin{aligned}
y_S &= -\frac{1}{2\,(1+\nu)\,I_y}\int\limits_{\mathscr{A}_x}\left(y\,\frac{\partial\chi}{\partial z}-z\,\frac{\partial\chi}{\partial y}+\left(1-\frac{\nu}{2}\right)y^3-\left(2+\frac{\nu}{2}\right)z^2\,y\right)dA_x,\\
z_S &= -\frac{1}{2\,(1+\nu)\,I_z}\int\limits_{\mathscr{A}_x}\left(z\,\frac{\partial\chi}{\partial y}-y\,\frac{\partial\chi}{\partial z}+\left(1-\frac{\nu}{2}\right)z^3-\left(2+\frac{\nu}{2}\right)y^2\,z\right)dA_x.
\end{aligned}
\tag{2.223}
$$

Strižno (upogibno) funkcijo χ izračunamo iz enačbe ‡

$$
\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}=0
$$

in robnega pogoja

$$
\frac{\partial\chi}{\partial\eta}=-\left[\frac{\nu}{2}\,y^2+\left(1-\frac{\nu}{2}\right)z^2\right]e_{\eta y}-(2+\nu)\,y\,z\,e_{\eta z}.
$$

Z upoštevanjem iste predpostavke dobi Sokolnikoff § naslednja izraza za y_S in z_S

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{2\,(1+\nu)\,(I_y\,I_z-I_{yz}^2)}\,(I_z\,S_2-I_{yz}\,S_1),\\
z_S &= \frac{1}{2\,(1+\nu)\,(I_y\,I_z-I_{yz}^2)}\,(I_{yz}\,S_2-I_y\,S_1),
\end{aligned}
\tag{2.224}
$$

kjer oznaki S_1 in S_2 pomenita

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int\limits_{\mathscr{A}_x}\left[y\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-z\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+(1+\nu)\,y^2\,z-\nu\,z^3\right]dA_x,\\
S_2 &= \int\limits_{\mathscr{A}_x}\left[y\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-z\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-(1+\nu)\,y\,z^2+\nu\,y^3\right]dA_x,
\end{aligned}
$$

Funkciji φ_1 in φ_2 sta harmonični strižni funkciji, ki ju izračunamo iz enačb

$$
\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=0
$$

ob upoštevanju robnih pogojev

$$
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}=\left[(1+\nu)\,y^2-\nu\,z^2\right]e_{\eta y},\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}=\left[(1+\nu)\,z^2-\nu\,y^2\right]e_{\eta z}.
$$

† J.N. Goodier, A Theorem on the Shearing Stress in Beams with Applications to Multicelluar Sections, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 11, No. 3, 272-280, July, 1944.

‡ A.E.H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, fourth edition, 1944.

§ I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

Sokolnikoff [†] pokaže, da enačbi strižnega središča po Goodieru in Sokolnikoffu določata isto točko. V diplomi Polone Vončina[‡] sta podana naslednja izraza za račun koordinat strižnega središča:

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{2\,(1+\nu)\,I_y} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(y\,\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} - z\,\frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{1+\nu}{2}\,y\,z^2 - \frac{1-\nu}{2}\,y^3 \right) dA_x, \\
z_S &= -\frac{1}{2\,(1+\nu)\,I_z} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \left(y\,\frac{\partial \Phi_z}{\partial z} - z\,\frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{1+\nu}{2}\,y^2\,z + \frac{1-\nu}{2}\,z^3 \right) dA_x.
\end{aligned}
\tag{2.225}
$$

Funkciji Φ_y in Φ_z sta harmonični strižni funkciji, ki ju izračunamo iz enačb

$$
\frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial z^2} = 0
$$

ob upoštevanju robnih pogojev

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_y}{\partial \eta} &= (1+\nu)\,y\,z\,e_{\eta y} + \left(\frac{1+\nu}{2}\,z^2 + \frac{1-\nu}{2}\,y^2 \right) e_{\eta z}, \\
\frac{\partial \Phi_z}{\partial \eta} &= \left(\frac{1+\nu}{2}\,y^2 + \frac{1-\nu}{2}\,z^2 \right) e_{\eta y} + (1+\nu)\,y\,z\,e_{\eta z}.
\end{aligned}
$$

Druga definicija upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi

Trefftz je predlagal definicijo upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi na osnovi deformacijske energije.[§] Če konzolni nosilec obtežimo v prostem krajišču s torzijskim momentom M, se to krajišče zasuče za kot α. Deformacijska energija v nosilcu je enaka delu W_1, ki ga opravi moment na zasuku

$$
W_1 = \frac{1}{2}\,M\,\alpha.
$$

V primeru, če v prostem krajišču deluje le sila F_z, ki povzroči pomik w_L prostega krajišča konzole, je deformacijska energija W_2 enaka

$$
W_2 = \frac{1}{2}\,F_z\,w_L.
$$

Če delujeta moment M in sila F_z istočasno, deformacijska energija v nosilcu v splošnem ni enaka vsoti W_1 in W_2.[*] Vzemimo, da na nosilec deluje najprej le moment M, ki opravi delo W_1. Nato naj deluje še sila F_z, moment M pa je konstanten. Sila F_z opravi delo W_2, moment M pa opravi še dodatno delo, ki

[†] I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

[‡] Polona Vončina, Napetosti in pomiki upogibnega nosilca po Saint-Venantu, diplomska naloga, (mentor prof. D. Jurišić) FAGG, Ljubljana, 1983.

[§] E. Trefftz, Über den Schubmittelpunkt in einem durch eine Einzellast gebogenen Balken, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 15, No. 4, 220-225, 1935.

[*] F. de Veubeke, A Course in Elasticity, Springer-Verlag, New York, 1979.

ustreza kotu zasuka zaradi sile F_z. Trefftz definira upogib brez zvijanja okrog vzdolžne osi s pogojem, da je deformacijska energija zaradi omenjenega dodatnega dela, enaka nič.

V primeru, če prečni sili N_y in N_z delujeta v strižnem središču nastopa v nosilcu "čisti"upogib. Nato dodamo še moment M. V tem primeru je deformacijska energija nosilca enaka vsoti energij zaradi torzije in zaradi "čistega"upogiba. Vrstni red nanašanja F_z in M ni pomemben. Izraz za koordinati strižnega središča na osnovi tako definiranega upogiba brez zvijanja okrog vzdolžne osi lahko zapišemo z izbočitveno funkcijo Φ enakomerne torzije †

$$y_S = -\frac{I_z\, I_{\Phi y} + I_{yz}\, I_{\Phi z}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}, \quad z_S = \frac{I_y\, I_{\Phi z} + I_{yz}\, I_{\Phi y}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}. \tag{2.226}$$

Pri tem je

$$I_{\Phi y} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, \Phi\, dA_x, \quad I_{\Phi z} = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, \Phi\, dA_x, \tag{2.227}$$

Izbočitveno funkcijo Φ izračunamo iz enačbe ‡

$$\mathscr{A}_x : \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \tag{2.228}$$

ob upoštevanju robnega pogoja

$$\mathscr{C}_x : \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z - \frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dz \right) e_{\eta y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y + \frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{C}_x} \Phi\, dy \right) e_{\eta z} = 0. \tag{2.229}$$

V tem primeru je strižno središče neodvisno od Poissonovega koeficienta ν, namesto enačbe (2.222) pa velja †

$$\int\limits_{\mathscr{A}_{\text{cel}}} \frac{\partial \omega_x}{\partial x}\, \bar{\varphi}\, dA_x = 0.$$

S $\bar{\varphi}$ označimo razširjeno napetostno funkcijo φ, ki vključuje tudi odprtine v prečnem prerezu

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi \quad \text{na} \quad \mathscr{A}_x, \\ \bar{\varphi} &= \varphi_{ni} \quad \text{na} \quad \mathscr{A}_i, \;\; i = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

Z A_{cel} je označeno območje prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ vključno z odprtinami.

‡ A. Carpinteri, Structural Mechanics–A Unified Approach, E & FN SPON, London, 1997.
† F. de Veubeke, A Course in Elasticity, Springer-Verlag, New York, 1979.

2.6.2 Torzijsko središče

Tudi za torzijsko središče obstajajo različne definicije. Oglejmo si dve.

Prva definicija torzijskega središča

Torzijsko središče $C(y_C, z_C)$ je točka, okoli katere se prečni prerez v primeru enakomerne torzije zasuče. Z izbočitveno funkcijo Φ enakomerne torzije izračunamo koordinati y_C in z_C takole:[†]

$$y_C = \frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dA_x, \qquad z_C = -\frac{1}{A_x} \int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, dA_x. \tag{2.230}$$

Enačbi (2.230) sta izpeljani v razdelku 2.2.

Druga definicija torzijskega središča

V rešitvi za Saint-Venantov problem upoštevamo, da se nosilec le zasuče okrog vzdožne osi. Nato vzamemo, da veljajo za prečni prerez $x = 0$, kjer je konzola vpeta, naslednji pogoji:[‡]

a) Pomika u_y in u_z sta enaka nič:

$$u_y = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{za} \quad x = 0.$$

b) Če v rešitvi za Saint-Venantov problem upoštevamo, da se nosilec le zasuče okrog vzdožne osi, lahko vzdolžni pomik u_x izrazimo s tremi parametri c, p in q. Če nato zahtevamo, da ima povprečna vrednost kvadrata vzdolžnega pomika u_x minimalno vrednost glede na parametre c, p in q

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} (u_x(c,p,q))^2\, dA_x = \text{minimum} \quad \text{za} \quad x = 0,$$

kar lahko napišemo z enačbami

$$\int\limits_{\mathscr{A}_x} u_x\, dA_x = 0, \quad \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, u_x\, dA_x = 0, \quad \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, u_x\, dA_x = 0, \tag{2.231}$$

dobimo izraz za torzijsko središče, ki sovpada s strižnim središčem, definiranim po Trefftzu (enačbi (2.226)), kar pokaže Veubeke [§]

$$y_C \equiv y_S = -\frac{I_z\, I_{\Phi y} + I_{yz}\, I_{\Phi z}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}, \quad z_C \equiv z_S = \frac{I_y\, I_{\Phi z} + I_{yz}\, I_{\Phi y}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}. \tag{2.232}$$

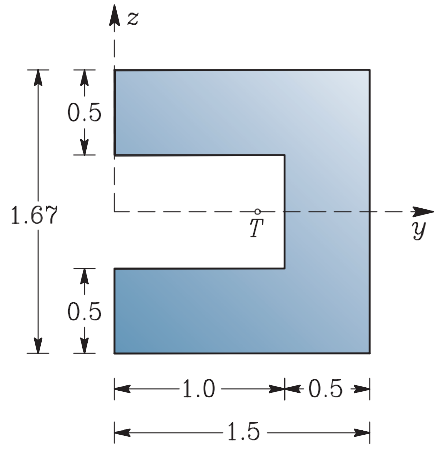
Druga možnost je uporaba enačb (2.157).

[†] A. Carpinteri, Structural Mechanics–A Unified Approach, E & FN SPON, London, 1997.

[‡] A. Weinstein, The Center of Shear and the Center of Twist, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. V, No. 1, 97-99, 1947.

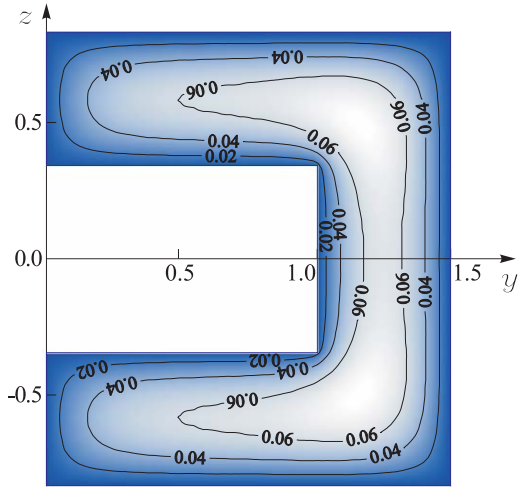
[§] F. de Veubeke, A Course in Elasticity, Springer-Verlag, New York, 1979.

Primer 2.7 *Obravnavamo prečni prerez z eno simetrijsko osjo. Dimenzije prečnega prereza so podane na sliki 2.70, vrednost Poissonovega koeficeinta pa je $\nu = 0.3$. Izračunajmo torzijski vztrajnostni moment I_x z uporabo napetostne funkcije $\varphi(y, z)$ in izbočitvene funkcije $\Phi(y, z)$. Izračunajmo koordinati strižnega in torzijskega središča prečnega prereza po različnih definicijah. Za reševanje parcialnih diferencialnih enačb uporabimo diferenčno metodo.*



Slika 2.70: Dimenzije prečnega prereza oblike “C”

Določimo najprej napetostno funkcijo $\varphi(y, z)$ iz diferencialne enačbe (2.85) z robnim pogojem (2.82). Problem rešimo z diferenčno metodo in prikazujemo na sliki 2.71.



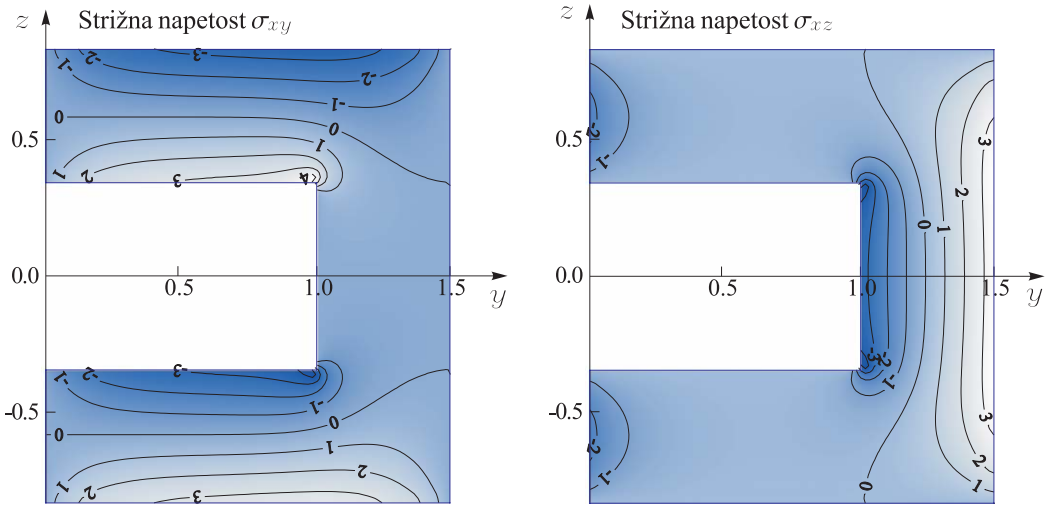
Slika 2.71: Napetostna funkcija $\varphi(y, z)$

Torzijski vztrajnostni moment I_x izračunamo z integriranjem napetostne funkcije $\varphi(y, z)$ po prečnem

prerezu, (enačba (2.31)), strižne napetosti pa izračunamo z odvajanjem napetostne funkcije po enačbah (2.95). Torzijski vztrajnostni moment je

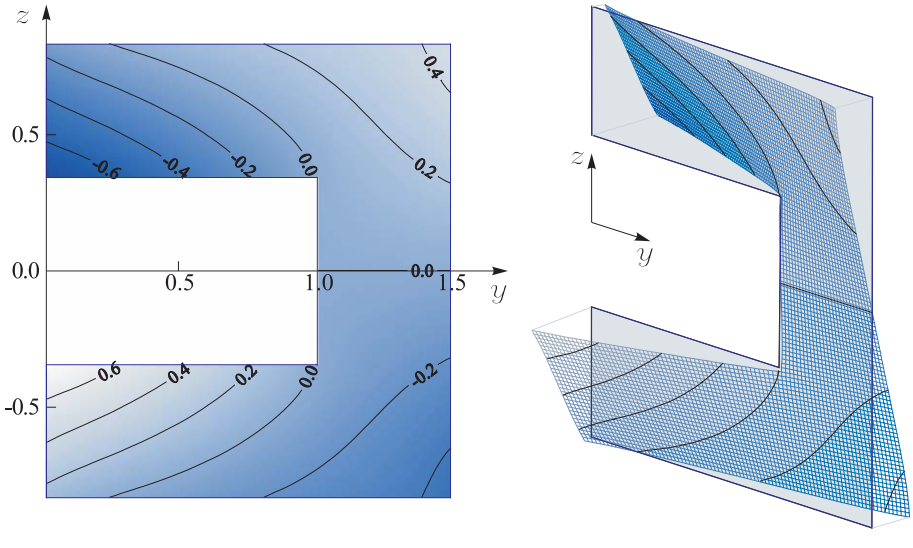
$$I_x = 0.1483\,\mathrm{cm}^4.$$

Razporeditev strižnih napetosti σ_{xy} in σ_{xz} prikazujemo na sliki 2.72.



Slika 2.72: Strižne napetosti $\sigma_{xy}(y,z)$ in $\sigma_{xz}(y,z)$ zaradi $M_x = 1\,\mathrm{kNcm}$

Z diferenčno metodo rešimo diferencialno enačbo (2.42) z robnimi pogoji (2.51) in določimo izbočitveno funkcijo $\Phi(y,z)$, ki jo prikazujemo na sliki 2.73.



Slika 2.73: Izbočitvena funkcija $\Phi(y,z)$

Z enačbo (2.53) izračunamo torzijski vztrajnostni moment I_x, z (2.46) pa lahko izračunamo tudi koordinati y_C in z_C torzijskega središča C.

$$I_x = 0.1490\,\mathrm{cm}^4, \qquad y_C = 0.767\,\mathrm{cm}, \qquad z_C = 0\,\mathrm{cm}.$$

Iz (2.45) izračunamo strižni napetosti σ_{xy} in σ_{xz}, ki so skoraj enake tistim, prikazanim na sliki 2.72. Razlike nastopijo zaradi numerične napake.

Koordinate strižnega središča S lahko izračunamo tudi po različnih definicijah z enačbami (2.223), (2.224), (2.225) in (2.226). Rezultate prikazujemo v preglednici 2.4.

Tabela 2.4: Koordinati strižnega središča po različnih definicijah

Definicija	enačba (2.223) (Goodier)	enačba (2.224) (Sokolnikoff)	enačba (2.225) (Vončina)	enačba (2.226) (Trefftz)
y_s	0.771	0.771	0.771	0.003

Vidimo, da dobimo po treh definicijah isto vrednost, različna pa je vrednost, ki jo izračunamo po enačbi (2.226). Koordinata torzijskega središča (enačba (2.46)) se le za malo razlikuje od koordinate strižnega središča (enačba (2.223–2.225)).

3 Metoda pomikov

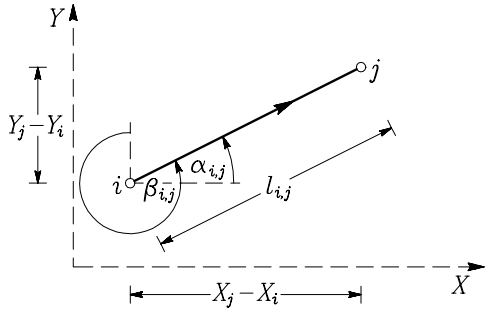
V 3. poglavju obravnavamo ravninske linijske konstrukcije po metodi pomikov. Pri tem v razdelku 3.1 izpeljemo enačbe za ravninsko paličje, v razdelku 3.2 pa za ravninski okvir.

3.1 Ravninsko paličje

V tem poglavju obravnavamo paličje v ravnini X, Y. Osnovne enačbe mehanike trdnih teles (ravnotežne enačbe, kinematične enačbe in Hookov zakon) rešimo po **metodi pomikov**. To pomeni, da **ravnotežne enačbe** izrazimo s **pomiki**. Ker pri metodi pomikov pomikov ne računamo iz deformacij, kompatibilnostnih pogojev ne upoštevamo.

3.1.1 Kinematična enačba in Hookov zakon

Pri metodi pomikov izrazimo ravnotežne enačbe s pomiki. Pri paličju so to pomiki vozlišč konstrukcije, v katerih so palice med seboj povezane. Obravnavamo palico, ki povezuje vozlišči i in j s koordinatama X_i, Y_i in X_j, Y_j ter ima dolžino $l_{i,j}$ (slika 3.1). Palica je usmerjena od vozlišča i k vozlišču j.



Slika 3.1: Palico opišemo s številko začetnega i in končnega j vozlišča

Z $\alpha_{i,j}$ in $\beta_{i,j}$ označimo kota, ki ju palica oklepa z enotskima vektorjema $\vec{e}_X$ in $\vec{e}_Y$ (slika 3.1).

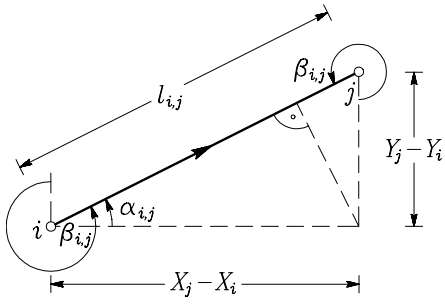
$$\cos\alpha_{i,j} = \frac{X_j - X_i}{l_{i,j}} \qquad \cos\beta_{i,j} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{i,j}}. \tag{3.1}$$

Iz enačb (3.1) sledi

$$\cos\alpha_{j,i} = \frac{X_i - X_j}{l_{j,i}} = -\cos\alpha_{i,j}, \qquad \cos\beta_{j,i} = \frac{Y_i - Y_j}{l_{j,i}} = -\cos\beta_{i,j}. \tag{3.2}$$

Dolžino palice l_{ij} izračunamo po enačbi (slika 3.2)

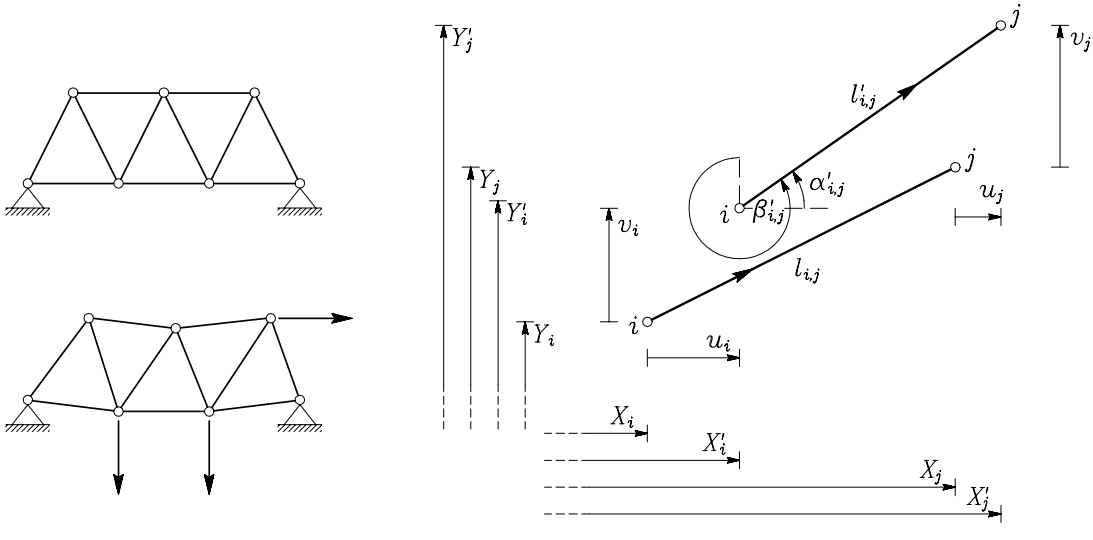
$$l_{i,j} = (X_j - X_i)\cos\alpha_{i,j} + (Y_j - Y_i)\cos\beta_{i,j}. \tag{3.3}$$



Slika 3.2: Dolžino palice izrazimo z razliko koordinat $X_j - X_i$ in $Y_j - Y_i$

Zaradi vpliva zunanje obtežbe, ki deluje v vozliščih palične konstrukcije, se vozlišči i in j premakneta v novo lego, ki jo opišemo s koordinatami X_i', Y_i' in X_j', Y_j' (slika 3.3)

$$X_i, Y_i \to X_i', Y_i', \qquad X_j, Y_j \to X_j', Y_j'.$$



Slika 3.3: Začetna in deformirana lega palice

Če z u_i, v_i in u_j, v_j označimo komponente pomikov vozlišč i in j v smereh X in Y osi

$$\vec{u}_i = u_i\,\vec{e}_X + v_i\,\vec{e}_Y, \qquad \vec{u}_j = u_j\,\vec{e}_X + v_j\,\vec{e}_Y, \tag{3.4}$$

sledi

$$X_i' = X_i + u_i, \quad Y_i' = Y_i + v_i, \qquad X_j' = X_j + u_j, \quad Y_j' = Y_j + v_j. \tag{3.5}$$

Po deformiranju se spremenita kota, ki ju palica oklepa s koordinatnima osema

$$\cos\alpha_{i,j}' = \frac{X_j' - X_i'}{l_{i,j}'}, \qquad \cos\beta_{i,j}' = \frac{Y_j' - Y_i'}{l_{i,j}'} \tag{3.6}$$

ter dolžina palice

$$l_{i,j}' = (X_j' - X_i')\cos\alpha_{i,j}' + (Y_j' - Y_i')\cos\beta_{i,j}'. \tag{3.7}$$

Če so pomiki vozlišč palične konstrukcije majhni v primerjavi z dolžinami palic, lahko **zanemarimo spremembe kotov** pri deformaciji

$$\cos\alpha_{i,j}' \approx \cos\alpha_{i,j}, \qquad \cos\beta_{i,j}' \approx \cos\beta_{i,j}. \tag{3.8}$$

Dolžino deformirane palice $l_{i,j}'$ lahko zato približno izrazimo s kotoma $\alpha_{i,j}$ in $\beta_{i,j}$

$$l_{i,j}' \approx (X_j' - X_i')\cos\alpha_{i,j} + (Y_j' - Y_i')\cos\beta_{i,j}. \tag{3.9}$$

Spremembo dolžine palice označimo z $\Delta l_{i,j}$

$$\Delta l_{i,j} = l_{i,j}' - l_{i,j}. \tag{3.10}$$

Enačbe (3.3), (3.5) in (3.9) vstavimo v (3.10)

$$\begin{aligned}\Delta l_{i,j} &= (X_j' - X_j)\cos\alpha_{i,j} - (X_i' - X_i)\cos\alpha_{i,j} + (Y_j' - Y_j)\cos\beta_{i,j} - (Y_i' - Y_i)\cos\beta_{i,j} = \\ &= (u_j - u_i)\,\cos\alpha_{i,j} + (v_j - v_i)\,\cos\beta_{i,j}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Če je paličje obteženo le v vozliščih, je v palici od nič različna le osna sila N_x. Normalno napetost σ_{xx} zaradi osne sile N_x izračunamo po enačbi

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x}. \tag{3.12}$$

Pri obravnavanju ravninskega paličja uporabimo oznake

$$\sigma_{i,j} = \frac{N_{i,j}}{A_{i,j}} \quad \rightarrow \quad N_{i,j} = \sigma_{i,j}\,A_{i,j}, \tag{3.13}$$

kjer indeksa i in j pomenita številki začetnega in končnega vozlišča palice. Če ima palica konstantni prečni prerez $A_{i,j}$, je normalna napetost $\sigma_{i,j}$ po celi palici konstantna. Vzdolžno deformacijo ε_{xx} v smeri osi palice označimo z $\varepsilon_{i,j}$, kjer indeksa i in j pomenita številko začetega in končnega vozlišča

palice. Ker je normalna napetost $\sigma_{i,j}$ po celi palici konstantna, je konstantna tudi deformacija $\varepsilon_{i,j}$, ki jo lahko izrazimo s spremembo dolžine palice (glej M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles)

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{l'_{i,j} - l_{i,j}}{l_{i,j}} = \frac{\Delta l_{i,j}}{l_{i,j}}. \tag{3.14}$$

Kinematična enačba (3.14) podaja zvezo med deformacijo in pomiki. Zapisati moramo še zvezo med napetostjo $\sigma_{i,j}$ in deformacijo $\varepsilon_{i,j}$. Ker obravnavamo primer enoosnega napetostnega stanja, je

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{\sigma_{i,j}}{E_{i,j}} + \alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j}. \tag{3.15}$$

Upoštevamo torej tudi spremembo temperature palice za $\Delta T_{i,j}$. Na enak način upoštevamo tudi krčenje materiala (glej M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles). Z $E_{i,j}$ označimo modul elastičnosti materiala, z $\alpha_{T\,i,j}$ pa linearni temperaturni razteznostni koeficient za obravnavano palico. Iz enačbe (3.15) izračunamo napetost $\sigma_{i,j}$

$$\sigma_{i,j} = E_{i,j}\,\varepsilon_{i,j} - E_{i,j}\,\alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j}. \tag{3.16}$$

V enačbi (3.16) upoštevamo enačbo (3.14)

$$\sigma_{i,j} = \frac{E_{i,j}\,\Delta l_{i,j}}{l_{i,j}} - E_{i,j}\,\alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j} \tag{3.17}$$

in enačbo (3.17) vstavimo v (3.13)

$$N_{i,j} = \frac{E_{i,j}\,A_{i,j}}{l_{i,j}}\,\Delta l_{i,j} - E_{i,j}\,A_{i,j}\,\alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j} = k_{i,j}\,\Delta l_{i,j} - E_{i,j}\,A_{i,j}\,\alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j}. \tag{3.18}$$

S $k_{i,j}$ označimo izraz

$$k_{i,j} = \frac{E_{i,j}\,A_{i,j}}{l_{i,j}}, \tag{3.19}$$

ki ga imenujemo **osna togost** palice. Če v enačbi (3.18) upoštevamo enačbo (3.11), izrazimo osno silo v palici s pomiki

$$\boxed{N_{i,j} = k_{i,j}\,[(u_j - u_i)\cos\alpha_{i,j} + (v_j - v_i)\cos\beta_{i,j}] - E_{i,j}\,A_{i,j}\,\alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j}.} \tag{3.20}$$

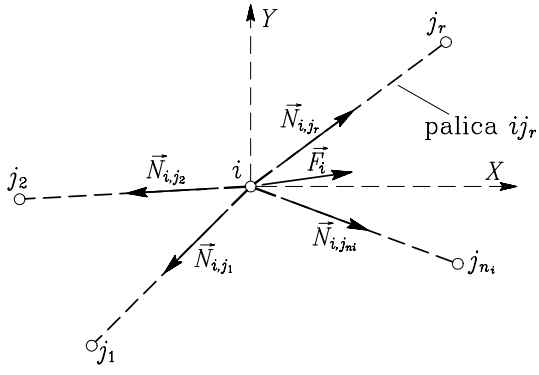
Enačbo (3.20) zapišimo še v matrični obliki

$$N_{i,j} = k_{i,j}\,[\cos\alpha_{i,j}\ \ \cos\beta_{i,j}]\begin{bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{bmatrix} - E_{i,j}\,A_{i,j}\,\alpha_{T\,i,j}\,\Delta T_{i,j}. \tag{3.21}$$

3.1.2 Ravnotežna pogoja za vozlišče paličja

Da poljubno vozlišče i paličja miruje, morata biti izpolnjena ravnotežna pogoja (slika 3.4)

$$\sum_{r=1}^{n_i} N_{i,j_r\,X} + F_{iX} = 0, \qquad \sum_{r=1}^{n_i} N_{i,j_r\,Y} + F_{iY} = 0. \tag{3.22}$$



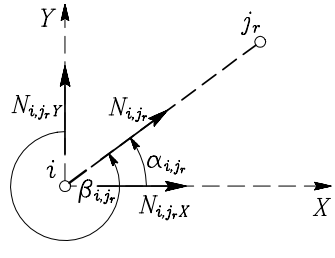
Slika 3.4: V vozlišču i je povezanih n_i število palic

Z n_i je označeno število palic, ki se stikajo v vozlišču i. $N_{i,j_r\,X}$ in $N_{i,j_r\,Y}$ sta komponenti osne sile palice z vozliščema i in j_r v vozlišču i, F_{iX} in F_{iY} pa komponenti zunanje obtežbe vozlišča i v smereh X in Y. Enačbi (3.22) zapišimo v matrični obliki

$$\sum_{r=1}^{n_i} \begin{bmatrix} N_{i,j_r\,X} \\ N_{i,j_r\,Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Komponenti osne sile $N_{i,j_r\,X}$ in $N_{i,j_r\,Y}$ izrazimo z velikostjo osne sile N_{i,j_r} (slika 3.5)

$$N_{i,j_r\,X} = N_{i,j_r} \cos\alpha_{i,j_r}, \qquad N_{i,j_r\,Y} = N_{i,j_r} \cos\beta_{i,j_r}. \tag{3.24}$$



Slika 3.5: Silo N_{i,j_r} v palici z vozličema i in j_r razstavimo v smereh X in Y osi

Tudi enačbi (3.24) zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} N_{i,j_r\,X} \\ N_{i,j_r\,Y} \end{bmatrix} = N_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Če enačbo (3.21) vstavimo v (3.25), dobimo (j v enačbi (3.21) zamenjamo z j_r)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{i,j_r\,X} \\ N_{i,j_r\,Y} \end{bmatrix} &= k_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix} [\cos\alpha_{i,j_r} \;\; \cos\beta_{i,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} - u_i \\ v_{j_r} - v_i \end{bmatrix} - \\ &- E_{i,j_r}\, A_{i,j_r}\, \alpha_{T\,i,j_r}\, \Delta T_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Produkte osne togosti palice k_{i,j_r} in smernih kosinusov označimo z matriko $[K_{i,j_r}]$

$$[K_{i,j_r}] = k_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix} [\cos\alpha_{i,j_r} \;\; \cos\beta_{i,j_r}] = k_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_{i,j_r} & \cos\alpha_{i,j_r}\,\cos\beta_{i,j_r} \\ \cos\alpha_{i,j_r}\,\cos\beta_{i,j_r} & \cos^2\beta_{i,j_r} \end{bmatrix}. \tag{3.27}$$

Vidimo, da je $[K_{i,j_r}]$ **simetrična** matrika reda 2×2, ki je odvisna le od vrste materiala E_{i,j_r}, od geometrijskih karakteristik palice A_{i,j_r}, l_{i,j_r} in od njene lege v prostoru α_{i,j_r}, β_{i,j_r}. Imenujemo jo **togostna matrika palice**. Zapišimo še togostno matriko $[K_{j_r,i}]$ in pri tem upoštevamo enačbe (3.2)

$$[K_{j_r,i}] = k_{j_r,i} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha_{j_r,i} & \cos\alpha_{j_r,i}\,\cos\beta_{j_r,i} \\ \cos\alpha_{j_r,i}\,\cos\beta_{j_r,i} & \cos^2\beta_{j_r,i} \end{bmatrix} = [K_{i,j_r}]. \tag{3.28}$$

Vidimo, da sta simetrični matriki $[K_{j_r,i}]$ in $[K_{i,j_r}]$ enaki. Enačbo (3.27) vstavimo v (3.26)

$$\begin{bmatrix} N_{i,j_r\,X} \\ N_{i,j_r\,Y} \end{bmatrix} = [K_{i,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} - u_i \\ v_{j_r} - v_i \end{bmatrix} - E_{i,j_r}\, A_{i,j_r}\, \alpha_{T\,i,j_r}\, \Delta T_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

V ravnotežni enačbi za vozlišče i (enačba (3.23))

$$\sum_{r=1}^{n_i} [K_{i,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} - u_i \\ v_{j_r} - v_i \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^{n_i} E_{i,j_r}\, A_{i,j_r}\, \alpha_{T\,i,j_r}\, \Delta T_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

Če pomika vozlišča i ločimo od pomikov vozlišč j_r, dobimo

$$\sum_{r=1}^{n_i} [K_{i,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} \\ v_{j_r} \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^{n_i} [K_{i,j_r}] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^{n_i} E_{i,j_r}\, A_{i,j_r} \alpha_{T\,i,j_r}\, \Delta T_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Izraz, ki je pomnožen s pomikoma u_i in v_i, označimo s $[K_{i,i}]$

$$[K_{i,i}] = -\sum_{r=1}^{n_i} [K_{i,j_r}], \tag{3.32}$$

člen, v katerem nastopa sprememba temperature $\Delta T_{i,j_r}$ pa združimo s komponentama F_{ix} in F_{iy}

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{ix} \\ \bar{F}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix} - \sum_{r=1}^{n_i} E_{i,j_r}\, A_{i,j_r}\, \alpha_{T\,i,j_r}\, \Delta T_{i,j_r} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j_r} \\ \cos\beta_{i,j_r} \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Enačba (3.31) dobi zato naslednjo obliko

$$\boxed{\sum_{r=1}^{n_i} [K_{i,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} \\ v_{j_r} \end{bmatrix} + [K_{i,i}] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{ix} \\ \bar{F}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.} \tag{3.34}$$

3.1.3 Ravnotežni pogoji za vsa vozlišča

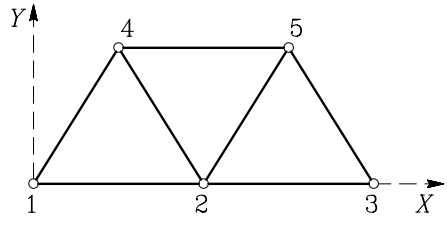
Celotno paličje je v ravnotežju, če je zadoščeno ravnotežnim enačbam (3.34) za vsa vozlišča paličja. Sistem ravnotežnih enačb označimo takole:

$$\boxed{[\,K\,][U] + [F] = [0].} \tag{3.35}$$

Pri tem vsebuje stolpec $[U]$ komponente pomikov vseh vozlišč konstrukcije, stolpec $[F]$ pa komponente zunanje vozliščne obtežbe celotne konstrukcije. Komponente pomikov in obtežbe so izražene glede na globalni koordinatni sistem X, Y, v katerem konstrukcijo opišemo. Matriko $[\,K\,]$ imenujemo **togostna matrika konstrukcije**.

3.1.4 Sestavljanje togostne matrike konstrukcije

Sestavljanje togostne matrike prikažimo na primeru paličja, ki ga prikazujemo na sliki 3.6.



Slika 3.6: Prikazano paličje je sestavljeno iz sedmih elementov in ima pet vozlišč

Za vsako vozlišče napišemo enačbe (3.34)

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [\ \emptyset\ ] & [K_{1,4}] & [\ \emptyset\ ] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [K_{2,3}] & [K_{2,4}] & [K_{2,5}] \\ [\ \emptyset\ ] & [K_{3,2}] & [K_{3,3}] & [\ \emptyset\ ] & [K_{3,5}] \\ [K_{4,1}] & [K_{4,2}] & [\ \emptyset\ ] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [\ \emptyset\ ] & [K_{5,2}] & [K_{5,3}] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{F}_{1X} \\ \bar{F}_{1Y} \\ \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \\ \bar{F}_{3X} \\ \bar{F}_{3Y} \\ \bar{F}_{4X} \\ \bar{F}_{4Y} \\ \bar{F}_{5X} \\ \bar{F}_{5Y} \end{bmatrix} . \tag{3.36}$$

Oznaka $[\,\emptyset\,]$ predstavlja podmatriko velikosti 2×2 z vsemi členi enakimi nič

$$[\ \emptyset\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Podmatrike izven diagonale določimo po enačbi (3.27), podmatrike na diagonali pa po enačbi (3.32)

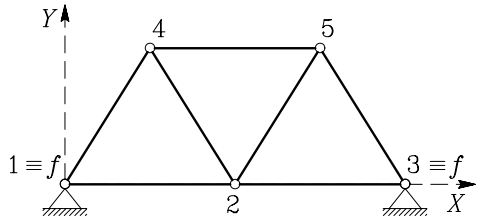
$$\begin{aligned} [K_{1,1}] &= -([K_{1,2}] + [K_{1,4}]), \\ [K_{2,2}] &= -([K_{2,1}] + [K_{2,3}] + [K_{2,4}] + [K_{2,5}]), \\ [K_{3,3}] &= -([K_{3,2}] + [K_{3,5}]), \\ [K_{4,4}] &= -([K_{4,1}] + [K_{4,2}] + [K_{4,5}]), \\ [K_{5,5}] &= -([K_{5,4}] + [K_{5,3}] + [K_{5,4}]). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Matrika sistema enačb (3.36) je zaradi (3.28) simetrična. Enačb pa ne moremo rešiti, ker je matrika $[\,K\,]$ **singularna**. Če namreč seštejemo vse enačbe sistema (3.36) je vsota enaka nič. Zato enačbe **niso neodvisne** in je matrika singularna. Sistem enačb lahko rešimo, če upoštevamo **robne pogoje**. To pomeni, da moramo preprečiti, da se paličje premika kot nepodprt sistem togih teles. Enačba (3.36) predstavlja ravnotežne enačbe za nepodprto paličje, ki se pod vplivom sil pospešeno premika. Zato ne moremo enolično izračunati pomikov v ravnotežni legi konstrukcije.

3.1.5 Robni pogoji

Nepomično podprta vozlišča

Na sliki 3.7 sta nepomično podprti vozlišči 1 in 3. Paličje je 1-krat statično nedoločeno.



Slika 3.7: Vozlišči 1 in 3 sta nepomično podprti

Za nepomično vozlišče f velja

$$u_f = v_f = 0. \tag{3.38}$$

Pomiki u_1, v_1, u_3 in v_3 so znani in so enaki nič. Zato 1., 2., 5. in 6. stolpec matrike v enačbi (3.36) množimo z nič in jih zato ni treba upoštevati. V ravnotežnih enačbah za 1. in 3. vozlišče nastopajo neznane reakcije, zato jih pri računu pomikov prostih vozlišč ne moremo uporabiti. Sistem enačb (3.36) spremenimo po naslednjem postopku: V matriki $[\,K\,]$ črtamo 1., 2., 5. in 6. stolpec ter 1., 2., 5. in 6. vrstico. Podobno črtamo v vektorju neznank in vektorju desne strani 1., 2., 5. in 6. člen. Sistem se je tako zmanjšal za dvakratno število nepomičnih podpor. Sistem enačb za podprto palično konstrukcijo je:

$$\begin{bmatrix} [K_{2,2}] & [K_{2,4}] & [K_{2,5}] \\ [K_{4,2}] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [K_{5,2}] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \\ \bar{F}_{4X} \\ \bar{F}_{4Y} \\ \bar{F}_{5X} \\ \bar{F}_{5Y} \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Reakcije, ki v nepomično podprtih vozliščih nastopajo, lahko izračunamo iz ravnotežnih enačb (3.34), če upoštevamo, da sta pomika obravnavanega vozlišča enaka nič in če odstranimo podporo in jo nadomestimo z reakcijama R_{fx} in R_{fy} (R_{fx} in R_{fy} upoštevamo kot zunanji sili)

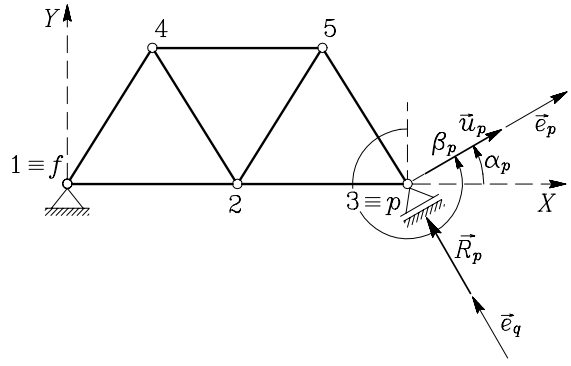
$$\sum_{r=1}^{n_f} [K_{f,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} \\ v_{j_r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{fX} \\ R_{fY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{fX} \\ \bar{F}_{fY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

n_f označuje število palic, ki so v vozlišču f povezane. Za vozlišče 1 na sliki 3.7 dobimo naslednji izraz za reakciji R_{1x} in R_{1y}

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} = -[K_{1,2}] \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - [K_{1,4}] \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{F}_{1X} \\ \bar{F}_{1Y} \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

Podpora dopušča pomik v dani smeri

Vozlišče p je podprto tako, da se lahko premika v smeri premice, podane z enotskim vektorjem $\vec{e}_p$ oziroma s kotom α_p. Enotski vektor, pravokoten na smer $\vec{e}_p$, označimo z $\vec{e}_q$. Pri idealno gladki podpori se smernica reakcije $\vec{R}_p$ ujema z vektorjem $\vec{e}_q$. Na sliki 3.8 je vozlišče 3 podprto s poševno pomično podporo.



Slika 3.8: Smer dovoljenega pomika v poševni pomični podpori p je podana z enotskim vektorjem $\vec{e}_p$

Enotska vektorja $\vec{e}_p$ in $\vec{e}_q$, reakcijo $\vec{R}_p$ in pomik $\vec{u}_p$ zapišimo glede na bazna vektorja $\vec{e}_X$ in $\vec{e}_Y$

$$\begin{aligned} \vec{e}_p &= \cos\alpha_p\,\vec{e}_X + \cos\beta_p\,\vec{e}_Y, & \vec{e}_q &= -\cos\beta_p\,\vec{e}_X + \cos\alpha_p\,\vec{e}_Y, \\ \vec{R}_p &= |\vec{R}_p|\,\vec{e}_q = R_{pX}\,\vec{e}_X + R_{pY}\,\vec{e}_Y, & \vec{u}_p &= |\vec{u}_p|\,\vec{e}_p = u_p\,\vec{e}_X + v_p\,\vec{e}_Y. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ravnotežni enačbi za vozlišče p dobimo, če upoštevamo enačbi (3.34)

$$\sum_{r=1}^{n_p} [K_{p,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} \\ v_{j_r} \end{bmatrix} + [K_{p,p}] \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{pX} \\ R_{pY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{pX} \\ \bar{F}_{pY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

n_p označuje število palic v vozlišču p. $\bar{F}_{pX}$ in $\bar{F}_{pY}$ sta komponenti zunanje obtežbe v vozlišču p, R_{pX} in R_{pY} pa komponenti reakcije $\vec{R}_p$ v tem vozlišču.

V ravnotežni enačbi za vozlišče p so 4 neznanke: u_p, v_p, R_{pX} in R_{pY}. Zato moramo upoštevati razen dveh ravnotežnih enačb še dve dodatni enačbi. To sta pogoj, da je reakcija $\vec{R}_p$ pravokotna na smer $\vec{e}_p$

$$\vec{R}_p \cdot \vec{e}_p = R_{pX}\,\cos\alpha_p + R_{pY}\,\cos\beta_p = 0 \tag{3.44}$$

ter pogoj, da je pomik vozlišča p v smeri enotskega vektorja $\vec{e}_q$ enak nič

$$\vec{u}_p \cdot \vec{e}_q = -u_p\,\cos\beta_p + v_p\,\cos\alpha_p = 0. \tag{3.45}$$

Za primer na sliki 3.8 dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} [K_{2,2}] & [K_{2,3}] & [K_{2,4}] & [K_{2,5}] & [\ \emptyset\ ] \\ [K_{3,2}] & [K_{3,3}] & [\ \emptyset\ ] & [K_{3,5}] & [\ I\ ] \\ [K_{4,2}] & [\ \emptyset\ ] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] & [\ \emptyset\ ] \\ [K_{5,2}] & [K_{5,3}] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] & [\ \emptyset\ ] \\ \langle\ \emptyset\ \rangle & \langle\ \emptyset\ \rangle & \langle\ \emptyset\ \rangle & \langle\ \emptyset\ \rangle & \cos\alpha_3\ \ \cos\beta_3 \\ \langle\ \emptyset\ \rangle & -\cos\beta_3\ \ \cos\alpha_3 & \langle\ \emptyset\ \rangle & \langle\ \emptyset\ \rangle & \langle\ \emptyset\ \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \\ \bar{F}_{3X} \\ \bar{F}_{3Y} \\ \bar{F}_{4X} \\ \bar{F}_{4Y} \\ \bar{F}_{5X} \\ \bar{F}_{5Y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

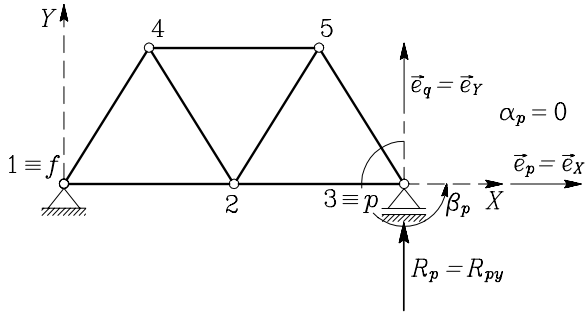
Oznaki $\langle\,\emptyset\,\rangle$ in $[\,I\,]$ imata naslednji pomen

$$\langle\ \emptyset\ \rangle = \langle\ 0\ \ 0\ \rangle, \qquad [\ I\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Reakciji v nepomično podprtem vozlišču 1 izračunamo iz enačbe (3.41). Vidimo, da je matrika sistema enačb (3.46) zaradi poševne podpore **nesimetrična**. To za reševanje sistema enačb ni ugodno. Temu se izognemo, če togostno matriko konstrukcije **kondenziramo** (glej primer 3.3).

Pomična podpora v smeri koordinatne osi

V primeru, ko je $\cos\alpha_p$ ali $\cos\beta_p$ enaka nič, vozlišče dopušča pomik v smeri ene od koordinatnih osi (slika 3.9).



Slika 3.9: Pomična podpora v smeri koordinatne osi

V primeru na sliki 3.9 je

$$\cos\alpha_p = 1, \qquad \cos\beta_p = 0, \qquad v_p = 0, \qquad R_{pX} = 0. \tag{3.48}$$

Za določitev dveh neznank u_p in R_{pY} zadostujeta enačbi, ki ju dobimo, če vrednosti za v_p in R_{pX} iz

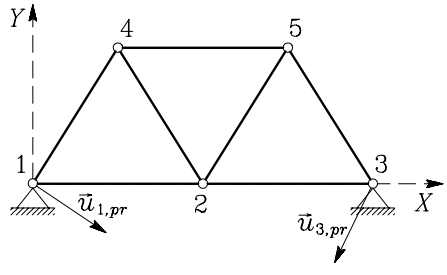
enačbe (3.48) vstavimo v ravnotežni enačbi (3.43)

$$\sum_{r=1}^{n_p} [K_{p,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} \\ v_{j_r} \end{bmatrix} + [K_{p,p}] \begin{bmatrix} u_p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R_{pY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{pX} \\ \bar{F}_{pY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

in dodatnih pogojev ni treba upoštevati. Ker nastopa v stolpcu neznank tudi reakcija v pomičnem vozlišču, je matrika konstrukcije nesimetrična. Temu se izognemo, če upoštevamo $v_p = 0$ tako, da črtamo ustrezno vrstico in stolpec ter reakcijo R_{pY} naknadno izračunamo (glej primer 7.2).

Predpisani pomiki vozlišč

Ob delovanju obtežbe na konstrukcijo se zaradi neenakomernih lastnosti temeljnih tal lahko podpore konstrukcije različno premaknejo. Predpisan pomik vozlišča k označimo z $\vec{u}_{k,pr}$. Predpisana pomika podpor v vozliščih 1 in 3 na sliki 3.10 označimo z $\vec{u}_{1,pr}$ in $\vec{u}_{3,pr}$.



Slika 3.10: Premika podpor v vozliščih 1 in 3 sta različna

Ker sta premika $\vec{u}_{1,pr}$ in $\vec{u}_{3,pr}$ predpisana, zapišemo ravnotežne enačbe (3.34) le za 2., 4., in 5. vozlišče, pomike vozlišč 1. in 3. pa zapišemo na desno stran enačbe

$$\begin{bmatrix} [K_{2,2}] & [K_{2,4}] & [K_{2,5}] \\ [K_{4,2}] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [K_{5,2}] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \end{bmatrix} - [K_{2,1}] \begin{bmatrix} u_{1,pr} \\ v_{1,pr} \end{bmatrix} - [K_{2,3}] \begin{bmatrix} u_{3,pr} \\ v_{3,pr} \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} \bar{F}_{4X} \\ \bar{F}_{4Y} \end{bmatrix} - [K_{4,1}] \begin{bmatrix} u_{1,pr} \\ v_{1,pr} \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} \bar{F}_{5X} \\ \bar{F}_{5Y} \end{bmatrix} - [K_{5,3}] \begin{bmatrix} u_{3,pr} \\ v_{3,pr} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

Reakcije v podporah 1. in 3. po izvršenem pomiku izračunamo iz ravnotežnega pogoja za 1. in 3. vozlišče po enačbah (3.34). Če ima vozlišče k predpisan pomik, zanj velja

$$\sum_{r=1}^{n_k} [K_{k,j_r}] \begin{bmatrix} u_{j_r} \\ v_{j_r} \end{bmatrix} + [K_{k,k}] \begin{bmatrix} u_{k,pr} \\ v_{k,pr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{kX} \\ R_{kY} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{kX} \\ \bar{F}_{kY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Z n_{pr} je označeno število palic v vozlišču pr. Za primer na sliki 3.10 dobimo

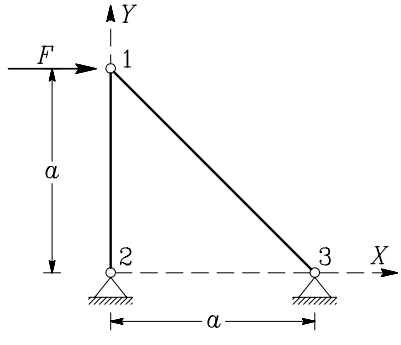
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}R_{1x}\\R_{1y}\end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix}\bar{F}_{1x}\\\bar{F}_{1y}\end{bmatrix} - [K_{1,1}]\begin{bmatrix}u_{1pr}\\v_{1pr}\end{bmatrix} - [K_{1,2}]\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix} - [K_{1,4}]\begin{bmatrix}u_4\\v_4\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}R_{3x}\\R_{3y}\end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix}\bar{F}_{3x}\\\bar{F}_{3y}\end{bmatrix} - [K_{3,2}]\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix} - [K_{3,3}]\begin{bmatrix}u_{3pr}\\v_{3pr}\end{bmatrix} - [K_{3,5}]\begin{bmatrix}u_5\\v_5\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ko sistem ravnotežnih enačb za celotno paličje rešimo, dobimo velikost pomikov in reakcij. Notranje sile v palicah izračunamo po enačbah (3.21).

S prikazano metodo lahko rešujemo tako statično določena kot statično nedoločena ravninska paličja.

3.1.6 Računski primeri

Primer 3.1 *Paličje na sliki 3.11 je v vozlišču 1 obteženo z vodoravno silo $F = 20\,\mathrm{MN}$. Elastični modul palic je $E = 2 \times 10^5\,\mathrm{MPa}$, ploščina prereza palic pa $A = 0.01\,\mathrm{m}^2$. Določimo pomika vozlišča 1, reakcije v podporah 2 in 3 ter sili v palicah! Dolžina a na sliki 3.11 je $a = 2\,\mathrm{m}$.*



Slika 3.11: Paličje sestavljata dve palici

Stopnjo statične nedoločenosti izračunamo po enačbi[†]

$$n = K - 2\,v_p - r_1 = 2 - 2 \cdot 1 = 0,$$

kjer je K je število palic, v_p je število prostih vozlišč, r_1 pa število pomično podprtih vozlišč. Konstrukcija je statično določena. Lastnosti palic zapišimo preglednico.

[†] M. Stanek, G. Turk, Statika I, Univerza v Ljubljani, 1996.

Tabela 3.1: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos\alpha_{i,j}$	$\cos\beta_{i,j}$	$E_{i,j}\,A_{i,j}/l_{i,j}$
$1,2$	2	0	-1	1000
$1,3$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	707

Ob upoštevanju vrednosti iz preglednice 3.1 in enačbe (3.28) lahko zapišemo togostni matriki za palici

$$[\,K_{1,2}\,] = [\,K_{2,1}\,] = 1000\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1000\end{bmatrix}$$

$$[\,K_{1,3}\,] = [\,K_{3,1}\,] = 707\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}354 & -354\\ -354 & 354\end{bmatrix}$$

Togostno matriko konstrukcije sestavimo s togostnimi matrikami posameznih palic. Za vozlišče 1 zapišemo (3.34), za vozlišči 2 in 3 pa (3.40)

$$\begin{bmatrix}[K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [K_{1,3}]\\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [\ \emptyset\ ]\\ [K_{3,1}] & [\ \emptyset\ ] & [K_{3,3}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}F\\ 0\\ R_{2X}\\ R_{2Y}\\ R_{3X}\\ R_{3Y}\end{bmatrix}.$$

Podmatrike $[K_{i,i}]$ so sestavljene iz togostnih matrik posameznih palic in jih izračunamo z enačbami (3.32)

$$[K_{1,1}] = -([K_{1,2}] + [K_{1,3}]), \qquad [K_{2,2}] = -[K_{2,1}], \qquad [K_{3,3}] = -[K_{3,1}],$$

$$[\,K_{1,1}\,] = \begin{bmatrix}-354 & 354\\ 354 & -1354\end{bmatrix}, \qquad [\,K_{2,2}\,] = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1000\end{bmatrix}, \qquad [\,K_{3,3}\,] = \begin{bmatrix}-354 & 354\\ 354 & -1354\end{bmatrix}.$$

Zapišimo enačbo konstrukcije:

$$\begin{bmatrix}-354 & 354 & 0 & 0 & 354 & -354\\ 354 & -1354 & 0 & 1000 & -354 & 354\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1000 & 0 & -1000 & 0 & 0\\ 354 & -354 & 0 & 0 & -354 & 354\\ -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & -354\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}20\\ 0\\ R_{2X}\\ R_{2Y}\\ R_{3X}\\ R_{3Y}\end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

Matrika v tej enačbi je singularna, kar pomeni, da se konstrukcija pod vplivom obtežbe premika. To je razumljivo, saj še nismo upoštevali, da so nekateri pomiki preprečeni. Ker so pomiki u_2, v_2, u_3 in v_3 enaki nič

$$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0, \tag{3.54}$$

pri množenju togostne matrike s stolpcem rešitve ni treba upoštevati zadnjih štirih stolpcev v togostni matriki. Zadnje štiri enačbe v sistemu uporabimo za račun neznanih reakcij in jih zato ne moremo uporabiti za račun pomikov u_1 in v_1. Zato iz sistema enačb (3.53) prepišemo le prvi dve enačbi in upoštevamo le prva dva stolpca. Togostna matrika konstrukcije sedaj ni singularna. Dobimo sistem enačb, iz katerega lahko izračunamo neznane pomike:

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ta sistem enačb rešimo in izračunamo neznana pomika

$$u_1 = 0.0765\,\mathrm{m}, \qquad v_1 = 0.02\,\mathrm{m}.$$

Iz zadnjih štirih vrstic v enačbi konstrukcije (3.53) lahko izračunamo tudi reakcije podpor v točkah 2 in 3

$$\begin{aligned} -R_{2X} &= 0\,u_1 + 0\,v_1 & \rightarrow \quad R_{2X} &= 0\,\mathrm{MN}, \\ -R_{2Y} &= 0\,u_1 + 1000\,v_1 & \rightarrow \quad R_{2Y} &= -20\,\mathrm{MN}, \\ -R_{3X} &= 354\,u_1 - 354\,v_1 & \rightarrow \quad R_{3X} &= -20\,\mathrm{MN}, \\ -R_{3Y} &= -354\,u_1 + 354\,v_1 & \rightarrow \quad R_{3Y} &= 20\,\mathrm{MN}. \end{aligned}$$

Reakcije bi lahko izračunali istočasno z neznanimi pomiki. Pri tem moramo enačbo konstrukcije (3.53) preoblikovati tako, da upoštevamo znane vrednosti pomikov v vozliščih 2 in 3 (enačba (3.54)), stolpec neznank pa sestavljajo pomika u_1, v_1 in reakcije R_{2X}, R_{2Y}, R_{3X}, R_{3Y}

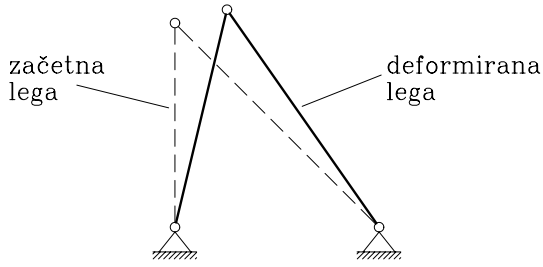
$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 354 & -1354 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -354 & 354 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema da enake rezultate za neznane pomike točke 1 in neznane reakcije v točkah 2 in 3. Ta način računa je manj primeren kot prvi, ko smo iz sistema enačb (3.53) črtali vrstice in stolpce. Sistem, ki ga moramo rešiti je namreč večji, matrika sistema je nesimetrična, kar lahko oteži numerično reševanje.

Izračunamo osne sile v palicah po enačbi (3.20)

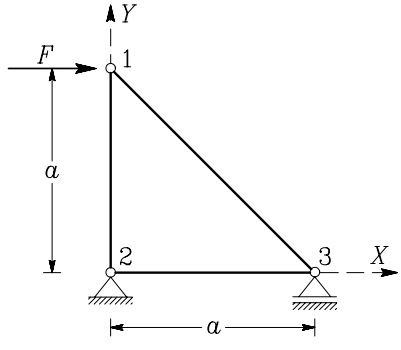
$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 1000\,[\,(0 - 0.0765\,)\,0 + (0 - 0.02)(-1)\,] = 20\,\mathrm{MN}, \\ N_{1,3} &= 707\,[\,(0 - 0.0765\,)\,0.707 + (0 - 0.02)(-0.707)\,] = -28.3\,\mathrm{MN}. \end{aligned}$$

Sila $N_{1,2}$ je natezna, sila $N_{1,3}$ pa je tlačna. Za vsako vozlišče paličja bi lahko zapisali ravnotežne enačbe in ugotovili, ali je ravnotežje zadoščeno. Ker je konstrukcija statično določena, lahko osne sile v palicah in reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev in ni treba upoštevati deformiranja konstrukcije. Na sliki 3.12 je prikazana deformirana oblika paličja. Prikazani pomiki so zaradi preglednosti povečani za 10-krat.



Slika 3.12: Deformirana oblika paličja

Primer 3.2 *Paličje na sliki 3.13 je obteženo z vodoravno silo* $F = 20\,\mathrm{MN}$. *Elastični modul palic je* $E = 2 \times 10^5\,\mathrm{MPa}$, *ploščina prereza palic pa* $A = 0.01\,\mathrm{m}^2$. *Določimo pomike vozlišč 1 in 3, reakcije v podporah 2 in 3 ter sile v palicah! Dolžina* a *na sliki 3.13 je* $a = 2\,\mathrm{m}$.



Slika 3.13: Paličje sestavljajo tri palice, desna podpora je drsna

Ugotovimo najprej stopnjo statične nedoločenosti konstrukcije (3 palice, 1 prosto in 1 pomično podprto vozlišče)

$$n = 3 - 2 \cdot 1 - 1 = 0.$$

Konstrukcija je statično določena. Lastnosti vseh palic zapišimo v preglednico 3.2.

Tabela 3.2: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos\alpha_{i,j}$	$\cos\beta_{i,j}$	$E_{i,j}\,A_{i,j}\,/\,l_{i,j}$
$1,2$	2	0	-1	1000
$1,3$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\,/\,2$	$-\sqrt{2}\,/\,2$	707
$2,3$	2	1	0	1000

Togostni matriki za dve palici smo izračunali že pri prejšnji nalogi

$$[\,K_{1,2}\,] = [\,K_{2,1}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, \qquad [\,K_{1,3}\,] = [\,K_{3,1}\,] = \begin{bmatrix} 354 & -354 \\ -354 & 354 \end{bmatrix}.$$

Togostno matriko tretje palice pa moramo še izračunati

$$[\,K_{2,3}\,] = [\,K_{3,2}\,] = 1000 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Togostno matriko konstrukcije sestavimo iz togostnih matrik posameznih palic kot pri prejšnji nalogi. Za vozlišče 1 zapišemo (3.34), za vozlišči 2 (3.40), za vozlišče 3 pa (3.49)

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [K_{1,3}] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [K_{2,3}] \\ [K_{3,1}] & [K_{3,2}] & [K_{3,3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix}.$$

Izračunati moramo še podmatrike $[K_{i,i}]$ (enačba (3.32))

$$[K_{1,1}] = -([K_{1,2}] + [K_{1,3}]), \quad [K_{2,2}] = -([K_{2,1}] + [K_{2,3}]), \quad [K_{3,3}] = -([K_{3,1}] + [K_{3,2}]),$$

$$[\,K_{1,1}\,] = \begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix}, \quad [\,K_{2,2}\,] = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix}, \quad [\,K_{3,3}\,] = \begin{bmatrix} -1354 & 354 \\ 354 & -354 \end{bmatrix}.$$

Enačba konstrukcije je:

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & -354 \\ 354 & -1354 & 0 & 1000 & -354 & 354 \\ 0 & 0 & -1000 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & 1000 & 0 & -1354 & 354 \\ -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & -354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ 0 \\ R_{3Y} \end{bmatrix}. \tag{3.55}$$

Ker so pomiki u_2, v_2 in v_3 enaki nič, v enačbi konstrukcije (3.55) črtamo tretjo, četrto in zadnjo vrstico ter ustrezne stolpce. Tako dobimo enačbo konstrukcije, pri kateri smo upoštevali podpore

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 \\ 354 & -1354 & -354 \\ 354 & -354 & -1354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz sistema enačb izračunamo neznane pomike

$$u_1 = 0.0965\,\mathrm{m}, \quad v_1 = 0.02\,\mathrm{m}, \quad u_3 = 0.02\,\mathrm{m}.$$

Vidimo, da je pomik u_1 večji od pomika u_1 iz prejšnje naloge. To smo pričakovali, saj smo eno podporo sprostili. Iz vrstic, ki smo jih prej črtali, lahko izračunamo velikosti reakcij

$$\begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1000 & 0 \\ -354 & 354 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0965 \\ 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Tudi pri tej nalogi lahko izračunamo neznane pomike in reakcije iz enačb, ki jih dobimo iz (3.55), če upoštevamo, da so pomiki u_2, v_2 in v_3 znani, reakcije R_{2X}, R_{2Y} in R_{3Y} pa neznane

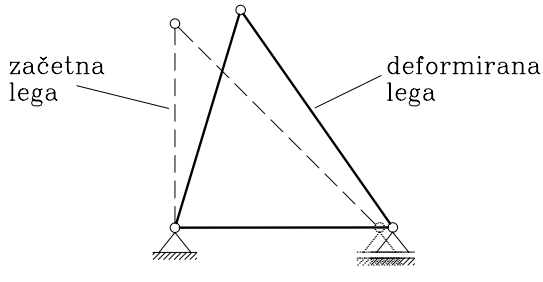
$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & 0 \\ 354 & -1354 & 0 & 0 & -354 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & 0 & 0 & -1354 & 0 \\ -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ u_3 \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Če ta sistem rešimo, dobimo enake rezultate za neznane pomike in reakcije kot prej.

Določimo še osne sile v palicah (enačba (3.20))

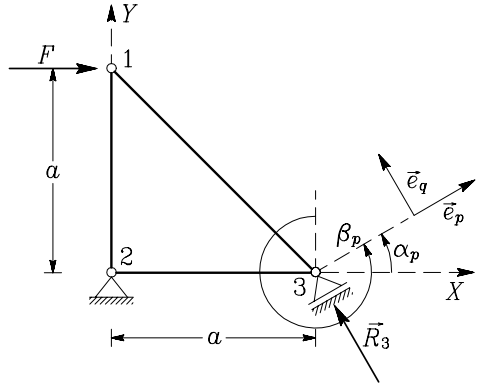
$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 1000\,[\,(0-0.0965)\,0 + (0-0.02)(-1)\,] = 20\,\mathrm{MN}, \\ N_{1,3} &= 707\,[\,(0.02-0.0965)\,0.707 + (0-0.02)\,(-0.707)\,] = -28.3\,\mathrm{MN}, \\ N_{2,3} &= 1000\,[\,(0.02-0)\,1\,] = 20\,\mathrm{MN}. \end{aligned}$$

Sili $N_{1,2}$ in $N_{2,3}$ sta natezni, sila $N_{1,3}$ pa je tlačna. Na sliki 3.14 je prikazana deformirana oblika paličja.



Slika 3.14: Deformirana oblika paličja

Primer 3.3 *Paličje na sliki 3.15 je obteženo z vodoravno silo $F = 20\,\mathrm{MN}$. Elastični modul palic je $E = 2 \times 10^5\,\mathrm{MPa}$, ploščina prereza palic pa $A = 0.01\,\mathrm{m}^2$. Določimo pomike vozlišč 1 in 2, reakcije v podporah 2 in 3 ter sile v palicah! Dolžina a na sliki 3.15 je $a = 2\,\mathrm{m}$.*



Slika 3.15: Vozlišče 3 je podprto s poševno drsno podporo

Konstrukcija je, podobno kot pri prejšnji nalogi, statično določena. Za vse tri palice napišimo preglednico 3.3.

Tabela 3.3: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos\alpha_{i,j}$	$\cos\beta_{i,j}$	$E_{i,j}\,A_{i,j}\,/\,l_{i,j}$
$1,2$	2	0	-1	1000
$1,3$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\,/\,2$	$-\sqrt{2}\,/\,2$	707
$2,3$	2	1	0	1000

Togostno matriko konstrukcije sestavimo s togostnimi matrikami posameznih palic. Za vozlišče 1 zapišemo (3.34), za vozlišči 2 (3.40), za vozlišče 3 pa (3.43)

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [K_{1,3}] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [K_{2,3}] \\ [K_{3,1}] & [K_{3,2}] & [K_{3,3}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix}.$$

Togostne matrike za vse palice smo izračunali že pri prejšnji nalogi

$$[\,K_{1,2}\,] = [\,K_{2,1}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, \qquad [\,K_{1,3}\,] = [\,K_{3,1}\,] = \begin{bmatrix} 354 & -354 \\ -354 & 354 \end{bmatrix},$$

$$[\,K_{2,3}\,] = [\,K_{3,2}\,] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\,K_{1,1}\,] = \begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix},$$

$$[\,K_{2,2}\,] = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix}, \qquad [\,K_{3,3}\,] = \begin{bmatrix} -1354 & 354 \\ 354 & -354 \end{bmatrix}.$$