

Dejan Zupan

IZPITNE NALOGE IN REŠITVE NALOG S POSTOPKOM IZ PREDMETA TRDNOST
NA VISOKOŠOLSLEM ŠTUDIJU GRADBENIŠTVA

Igor Planinc

VPRAŠANJA IZ TEORIJE PRI PREDMETU TRDNOST NA VISOKOŠOLSLEM
ŠTUDIJU GRADBENIŠTVA

ŠTUDIJSKO LETO: 2006/07

TRDNOST (VSS) - 2. IZPITNI ROK (09. 02. 2007)

RAČUNSKI DEL IZPITA:

1. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati.

(OBVEZNA NALOGA! 40%)

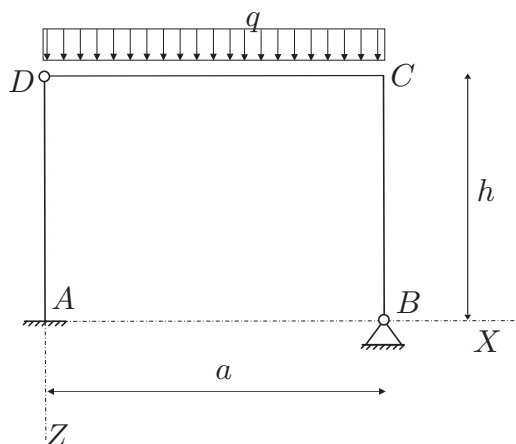
Podatki: $a = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$,

$q = 10 \text{ kN/m}$,

$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$,

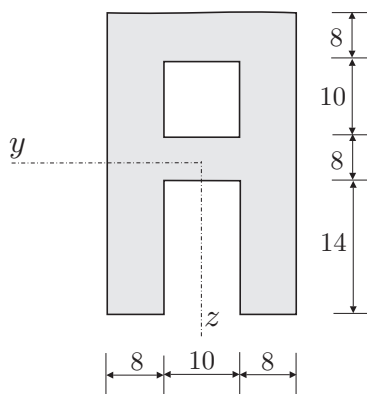
$J_y = 6200 \text{ cm}^4$,

$A_x = 80 \text{ cm}^2$.



2. Prezre na sliki je obremenjen s prečno silo $N_z = 10 \text{ kN}$ in upogibnim momentom $M_y = 5 \text{ kNm}$. Določite nekaj značilnih vrednosti in skicirajte diagrama osnih napetosti σ_{xx} in strižnih napetosti σ_{xy} ! (35%)

Podatki za prezek so v centimetrih.



3. Deformiranje je podano s poljem pomikov $\vec{u} = 10^{-3} (x + y, x + y^2, z^2)$.

Izračunajte: (25%)

a) tenzor majhnih deformacij;

b) vrednost tenzorja majhnih deformacij v točki $T(1, 1, 3)$;

c) napetostni tenzor v točki $T(1, 1, 3)$.

Podatki: $\nu = 0.2$, $E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

TEORETIČNI DEL IZPITA:

Izmed treh zastavljenih vprašanj si izberete dve, na kateri boste odgovarjali. Izbrani vprašanji jasno označite! Pišite čitljivo.

1. Opišite tenzor velikih in malih deformacij! Pojasnite geometrijski pomen komponent tenzorja malih deformacij!

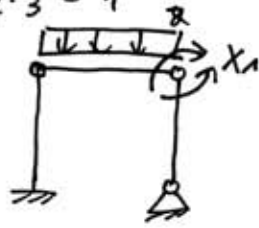
2. Katere predpostavke in poenostavitve upoštevamo pri izpeljavi izrazov za določitev strižnih napetosti S_{xy} in S_{xz} v prečnem prerezu linijskega nosilca? Kot ilustracijo izračunajte strižne napetosti za pravokotni prečni prezek, ki je obremenjen samo s prečno silo N_z ! Rezultate prikažite grafično!.

3. S pomočjo diagrama sila prečni pomik pojasnite pojav uklona idealnega stebra in v nadaljevanju vpliv geometrijske nepopolnosti! Zapišite enačbe za določitev Eulerjevih uklonskih sil! Detajlno prikažite izpeljavo Eulerjeve uklonske sile za konzolni stebel!

1. NALOGA

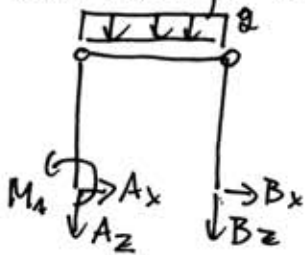
a.) $n = 3 + 2 + 2 - 2 \cdot 3 = 1$

b.) sprostitev



c.) notranje sile

c1.) zunanja obtežba



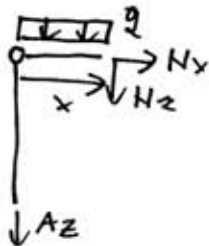
$$B_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 0$$

$$A_z = B_z = -q \cdot \frac{a}{2}$$

$$A_z = -20 \text{ kN}$$

$$B_z = -20 \text{ kN}$$



$$N_x = 0$$

$$N_z = -A_z - q \cdot x$$

$$M_y = -A_z x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

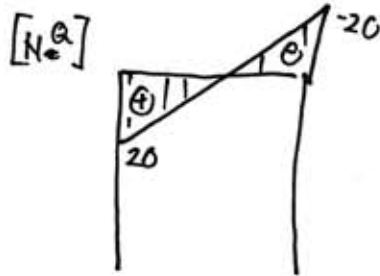
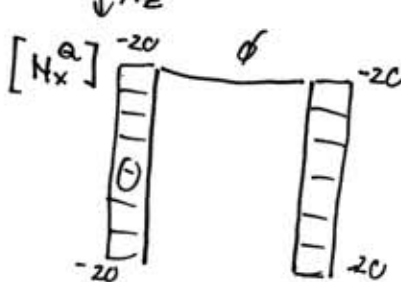
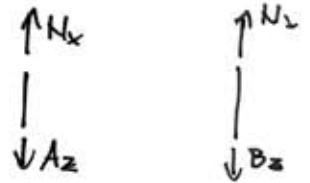
$$N_x = 0$$

$$N_z = 20 - 10x$$

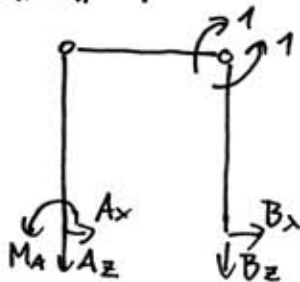
$$M_y = 20x - 5x^2$$

$$M_y(2) = 20 \text{ kNm}$$

(elastren)



c2.) $X_1 = 1$



$$A_x + B_x = 0 \quad A_x = +\frac{1}{3} \text{ kN}$$

$$B_x \cdot h + 1 = 0 \quad B_x = -\frac{1}{3} \text{ kN}$$

$$A_x \cdot h + M_A = 0 \quad M_A = -1 \text{ kNm}$$

$$A_z + B_z = 0 \quad A_z = +\frac{1}{4} \text{ kN}$$

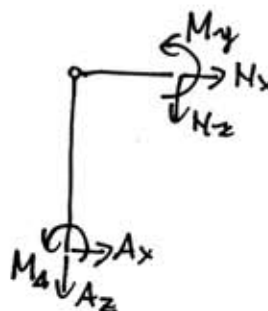
$$M_A - B_z \cdot a = 0 \quad B_z = -\frac{1}{4} \text{ kN}$$



$$N_x = +\frac{1}{4} \text{ kN}$$

$$N_z = -\frac{1}{3} \text{ kN}$$

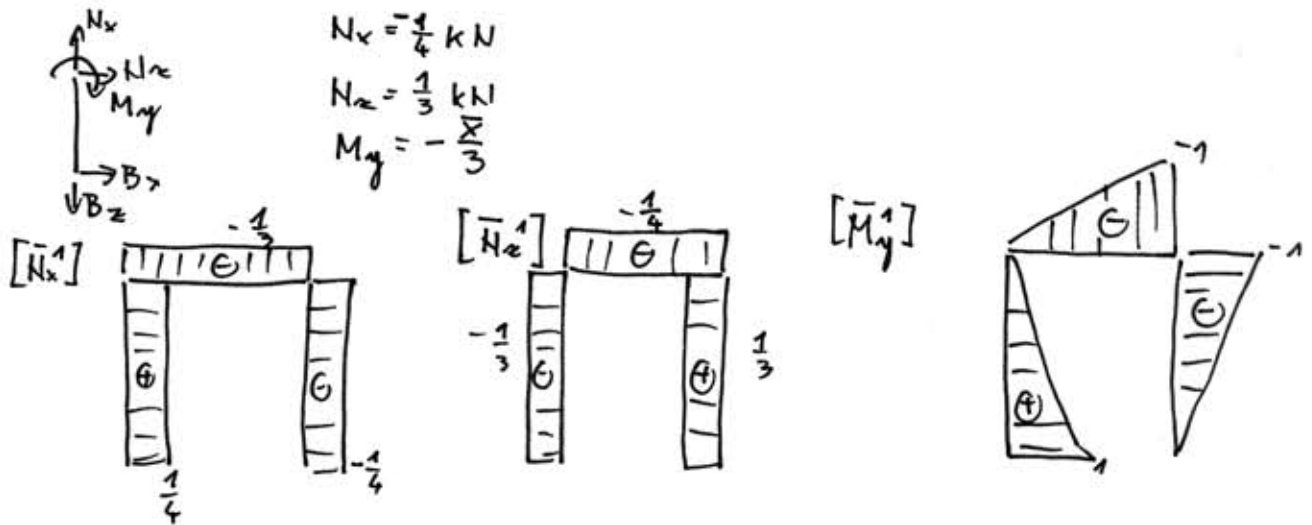
$$M_y = +1 \cdot \frac{x}{3}$$



$$N_x = -\frac{1}{3} \text{ kN}$$

$$N_z = -\frac{1}{4} \text{ kN}$$

$$M_y = -\frac{x}{4}$$

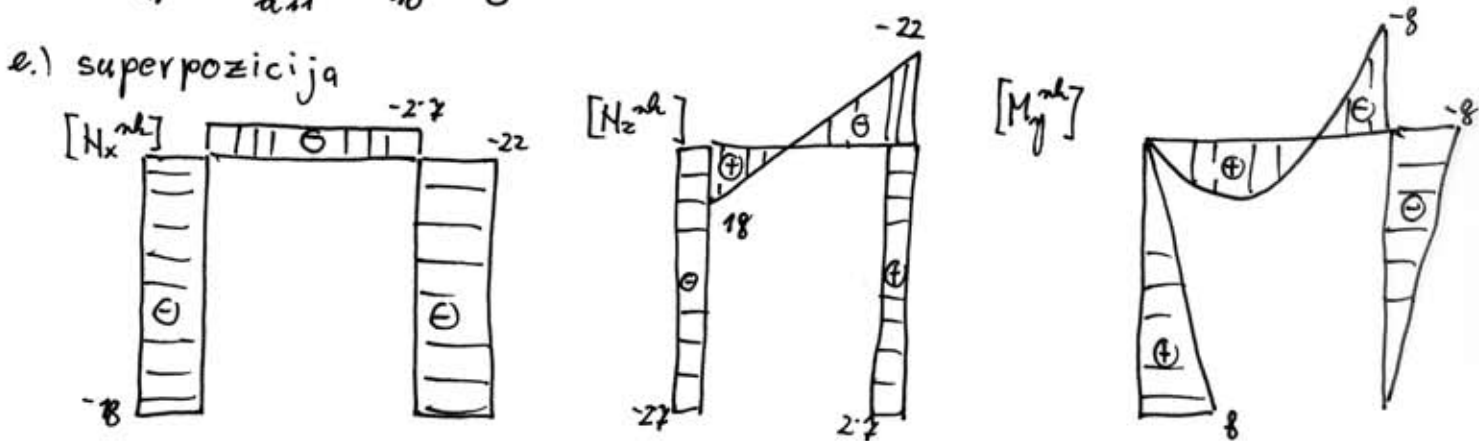


d.) dobčitev X_1

$$a_{11} \cdot EI_y = 2 \int_0^h \triangle^1 \triangle^1 dx + \int_0^a \triangle^{-1} \triangle^{-1} dx = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{10}{3}$$

$$b_1 \cdot EI_y = \int_0^a \triangle^{20} \triangle^{-1} dx = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 20 \cdot (-1) = -\frac{80}{3}$$

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{80}{10} = 8$$



f.) pomik v C

$B_x = 0$
 $A_x = 1$
 $M_A = -h$
 $-B_z = a - 1 \cdot h = 0$
 $B_z = \frac{3}{4} \quad A_z = -\frac{3}{4}$

Deformacije

In[133]:=

$$u = \{(x + y), (x + y^2), y z^2\}$$

Out[133]=

$$\{x + y, x + y^2, y z^2\}$$

In[134]:=

TenzorMalihDeformacij[u]

Out[134]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 y & \frac{z^2}{2} \\ 0 & \frac{z^2}{2} & 2 y z \end{pmatrix}$$

In[135]:=

TenzorMalihDeformacijT[u 10⁻³, {1, 1, 3}]

Out[135]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0. \\ 0.001 & 0.002 & 0.0045 \\ 0. & 0.0045 & 0.006 \end{pmatrix}$$

In[137]:=

HookovZakon[{0.001, 0.002, 0.006}, {s1, s2, s3}, 0.2, 21000, 0.000, 0]

Out[137]=

$$\{\{s1 \rightarrow 70., s2 \rightarrow 87.5, s3 \rightarrow 157.5\}\}$$

RAČUNSKI DEL IZPITA:

1. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in horizontalni pomik v točki C ! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati.

(OBVEZNA NALOGA! 40%)

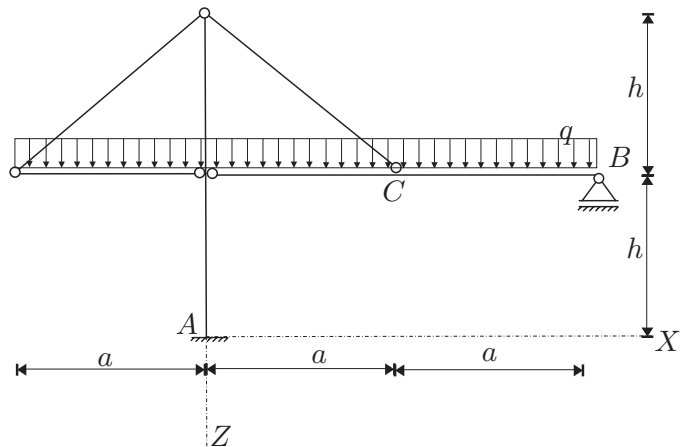
Podatki: $a = 2\text{ m}$, $h = 2\text{ m}$,

$q = 10\text{ kN/m}$,

$E = 21000\text{ kN/cm}^2$,

$J_y = 170\text{ cm}^4$,

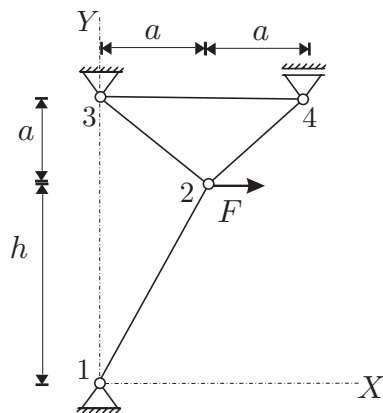
$A = 15\text{ cm}^2$.



2. Za paličje na sliki določite pomike vzlišč in osne sile v palicah po metodi pomikov! (40%)

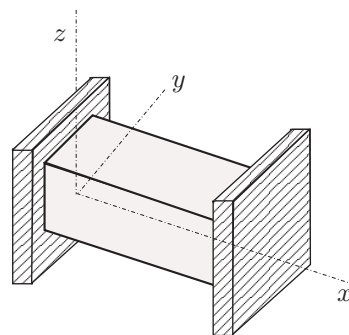
Podatki: $a = 2\text{ m}$, $h = 5\text{ m}$, $F = 10\text{ MN}$,

$E = 2.1 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $A = 0.02\text{ m}^2$.



3. Kvader postavimo med dve togi plošči, kot kaže slika, in segrejemo za 50 K . Privzemimo, da je material izotropen in linearno elastičen. Določite deformacijski, napetostni tenzor in specifično spremembo volumna! (20%)

Podatki: $\nu = 0.2$, $E = 2 \cdot 10^4\text{ kN/cm}^2$, $\alpha = 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.



REŠITVE 1. NALOGE:

-> GLEJ SEMINAR

http://www.km.fgg.uni-lj.si/predmeti/Trdnost-VSS/izpiti/Sem_06_07.pdf

TABELA DOLŽIN, KOSINUSOV IN OSNIH TOGOSTI ZA PODANO PALIČJE

```
=====
palica  vozell  vozell2  dolzina  cos(a_ij)  cos(b_ij)  k_ij
=====
```

palica	vozell	vozell2	dolzina	cos(a_ij)	cos(b_ij)	k_ij
1	1	2	5.385	0.371	0.928	779.920
2	2	3	2.828	-0.707	0.707	1484.924
3	2	4	2.828	0.707	0.707	1484.924
4	3	4	4.000	1.000	0.000	1050.000

```
-----
```

TOGOSTNA MATRIKA PALIČJA

```
=====
```

-107.575	-268.938	107.575	268.938	0.000	0.000	0.000	0.000
-268.938	-672.345	268.938	672.345	0.000	0.000	0.000	0.000
107.575	268.938	-1592.499	-268.938	742.462	-742.462	742.462	742.462
268.938	672.345	-268.938	-2157.269	-742.462	742.462	742.462	742.462
0.000	0.000	742.462	-742.462	-1792.462	742.462	1050.000	0.000
0.000	0.000	-742.462	742.462	742.462	-742.462	0.000	0.000
0.000	0.000	742.462	742.462	1050.000	0.000	-1792.462	-742.462
0.000	0.000	742.462	742.462	0.000	0.000	-742.462	-742.462

```
-----
```

POMIKI IN REAKCIJE VOZLIŠČ DANEGA PALIČJA

```
=====
```

vozel	u_x	u_y	R_x	R_y
1	0.00000	0.00000	-0.881	-2.204
2	0.00779	0.00016		
3	0.00000	0.00000	-9.119	5.661
4	0.00329	0.00000		-3.458

```
-----
```

TABELA OSNIH SIL ZA PODANO PALIČJE

```
=====
```

palica	vozell	vozell2	N_ij
1	1	2	2.373
2	2	3	8.006
3	2	4	-4.890
4	3	4	3.458

```
-----
```


TRDNOST - VŠŠ

3. NALOGA

$$\varepsilon_{xx} = 0$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{zy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \sigma \\ \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = 0$$

Hookov zakon

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha_T \Delta T$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{E} = -\alpha_T \Delta T$$

$$\sigma_{xx} = -\alpha_T \Delta T \cdot E = -10^{-5} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^4 = -10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \alpha_T \Delta T = +\frac{0.2}{2} \cdot 10^{-4} \cdot 10 + 10^{-5} \cdot 50$$

$$\varepsilon_{yy} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{zz} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 1.2 \cdot 10^{-3}$$

RAČUNSKI DEL IZPITA:

1. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in horizontalni pomik v točki C ! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati.

(OBVEZNA NALOGA! 45%)

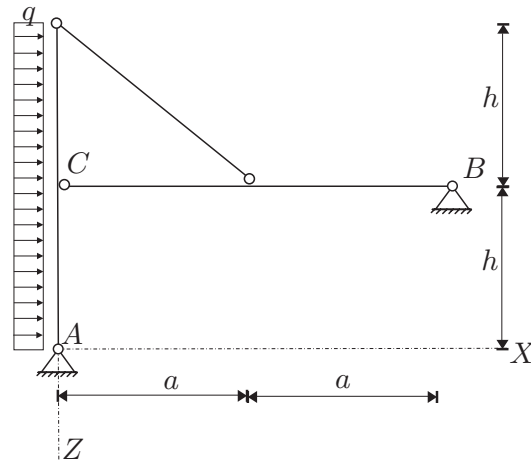
Podatki: $a = 2\text{ m}$, $h = 2\text{ m}$,

$q = 10\text{ kN/m}$,

$E = 21000\text{ kN/cm}^2$,

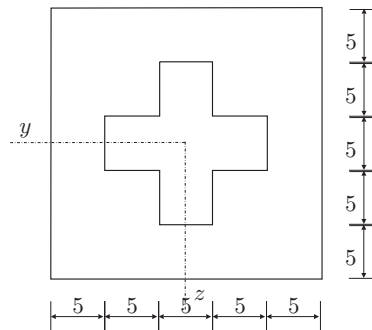
$J_y = 170\text{ cm}^4$,

$A = 15\text{ cm}^2$.



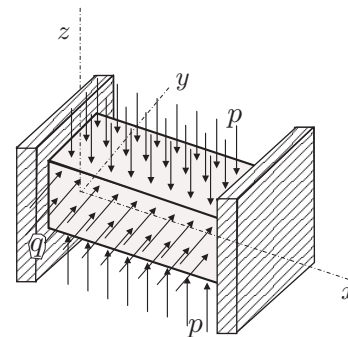
2. Prerez na sliki je obremenjen s prečno silo $N_z = 20\text{ kN}$. Določite nekaj značilnih vrednosti in skicirajte diagram strižnih napetosti σ_{xz} ! (30%)

Podatki za prerez so v centimetrih.



3. Kvader iz linearno elastičnega, izotropnega materiala postavimo med dve togi plošči in obremenimo z enakomerno obtežbo kot kaže slika. Površinska obtežba na ploskvah z normalama e_z in $-e_z$ je velikosti $p = 10\text{ kN/cm}^2$. Določite velikost površinske obtežbe q na ploskvah z normalama e_y in $-e_y$, če je specifična sprememba volumna enaka $-9 \cdot 10^{-4}$. Določite tudi deformacijski in napetostni tenzor! (25%)

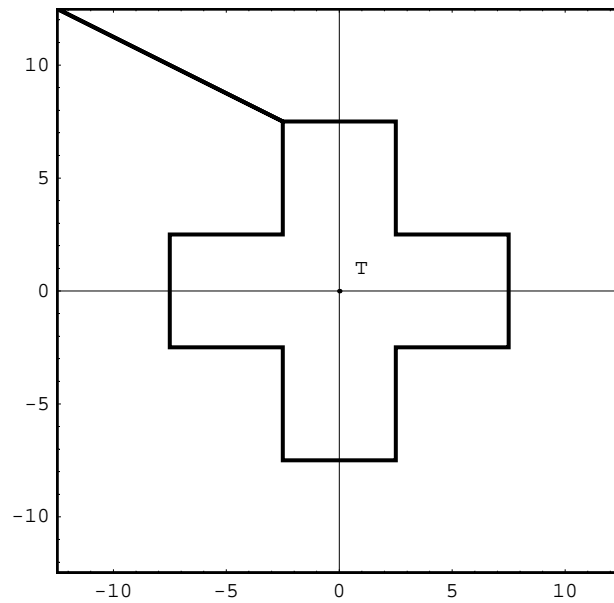
Podatki: $\nu = 0.2$, $E = 2 \cdot 10^4\text{ kN/cm}^2$.



TEORETIČNI DEL IZPITA:

Izmed treh zastavljenih vprašanj si izberete dve, na kateri boste odgovarjali. Izbrani vprašanji jasno označite! Pišite čitljivo.

1. Opišite tenzor deformacij! Pojasnite geometrijski pomen komponent tenzorja **malih** deformacij!
2. Zapišite in pojasnite zvezo med normalno napetostjo σ_{xx} in vzdolžno deformacijo pri upogibu z osno silo! Normalno napetost izrazite tudi z notranjimi silami v prečnem prerezu nosilca! Predpostavite, da sta y in z glavni vztrajnostni osi.
3. Napišite in komentirajte enačbe (pomen oznak) za Eulerjeve uklonske sile! Enačbo za določitev uklonske sile izpeljite za previsni nosilec (= konzolo)!



```

Ax      = 500.
Sy      = 0.
Sz      = 0.
yT    = 0.
zT    = 0.
Iy    = 31041.7
Iz    = 31041.7
Iyz   = 0.
IyT   = 31041.7
IzT   = 31041.7
IyzT  = 0.
αG    = Indeterminate
I1    = Indeterminate
I2    = Indeterminate

```

```
In[36]:=
```

```
StaticMomentY[{{-12.5, z}, {-12.5, -12.5}, {12.5, -12.5}, {12.5, z}, {-12.5, z}}]
```

```
Out[36]= -1953.13 + 0. z + 12.5 z2
```

```
In[37]:=
```

```

N[% /. z → -12.5]
N[% /. z → -7.5]

```

```
Out[37]= 0.
```

```
Out[38]= -1250.
```

```
In[42]:= StaticniMomentY[{{-12.5, z}, {-12.5, -12.5}, {12.5, -12.5},  
  {12.5, z}, {2.5, z}, {2.5, -7.5}, {-2.5, -7.5}, {-2.5, z}, {-12.5, z}}]  
N[% /. z → -7.5]  
N[%% /. z → -2.5]
```

```
Out[42]= -1812.5 + 0. z + 10. z2
```

```
Out[43]= -1250.
```

```
Out[44]= -1750.
```

```
In[49]:= StaticniMomentY[{{-12.5, z}, {-12.5, -12.5}, {12.5, -12.5},  
  {12.5, z}, {7.5, z}, {7.5, -2.5}, {2.5, -2.5}, {2.5, -7.5},  
  {-2.5, -7.5}, {-2.5, -2.5}, {-7.5, -2.5}, {-7.5, z}, {-12.5, z}}]  
N[% /. z → -2.5]  
N[%% /. z → 0]  
N[%% /. z → 2.5]
```

```
Out[49]= -1781.25 + 0. z + 5. z2
```

```
Out[51]= -1781.25
```

```
Out[52]= -1750.
```

NALOGA 2

z*	b*	Sy*	Sigma_xz [N/cm2]
-12.5	25	0	0.00
-7.5	25	-1250	32.21
-7.5	20	-1250	40.27
-2.5	20	-1750	56.38
-2.5	10	-1750	112.75
0	10	-1781.25	114.76
2.5	10	-1750	112.75
2.5	20	-1750	56.38
7.5	20	-1250	40.27
7.5	25	-1250	32.21
12.5	25	0	0.00

3. NALOGA

a.) deformacije

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = 0}$$

$$\varepsilon_v = -9 \cdot 10^{-4}$$

b.) napetosti

$$[\sigma] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = -p$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = -10 \text{ kN/cm}^2}$$

$$[\sigma] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +q \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma_{yy} = -q$$

$$\sigma_{zy} = 0$$

c.) Hookov zakon

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_v$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0.2 \cdot 2 \cdot 10^4}{1.2 \cdot 0.6} = \frac{5}{3} \cdot 10^4$$

$$\sigma_{xx} = -5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda\varepsilon_v$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2G} (\sigma_{zz} - \lambda\varepsilon_v)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{12} \cdot 10^4$$

$$\varepsilon_{zz} = 0.6 \cdot 10^{-4} (-10 + 5) = -3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_v - \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{zz} = -9 \cdot 10^{-4} - 0 + 3 \cdot 10^{-4} = -6 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_v \\ &= \frac{1}{0.6} \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^{-4} - 5 = -15 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

d.) Rezultati

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

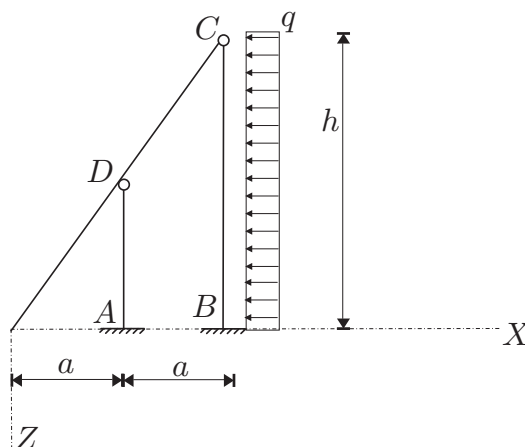
$$q = 15 \text{ kN/cm}^2$$

RAČUNSKI DEL IZPITA:

1. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine in horizontalni pomik v točki C ! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati.

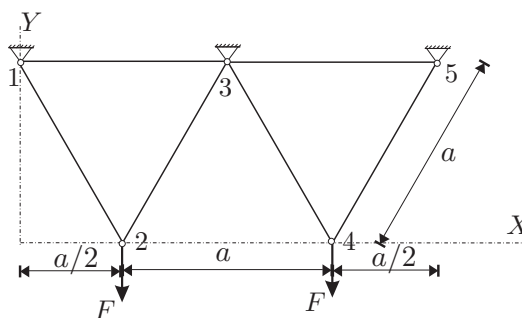
(OBVEZNA NALOGA! 45%)

Podatki: $a = 2.5 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$, $q = 5 \text{ kN/m}$,
 $E = 3500 \text{ kN/cm}^2$, $J_y = 67500 \text{ cm}^4$,
 $A = 900 \text{ cm}^2$.



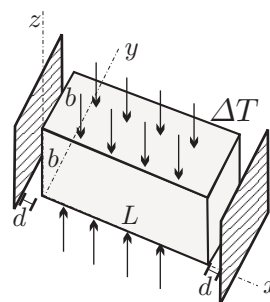
2. Za paličje na sliki določite pomike vozlišč in osne sile v palicah po metodi pomikov! (30%)

Podatki: $a = 3 \text{ m}$, $F = 10 \text{ MN}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $A = 0.01 \text{ m}^2$.



3. Kvader dimenzije $L \times b \times b$ je postavljen med dve togi plošči, kot kaže slika. Kvader se plošč ne dotika, temveč je od njiju oddaljen za razdaljo d . Kvader segrejemo za 70 K in obremenimo na zgornji in spodnji ploskvi z enakomerno površinsko obtežbo p . Privzemimo, da je material izotropen in linearno elastičen. Določite deformacijski in napetostni tenzor! (25%)

Podatki: $p = 100 \text{ kN/cm}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $b = 0.2 \text{ m}$,
 $d = 1 \text{ mm}$, $\nu = 0.2$, $E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.



TEORETIČNI DEL IZPITA:

Izmed treh zastavljenih vprašanj si izberete dve, na kateri boste odgovarjali. Izbrani vprašanji jasno označite! Pišite čitljivo.

- Pojasnite ravnotežne enačbe za delec telesa ter pripadajoče robne pogoje?
- Opišite osnovne predpostavke pri upogibu z osno silo!
- Napišite in komentirajte enačbe (pomen oznak) za Eulerjeve uklonske sile! Enačbo za določitev uklonske sile izpeljite za previsni nosilec (konzolo)!

TRDNOST (VSŠ) - 2. IZREDNI IZPITNI ROK (28. 11. 2007)

RAČUNSKI DEL IZPITA:

1. Za konstrukcijo na sliki izračunajte notranje statične količine! Vpliva osnih in prečnih sil ni potrebno upoštevati.

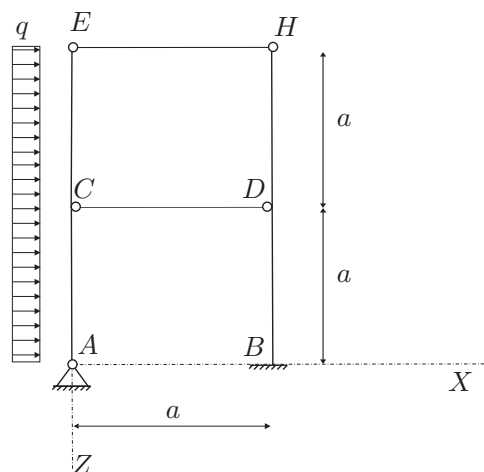
(OBVEZNA NALOGA! 40%)

Podatki: $a = 3 \text{ m}$,

$q = 10 \text{ kN/m}$,

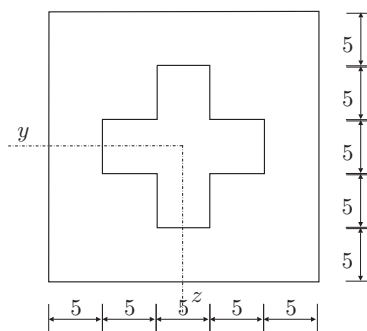
$E = 3200 \text{ kN/cm}^2$, $J_y = 90000 \text{ cm}^4$,

$A_x = 1200 \text{ cm}^2$.



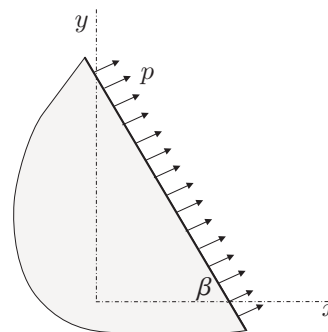
2. Prerez na sliki je obremenjen z osno silo $N_x = 10 \text{ kN}$ in upogibnim momentom $M_y = 10 \text{ kNm}$. Določite nekaj značilnih vrednosti in skicirajte diagram osnih napevosti σ_{xx} ! (30%)

Podatki za prerez so v centimetrih.



3. Na rob tanke stene, ki leži pod kotom $\beta = 60^\circ$ glede na os x , deluje enakomerna površinska obtežba velikosti $p = 10 \text{ kN/cm}^2$ pravokotno na rob, kot kaže slika. Privzemimo, da so napetosti po celotni prostornini stene konstantne. Specifična sprememba dolžine v smeri osi x (ε_{xx}) pa je enaka nič. Določite napetostni tenzor! (30%)

Podatki: $\nu = 0.3$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.



TEORETIČNI DEL IZPITA:

Izmed treh zastavljenih vprašanj si izberete dve, na kateri boste odgovarjali. Izbrani vprašanji jasno označite! Pišite čitljivo.

1. Kdaj je napetostno stanje v delcu telesa definirano?
2. Opišite osnovne predpostavke pri upogibu z osno silo!
3. Napišite in komentirajte enačbe (pomen oznak) za Eulerjeve uklonske sile! Enačbo za določitev uklonske sile izpeljite za prostoležeči nosilec!