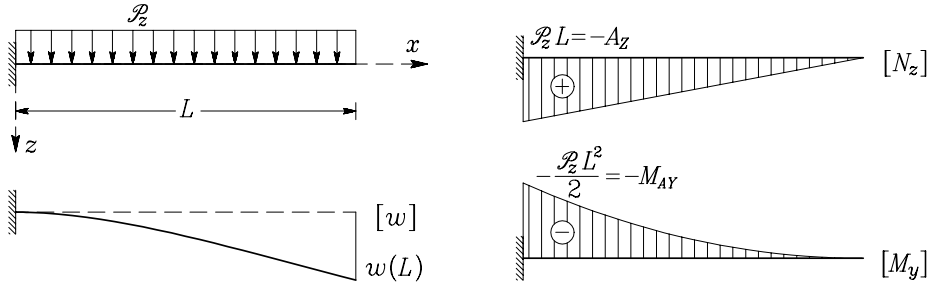
PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

c) Upogibnica konzole obtežene s konstantno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$




Pomik in zasuk:

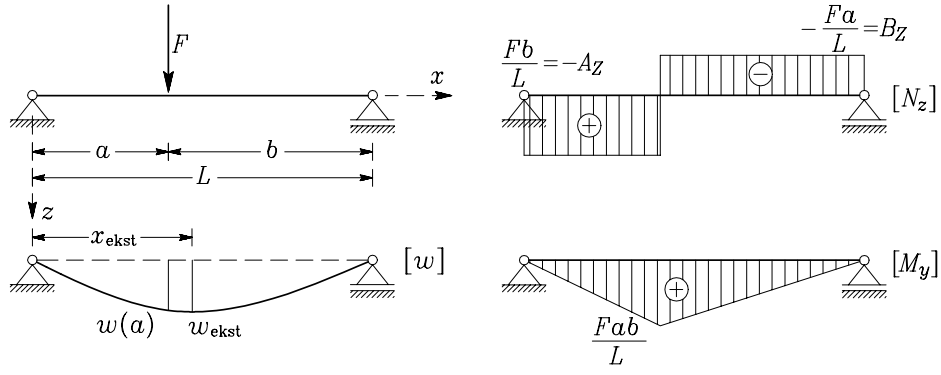
$$w = \frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{24\, E\, I_y}(6\, L^2 - 4\, x\, L + x^2), \quad \omega_y = -\frac{\mathscr{P}_z}{6\, E\, I_y}(3\, x\, L^2 - 3\, x^2 L + x^3).$$

Pomik in zasuk pri $x = L$:

$$w(L) = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{8\, E\, I_y}, \quad \omega_y(L) = -\frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{6\, E\, I_y}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

d) Upogibnica prostoležečega nosilca obteženega s silo $F$




Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{F\,b\,x}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - b^2 - x^2), \quad \omega_{y1} = -\frac{F\,b}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - b^2 - 3\,x^2).$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{F}{6\,L\,E\,I_y}(\,b\,x(L^2 - b^2 - x^2) + L(x-a)^3),$$

$$\omega_{y2} = -\frac{F}{6\,L\,E\,I_y}(\,b(L^2 - b^2 - 3\,x^2) + 3\,L(x-a)^2).$$

Pomik pri $x = a$ ter zasuki pri $x = 0$, $x = a$ in $x = L$:

$$w(a) = \frac{F\,a^2\,b^2}{3\,L\,E\,I_y},$$

$$\omega_y(0) = -\frac{F\,a\,b}{6\,L\,E\,I_y}(L+b), \quad \omega_y(a) = \frac{F\,a\,b}{3\,L\,E\,I_y}(a-b), \quad \omega_y(L) = \frac{F\,a\,b}{6\,L\,E\,I_y}(L+a).$$

Največji pomik, če je $a > b$:

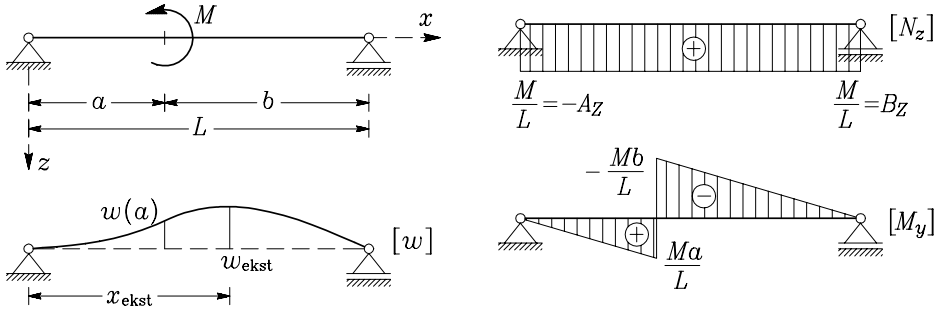
$$x_{\text{ekst}} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{F\,b}{3\,L\,E\,I_y}\sqrt{\left(\frac{L^2 - b^2}{3}\right)^3}.$$

Največji pomik, če je $a < b$:

$$x_{\text{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{L^2 - a^2}{3\,L^2}}\right), \quad w_{\text{ekst}} = \frac{F\,a}{3\,L\,E\,I_y}\sqrt{\left(\frac{L^2 - a^2}{3}\right)^3}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

e) Upogibnica prostoležečega nosilca obteženega z momentom $M$




Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{M\,x}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,b^2 - x^2), \quad \omega_{y1} = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,b^2 - 3\,x^2).$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{M}{6\,L\,E\,I_y}\left(x(L^2 - 3\,b^2 - x^2) + 3\,L(x-a)^2\right),$$

$$\omega_{y2} = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}\left(L^2 - 3\,b^2 - 3\,x^2 + 6\,L(x-a)\right).$$

Pomik pri $x = a$ ter zasuki pri $x = 0$, $x = a$ in $x = L$:

$$w(a) = \frac{M\,a\,b}{3\,L\,E\,I_y}(a-b), \quad \omega_y(0) = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,b^2),$$

$$\omega_y(a) = \frac{M}{3\,L\,E\,I_y}(a^2 - a\,b + b^2), \quad \omega_y(L) = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,a^2),$$

Če je $a = L\sqrt{3}/3$, potem je $\omega_y(L) = 0$.

Ekstremni pomik, če je $a > b$:

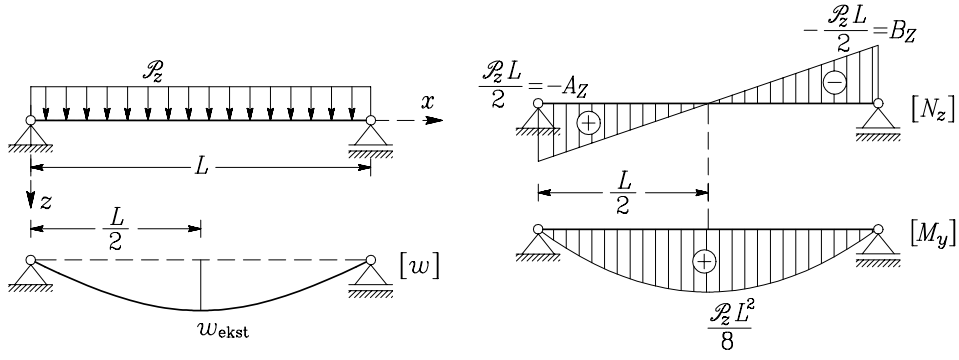
$$x_{\text{ekst}} = \sqrt{\frac{L^2 - 3\,b^2}{3}}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{M}{3\,L\,E\,I_y}\sqrt{\left(\frac{L^2 - 3\,b^2}{3}\right)^3}.$$

Ekstremni pomik, če je $a < b$:

$$x_{\text{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{L^2 - 3\,a^2}{3\,L^2}}\right), \quad w_{\text{ekst}} = -\frac{M}{3\,L\,E\,I_y}\sqrt{\left(\frac{L^2 - 3\,a^2}{3}\right)^3}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

f) Upogibnica prostoležečega nosilca obteženega s konstantno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$




Pomik in zasuk:

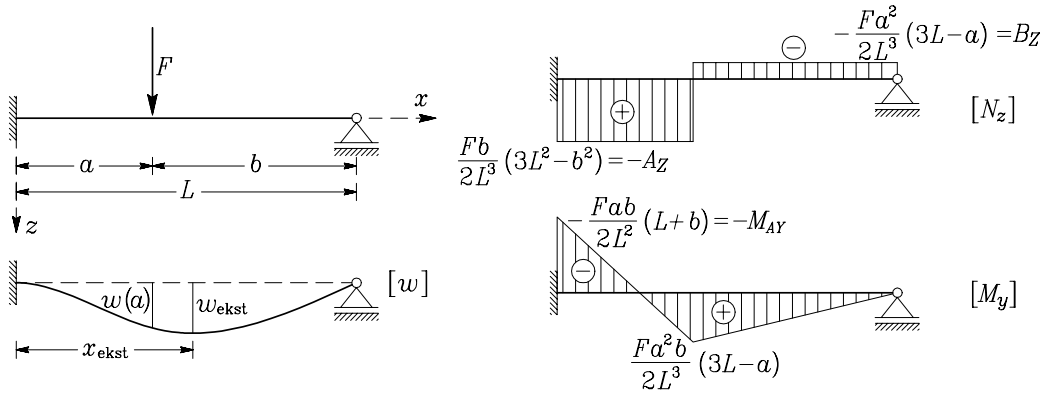
$$w = \frac{\mathscr{P}_z\, x}{24\, E\, I_y}(L^3 - 2\, L\, x^2 + x^3), \quad \omega_y = -\frac{\mathscr{P}_z}{24\, E\, I_y}(L^3 - 6\, L\, x^2 + 4\, x^3).$$

Največji pomik ter zasuka pri $x = 0$ in $x = L$:

$$x_{\text{ekst}} = \tfrac{L}{2}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{5\, \mathscr{P}_z L^4}{384\, E\, I_y}, \quad \omega_y(0) = -\frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{24\, E\, I_y}, \quad \omega_y(L) = \frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{24\, E\, I_y}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

g) Upogibnica enkrat statično nedoločenega nosilca obteženega s silo $F$




Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{F\,b\,x^2}{12\,L^3\,E\,I_y}\left(3a\,L(L+b) - x(3\,L^2 - b^2)\right),$$

$$\omega_{y1} = -\frac{F\,b\,x}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2a\,L(L+b) - x(3\,L^2 - b^2)\right).$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{F}{12\,L^3\,E\,I_y}\left(3\,a\,b\,L\,x^2(L+b) - b\,x^3(3\,L^2 - b^2) + 2\,L^3(x-a)^3\right),$$

$$\omega_{y2} = -\frac{F}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2\,a\,b\,L\,x(L+b) - b\,x^2(3\,L^2 - b^2) + 2\,L^3(x-a)^2\right).$$

Pomik pri $x = a$ ter zasuk pri $x = L$:

$$w(a) = \frac{F\,a^3\,b^2}{12\,L^3\,E\,I_y}(3L+b),$$

$$\omega_y(a) = \frac{F\,a^2\,b}{4\,L^3\,E\,I_y}(a^2 - 2\,b^2), \quad \omega_y(L) = \frac{F\,a^2\,b}{4\,L\,E\,I_y}.$$

Največji pomik, če je $a > (2-\sqrt{2})L = 0.5858\,L$:

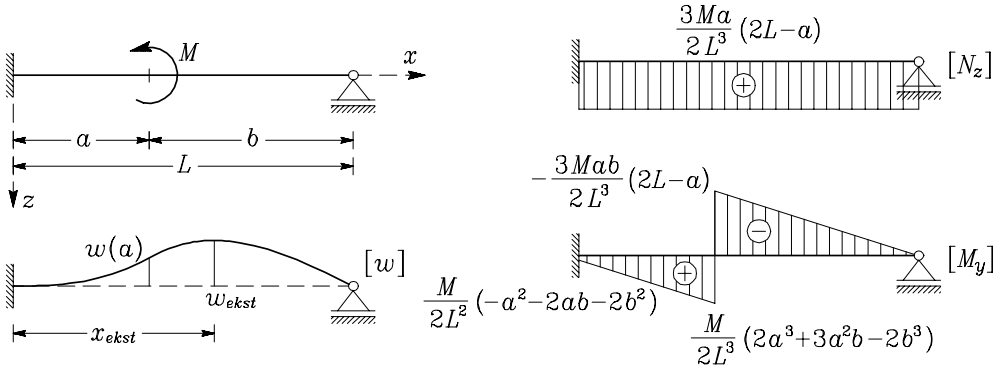
$$x_{\text{ekst}} = \frac{3\,a\,L(L+b)}{3\,L^2 - b^2}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{F\,a^3\,b}{3\,E\,I_y}\frac{(b+L)^3}{(3\,L^2 - b^2)^2}.$$

Največji pomik, če je $a < (2-\sqrt{2})L$:

$$x_{\text{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{b}{b+2\,L}}\right), \quad w_{\text{ekst}} = \frac{F\,a^2\,b}{6\,E\,I_y}\sqrt{\frac{b}{b+2\,L}}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

h) Upogibnica enkrat statično nedoločenega nosilca obteženega z momentom $M$




Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{M\,x^2}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(a^3 + 3\,a^2\,b - 2\,b^3 + (a-2\,L)a\,x\right),$$

$$\omega_{y1} = -\frac{M\,x}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2(a^3 + 3\,a^2\,b - 2\,b^3) + 3\,(a-2\,L)a\,x\right.$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{M\,a}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2\,a\,L^3 - 4\,L^3\,x - 3\,L(a-2\,L)x^2 + (a-2\,L)x^3\right),$$

$$\omega_{y2} = \frac{M\,a}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(4\,L^3 + 6\,L(a-2\,L)x - 3\,(a-2\,L)x^2\right).$$

Pomik in zasuk pri $x = a$ ter zasuk pri $x = L$:

$$w(a) = \frac{M\,a^2\,b}{4\,L^3\,E\,I_y}(a^2 - 2\,b^2),$$

$$\omega_y(a) = \frac{M\,a}{4\,L^3\,E\,I_y}(a^3 + 4\,b^3), \quad \omega_y(L) = -\frac{M\,a}{4\,L\,E\,I_y}(2\,b - a).$$

Pri $a_{\text{mej}} = 0.582925\,L$ je $|w_{1,\text{ekst}}| = |w_{2,\text{ekst}}|$.
Ekstremni pomik, če je $a > a_{\text{mej}}$:

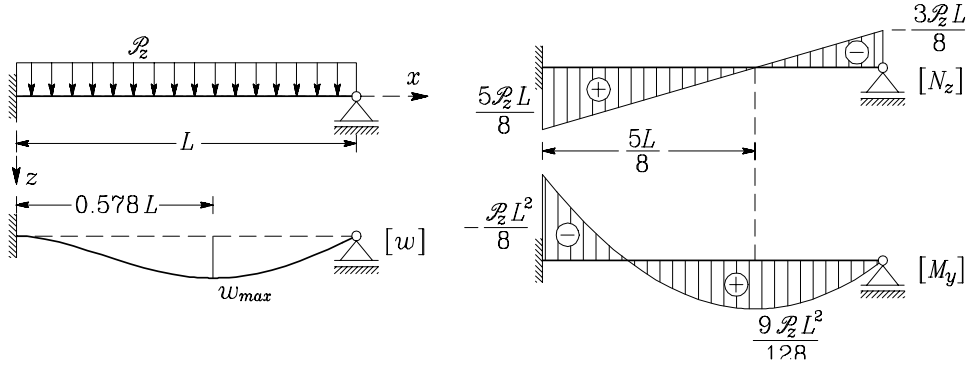
$$x_{\text{ekst}} = \frac{2\,L(2\,b^2 - 2\,a\,b - a^2)}{3\,a(a-2\,L)}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{M}{27\,a^2\,(a+2\,b)^2\,E\,I_y}(a^2 + 2\,a\,b - 2\,b^2)^3.$$

Ekstremni pomik, če je $a < a_{\text{mej}}$:

$$x_{\text{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{2\,b-a}{3(2\,b+a)}}\right), \quad w_{\text{ekst}} = -\frac{M\,a}{18\,L\,E\,I_y}\sqrt{\frac{3(2\,b-a)^3}{2\,b+a}}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

i) Upogibnica enkrat statično nedoločenega nosilca pri konstantni linijski obtežbi $\mathscr{P}_z$




Pomik in zasuk v polju:

$$w = \frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{48\, E\, I_y}(3\, L^2 - 5\, L\, x + 2\, x^2), \quad \omega_y = -\frac{\mathscr{P}_z\, x}{48\, E\, I_y}(6\, L^2 - 15\, L\, x + 8\, x^2).$$

Zasuk pri $x = L$:

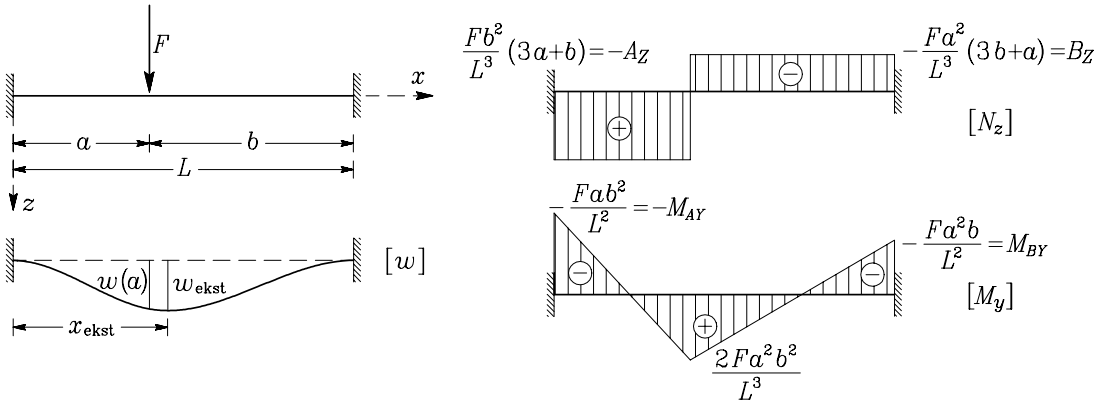
$$\omega_y(L) = \frac{\mathscr{P}_z\, L^3}{48\, E\, I_y}.$$

Največji pomik:

$$x_{\text{ekst}} = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} L = 0.57846\, L, \quad w_{\text{ekst}} = 0.0054161 \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{E\, I_y}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

j) Upogibnica trikrat statično nedoločenega nosilca obteženega s silo $F$




Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{F\,b^2\,x^2}{6\,L^3\,E\,I_y}\,(\,3a\,L - x(b+3\,a)\,)\,, \quad \omega_{y1} = -\frac{F\,b^2\,x}{2\,L^3\,E\,I_y}\,(\,2a\,L - x(b+3\,a)$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{F\,(L-x)^2 a^2}{6\,L^3\,E\,I_y}\,(\,-L\,a + x\,(a+3\,b)\,)\,, \quad \omega_{y2} = \frac{F\,a^2\,(L-x)}{2\,L^3\,E\,I_y}\,\big(\,-L^2 + x\,(a+3\,b)\,\big)\,,$$

Pomik in zasuk pri $x = a$:

$$w(a) = \frac{F\,a^3\,b^3}{3\,L^3\,E\,I_y}, \quad \omega_y(a) = -\frac{F\,a^2\,b^2}{2\,L^3\,E\,I_y}(b-a).$$

Največji pomik, če je $a > b$:

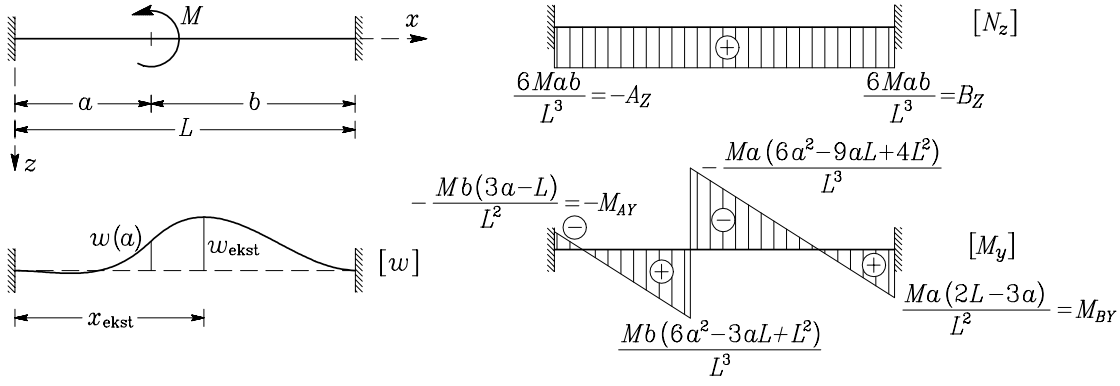
$$x_{\text{ekst}} = \frac{2\,a\,L}{b+3\,a}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{2\,F\,a^3\,b^2}{3\,E\,I_y(3\,a+b)^2}.$$

Največji pomik, če je $a < b$:

$$x_{\text{ekst}} = \frac{L^2}{a+3\,b}, \quad w_{\text{ekst}} = \frac{2\,F\,a^2\,b^3}{3\,E\,I_y(a+3\,b)^2}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

k) Upogibnica trikrat statično nedoločenega nosilca obteženega z momentom $M$




Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{M\,b\,x^2}{2\,L^3\,E\,I_y}\,(\,(2\,a-b)\,L-2\,a\,x\,)\,,\quad \omega_{y1} = -\frac{M\,b\,x}{L^3\,E\,I_y}\,(\,(2\,a-b)\,L-3\,a\,x\,)\,,$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = -\frac{M\,a\,(L-x)^2}{2\,L^3\,E\,I_y}(-a\,L+2\,b\,x),\quad \omega_{y2} = -\frac{M\,a\,(L-x)}{L^3\,E\,I_y}(-L^2+3\,b\,x),$$

Pomik in zasuk pri $x = a$:

$$w(a) = \frac{M\,a^2\,b^2\,(a-b)}{2\,L^3\,E\,I_y},\quad \omega_y(a) = \frac{M\,b\,a}{L^3\,E\,I_y}(a^2-a\,b+b^2).$$

Ekstremni pomik, če je $a > b$:

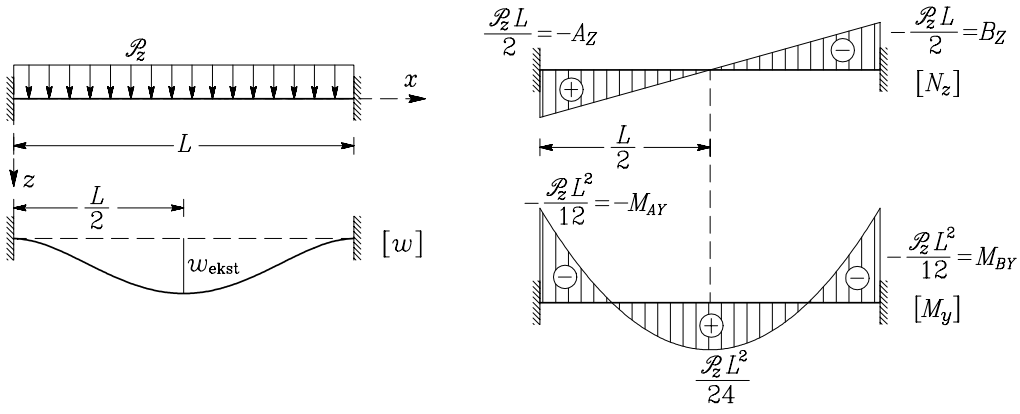
$$x_{\text{ekst}} = \frac{(2\,a-b)\,L}{3\,a},\quad w_{\text{ekst}} = \frac{M\,(2\,a-b)^3\,b}{54\,a^2\,E\,I_y}.$$

Ekstremni pomik, če je $a < b$:

$$x_{\text{ekst}} = \frac{L^2}{3\,b},\quad w_{\text{ekst}} = -\frac{M\,(2\,b-a)^3\,a}{54\,b^2\,E\,I_y}.$$

PREGLEDNICA 1.5 (nadaljevanje): Upogibnice in notranje sile za nekatere nosilce

l) Upogibnica trikrat statično nedoločenega nosilca pri konstantni linijski obtežbi $\mathscr{P}_z$



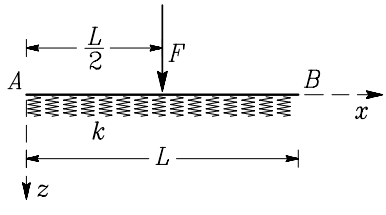

Pomik in zasuk v polju:

$$w = \frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{24\, E\, I_y}(L - x)^2, \qquad \omega_y = -\frac{\mathscr{P}_z\, x}{12\, E\, I_y}(L - x)(L - 2\, x).$$

Največji pomik:

$$x_{\text{ekst}} = \frac{L}{2}, \qquad w_{\text{ekst}} = \frac{\mathscr{P}_z\, L^4}{384\, E\, I_y}.$$

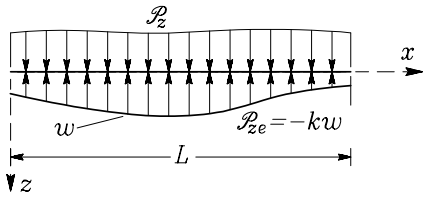
**Primer 1.10** *Določimo upogibnico nosilca na elastični podlagi, prikazanega na sliki 1.35! Obtežba na nosilec je sila $F$ na sredini nosilca. Togost elastične podlage je $k = 8000\,\mathrm{kN/m^2}$, togost nosilca je $E\, I_y = 1333.3\,\mathrm{kNm^2}$, dolžina nosilca je $L = 2\,\mathrm{m}$, sila pa je $F = 40\,\mathrm{kN}$.*




Slika 1.35: Točkovna sila na nosilcu na elastični podlagi

Če je nosilec položen na elastično podlago in je obtežba podlage $\mathscr{P}_{ze}$ na nosilec premosorazmerna pomikom $w$ nosilca: $\mathscr{P}_{ze} = -k\, w$, potem je celotna navpična obtežba $\mathscr{P}_{zc}$ na nosilec enaka (slika 1.36)

$$\mathscr{P}_{zc} = \mathscr{P}_z - k\, w. \tag{1.125}$$




Slika 1.36: Na nosilec deluje poleg navpične obtežbe $\mathscr{P}_z$ še obtežba podlage $\mathscr{P}_{ze} = -k\,w$

Podobno velja za primer, ko je elastična podlaga postavljena v smeri osi $y$

$$\mathscr{P}_{yc} = \mathscr{P}_y - k\,v. \tag{1.126}$$

Če v drugi in tretji od enačb (1.86) namesto $\mathscr{P}_y$ in $\mathscr{P}_z$ upoštevamo $\mathscr{P}_{yc}$ in $\mathscr{P}_{zc}$, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\left(E\,I_z\,\frac{d^2v}{dx^2}\right) &= \mathscr{P}_y - k_y\,v - \frac{d\mathscr{M}_z}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}(E\,I_z\,\alpha_T\,\Delta T_y), \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(E\,I_y\,\frac{d^2w}{dx^2}\right) &= \mathscr{P}_z - k_z\,w + \frac{d\mathscr{M}_y}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}(E\,I_y\,\alpha_T\,\Delta T_z). \end{aligned} \tag{1.127}$$

Če v drugi izmed enačb (1.127) upoštevamo, da sta $\mathscr{M}_y$ in $\Delta T_z$ enaka nič, dobimo †

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{1}{E\,I_y}\,(\mathscr{P}_z - k\,w) \quad \rightarrow \quad E\,I_y\,\frac{d^4w}{dx^4} + k\,w = \mathscr{P}_z.$$

V obravnavanem primeru je $\mathscr{P}_z = 0$ in sledi:

$$E\,I_y\frac{d^4w}{dx^4} + k\,w = 0.$$

Nosilec vzdolž osi nima prečne obtežbe razen na sredini, kjer deluje točkovna sila. Nosilec zato obravnavamo v dveh delih. Za oba dela predpostavimo rešitev diferencialne enačbe, z upoštevanjem robnih pogojev ter kinematičnih in statičnih pogojev za del nosilca v okolici prijemališča sile izračunamo integracijske konstante. Rešitev diferencialne enačbe za prvi del (levo od sile $F$) zapišemo z izrazom ‡

$$w_1 = e^{\beta\,x}\,(A_1\,\cos\beta\,x + B_1\,\sin\beta\,x) + e^{-\beta\,x}\,(C_1\,\cos\beta\,x + D_1\,\sin\beta\,x), \tag{1.128}$$

za drugi del (desno od sile $F$) pa s podobnim izrazom

$$w_2 = e^{\beta\,x}\,(A_2\,\cos\beta\,x + B_2\,\sin\beta\,x) + e^{-\beta\,x}\,(C_2\,\cos\beta\,x + D_2\,\sin\beta\,x), \tag{1.129}$$

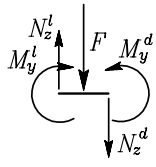
† Za upoštevanje izključitve natezne napetosti med nosilcem in podlago glej:
M.S. Kaschiev, K. Mikhajlov, A beam resting on a tensionless Winkler foundation, Computers & Structures, Vol. 55, No. 2, str. 261-264, 1995.

‡ I.N. Bronštejn, K.A. Semendjajev, G. Musiol, H. Mühlig, Matematični priročnik, str. 380, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1997.

kjer je $\beta = \sqrt[4]{k/4\,E\,I_y} = 1.107\,\mathrm{m}^{-1}$.

**Robni pogoji in pogoji na mestu delovanje sile:**

Robni pogoji na obeh krajiščih so enaki: upogibni moment in prečna sila sta enaki nič. Pogoji na mestu delovanja sile so: pomik in zasuk morata biti na obeh straneh prijemališča sile enaka. Ravnotežje za majhen del nosilca okoli prijemališča sile mora biti zagotovljeno (slika 1.37).




Slika 1.37: Del nosilca v okolici prijemališča sile

Te pogoje zapišemo z enačbami:

$$
\begin{aligned}
&x = 0: \quad M_y = -E\,I_y \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0,\\
&x = 0: \quad N_z = -E\,I_y \frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0,\\
&x = \frac{L}{2}: \quad w_1 = w_2,\\
&x = \frac{L}{2}: \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx},\\
&x = \frac{L}{2}: \quad M_y^l = M_y^d \;\rightarrow\; -E\,I_y \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -E\,I_y \frac{d^2 w_2}{dx^2} \;\rightarrow\; \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2},\\
&x = \frac{L}{2}: \quad -N_z^l + F + N_z^d = 0 \;\rightarrow\; E\,I_y \frac{d^3 w_1}{dx^3} + F - E\,I_y \frac{d^3 w_2}{dx^3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^3 w_1}{dx^3} - \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \frac{F}{E\,I_y} = 0,\\
&x = L: \quad M_y = -E\,I_y \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0,\\
&x = L: \quad N_z = -E\,I_y \frac{d^3 w_2}{dx^3} = 0 \;\rightarrow\; \frac{d^3 w_2}{dx^3} = 0.
\end{aligned}
\tag{1.130}
$$

Odvode izrazov (1.128) in (1.129) vstavimo v robne pogoje (1.130) in dobimo sistem osmih nelinearnih enačb za osem neznank $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ in $D_2$:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 2.449 & 0 & -2.449 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-2.711 & 2.711 & 2.711 & 2.711 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1.354 & 2.704 & 0.148 & 0.296 & -1.354 & -2.704 & -0.148 & -0.296\\
-1.495 & 4.491 & -0.491 & -0.163 & 1.495 & -4.491 & 0.491 & 0.163\\
-6.624 & 3.316 & 0.724 & -0.363 & 6.624 & -3.316 & -0.724 & 0.363\\
-11.001 & -3.661 & -0.400 & 1.203 & 11.001 & 3.661 & 0.400 & -1.203\\
0 & 0 & 0 & 0 & -17.936 & -13.426 & 0.214 & 0.160\\
0 & 0 & 0 & 0 & -4.991 & -34.707 & -0.415 & 0.060
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} A_1\\ B_1\\ C_1\\ D_1\\ A_2\\ B_2\\ C_2\\ D_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0.03\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix},
$$

katerega rešitev je:

$$A_1 = 0.001248, \quad B_1 = 0.0004666, \quad C_1 = 0.0003145, \quad D_1 = 0.0004666,$$
$$A_2 = 0.00002024, \quad B_2 = 0.00005810, \quad C_2 = -0.003422, \quad D_2 = 0.01169.$$

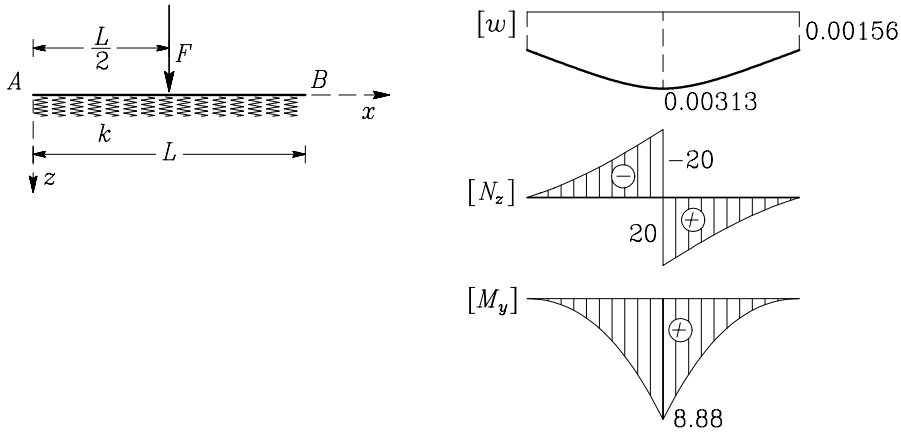
Izraz za pomike za levi del nosilca je

$$w_1 = e^{1.107\,x}\,(0.001248\,\cos(1.107\,x) + 0.0004666\,\sin(1.107\,x)) +$$
$$+\, e^{-1.107\,x}\,(0.0003145\,\cos(1.107\,x) + 0.0004666\,\sin(1.107\,x)),$$

za desni del nosilca pa je

$$w_2 = e^{1.107\,x}\,(0.00002024\,\cos(1.107\,x) + 0.00005810\,\sin(1.107\,x)) +$$
$$+\, e^{-1.107\,x}\,(-0.003422\,\cos(1.107\,x) + 0.01169\,\sin(1.107\,x)).$$

Upogibni moment $M_y$ in prečno silo $N_z$ izračunamo po enačbah (1.81) in (1.83). Upogibnico ter diagram prečnih sil in upogibnih momentov prikazujemo na sliki 1.38.

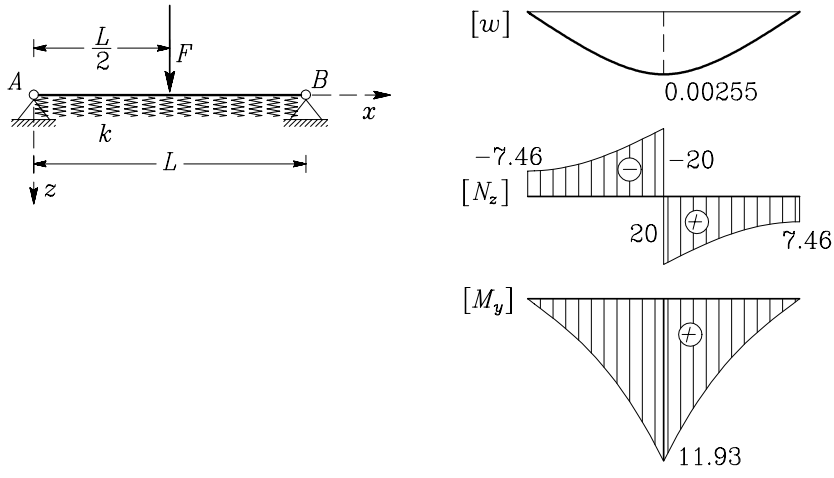



Slika 1.38: Pomiki in notranje sile za nosilec brez točkovnih podpor

Podobno izračunamo tudi primer, ko sta obe krajišči nepomično podprti. V tem primeru robna pogoja pri $x = 0$ oziroma $x = L$ zahtevata, da sta pomik v smeri osi $z$ in upogibni moment $M_y$ enaka nič:

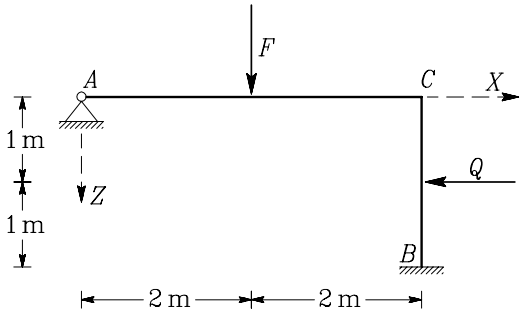
$$x = 0: \quad w_1 = 0, \quad M_y = -E\,I_y \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0,$$
$$x = L: \quad w_2 = 0, \quad M_y = -E\,I_y \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0.$$

Kinematični in ravnotežni pogoji pri $x = L/2$ so enaki, kot v prejšnjem primeru. Zaradi drugačnih robnih pogojev so pomiki in notranje sile nekoliko drugačne. Rezultate prikazujemo na sliki 1.39.




Slika 1.39: Pomiki in notranje sile za nosilec s točkovnimi podporami

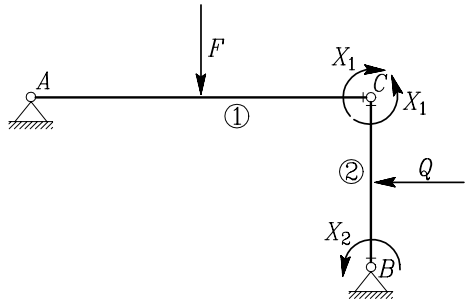
**Primer 1.11** *Za konstrukcijo na sliki 1.40 določimo reakcije in diagram upogibnih momentov! Upogibna togost je vzdolž osi nosilca konstantna $E\,I_y =$ konst., velikosti sil sta $F = 40$ kN in $Q = 100$ kN. Pri računu bomo vpliv osnih sil zanemarili.*




Slika 1.40: Geometrija in obtežba preprostega okvirja

Stopnja statične nedoločenosti konstrukcije je $n = 3 + 2 - 3 = 2$. Nalogo rešimo tako, da statično nedoločeno konstrukcijo spremenimo v statično določeno. To naredimo tako, da v statično nedoločeno konstrukcijo uvedemo $n$ dodatnih **sprostitev** oziroma **prostostnih stopenj**. Uvedba dodatnih prostostnih stopenj pomeni, da na izbranih mestih **odstranimo podpore** oziroma **sprostimo vezi**. Vpliv odstranjenih podpor oziroma vezi moramo **nadomestiti s statično enakovrednimi nadomestnimi silami** $X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, katerih vrednosti še ne poznamo. Sile $X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ so **zunanje** sile na statično določeni konstrukciji. Pri uvajanju dodatnih prostostnih stopenj imamo mnogo možnosti. Dodatne prostostne stopnje moramo uvesti tako, da je determinanta sistema ravnotežnih enačb za statično določeno konstrukcijo različna od nič. To pomeni, da mora biti spremenjena konstrukcija taka, da se pri poljubni obtežbi noben njen del ne more premikati kot togo telo.

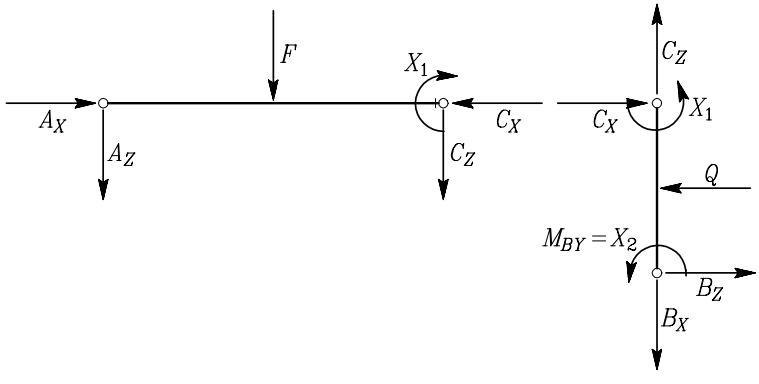
V obravnavanem primeru statično določeno konstrukcijo tvorimo tako, da v točki $C$ sprostimo medsebojni zasuk med vodoravnim (nosilec 1) in navpičnim nosilcem (nosilec 2), v podpori $B$ pa sprostimo zasuk (slika 1.41). Na mestih uvedenih sprostitev uvedemo nadomestna momenta $X_1$ in $X_2$. Moment $X_2$ je vpetostni moment $M_{BY}$ podpore $B$.




Slika 1.41: Statično določena konstrukcija

Neznanki $X_1$ in $X_2$ izračunamo iz kinematičnih pogojev. V obravnavanem primeru kinematična pogoja zahtevata, da sta zasuka prvega in drugega nosilca v točki $C$ enaka ter da je zasuk v točki $B$ enak nič (slika 1.42):

$$\omega_{y1}(L_1) = \omega_{y2}(0), \qquad \omega_{y2}(L_2) = 0. \tag{1.131}$$




Slika 1.42: Obravnavamo dva statično določena nosilca

Na sliki 1.42 vidimo, da sta oba nosilca obtežena na enak način kot prostoležeči nosilci, obremenjeni s silama $F$ in $Q$ ter momentoma $X_1$ in $X_2$. Velikosti zasukov za prostoležeči nosilec smo zapisali v preglednici 1.5d in 1.5e:

$$
\begin{aligned}
E\,I_y\,\omega_y(L_1) &= \frac{F\,a_1\,b_1\,(L_1+a_1)}{6\,L_1} + \frac{L_1^2-3\,L_1^2}{6\,L_1}\,X_1,\\
E\,I_y\,\omega_y(0) &= -\frac{Q\,a_2\,b_2\,(L_2+b_2)}{6\,L_2} - \frac{L_2^2-3\,L_2^2}{6\,L_2}\,X_1 - \frac{L_2^2}{6\,L_2}\,X_2,\\
E\,I_y\,\omega_y(L_2) &= \frac{Q\,a_2\,b_2\,(L_2+b_2)}{6\,L_2} - \frac{L_2^2}{6\,L_2}\,X_1 - \frac{L_2^2-3\,L_2^2}{6\,L_2}\,X_2.
\end{aligned}
\tag{1.132}
$$

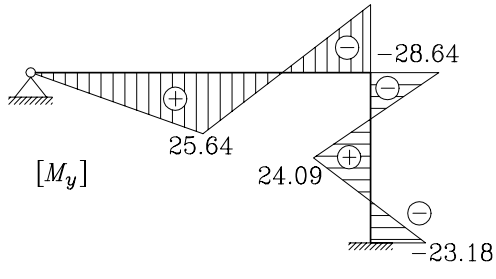
Izraze (1.132) vstavimo v (1.131) in dobimo sistem dveh linearnih enačb za neznanki $X_1$ in $X_2$, katerega rešitev je:

$$X_1 = 28.64\,\mathrm{kNm}, \qquad X_2 = -23.18\,\mathrm{kNm}.$$

Reakcije nosilca na sliki 1.42 izračunamo iz ravnotežnih enačb

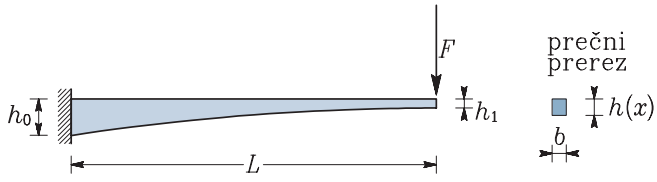
$$
\begin{aligned}
&\sum_{AC} M_y^C = 0: && A_Z = \frac{X_1 - F\,b_1}{L_1} = -12.84\,\mathrm{kN},\\
&\sum_{AC} M_y^A = 0: && C_Z = -\frac{X_1 + F\,a_1}{L_1} = -27.16\,\mathrm{kN},\\
&\sum_{BC} M_y^B = 0: && C_X = \frac{X_1 + X_2 + Q\,b_2}{L_2} = 52.73\,\mathrm{kN},\\
&\sum_{BC} M_y^C = 0: && B_X = \frac{-X_1 - X_2 + Q\,a_2}{L_2} = 47.27\,\mathrm{kN},\\
&\sum_{AC} X = 0: && A_X = C_X = 52.73\,\mathrm{kN},\\
&\sum_{BC} Z = 0: && B_Z = C_Z = -27.16\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

Vpetostni moment $M_{BY} = X_2 = -23.18$ kNm. Diagram upogibnih momentov izračunamo tako, da konstrukcijo v vsakem polju razrežemo na dva dela in zapišemo ravnotežne enačbe za levi ali desni del. Diagram prikazujemo na sliki 1.43.




Slika 1.43: Upogibni momenti na statično nedoločeni konstrukciji

**Primer 1.12** *Določimo pomike na prostem koncu konzolnega nosilca s spremenljivim prečnim prerezom, prikazanem na sliki 1.44! Na prostem koncu deluje navpična sila* $F = 4\,\mathrm{kN}$. *Dolžina nosilca je enaka* $L = 10\,\mathrm{m}$. *Prečni prerez je pravokotne oblike s konstantno širino* $b = 0.2\,\mathrm{m}$, *višina prereza* $h$ *pa se spreminja po kvadratni paraboli. Višina nosilca v vpetišču pri* $x = 0$ *je* $h(0) = h_0 = 1.0\,\mathrm{m}$, *višina nosilca na prostem koncu pri* $x = 10\,\mathrm{m}$ *pa je* $h(10) = h_1 = 0.25\,\mathrm{m}$. *Na prostem koncu je odvod višine nosilca* $h(x)$ *po* $x$ *enak nič. Elastični modul materiala je* $E = 2000\,\mathrm{kN/cm^2}$.




Slika 1.44: Višina prereza se spreminja po kvadratni paraboli

Določimo najprej funkcijo $h(x)$! Splošna enačba kvadratne parabole je

$$h(x) = A + B\,x + C\,x^2,$$

kjer so $A$, $B$ in $C$ konstante, ki jih moramo določiti. Zato zapišemo tri enačbe

$$\begin{aligned} h(0) &= h_0 = 1 = A, \\ h(10) &= h_1 = 0.25 = A + 10\,B + 100\,C, \\ \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=10} &= 0 = B + 20\,C. \end{aligned}$$

Zgornje tri enačbe predstavljajo sistem treh linearnih enačb s tremi neznanimi parametri $A$, $B$ in $C$, katere rešitev je

$$A = 1.0\,\mathrm{m}, \qquad B = -0.15, \qquad C = 0.0075\,\mathrm{m}^{-1}.$$

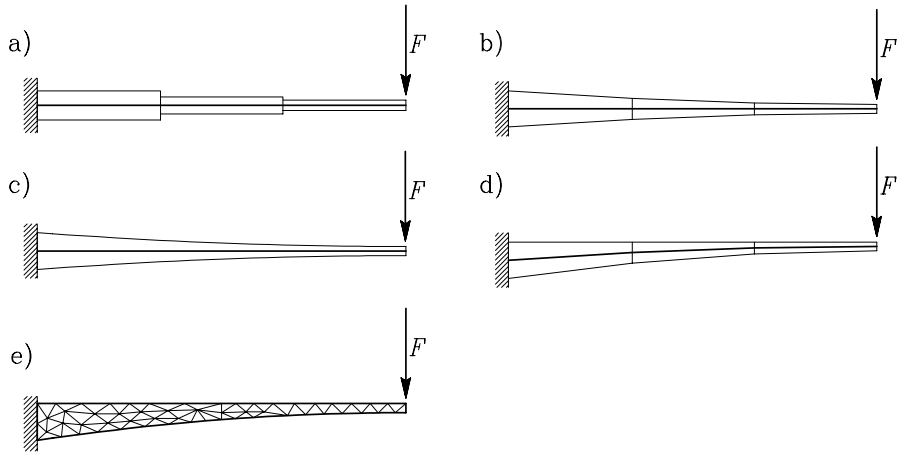
Funkcijo višine prečnega prereza $h(x)$ lahko sedaj zapišemo takole:

$$h(x) = 1 - 0.15\,x + 0.0075\,x^2.$$

Pomike na prostem koncu konzole določimo s petimi različnimi računskimi modeli (sliki 1.45).

V prvih treh predpostavimo, da je os nosilca ravna in vodoravna, spreminjanje prereza pa v prvih dveh približno opišemo z odsekoma konstantnim prerezom ter odsekoma linearno spreminjajočo višino prereza. V tretjem modelu upoštevamo kvadratno spreminjajočo višino prereza. V četrtem modelu spreminjajočo višino aproksimiramo z linearno funkcijo, os nosilca pa je lomljena tako, da je os vedno v sredini višine prečnega prereza. S petim modelom preverimo natančnost prvih štirih, saj z metodo končnih

elementov[†] za ravninsko napetostno stanje določimo pomike in napetosti v obravnavani konstrukciji. Na sliki 1.45 prikazujemo vseh pet računskih modelov. V prvem, drugem in četrtem modelu nosilec s spremenljivo višino razdelimo na tri nosilce.




Slika 1.45: Računski modeli nosilca s spremenljivim prerezom
a) Odsekoma konstantni prerez - ravna os
b) Odsekoma linearni prerez - ravna os
c) Kvadratno spreminjajoči prerez - ravna os
d) Odsekoma linearni prerez - odsekoma ravna os
e) Metoda končnih elementov - ravninsko napetostno stanje

V modelu z odsekoma konstantnimi prerezi moramo določiti višine $h_{ki}, i = 1, 2, 3$ za tri odseke, kar lahko naredimo na več načinov. Določimo jih lahko kot povprečje višin v določenem odseku po enačbi:

$$
\begin{aligned}
h_{k1} &= \frac{1}{L/3} \int_0^{L/3} h(x)\, dx = 0.7778\ \mathrm{m}, \\
h_{k2} &= \frac{1}{L/3} \int_{L/3}^{2L/3} h(x)\, dx = 0.4444\ \mathrm{m}, \\
h_{k3} &= \frac{1}{L/3} \int_{2L/3}^{L} h(x)\, dx = 0.2778\ \mathrm{m},
\end{aligned}
\tag{1.133}
$$

vendar se izkaže, da je nekoliko bolje, da višine določimo tako, da so vztrajnostni momenti $I_{y,ki}, i = 1, 2, 3$ enaki povprečnim vztrajnostnim momentom v določenem odseku:

[†] T.J.R. Hughes, The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis, Englewood Cliffs, Prentice–Hall, 1987.

$$
\begin{aligned}
h_{k1} &= \left( \frac{1}{L/3} \int\limits_{0}^{L/3} h^3(x)\, dx \right)^{1/3} = 0.7961\ \mathrm{m}, \\
h_{k2} &= \left( \frac{1}{L/3} \int\limits_{L/3}^{2L/3} h^3(x)\, dx \right)^{1/3} = 0.4561\ \mathrm{m}, \\
h_{k3} &= \left( \frac{1}{L/3} \int\limits_{2L/3}^{L} h^3(x)\, dx \right)^{1/3} = 0.2800\ \mathrm{m}.
\end{aligned}
\tag{1.134}
$$

Tudi parametre odsekoma linearne funkcije lahko določimo na več načinov. Najpreprosteje to naredimo tako, da izračunamo vrednosti $h(x)$ na mejah med odseki in te točke povežemo z ravnimi črtami:

$$
\begin{aligned}
&h_{l0} = h(0) = 1\ \mathrm{m}, \quad h_{l1} = h(L/3) = 0.5833\ \mathrm{m}, \\
&h_{l2} = h(2L/3) = 0.3333\ \mathrm{m}, \quad h_{l3} = h(L) = 0.25\ \mathrm{m}.
\end{aligned}
\tag{1.135}
$$

V tem primeru so prerezi v povprečju nekoliko preveliki in so zato pomiki nekoliko podcenjeni. Bolje je, da parametre $h_{li}, i = 0, 1, 2, 3$ določimo tako, da sta ploščina in težišče aproksimiranega nosilca enaka nosilcu prave oblike. Za prvi odsek dobimo naslednji sistem enačb za račun višin $h_{l0}$ in $h_{l1}$:

$$
\int\limits_{0}^{L/3} (1 - 0.15\, x + 0.0075\, x^2)\, dx = (h_{l0} + h_{l1}) \frac{L}{6}, \qquad \int\limits_{0}^{L/3} x\, (1 - 0.15\, x + 0.0075\, x^2)\, dx = (h_{l0} + 2\, h_{l1}) \frac{L^2}{54}.
$$

Višine drugega in tretjega odseka izračunamo iz pogoja, da sta ploščini nosilca z linearno aproksimacijo robu ter s kvadratično mejo robu enaki:

$$
h_{l0} = 0.9861\ \mathrm{m}, \quad h_{l1} = 0.5694\ \mathrm{m}, \quad h_{l2} = 0.3194\ \mathrm{m}, \quad h_{l3} = 0.2361\ \mathrm{m}. \tag{1.136}
$$

Ob upoštevanju ravne osi nosilca je upogibni moment linearna funkcija koorinate $x$:

$$
M_y(x) = F\, (L - x).
$$

Pomike določimo na osnovi enačbe (1.80)

$$
\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{E\, I_y(x)}.
$$

Zgornja enačba je navadna diferencialna enačba drugega reda, ki jo je razmeroma preprosto rešiti z dvakratnim integriranjem:

$$
\frac{dw}{dx} = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_0} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\, I_y(\bar{x})} d\bar{x}
$$

in

$$w(x) = w(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{dw}{dx} d\bar{x}.$$

Za določitev zasukov in pomikov torej potrebujemo vrednosti na začetku integracijskega območja. Za prvi odsek vemo, da sta tako pomik kot zasuk pri $x = x_0 = 0$ enaka nič. Za naslednja dva odseka pa za vrednosti pri $x = x_0$ vzamemo vrednosti na koncu prejšnjega odseka. Določimo enačbo upogibnice za odsekoma konstantni prerez.

**Model A: Odsekoma konstantni prerez**

Višine odsekov po enačbah (1.134).

Odsek 1 za $0 < x < L/3$:

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw_1}{dx} = 0 - \int_{0}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\, I_y(\bar{x})} d\bar{x} = 0.0002378\, x - 0.00001189\, x^2,$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_1(x) = 0 + \int_{0}^{x} \frac{dw_1}{d\bar{x}} d\bar{x} = 0.0001189\, x^2 - 0.000003964\, x^3.$$

Zasuk in pomik na koncu prvega odseka pri $x = L/3$ sta

$$\left.\frac{dw_1}{dx}\right|_{x=L/3} = 0.0006606, \quad w_1(L/3) = 0.001174\,\mathrm{m}.$$

Odsek 2 za $L/3 < x < 2L/3$:

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw_2}{dx} = 0.0006606 - \int_{L/3}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\, I_y(\bar{x})} d\bar{x} = -0.002853 + 0.001265\, x - 0.00006324\, x^2,$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_2(x) = 0.001174 + \int_{L/3}^{x} \frac{dw_2}{d\bar{x}} d\bar{x} = 0.004438 - 0.002853\, x + 0.0006324\, x^2 - 0.00002108\, x^3.$$

Zasuk in pomik na koncu drugega odseka pri $x = 2L/3$ sta

$$\left.\frac{dw_2}{dx}\right|_{x=2L/3} = 0.002769, \quad w_2(2L/3) = 0.007280\,\mathrm{m}.$$

Odsek 3 za $2L/3 < x < L$:

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw_3}{dx} = 0.002769 - \int\limits_{2\,L/3}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\,I_y(\bar{x})} d\bar{x} = -0.02152 + 0.005465\,x - 0.0002733\,x^2,$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_3(x) = 0.007280 + \int\limits_{2\,L/3}^{x} \frac{dw_3}{d\bar{x}} d\bar{x} = 0.05629 - 0.02152\,x + 0.002733\,x^2 - 0.00009108\,x^3.$$

Zasuk in pomik na koncu tretjega odseka pri $x = L$ sta

$$\left.\frac{dw_3}{dx}\right|_{x=L} = 0.005805, \quad w_3(L) = 0.02326\,\mathrm{m}.$$

Če višine $h_{ki}$ izračunamo po enačbi (1.133) je pomik na koncu konzole enak $w_3(L) = 0.02471$ m.

**Model B: Odsekoma linearni prerez**

Višine odsekov po enačbah (1.136).

Odsek 1 za $0 < x < L/3$:

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw_1}{dx} = 0 - \int\limits_{0}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\,I_y(\bar{x})} d\bar{x} = \frac{0.0008830\ (8.820 - x)\ x}{(-7.889 + x)^2},$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_1(x) = 0 + \int\limits_{0}^{x} \frac{dw_1}{d\bar{x}} d\bar{x} = 0.01187 + \frac{0.006485}{7.889 - x} - 0.0008830\,x - 0.006144\,\ln(7.889 - x).$$

Zasuk in pomik na koncu prvega odseka pri $x = L/3$ sta

$$\left.\frac{dw_1}{dx}\right|_{x=L/3} = 0.0007782, \quad w_1(L/3) = 0.001032\,\mathrm{m}.$$

Odsek 2 za $L/3 < x < 2L/3$:

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw_2}{dx} = 0.0007782 - \int_{L/3}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\,I_y(\bar{x})} d\bar{x} = \frac{0.002740\ (10.44 - x)\ (-1.029 + x)}{(-10.93 + x)^2},$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_2(x) = 0.001174 + \int_{L/3}^{x} \frac{dw_2}{d\bar{x}} d\bar{x} =$$
$$= 0.06956 + \frac{0.01317}{-10.93 + x} - 0.002740\,x - 0.02844\ \ln(10.93 - x).$$

Zasuk in pomik na koncu drugega odseka pri $x = 2L/3$ sta

$$\left.\frac{dw_2}{dx}\right|_{x=2L/3} = 0.003213, \quad w_2(2L/3) = 0.006985\,\mathrm{m}.$$

Odsek 3 za $2L/3 < x < L$:

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw_3}{dx} = 0.003213 - \int_{2\,L/3}^{x} \frac{M_y(\bar{x})}{E\,I_y(\bar{x})} d\bar{x} = \frac{0.03468\ (12.62 - x)\ (-4.125 + x)}{(-19.44 + x)^2},$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_3(x) = 0.007280 + \int_{2\,L/3}^{x} \frac{dw_3}{d\bar{x}} d\bar{x} =$$
$$= 2.479 - 0.03468\,x + \frac{3.627}{-19.44 + x} - 0.7680\ \ln(19.44 - x).$$

Zasuk in pomik na koncu tretjega odseka pri $x = L$ sta

$$\left.\frac{dw_3}{dx}\right|_{x=L} = 0.005980, \quad w_3(L) = 0.02337\,\mathrm{m}.$$

Če višine $h_{li}$ izračunamo po enačbi (1.135) je pomik na koncu konzole enak $w(L) = 0.02124\,\mathrm{m}$.

**Model C: Kvadratno spreminjajoči prerez**

Zasuk izračunamo po naslednji enačbi

$$\frac{dw}{dx} = 0 - \int_0^x \frac{M_y(\bar{x})}{E\,I_y(\bar{x})} d\bar{x} = \frac{0.0004\,(20-x)\,\left(1.070\cdot 10^{-16}+x\right)\,\left(266.7-20\,x+x^2\right)}{\left(133.3-20\,x+x^2\right)^2}$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$\begin{aligned} w(x) &= 0 + \int_0^x \frac{dw}{d\bar{x}} d\bar{x} = \\ &= 0.02735 - 0.0004\,x + \frac{-1.067+0.1067\,x}{133.3-20\,x+x^2} - \\ &- 0.01848\,\mathrm{arctg}\,(1.732-0.1732\,x). \end{aligned}$$

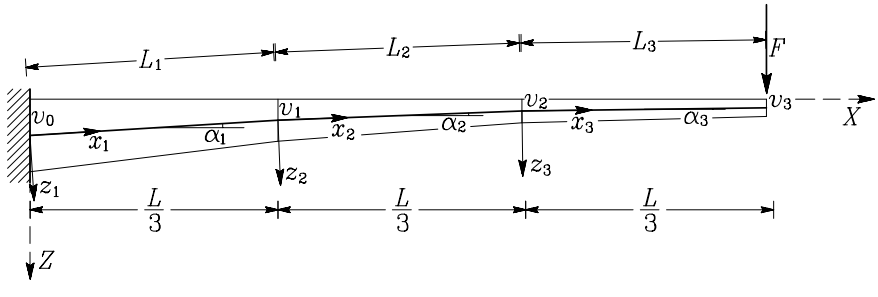
Zasuk in pomik na koncu nosilca pri $x = L$ sta

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = 0.00600, \quad w(L) = 0.02335\,\mathrm{m}.$$

**Model D: Odsekoma linearni prerez – lomljena os**

Vpeljimo globalni koordinatni sistem $X, Z$, os $x$ lokalnega koordinatnega sistema pa naj sovpada z osjo nosilca, ki poteka po sredini višine prečnega prereza. Oddaljenosti osi od zgornjega roba izračunamo z naslednjimi izrazi (glej enačbe (1.136) in sliko 1.46):

$$v_0 = \frac{h_{l0}}{2} = \frac{0.9861}{2} = 0.4931\,\mathrm{m}, \qquad v_1 = \frac{h_{l1}}{2} = \frac{0.5694}{2} = 0.2847\,\mathrm{m},$$
$$v_2 = \frac{h_{l2}}{2} = \frac{0.3194}{2} = 0.1597\,\mathrm{m}, \qquad v_3 = \frac{h_{l3}}{2} = \frac{0.2361}{2} = 0.1181\,\mathrm{m}.$$




Slika 1.46: Odsekoma linearen prerez - odsekoma ravna os

Dolžine posameznih odsekov izračunamo takole:

$$L_1 = \sqrt{(v_1 - v_0)^2 + (L/3)^2} = 3.340\,\mathrm{m},$$
$$L_2 = \sqrt{(v_2 - v_1)^2 + (L/3)^2} = 3.336\,\mathrm{m},$$
$$L_3 = \sqrt{(v_3 - v_2)^2 + (L/3)^2} = 3.334\,\mathrm{m},$$

naklone osi na posameznih odsekih pa določimo z naslednjimi izrazi

$$\alpha_1 = \mathrm{arctg}\frac{v_1 - v_0}{L/3} = -3.576^\circ,$$
$$\alpha_2 = \mathrm{arctg}\frac{v_2 - v_1}{L/3} = -2.148^\circ,$$
$$\alpha_3 = \mathrm{arctg}\frac{v_3 - v_2}{L/3} = -0.7162^\circ.$$

Določimo najprej zasuke in pomike v prvem odseku za $0 < X < L/3$ oziroma $0 < x < L_1$. Notranje sile v tem delu so:

$$N_x = F\,\sin\alpha_1 = -0.2495\,\mathrm{kN} \qquad M_y(x) = -F\,L\left(1 - \frac{x}{3\,L_1}\right) = -40 + 3.992\,x.$$

Pomik v vzdolžni smeri prvega odseka izračunamo z integracijo enačbe (1.80)

$$u_1(x) = u_{10} + \int_0^x \frac{N_x}{E\,A_x(\bar{x})}d\bar{x} = 0 + 6.993\cdot 10^{-9} + 5\cdot 10^{-7}\,\ln(0.9861 - 0.1248\,x),$$

pomik na koncu prvega odseka pri $x = L_1$ pa je

$$u_1(L_1) = -2.746\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}.$$

Zasuke in pomike v prečni smeri izračunamo na isti način kot za model $B$. Najprej izračunamo zasuke

$$\frac{dw_1}{dx} = 0 - \int_0^x \frac{M_y(\bar{x})}{E\,I_y(\bar{x})}d\bar{x} = \frac{0.0008847\,(8.837 - x)\,x}{(-7.904 + x)^2},$$

pomik pa določimo z integracijo funkcije zasukov

$$w_1(x) = 0 + \int_0^x \frac{dw_1}{d\bar{x}}d\bar{x} = 0.01193 + \frac{0.006523}{7.904 - x} - 0.0008847\,x - 0.006168\ln(7.904 - x)$$

Zasuk in pomik na koncu prvega odseka pri $x = L_1$ sta

$$\left.\frac{dw_1}{dx}\right|_{x=L_1} = 0.0007797, \quad w_1(L_1) = 0.001036\,\mathrm{m}.$$

Če želimo vrednosti pomikov na koncu enega odseka uporabiti kot začetne vrednosti za drugi odsek, moramo pomike transformirati iz koordinatnega sistema $x_1, z_1$ v koordinatni sistem $x_2, z_2$:

$$u_{20} = u_1(L_1)\,\cos\Delta\alpha_1 + w_1(L_1)\,\sin\Delta\alpha_1,$$
$$w_{20} = -u_1(L_1)\,\sin\Delta\alpha_1 + w_1(L_1)\,\cos\Delta\alpha_1,$$

kjer smo z $\Delta\alpha_1$ označili razliko v naklonu med koordinatnim sistemom prvega in drugega odseka

$$\Delta\alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Začetne vrednosti pomika v drugem odseku v lokalnem koordinatnem sistemu drugega odseka sta:

$$u_{20} = -2.746 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}, \quad w_{20} = 0.001036\,\mathrm{m}.$$

Na podoben način določimo notranje sile in pomike tudi za drugi in tretji odsek. Tako dobimo, da sta pomika na koncu konzole v globalnem koordinatnem sistemu enaka

$$u_3(L) = 0.0004923\,\mathrm{m}, \quad w_3(L) = 0.02339\,\mathrm{m}.$$

**Model E: Metoda končnih elementov - ravninsko napetostno stanje**

Pripravili smo podatke za dvodimenzionalno mrežo končnih elementov (slika 1.45e), uporabili program LUSAS[†] in določili pomik na koncu konzole $w(L) = 0.02344\,\mathrm{m}$. Pri pripravi podatkov za računalniški program moramo povedati tudi Poissonov koeficient. Izbrali smo $\nu = 0.25$. Sicer se izkaže, da v tem primeru $\nu$ ne vpliva na velikost pomikov.

**Analiza rezultatov**

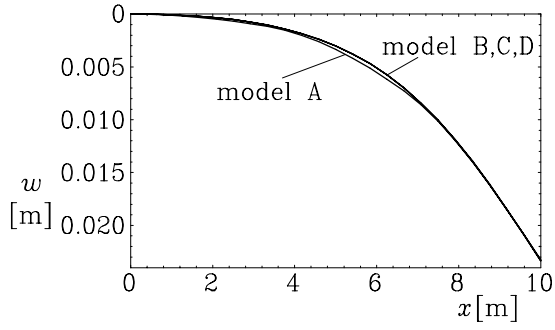
Rezultate za pomike po vseh petih modelih in odstopanja v primerjavi z izračunom po metodi končnih elementov prikazujemo v naslednji preglednici.

Tabela 1.6: Pomiki izračunani po različnih računskih modelih

| Model | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Pomik | 0.02326 | 0.02337 | 0.02335 | 0.02339 | 0.02344 |
| Odstopanje | $-0.81\%$ | $-0.34\%$ | $-0.42\%$ | $-0.25\%$ | |

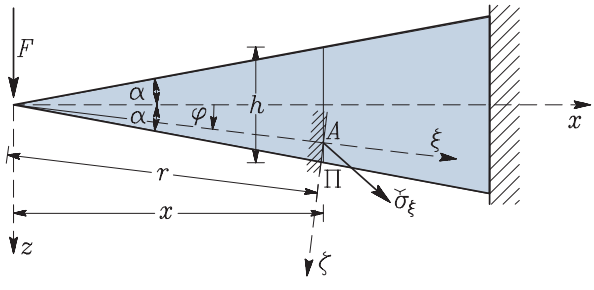
Ugotovimo lahko, da vsi štirje linijski modeli konstrukcije dobro aproksimirajo bolj natančen dvodimenzionalni model E, saj so razlike manjše od 1%. V primeru, da višine $h_{ki}$ pri modelu $A$ in $h_{li}$ pri modelu B določimo po manj pravilnih enačbah (1.133) in (1.135) pa so napake večje: 5.38% za model A in $-9.41\%$ za model B. Če bi uporabili še manj natančen model s povprečnim konstantnim prerezom $h = 0.591\,\mathrm{m}$, bi bil pomik na koncu konzole enak $w(L) = 0.01931\,\mathrm{m}$, napaka pa bi bila $-17.6\%$. Na sliki 1.47 prikazujemo poteke pomikov za vse štiri linijske modele. Vidimo, da le model A na sredini nosilca nekoliko odstopa od drugih treh, ki so si med seboj skoraj enaki.

[†] LUSAS Modeller, Version 13.2-5, FEA Ltd., Kingston Upon Thames, Velika Britanija, 1999.




Slika 1.47: Pomiki, določeni po različnih modelih

**Primer 1.13** *Določimo približen vpliv spreminjanja prečnega prereza na vzdolžno normalno napetost $\sigma_{xx}$! V ta namen obravnavajmo nosilec pravokotnega prečnega prereza z linearno spreminjajočo višino (slika 1.48). Predpostavimo ravninsko napetostno stanje v ravnini $(x, z)$.*




Slika 1.48: Geometrija nosilca s pravokotnim prečnim prerezom, ki se linearno spreminja vzdolž osi nosilca

V nosilcu izberemo točko $A$ in obravnavamo ravnino $\Pi$ z normalo $\vec{e}_\xi$ skozi to točko. Kot med vektorjema $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_x$ označimo s $\varphi$. Na ravnino $\Pi$ delujeta normalna napetost $\sigma_{\xi\xi}$ in strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$. Zvezo med vektorji napetosti $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_\xi$ in $\vec{\sigma}_\zeta$ določa enačba (M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998, enačba 2.93)

$$\vec{\sigma}_x = \vec{\sigma}_\xi \, e_{x\xi} + \vec{\sigma}_\zeta \, e_{x\zeta}.$$

Po skalarnem množenju z $\vec{e}_x$ dobimo (upoštevamo, da je $\vec{\sigma}_\xi = \sigma_{\xi\xi} \, \vec{e}_\xi + \sigma_{\xi\zeta} \, \vec{e}_\zeta$, $\vec{\sigma}_\zeta = \sigma_{\zeta\xi} \, \vec{e}_\xi + \sigma_{\zeta\zeta} \, \vec{e}_\zeta$, $e_{x\xi} = \cos\varphi$ in $e_{x\zeta} = -\sin\varphi$)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\xi x} \, e_{x\xi} + \sigma_{\zeta x} \, e_{x\zeta} = (\, \sigma_{\xi\xi} \, \cos\varphi - \sigma_{\xi\zeta} \, \sin\varphi) \, \cos\varphi - (\, \sigma_{\zeta\xi} \, \cos\varphi - \sigma_{\zeta\zeta} \, \sin\varphi) \, \sin\varphi$$

Prečna normalna napetost $\sigma_{\zeta\zeta}$ in strižna napetost $\sigma_{\xi\zeta}$ sta v primerjavi z vzdolžno normalno napetostjo $\sigma_{\xi\xi}$ majhni, zato ju za približno oceno normalne napetosti $\sigma_{xx}$ lahko zanemarimi:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{\xi\xi} \, \cos^2\varphi.$$

Razpored $\sigma_{\xi\xi}$ je v primeru ravninskega napetostnega stanja v obravnavanem nosilcu enak[†]

$$\sigma_{\xi\xi} = -\frac{F\,\sin\varphi}{b\,r\left(\alpha - \dfrac{\sin 2\,\alpha}{2}\right)}.$$

Normalna napetost $\sigma_{xx}$ je torej razporejena po naslednji enačbi

$$\sigma_{xx} = -\frac{F\,\sin\varphi\,\cos^2\varphi}{b\,r\left(\alpha - \dfrac{\sin 2\,\alpha}{2}\right)}. \tag{1.137}$$

V primeru obravnavanega nosilca je upogibni moment enak

$$M_y = -F\,x \quad \rightarrow \quad F = -\frac{M_y}{x}. \tag{1.138}$$

Iz slike 1.48 vidimo, da je

$$r = \frac{x}{\cos\varphi}, \qquad x = \frac{h}{2\,\mathrm{tg}\alpha}, \qquad z = x\,\mathrm{tg}\varphi. \tag{1.139}$$

Če enačbe (1.138) in (1.139) vstavimo v (1.137), po preureditvi dobimo naslednji izraz za vzdolžno normalno napetost

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y\,z}{I_y}\,\frac{4\,\cos^4\varphi\,\mathrm{tg}^3\alpha}{3\,(2\,\alpha - \sin 2\,\alpha)}.$$

V zadnjem izrazu nastopata $z$ in $\varphi$, ki sta med seboj povezana. Velja namreč

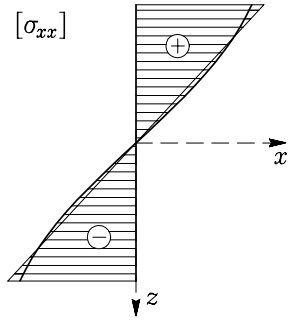
$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{z}{x} = \frac{2\,z\,\mathrm{tg}\alpha}{h}$$

in ob upoštevanju zveze med kotnima funkcijama $\cos$ in $\mathrm{tg}$: $\cos\varphi = 1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}$, dobimo

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y\,z}{I_y}\,\frac{4\,\mathrm{tg}^3\alpha}{3\left(1+\left(\dfrac{2\,z\,\mathrm{tg}\alpha}{h}\right)^2\right)^2(2\,\alpha - \sin 2\,\alpha)}. \tag{1.140}$$

Izraz za napetost v enačbi (1.140) je produkt linearnega dela, ki je enak kot pri prizmatičnih nosilcih, in nelinearnega dela, ki je v veliki meri odvisen tudi od kota $\alpha$, s katerim opišemo, kako hitro se spreminja višina prečnega prereza. Na sliki 1.49 prikazujemo spreminjanje napetosti $\sigma_{xx}$ po višini prečnega prereza pri $\alpha = 20°$.

[†] S.P. Timoshenko, Strength of materials, Part II, Advanced theory and problems, Wedsworth Publishing Company, 1956.




Slika 1.49: Napetost $\sigma_{xx}$ se v neprizmatičnih nosilcih po višini spreminja nelinearno

Če je kot $\alpha$ dovolj majhen ($\alpha < 10°$), so razlike relativno majhne, pri večjih kotih pa so razlike večje. V preglednici 1.7 prikazujemo nekaj vrednosti največje $\sigma_{xx}$ (na obeh robovih) v primerjavi z vrednostjo največje $\sigma_{xx}$, ki velja za prizmatične nosilce.

Tabela 1.7: Primerjava največjih normalnih napetosti $\sigma_{xx}$

| $\alpha$ | $5°$ | $10°$ | $20°$ | $30°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^p$ | 0.994 | 0.976 | 0.906 | 0.797 |

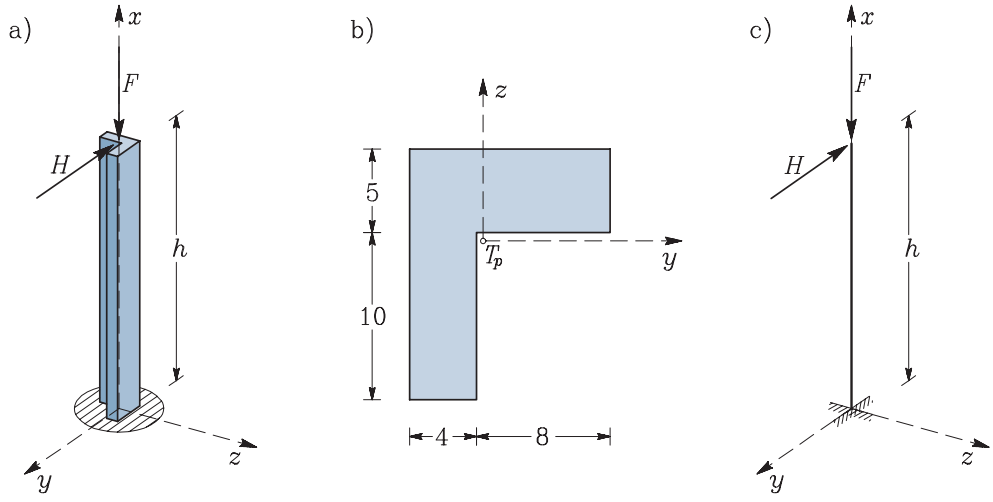
Vidimo, da so vrednosti največje napetosti $\sigma_{xx}$ v neprizmatičnih nosilcih nižje od tistih v prizmatičnih, pri katerih se višina prereza ne spreminja. Razlike so večje, če je spreminjanje višine prereza bolj izrazito (za večje $\alpha$).

### 1.2.9 Računanje vzdolžne normalne napetosti in določanje jedra prereza

**Primer 1.14** *Določimo silo $H$ tako, da v stebru, prikazanem na sliki 1.50, ni nateznih napetosti! Uklona ni treba upoštevati.*

Višina stebra je $h = 4$ m, navpična sila pa je $F = 400$ kN. Napetosti $\sigma_{xx}$ izračunamo po enačbi (1.88):

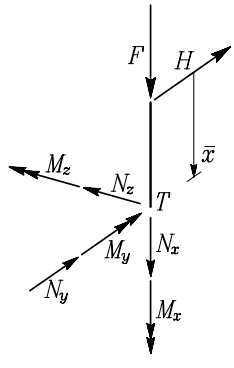
$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z\, I_y - M_y\, I_{yz}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2} y - \frac{M_z\, I_{yz} - M_y\, I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z.$$




Slika 1.50: a) Steber in obtežba b) Prečni prerez stebra c) Statični model stebra

Notranje sile so (slika 1.51)

$$N_x = -F, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = -H\,\bar{x}, \qquad M_z^{\max} = -H \cdot 400.$$




Slika 1.51: Obravnavamo zgornji del stebra

Težišče in vztrajnostni momenti prečnega prereza na težiščni osi $y$ in $z$ so (slika 1.52)

$$A_x = 100\ \mathrm{cm}^2, \qquad \bar{y}_T = 4.4\ \mathrm{cm}, \qquad \bar{z}_T = 9.5\ \mathrm{cm},$$
$$I_y = 1808.33\ \mathrm{cm}^4, \qquad I_z = 1157.33\ \mathrm{cm}^4, \qquad I_{yz} = -720.00\ \mathrm{cm}^4.$$

Normalno napetost $\sigma_{xx}$ izračunamo po enačbi

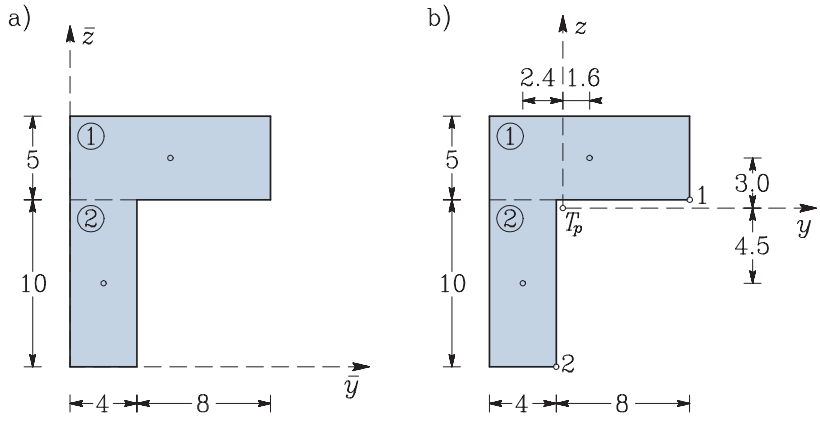
$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z(I_y\,y + I_{yz}\,z)}{I_y\,I_z - I_{yz}^2} =$$
$$= -\frac{400}{100} + 400\,H\,\frac{1808.33\,y - 720\,z}{1808.33 \cdot 1157.33 - 720^2} = -4.0 + H(0.459\,y - 0.183\,z) \le 0.$$

Napetost $\sigma_{xx}$ mora biti negativna v celotnem prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$. Poiskati moramo torej največjo možno pozitivno vrednost izraza v okroglem oklepaju. To dobimo v primeru, da je $y$ čim večji in $z$ čim manjši. Tem pogojem ustrezata točki 1 in 2 (slika 1.52b).

Točka 1: $y = 7.6\,\text{cm}, \quad z = 0.5\,\text{cm}: \quad \sigma_{xx} = -4.0 + 3.4\,H \leq 0 \quad \rightarrow \quad H \leq 1.18\,\text{kN}.$

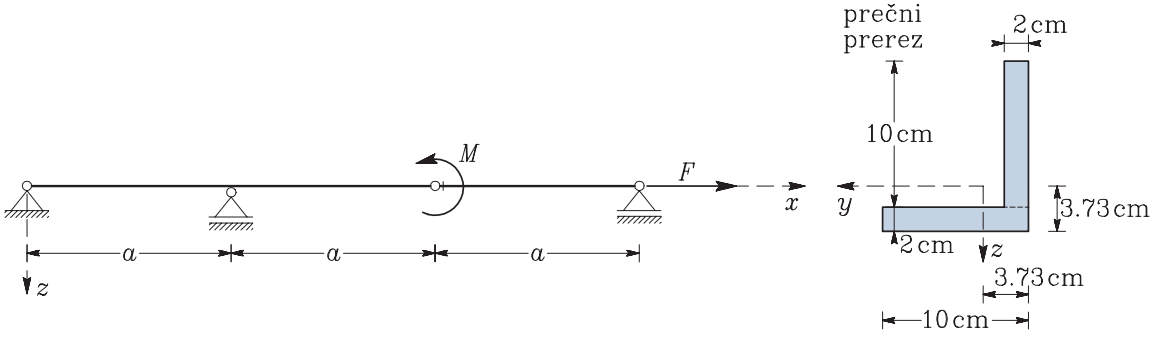
Točka 2: $y = -0.4\,\text{cm}, \quad z = -9.5\,\text{cm}: \quad \sigma_{xx} = -4.0 + 1.55\,H \leq 0 \quad \rightarrow \quad H \leq 2.57\,\text{kN}.$

Merodajna je točka 1. Sila $H$ je lahko kvečjemu 1.18 kN.




Slika 1.52: a) Račun težišča b) Račun vztrajnostnega momenta

**Primer 1.15** *Za konstrukcijo na sliki 1.53 določimo lego tistih točk, v katerih nastane največja in najmanjša normalna napetost. Določimo tudi velikost ekstremnih napetosti! Velikost sile je $F = 100$ kN, momenta pa $M = 100$ kNm.*




Slika 1.53: Geometrija konstrukcije in obtežba s točkovno silo in momentom

Normalno napetost $\sigma_{xx}$ računamo po enačbi (1.88)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z\,I_y - M_y\,I_{yz}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,y - \frac{M_z\,I_{yz} - M_y\,I_z}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,z.$$