

# Račun notranjih sil v nosilcu z ravno osjo z uporabo Heavisidove in Diracove funkcije

Dejan Zupan, Marjan Stanek, Goran Turk

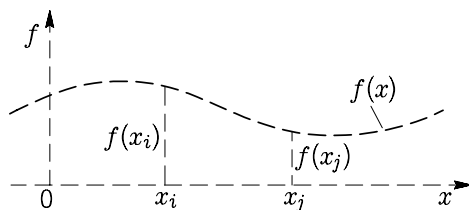
## 1. Uvod

Pri določanju notranjih sil v nosilcu z ravno osjo, ravnotežne enačbe integriramo za vsako polje posebej. Znotraj vsakega polja so notranje sile zvezne in zvezno odvedljive funkcije. Če obtežbo, ki deluje na nosilec z ravno osjo, zapišemo s Heavisidovo † in Diracovo funkcijo ‡, ravnotežne enačbe integriramo le enkrat za cel nosilec. V prispevku skušamo vpeljati omenjeni funkciji z uporabo ustreznih matematičnih orodij. Kljub temu, da je matematično ozadje zahtevno, poskušamo teorijo distribucij približati bralcu s temeljnim znanjem matematične analize.

## 2. Osnove teorije distribucij

Z računskim modelom za silo in moment predpostavimo, da je njuno prijemališče v točki. Matematična teorija, ki med drugim obravnava tudi pojave, ki se zgodijo v trenutku časa ali pa so lokalizirani tako, da delujejo v točki, se imenuje teorija distribucij. V tem razdelku opišemo osnovne pojme teorije distribucij. Namesto, da podamo vrednost funkcije  $f$  za vsak  $x$ , podamo pri teoriji distribucij realno število  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi(x) dx$  za vsako funkcijo  $\Phi(x)$ .  $\Phi(x)$  bomo vzeli iz razreda funkcij, ki so enake nič za absolutno dovolj velike vrednosti in jih imenujemo testne funkcije.

Pri klasičnem opisu funkcije podamo za vsako vrednost spremenljivke  $x$  vrednost funkcije  $f(x)$  (slika 1).



SLIKA 1: Z  $f(x)$  označimo vrednost funkcije  $f$  pri  $x$

Pri posrednem opisu ne navajamo vrednosti  $f$  v točkah, navajamo pa vrednosti integrala  $f$  po celi realni osi. Pri tem ne integriramo samo  $f$ , ampak produkte  $f(x) \Phi(x)$ . Tako kot je pri klasičnem opisu  $x$ -sov neskončno, je tudi funkcijskih vrednosti  $f(x)$  neskončno. Povsem

† Oliver Heaviside, angleški elektro inženir, 1850–1925.

‡ Paul Dirac, angleški fizik, 1902–1984.

analogno je s produkti  $f\Phi$ , saj je funkcij  $\Phi$  neskončno mnogo. Zato je tudi s posrednim opisom  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(x)dx$  funkcija  $f$  dovolj natančno opisana.

Posredni opis je za “običajne” funkcije povsem odveč. Pomen teorije distribucij pa pride do izraza pri upoštevanju točkovnih vplivov. Tako s posrednim opisom definiramo funkcije, ki v običajnem smislu sploh ne obstajajo. To so posplošene “funkcije”, za katere poznamo le vrednosti integralov  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(x)dx$ , ne pa funkcijskih vrednosti. Zaradi tega tudi uporabimo posplošene funkcije le v integralnih enačbah.

### Opis funkcij z linearnim funkcionalom

Vzemimo, da je  $f$  zvezna realna funkcija realne spremenljivke  $x$ . Funkcija  $f$  je pravilo, ki vsakemu  $x$ -su iz množice realnih števil  $\mathbb{R}$  priredi realno vrednost  $y = f(x)$ . Obstaja pa tudi posreden opis funkcije  $f$ . Pri tem opisu namesto, da podamo vrednost funkcije  $f$  za vsak  $x$ , podamo realno število  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(x)dx$  za vsako funkcijo  $\Phi(x)$ , ki ustreza določenim pogojem. Funkcije  $\Phi(x)$  morajo biti neskončnokrat zvezno odvedljive funkcije s kompaktnim nosilcem. Neskončnokrat zvezno odvedljivost privzamemo, ker so take funkcije zelo lepe, rečemo jim tudi gladke funkcije. Kompakten nosilec pa pomeni, da bo funkcija enaka nič zunaj nekega intervala  $[a, b]$ . Na kratko jih imenujemo **testne funkcije**. Množico vseh testnih funkcij realne spremenljivke označimo s  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Kadar podamo namesto  $f$  integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(x)dx$  kot preslikavo odvisno od  $\Phi$ , govorimo o **funkcionalih** in ne več o funkcijah. Funkcional je v obravnavanem primeru predpis, ki testni funkciji priredi realno število

$$\Phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi(x)dx.$$

Oglejmo si značilnosti testnih funkcij.

### Testne funkcije

*Definicija:* Testna funkcija  $\Phi(x)$  na  $\mathbb{R}$  je neskončnokrat zvezno odvedljiva ( $C^\infty$ ) funkcija s kompaktnim nosilcem.

Zvezno odvedljive funkcije poznamo, nekaj več pa bi povedali o **nosilcu funkcije**. Za začetek si oglejmo množico točk, kjer je funkcija različna od nič:

$$\mathcal{N} = \{x, f(x) \neq 0\}.$$

Take množice so lahko zelo raznolike: dobimo lahko na primer odprt interval  $(a, b)$ , poltrak  $(-\infty, a)$  ali  $(a, \infty)$ , eno samo točko  $\{a\}$ , zaprt interval  $[a, b]$ , polzaprtje intervale  $(-\infty, a]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, \infty)$  ter kombinacije (unijo) takih množic. **Nosilec** funkcije potem definiramo kot zaprtje množice točk, kjer je funkcija neničelna

$$\text{supp } f = \text{nosilec } f = \overline{\{x, f(x) \neq 0\}}.$$

S črto označimo zaprtje množice. Ker so naša območja sestavljena iz intervalov, moramo spoznati le zaprtje intervala. Zaprtje intervala s končnima mejama  $a, b$  je zaprti interval  $[a, b]$ , analogno če je  $a = -\infty$ , je zaprtje  $(-\infty, b]$  in če je  $b = \infty$ , je zaprtje  $[a, \infty)$ . Ena sama točka je zaprta množica, zato je  $\overline{\{a\}} = \{a\}$ . Podmnožica realnih števil je kompaktna, če je zaprta in omejena. Kaj je torej kompakten nosilec funkcije? Ker smo nosilec funkcije definirali kot zaprtje, to pomeni kot zaprto množico, je nosilec funkcije vedno zaprta množica. Če je nosilec realne funkcije omejen, sta največja in najmanjša vrednost intervala končno veliki, in rečemo da je **kompakten**.

*Primeri:*

1. Nosilec funkcije  $f(x) = x$ . Najprej določimo množico točk, kjer je  $f(x) \neq 0$ . Ker je  $f(x) = 0$  le v  $x = 0$ , je  $\mathcal{N} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Nosilec  $f$  je zaprtje množice  $\mathcal{N}$ :

$$\text{supp } f = \overline{\mathcal{N}} = \overline{(-\infty, 0)} \cup \overline{(0, \infty)} = (-\infty, 0] \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty).$$

Nosilec  $f$  je torej cela realna os. Ker sta obe meji neskončno, nosilec ni kompakten.

2. Nosilec funkcije  $f$

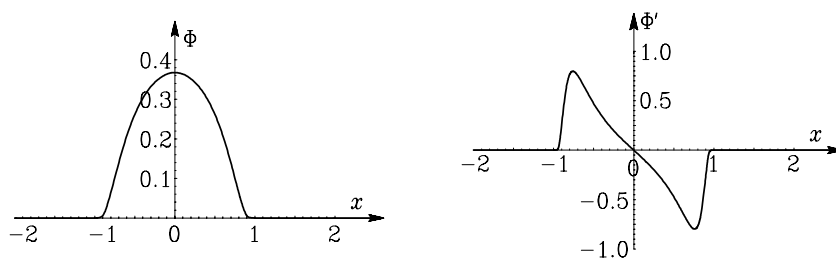
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c, \\ 1, & x = c. \end{cases}$$

Tu je množica točk, kjer je  $f(x) \neq 0$  razvidna že iz definicije:  $\mathcal{N} = \{c\}$ . Zaprtje ene točke je zopet tista točka, zato je  $\text{supp } f = \{c\}$ .  $\{c\}$  je zaprta množica, zato ima  $f$  kompakten nosilec.

3. Oglejmo si primer testne funkcije  $\Phi(x)$ , ki je določena z

$$\Phi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Graf funkcije  $\Phi(x)$  podane z enačbo (1) ter njen odvod  $d\Phi/dx$  prikazujemo na sliki 2.



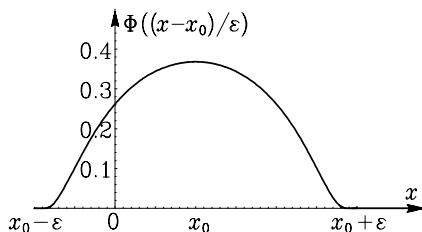
SLIKA 2: Primer testne funkcije

$\Phi(x)$  je zvezna in vsak njen odvod je zvezen. Opišimo še nosilec funkcije  $\Phi(x)$ .  $\mathcal{N} = (-1, 1)$ . Nosilec  $\Phi(x)$  je zaprtje  $\mathcal{N}$ :  $\text{supp } f = [-1, 1]$ , ker pa je to omejen interval, je kompakten. Še ena zanimivost velja. Če v (1)  $x$  zamenjamo z  $(x - x_0)/\varepsilon$ , tudi dobimo testno funkcijo v  $\mathbb{R}$  s

kompaktnim nosilcem  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ :

$$\Phi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right). \quad (2)$$

Graf funkcije (2) prikazujemo na sliki 3.



SLIKA 3: Še en primer testne funkcije

### Lastnosti testnih funkcij

- 1) Testne funkcije so enake nič zunaj dovolj velikega končnega zaprtega intervala  $[a, b]$ .
- 2) Prostor testnih funkcij  $C_0^\infty$  je realni vektorski prostor. Za realni števili  $c_1$  in  $c_2$  in testni funkciji  $\Phi_1$  in  $\Phi_2$  je  $c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2$  tudi testna funkcija.
- 3) Če je  $\Phi(x) \in C_0^\infty$ , potem je tudi vsak odvod funkcije  $\Phi$  v  $C_0^\infty$ .
- 4) Če je  $\Phi(x) \in C_0^\infty$  in  $a(x)$  neskončnokrat odvedljiva funkcija ( $C^\infty$ ), potem je tudi produkt  $a(x)\Phi(x) \in C_0^\infty$ .

### Distribucije

**Linearni funkcional**  $\mathcal{F}$  na  $C_0^\infty$  je pravilo, ki vsakemu  $\Phi(x)$  iz  $C_0^\infty$  pridruži realno število  $\mathcal{F}(\Phi)$  tako, da velja

$$\mathcal{F}(\lambda \Phi) = \lambda \mathcal{F}(\Phi), \quad \mathcal{F}(\Phi_1 + \Phi_2) = \mathcal{F}(\Phi_1) + \mathcal{F}(\Phi_2)$$

za vsa realna števila  $\lambda$  in vse  $\Phi_1, \Phi_2$  v  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Linearni funkcional na  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  je **zvezen**, če za vsako zaporedje testnih funkcij  $\Phi_m(x)$ , ki konvergira k nič, velja, da tudi zaporedje integralov  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi_m(x) dx$  konvergira k nič, ko gre  $m$  v neskončnost.

Zveznemu linearnemu funkcionalu na  $C_0^\infty$  rečemo **distribucija**.

*Definicija:* Realna funkcija  $f(x)$  je **lokalno integrabilna**, če integral  $\int_{\Omega} |f(x)| dx$  obstaja za vsako omejeno območje  $\Omega$  v  $\mathbb{R}$ .

Primer: Zvezne in odsekoma zvezne funkcije so lokalno integrabilne. Vzemimo na primer  $x^2$ . Integral po celem  $\mathbb{R}$  je  $\infty$ , vendar pa je končen na vsakem omejenem intervalu.

*Trditev:* Naj bo  $f(x)$  lokalno integrabilna. Z enačbo

$$\mathcal{F}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi(x) dx, \quad \Phi \in C_0^\infty \quad (3)$$

je določena distribucija! Tako distribucijo pišemo tudi kot  $\mathcal{F}(\Phi) = \langle f, \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi(x) dx$ . Enačba (3) določa linearni funkcional nad  $C_0^\infty$ . Pokazati moramo

$$\mathcal{F}(\lambda\Phi) = \lambda \mathcal{F}(\Phi),$$

kar za naš primer pomeni

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(x) \Phi(x) dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi(x) dx,$$

kar pa je znana lastnost integrala. Analogno lastnost  $\mathcal{F}(\Phi_1 + \Phi_2) = \mathcal{F}(\Phi_1) + \mathcal{F}(\Phi_2)$  sledi iz lastnosti integrala, da je †

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\Phi_1(x) + \Phi_2(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi_1(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi_2(x) dx.$$

Pokazali smo torej, da lahko vsaki lokalno integrabilni funkciji priredimo distribucijo.

*Definicija:* Distribucija je **regularna**, če jo lahko zapišemo z lokalno integrabilno funkcijo  $f(x)$  v obliki (3). Vse ostale distribucije so **singularne**. Če je distribucija  $\mathcal{F}$  singularna, poznamo le predpis

$$\mathcal{F} : \Phi \mapsto \mathcal{F}(\Phi), \quad (4)$$

ki  $\Phi \in C_0^\infty$  priredi realno število. Simbolno lahko uporabimo tudi zapis (3), kar pomeni, da pišemo

$$\mathcal{F}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x) \Phi(x) dx. \quad (5)$$

Desna stran nima pomena v smislu integracije, saj na desni ni običajen integral. Gre zgolj za formalen zapis! Ker pa je distribucija  $\mathcal{F}$  singularna, pri  $\mathcal{F}(x)$  ne gre za funkcijsko vrednost v običajnem smislu, zato smo obdržali kar isto črko.  $\mathcal{F}(x)$  imenujemo tudi **posplošena funkcija**.

V nadaljevanju si oglejmo tri primere. Z drugim in tretjim primerom vpeljemo Heavisidovo in Diracovo funkcijo ter pojasnimo nekatere njune lastnosti.

---

† I. Vidav, Višja matematika I, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1987.

## Primeri

1. Oglejmo si funkcional na  $C_0^\infty$ , podan z izrazom

$$\mathcal{F}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} c \Phi(x) dx. \quad (6)$$

S  $c$  je označena konstanta. Integral (6) je linearni funkcional na  $C_0^\infty$  in je zato distribucija. Ker je generiran z enačbo (3) za konstantno funkcijo  $f(x) = c$ , predstavlja primer regularne distribucije (konstanta je lokalno integrabilna).

2. Z  $\Omega$  označimo poljubno območje v  $\mathbb{R}$  in obravnavajmo naslednji funkcional na  $C_0^\infty$

$$\mathcal{H}(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi(x) dx.$$

Ta funkcional je linearen in ga lahko zapišemo v obliki (3)

$$\mathcal{H}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\Omega}(x) \Phi(x) dx,$$

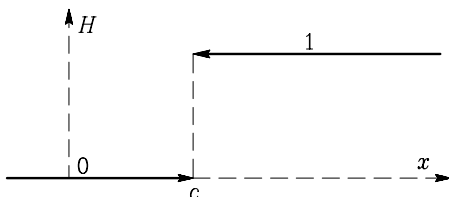
kjer je z  $I_{\Omega}(x)$  označena funkcija, ki opiše območje  $\Omega$ . Če je  $x \in \Omega$ , je  $I_{\Omega}(x) = 1$ , v nasprotnem primeru je  $I_{\Omega}(x) = 0$ . Ker je  $I_{\Omega}(x)$  odsekoma zvezna, je lokalno integrabilna, in je zato  $\mathcal{H}$  regularna distribucija. Poseben primer dobimo, če je območje  $\Omega$  interval  $(c, \infty)$ . V tem primeru  $I_{\Omega}(x)$  običajno označimo z  $H(x - c)$  in imenujemo **Heavisidova funkcija**, ustrezen funkcional pa Heavisidova distribucija

$$\mathcal{H}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - c) \Phi(x) dx. \quad (7)$$

Heavisidovo funkcijo definiramo takole<sup>[3]</sup>:

$$H(x - c) = \begin{cases} 1, & x > c, \\ 0, & x < c. \end{cases} \quad (8)$$

Graf Heavisidove funkcije prikazujemo na sliki 4.



SLIKA 4: Heavisidova funkcija

Opazimo, da Heavisidova funkcija  $H(x - c)$  v točki  $x = c$  ni definirana in v običajnem smislu ni odvedljiva.

3. S  $c$  naj bo označena fiksna točka na  $\mathbb{R}$ . Oglejmo si linearni funkcional  $\delta_c$ , definiran z enačbo

$$\delta_c(\Phi) = \Phi(c) \quad \text{ali} \quad \delta_c : \Phi \mapsto \Phi(c). \quad (9)$$

Ta funkcional priredi vsaki testni funkciji vrednost pri  $x = c$ . S tem predpisom je torej definiran linearen funkcional na  $C_0^\infty$  oziroma distribucija, ki jo imenujemo **Diracova distribucija** s polom v točki  $c$ . Pokažemo lahko, da je to primer singularne distribucije, saj je ne moremo generirati po enačbi (3)<sup>[3]</sup>. V skladu z dogovorom o zapisu singularnih distribucij (enačba (5)) pišemo

$$\delta_c(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_c(x) \Phi(x) dx = \Phi(c). \quad (10)$$

Izraz  $\delta_c(x)$  označujemo kot  $\delta(x - c)$  in imenujemo **Diracova  $\delta$  (posplošena) funkcija**:

$$\delta_c(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) \Phi(x) dx = \Phi(c). \quad (11)$$

### Distribucije na prostoru $C^\infty$

Distribucije smo definirali kot funkcionale na prostoru  $C_0^\infty$ . Želeli bi opisati delovanje distribucij ne zgolj za testne funkcije, ampak tudi za bolj splošne funkcije, to je vsaj za funkcije razreda  $C^\infty$ .

Naj bo  $f(x)$  lokalno integrabilna in naj bo nosilec funkcije  $f$  zaprt interval  $[p, q]$  (kompakten nosilec).  $\Psi(x)$  naj bo lokalno integrabilna neskončnokrat zvezno odvedljiva ( $C^\infty$ ) funkcija. Izberimo  $\Phi(x) \in C_0^\infty$  tako, da velja

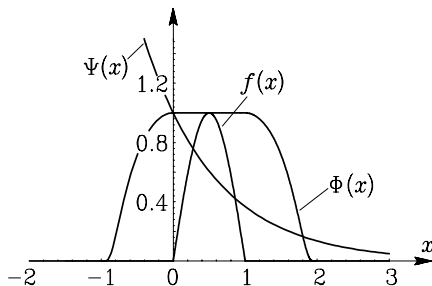
$$\Psi(x) \Phi(x) = \Psi(x) \quad (12)$$

na intervalu, ki vsebuje nosilec funkcije  $f$  ( $\Phi$  ima večji nosilec kot  $f$ ).

Funkcije, ki ustrezajo tem pogojem, so na primer take (glej tudi sliko 5)

$$\Psi(x) = e^{-x}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ e^{1/(x^2-1)+1}, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{1/((x-1)^2-1)+1}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

V tem primeru je nosilec funkcije  $f$  zaprt interval  $[0, 1]$ ,  $\Phi(x)$  pa je na  $[0, 1]$  enaka 1.



SLIKA 5: Funkcije  $f$ ,  $\Psi$  in  $\Phi$

Lokalno integrabilna funkcija  $f(x)$  določa distribucijo  $\mathcal{F}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi(x) dx$ , ki smo jo definirali za  $\Phi \in C_0^\infty$ . Če je  $f(x)$  lokalno integrabilna in ima kompakten nosilec, lahko definicijo distribucije razširimo na vse funkcije  $\Psi \in C^\infty$ . Ker na vrednost integrala  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(x) \Phi(x) dx$  ne vpliva, kar se dogaja izven nosilca funkcije  $f$ , tam je  $f(x)$  pač nič, z uporabo (12) velja

$$\mathcal{F}(\Psi \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(x) \Phi(x) dx = \int_p^q f(x) \Psi(x) \Phi(x) dx = \int_p^q f(x) \Psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(x) dx.$$

Dobili smo

$$\mathcal{F}(\Psi \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(x) dx. \quad (13)$$

S  $\mathcal{F}(\Psi \Phi)$  je (ker je  $\Psi \Phi \in C_0^\infty$ ) določena (regularna) distribucija, vendar na desni strani enačbe (13) testna funkcija  $\Phi$  sploh ne nastopa. Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(x) dx$  torej določa distribucijo, ki je definirana za vse  $\Psi \in C^\infty$ . Tako smo dobili razširitev prejšnje definicije regularne distribucije (3), ki jo označimo z  $\mathcal{F}(\Psi)$  in dobimo

$$\mathcal{F}(\Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(x) dx = \mathcal{F}(\Psi \Phi). \quad (14)$$

S tem smo dobili formulo, kako distribucija  $\mathcal{F}$  "učinkuje" na bolj splošnih funkcijah iz  $C^\infty$ , ki velja le, če ima  $f(x)$  kompakten nosilec.

Po analogiji z izpeljavo enačbe (14) izpeljemo še definicijo singularne distribucije na funkcijah iz  $C^\infty$ . Singularne distribucije smo definirali s predpisom (4)

$$\mathcal{F} : \Phi \mapsto \mathcal{F}(\Phi).$$

Za posplošitev potrebujemo definicijo **nosilca distribucije**. Distribucija  $\mathcal{F}$  je identično enaka nič na odprtem intervalu  $(m, n)$  iz  $\mathbb{R}$ , če je

$$\mathcal{F}(\Phi) = 0 \quad (15)$$



za vse funkcije  $\Phi \in C_0^\infty$ , ki so enake nič zunaj intervala  $(m, n)$ . Nosilec distribucije  $\mathcal{F}$  je zaprtje množice točk  $x$ , za katere distribucija  $\mathcal{F}$  ni enaka nič; označimo ga s  $\text{supp } \mathcal{F}$ .<sup>†</sup>

Naj ima  $\mathcal{F}$  nosilec, ki je vsebovan v zaprtem intervalu  $[p, q]$  (kompakten nosilec). Naj bo  $\Psi(x)$  poljubna funkcija iz  $C^\infty$ . Radi bi ugotovili, kaj je  $\mathcal{F}(\Psi)$ . Najdemo lahko tako  $\Phi \in C_0^\infty$ , da velja (glej (12) in sliko 5)

$$\Phi(x) \Psi(x) = \Psi(x) \quad \text{za } x \in [p, q]. \quad (16)$$

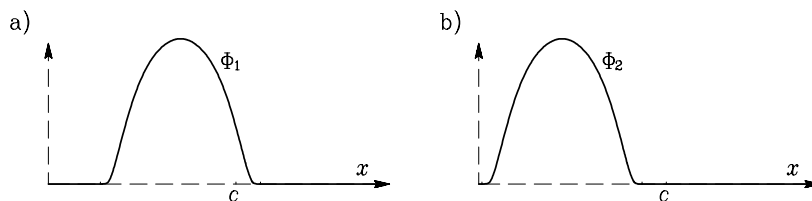
Potem pa definiramo po analogiji z enačbo (14) singularno distribucijo, kot operator na  $C^\infty$ :

$$\mathcal{F}(\Psi) = \mathcal{F}(\Phi \Psi). \quad (17)$$

Enačba (17) nam pove, kako izračunamo singularno distribucijo  $\mathcal{F}(\Psi)$ , ki ima kompaktni nosilec, če je argument  $\Psi$  poljubna funkcija iz  $C^\infty$ .<sup>‡</sup>

Kot poseben primer si oglejmo Diracovo distribucijo. Nosilec  $\delta_c$  je le točka  $\{c\}$ , to pa je kompakten nosilec. Dokaz! Ugotoviti moramo za katere vrednosti  $x \in \mathbb{R}$  je distribucija  $\delta_c(\Phi)$  različna od nič. Naj bo  $\Phi_1$  taka funkcija iz  $C_0^\infty$ , da je  $\Phi_1(c) \neq 0$ . Potem iz definicije (9)  $\delta$  distribucije sledi (slika 6a))

$$\delta_c(\Phi_1) = \Phi_1(c) \neq 0. \quad (18)$$



SLIKA 6: a) Funkcija  $\Phi_1$       b) Funkcija  $\Phi_2$

Ugotovili smo, da mora nosilec distribucije  $\delta_c$  vsebovati točko  $c$ . Če je  $\Phi_2$  taka iz  $C_0^\infty$ , da je  $\Phi_2(c) = 0$ , potem je tudi (slika 6b)

$$\delta_c(\Phi_2) = \Phi_2(c) = 0. \quad (19)$$

Iz ugotovitev (18) in (19) v skladu z definicijo nosilca distribucije sledi

$$\text{supp } \delta_c = \{c\}.$$

Nosilec  $\delta_c(\Phi)$  je torej res kompakten in lahko uporabimo enačbe (17), (10) in (16):

$$\delta_c(\Psi) = \delta_c(\Phi \Psi) = \Phi(c) \Psi(c) = \Psi(c).$$

<sup>†</sup> Definicija  $\text{supp } \mathcal{F}$  je zelo podobna definiciji  $\text{supp } f$ , le da moramo pri distribucijah upoštevati posredno odvisnost od vrednosti na realni osi ( $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Phi)$  in  $\Phi = \Phi(x)$ ).

<sup>‡</sup> Izkaže se, da je definicija (17) neodvisna od izbire testne funkcije  $\Phi$ .

Če v skladu z dogovoroma (5) in (11) simbolno pišemo

$$\delta_c(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) \Phi(x) dx, \quad (20)$$

smo ugotovili, da je

$$\delta_c(\Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) \Psi(x) dx = \Psi(c) \quad (21)$$

za vse  $\Psi \in C^\infty$ . V posebnem primeru, ko je  $\Psi(x) = 1$ , to pomeni

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) dx = 1, \quad (22)$$

kar pa seveda ni integral v običajnem smislu (ni Riemannov integral).

### Posplošeni ali distribucijski odvod

Če je  $f(x)$  odvedljiva funkcija v  $\mathbb{R}$ , katere prvi odvod  $f'$  je lokalno integrabilen, potem tudi  $f'$  določa distribucijo. To distribucijo kar poiščemo. Ker je  $f'$  lokalno integrabilna, jo lahko zapišemo kot  $\mathcal{F}'(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \Phi(x) dx$ . Sedaj pa uporabimo enačbo za integriranje po delih

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \Phi(x) dx = \int_a^b f'(x) \Phi(x) dx = f(x) \Phi(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \Phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi'(x) dx. \quad (23)$$

Upoštevali smo, da lahko najdemo dovolj velik končni interval  $[a, b]$ , da velja  $\Phi(x) = 0$  za  $x$  zunaj  $[a, b]$ . Ugotovili smo

$$\mathcal{F}'(\Phi) = -\mathcal{F}(\Phi').$$

Če je  $\Phi \in C_0^\infty$ , je tudi  $\Phi' \in C_0^\infty$ , zato je  $-\mathcal{F}(\Phi')$  res distribucija. Hkrati smo "pridelali" definicijo za odvode regularnih distribucij

$$\mathcal{F}'(\Phi) = -\mathcal{F}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right). \quad (24)$$

Definicijo posplošimo na poljubne distribucije.

*Definicija:* Naj bo  $\mathcal{F} : \Phi \rightarrow \mathcal{F}(\Phi)$  distribucija. Odvod distribucije  $D\mathcal{F}$  je preslikava, ki  $\Phi \in C_0^\infty$  priredi  $-\mathcal{F}(\Phi')$

$$D\mathcal{F} : \Phi \mapsto -\mathcal{F}(\Phi'). \quad (25)$$

*Lastnosti distribucijskega odvoda*

1. Ker je odvod testne funkcije spet testna funkcija, je  $-\mathcal{F}(\Phi')$  distribucija, torej je posplošeni ali distribucijski odvod  $D\mathcal{F}$  spet distribucija.
2. Za distribucijski odvod veljajo lastnosti običajnega odvoda<sup>[5]</sup>

$$D(\mathcal{F} + \mathcal{G}) = D\mathcal{F} + D\mathcal{G}, \quad D(\lambda \mathcal{F}) = \lambda D\mathcal{F}.$$

*Dogovor:* Naj bo  $\mathcal{F}$  neka distribucija. Potem lahko pišemo tudi:  $\mathcal{F}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x) \Phi(x) dx$  (glej (5)). Ker je  $D\mathcal{F}$  spet distribucija, jo lahko pišemo kot

$$D\mathcal{F}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} D\mathcal{F}(x) \Phi(x) dx \quad (26)$$

in rečemo, da je  $D\mathcal{F}(x)$  **posplošeni odvod** (posplošene) funkcije  $\mathcal{F}(x)$ . Za regularne distribucije potem velja (23)

$$\int_{-\infty}^{\infty} Df(x) \Phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi'(x) dx,$$

od koder sledi, da se posplošeni odvod  $Df(x)$  lokalno integrabilne funkcije  $f$  ujema z običajnim odvodom, če je le  $f(x)$  odvedljiva v običajnem smislu. To je preprosto preveriti, saj če  $Df$  nadomestimo z  $f'$ , pomeni gornja enačba integracijo po delih.

*Primer:* Po enačbi (25) izračunamo odvod distribucije, ki jo določa Heavisidova funkcija  $H(x - c)$ . Heavisidova funkcija je lokalno integrabilna, zato določa distribucijo (enačba (7))

$$\mathcal{H}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - c) \Phi(x) dx.$$

Odvod  $\mathcal{H}(\Phi)$  izračunamo po definiciji (25):

$$D\mathcal{H}(\Phi) = -\mathcal{H}(\Phi') = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x - c) \Phi'(x) dx.$$

Distribucija  $\mathcal{H}(\Phi)$  je regularna, zato je na desni integral v običajnem smislu:

$$D\mathcal{H}(\Phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x - c) \Phi'(x) dx = - \int_c^{\infty} \Phi'(x) dx = -[\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) - \Phi(c)].$$

Ker je  $\Phi(x)$  testna funkcija je za velike vrednosti enaka nič, zato je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0$  in velja

$$D\mathcal{H}(\Phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x - c) \Phi'(x) dx = \Phi(c).$$

Po definiciji Diracove distribucije (9) je  $\Phi(c) = \delta_c(\Phi)$ , zato sledi

$$D\mathcal{H}(\Phi) = - \int_{-\infty}^{\infty} H(x-c) \Phi'(x) dx = \Phi(c) = \delta_c(\Phi),$$

torej velja

$$D\mathcal{H}(\Phi) = \delta_c(\Phi). \quad (27)$$

S tem smo pokazali, da je distribucijski odvod Heavisidove distribucije  $\mathcal{H}(\Phi)$  enak Diracovi distribuciji. Če pa uporabimo dogovor o zapisu distribucij z integrali, dobimo (glej (7), (26) in (20)):

$$D\mathcal{H}(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} DH(x-c) \Phi(x) dx, \quad \delta_c(\Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c) \Phi(x) dx.$$

Ker je po (27)  $D\mathcal{H}(\Phi) = \delta_c(\Phi)$  za vse  $\Phi \in C_0^\infty$ , sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} DH(x-c) \Phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-c) \Phi(x) dx$$

in velja, da je posplošeni odvod Heavisidove funkcije enak Diracovi delta funkciji

$$DH(x-c) = \delta(x-c). \quad (28)$$

Definicijo odvoda distribucije lahko razširimo tudi na višje odvode. Tako je  $k$ -ti odvod distribucije  $\mathcal{F}$  določen s predpisom

$$D^k \mathcal{F} : \Phi \rightarrow (-1)^k \mathcal{F}(\Phi^{(k)}),$$

kjer smo s  $\Phi^{(k)}$  označili  $k$ -ti odvod testne funkcije. V skladu z dogovorom (5) pa sledi še enačba za višje posplošene odvode posplošenih funkcij:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D^k \mathcal{F}(x) \Phi(x) dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x) \Phi^{(k)}(x) dx.$$

### 3. Integriranje Heavisidove in Diracove funkcije

Pri določanju notranjih sil v nosilcu moramo izračunati integrala

$$I(x) = \int_a^x f(\bar{x}) H(\bar{x}-c) d\bar{x}, \quad I(x) = \int_a^x \delta(\bar{x}-c) d\bar{x}. \quad (29)$$

Z  $f(x)$  označimo neskončno krat zvezno odvedljivo funkcijo na realni osi, s  $H(x-c)$  Heavisidovo funkcijo, z  $\delta(x-c)$  pa Diracovo funkcijo. Predpostavimo, da je  $x > a$ .

**Računanje prvega izmed integralov (29)**

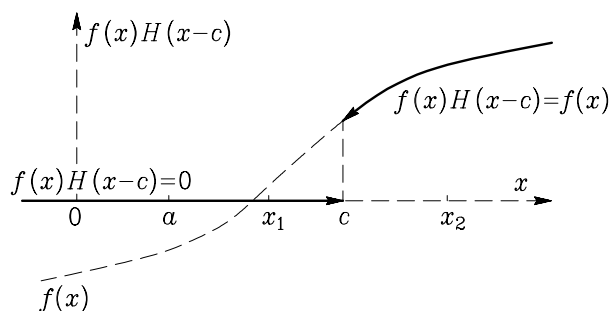
Obravnavamo dve možnosti:  $a < c$  in  $a > c$ .

a)  $a < c$  :

Z upoštevanjem osnovnega izreka integralskega računa, definicije Heavisidove funkcije (8) in slike 7 sledi

$$I(x) = \begin{cases} \int_0^x 0 d\bar{x} = 0, & x < c, \\ \int_0^a 0 dx + \int_a^x f(\bar{x}) d\bar{x} = F(x) - F(a), & x > c, \end{cases} \quad (30)$$

kjer smo z  $F(x)$  označili integral  $\int_a^x f(\bar{x}) d\bar{x}$ .

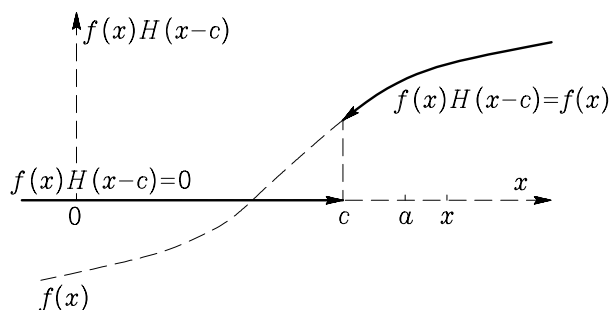


SLIKA 7: Integrand  $f(x)H(x-c)$  za primer, ko je  $a < c$

b)  $a > c$  :

Z upoštevanjem osnovnega izreka integralskega računa, definicije Heavisidove funkcije (8) in slike 8 sledi

$$I(x) = \int_a^x f(\bar{x}) d\bar{x} = F(x) - F(a). \quad (31)$$



SLIKA 8: Integrand  $f(x)H(x-c)$  za primer, ko je  $a > c$

Enačbe (30) in (31) lahko zapišemo z eno samo univerzalno enačbo:

$$I(x) = \int_a^x f(\bar{x}) H(\bar{x} - c) d\bar{x} = [F(x) - F(c)] H(x - c) - [F(a) - F(c)] H(a - c). \quad (32)$$

Pravilnost izraza (32) pokažemo, če upoštevamo definicijo Heavisidove funkcije (8).

$$\begin{aligned} a < c, x < c &\rightarrow I(x) = 0, \\ a < c, x > c &\rightarrow I(x) = F(x) - F(c), \\ a > c &\rightarrow I(x) = F(x) - F(c) - F(a) + F(c) = F(x) - F(a). \end{aligned}$$

### Računanje drugega izmed integralov (29)

Ker je nosilec funkcije  $\delta(x - c)$  enak  $\{c\}$  in ker je  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) dx = 1$  (enačba (22)), velja za poljuben interval  $[a, b]$

$$\int_a^b \delta(x - c) dx = \begin{cases} 0, & c \notin [a, b], \\ 1, & c \in [a, b]. \end{cases} \quad (33)$$

Tu je bila zgornja meja integrala  $b$  fiksna. Oglejmo si še primer, ko je zgornja meja poljubna vrednost  $x > a$ . Zopet obravnavamo dve možnosti:  $a < c$  in  $a > c$ .

a)  $\boxed{a < c}$  :

Iz enačbe (33) sledi

$$I(x) = \int_a^x \delta(\bar{x} - c) d\bar{x} = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x > c. \end{cases} \quad (34)$$

Preizkus je preprost: če je  $a < c$  in  $x < c$ , je  $c \notin [a, x]$ , zato je integral po (33) enak nič. Če pa je  $a < c$  in  $x \geq c$ , je  $c \in [a, x]$  in je integral enak 1.

b)  $\boxed{a > c}$  :

Ker je po predpostavki  $x > a > c$ , je  $c \notin [a, x]$ , zato iz (33) sledi

$$I(x) = \int_a^x \delta(\bar{x} - c) d\bar{x} = 0. \quad (35)$$

Enačbi (34) in (35) zapišemo z enačbo

$$I(x) = \int_a^x \delta(\bar{x} - c) d\bar{x} = H(x - c) - H(a - c). \quad (36)$$

Pravilnost izraza (36) pokažemo, če upoštevamo definicijo Heavisidove funkcije (8).

$$\begin{aligned} a < c, x < c &\rightarrow I(x) = H(x - c) - H(a - c) = 0, \\ a < c, x > c &\rightarrow I(x) = H(x - c) - H(a - c) = 1, \\ a > c &\rightarrow I(x) = H(x - c) - H(a - c) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Z enačbama (32) in (36) sta izvednotena “določena integrala”. Pri reševanju nalog se izkaže, da je preprosteje, če uporabimo simbolična nedoločena integrala. Zapišemo ju takole:

$$\int f(x) H(x - c) dx = [F(x) - F(c)] H(x - c) + K_1, \quad \frac{dF}{dx} = f, \quad (37)$$

$$\int \delta(x - c) dx = H(x - c) + K_2. \quad (38)$$

S  $K_1$  in  $K_2$  označujemo integracijski konstanti. Nedoločena integrala moramo ustrezno razumeti. Nedoločen integral v običajnem smislu je tista funkcija, katere odvod je integrirana funkcija. Tako kot smo **posplošili pojem odvoda, posplošimo tudi pojem nedoločenega integrala**. Posplošeni nedoločeni integral posplošene funkcije  $f(x)$  je tista funkcija  $F(x)$ , katere distribucijski odvod je enak  $f(x)$

$$F(x) = \int f(x) dx + C \rightarrow DF(x) = f(x). \quad (39)$$

$C$  je integracijska konstanta. Dokažimo najprej enačbo (38). Ker je distribucijski odvod Heavisidove funkcije Diracova funkcija (enačba (28)), je s tem enačba (38) že dokazana. Dokaz enačbe (37) je malo zahtevnejši. Izračunajmo posplošeni odvod desne strani v enačbi (37):

$$D([F(x) - F(c)] H(x - c)) = D([F(x) - F(c)]) H(x - c) + [F(x) - F(c)] DH(x - c).$$

Ker je odvod konstante nič, odvod  $H(x - c)$  pa  $\delta(x - c)$ , je

$$D([F(x) - F(c)] H(x - c)) = DF(x) H(x - c) + [F(x) - F(c)] \delta(x - c).$$

Funkcija  $F$  je običajen integral funkcije  $f$ , zato se posplošeni odvod ujema z običajnim in velja

$$DF(x) = F'(x) = f(x).$$

S posplošenim odvajanjem desne strani v enačbi (37) dobimo pravi integrand  $f(x) H(x - c)$ , kateremu je prištet še člen  $[F(x) - F(c)] \delta(x - c)$ . Enačba (37) je pravilna, če dokažemo, da je  $[F(x) - F(c)] \delta(x - c)$  enak nič; toda v smislu distribucij. To pomeni, da mora biti nosilec distribucije  $\int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F(c)] \delta(x - c) dx$  prazna množica. Če je nosilec distribucije prazna množica, je po (15) distribucija enaka nič. Pokazati moramo torej veljavnost izraza

$$\int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F(c)] \delta(x - c) dx = 0.$$

Razliko  $F(x) - F(c)$ , ki je  $C^\infty$ , označimo s  $\Psi(x)$ :  $\Psi(x) = F(x) - F(c)$ . Zaradi enačbe (21) je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \delta(x - c) dx = \Psi(c) = F(c) - F(c) = 0.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F(c)] \delta(x - c) dx$  je torej nič na celi realni osi, torej ne more biti neničeln na nobenem končnem intervalu. Zato je posplošena funkcija  $[F(x) - F(c)] \delta(x - c)$  enaka nič. Enačba (37) je s tem dokazana.

Na koncu zapišimo enačbo (37) še za primer, ko je

$$f(x) = (x - c)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Nedoločeni integral oziroma primitivna funkcija je v tem primeru enaka

$$F(x) = \frac{(x - c)^{n+1}}{n + 1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Ker je  $F(c) = 0$ , sledi

$$\int (x - c)^n H(x - c) dx = \frac{(x - c)^{n+1}}{n + 1} H(x - c) + K_1. \quad (41)$$

V primeru, da je  $n$  enak nič, pa dobimo

$$\int H(x - c) dx = (x - c) H(x - c) + K_1. \quad (42)$$

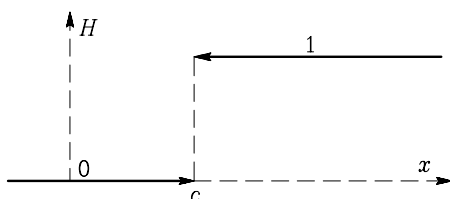
Pri reševanju nalog potrebujemo izraze (37), (38), (41) in (42).

### Povzetek razdelkov 2 in 3

- **Heavisidova funkcija** je definirana z enačbo

$$H(x - c) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

To je funkcija, ki je povsod zvezna, razen v točki  $x = c$ . Graf  $H(x - c)$  prikazujemo na sliki 9.



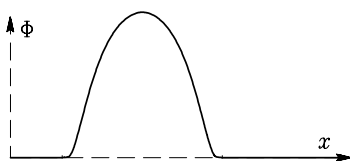
SLIKA 9: Heavisidova funkcija



- **Diracova (posplošena) funkcija** je definirana s predpisom

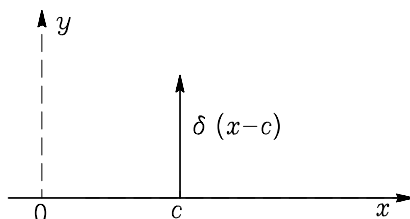
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) \Phi(x) dx = \Phi(c), \quad \Phi \in C_0^\infty.$$

Tu  $\delta(x - c)$  ni funkcija v običajnem smislu, temveč gre le za simbolni zapis predpisa, ki poljubni funkciji  $\Phi$ , ki ji pravimo testna funkcija, priredi vrednost v točki  $c$ . Primer testne funkcije prikazujemo na sliki 10.



SLIKA 10: Primer testne funkcije

Iz grafa sta razvidni glavni lastnosti funkcije  $\Phi$ , ki je “gladka” in enaka nič zunaj dovolj velikega končnega intervala. Pomembna lastnost  $\delta(x - c)$  je, da je integral  $\int_a^b \delta(x - c) \Phi(x) dx$  različen od nič le, če je  $c \in [a, b]$ , zato rečemo, da je  $x = \{c\}$  **nosilec** Diracove  $\delta$  funkcije, le to pa simbolno (! zgolj simbolno !) narišemo kot prikazujemo na sliki 11.



SLIKA 11: Simbolna predstavitev Diracove funkcije

- **Lastnosti Heavisidove in Diracove funkcije**

1. Odvod Heavisidove funkcije je Diracova funkcija. Ker  $H(x - c)$  v točki  $c$  ni odvedljiva, v tem kontekstu govorimo o posplošenem ali distribucijskem odvodu in pišemo

$$DH(x - c) = \delta(x - c).$$

2. Podobno kot pri odvodu posplošimo tudi integral. Posplošeni nedoločeni integral posplošene funkcije  $f(x)$  je posplošena funkcija  $F(x)$ , za katero velja

$$\int f(x) dx + C = F(x), \quad DF(x) = f(x).$$

3. Posplošeni integral Diracove funkcije je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - c) dx = 1.$$

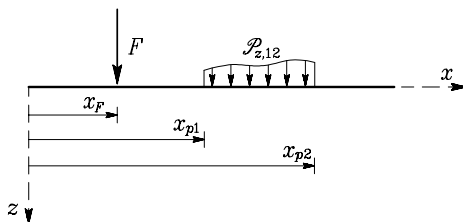
4. Veljajo naslednje enačbe:

$$\begin{aligned} \int f(x) H(x - c) dx &= [F(x) - F(c)] H(x - c) + K_1, & \frac{dF}{dx} &= f, \\ \int \delta(x - c) dx &= H(x - c) + K_2, \\ \int (x - c)^n H(x - c) dx &= \frac{(x - c)^{n+1}}{n + 1} H(x - c) + K_3, \\ \int H(x - c) dx &= (x - c) H(x - c) + K_4. \end{aligned}$$

#### 4. Zapis obtežbe na nosilec v ravnini

Če na nosilec z ravno osjo delujeta sila  $F$  in linijska obtežba  $\mathcal{P}_{z,12}(x)$  v smeri osi  $z$ , zapišemo linijsko obtežbo  $\mathcal{P}_z$  z Diracovo in Heavisidovo funkcijo takole (slika 12)

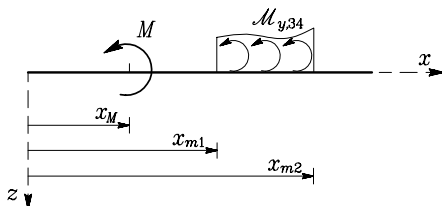
$$\mathcal{P}_z(x) = F \delta(x - x_F) + \mathcal{P}_{z,12}(x) [H(x - x_{p1}) - H(x - x_{p2})]. \quad (43)$$



SLIKA 12: Linijska obtežba  $\mathcal{P}_z$

Če na nosilec delujeta moment  $M$  in linijska momentna obtežba  $\mathcal{M}_{y,12}(x)$  okrog osi  $y$ , zapišemo linijsko momentno obtežbo  $\mathcal{M}_z$  takole (slika 13)

$$\mathcal{M}_y(x) = M \delta(x - x_M) + \mathcal{M}_{y,12}(x) [H(x - x_{m1}) - H(x - x_{m2})]. \quad (44)$$

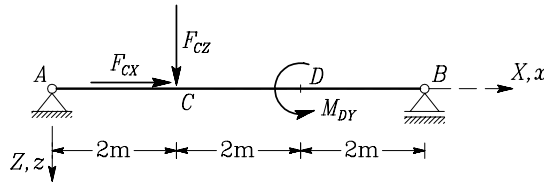


SLIKA 13: Linijska momentna obtežba  $\mathcal{M}_y$

Uporaba Heavisidove funkcije za opis “skokov” v obtežbi je povsem na mestu.  $H(x - c)$  namreč opisuje enotski “skok” v točki  $c$ . Utemeljiti pa moramo uporabo Diracove funkcije.  $\delta(x - c)$  je posplošena funkcija, zato v tem zapisu ne pomeni konkretne vrednosti za izbrana  $x$  in  $c$ . Njen pomen je jasen šele v integralni obliki  $\int \delta(x - c) f(x) dx$ , ki pa je dobro definirana količina. Zapisa (43) in (44) sta torej smiselna zato, ker ju bomo vstavili v diferencialne enačbe, ki jih bomo prevedli v integralno obliko ( $\delta(x - c)$  bo nastopala zgolj pod integralom).

## 5. Računski primeri

**Primer 1:** Izračunajmo reakcije in notranje sile za primer na sliki 14! Velikosti sil sta  $F_{CX} = 2$  kN in  $F_{CZ} = 5$  kN. Točkovni moment je  $M_{DY} = -3$  kNm.

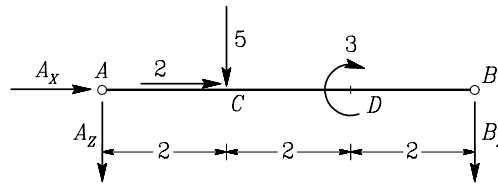


SLIKA 14: Prostoležeči nosilec, obtežen s silama in momentom

### Zapis obtežbe

Podpore nadomestimo z reakcijami, nato sile in moment zapišemo z Diracovo funkcijo (slika 15)

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_x &= A_X \delta(x) + 2 \delta(x - 2), \\ \mathcal{P}_z &= A_Z \delta(x) + 5 \delta(x - 2) + B_Z \delta(x - 6), \\ \mathcal{M}_y &= -3 \delta(x - 4).\end{aligned}\tag{45}$$



SLIKA 15: Podpori nadomestimo z ustreznimi reakcijami

### Račun reakcij in notranjih sil

Reakcije in notranje sile  $N_x$ ,  $N_z$  in  $M_y$  izračunamo iz enačb

$$\frac{dN_x}{dx} = -\mathcal{P}_x, \quad \frac{dN_z}{dx} = -\mathcal{P}_z, \quad \frac{dM_y}{dx} = N_z - \mathcal{M}_y,\tag{46}$$

če je obtežba določena zveznimi funkcijami. V nasprotnem primeru enačbe (46) posplošimo v smislu distribucijskih enačb

$$DN_x = -\mathcal{P}_x, \quad DN_z = -\mathcal{P}_z, \quad DM_y = N_z - \mathcal{M}_y.$$

**a) Osnova sila:**

Ravnotežno enačbo

$$DN_x = -\mathcal{P}_x$$

integriramo (glej (39))

$$N_x = -\int \mathcal{P}_x dx + K_1 = \int [-A_X \delta(x) - 2\delta(x-2)] dx + K_1$$

in ob upoštevanju enačbe (38) dobimo

$$N_x = -A_X H(x) - 2H(x-2) + K_1. \quad (47)$$

V robnih pogojih

$$N_x(+0) = -A_X, \quad N_x(6-0) = 0$$

upoštevamo (47) in dobimo

$$-A_X + K_1 = -A_X, \quad -A_X - 2 + K_1 = 0.$$

Rešitev teh enačb je  $K_1 = 0$  in  $A_X = -2$  kN. Osnova silo  $N_x$  sedaj zapišemo takole:

$$\boxed{N_x = 2H(x) - 2H(x-2)}. \quad (48)$$

**b) Prečna sila in upogibni moment:**

Ravnotežno enačbo za prečno silo

$$DN_z = -\mathcal{P}_z$$

integriramo

$$N_z = -\int \mathcal{P}_z dx + K_2 = \int [-A_Z \delta(x) - 5\delta(x-2) - B_Z \delta(x-6)] dx + K_2$$

in dobimo

$$N_z(x) = -A_Z H(x) - 5H(x-2) - B_Z H(x-6) + K_2. \quad (49)$$

Sedaj integrirajmo še ravnotežno enačbo za upogibni moment

$$DM_y = N_z - \mathcal{M}_y.$$

Upoštevamo (49) in zadnjo izmed enačb (45)

$$M_y = \int (N_z - \mathcal{M}_y) dx + K_3 = \int [-A_Z H(x) - 5H(x-2) - B_Z H(x-6) + K_2 + 3\delta(x-4)] dx + K_3$$

ter ob upoštevanju enačb (38) in (42) dobimo

$$M_y(x) = -A_Z x H(x) - 5(x-2)H(x-2) - B_Z(x-6)H(x-6) + K_2 x + 3H(x-4) + K_3.$$

Vrednosti konstant  $A_Z$ ,  $B_Z$ ,  $K_2$  in  $K_3$  dobimo iz robnih pogojev:

$$N_z(+0) = -A_Z, \quad M_y(+0) = 0, \quad N_z(6-0) = B_Z, \quad M_y(6-0) = 0.$$

Tako dobimo

$$-A_Z + K_2 = -A_Z, \quad K_3 = 0, \quad -A_Z - 5 + K_2 = B_Z, \quad -6A_Z - 5 \cdot 4 + 6K_2 + 3 + K_3 = 0.$$

Rešitev teh enačb je  $K_2 = 0$ ,  $K_3 = 0$ ,  $A_Z = -17/6$  kN in  $B_Z = -13/6$  kN. Prečno silo  $N_z$  in upogibni moment  $M_y$  sedaj zapišemo takole:

$$N_z = \frac{17}{6} H(x) - 5 H(x-2) + \frac{13}{6} H(x-6), \quad (50)$$

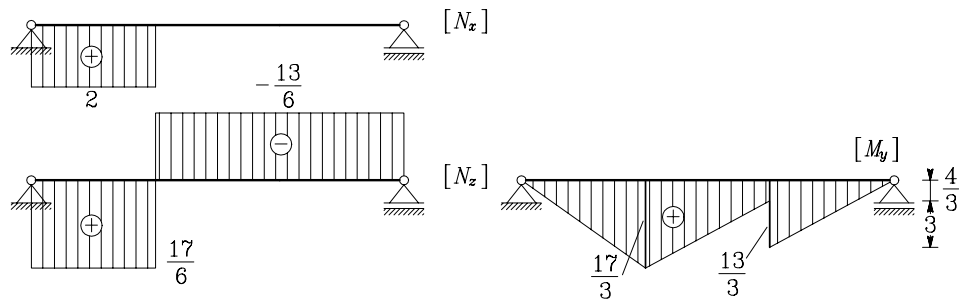
$$M_y = \frac{17}{6} x H(x) - 5(x-2) H(x-2) + \frac{13}{6}(x-6) H(x-6) + 3 H(x-4). \quad (51)$$

Vrednosti notranjih sil v značilnih točkah nosilca prikazujemo v preglednici 1.

Preglednica 1: Notranje sile v nosilcu

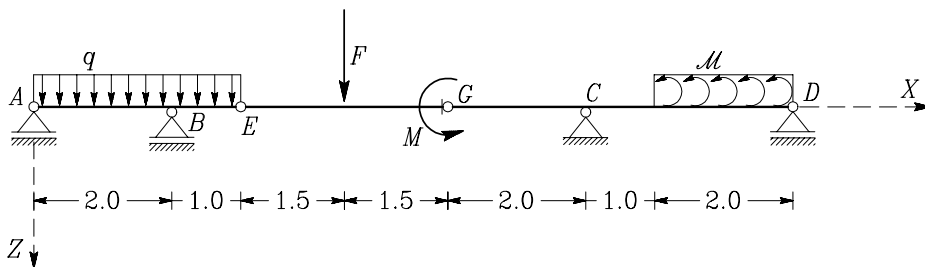
$x$ [m]	+0	2-0	2+0	4-0	4+0	6-0
$N_x$ [kN]	2	2	0	0	0	0
$N_z$ [kN]	17/6	17/6	-13/6	-13/6	-13/6	-13/6
$M_y$ [kNm]	0	17/3	17/3	4/3	13/3	0

Diagrame osne sile  $N_x$ , prečne sile  $N_z$  in upogibnega momenta  $M_y$  prikazujemo na sliki 16.



SLIKA 16 Diagrami notranjih sil

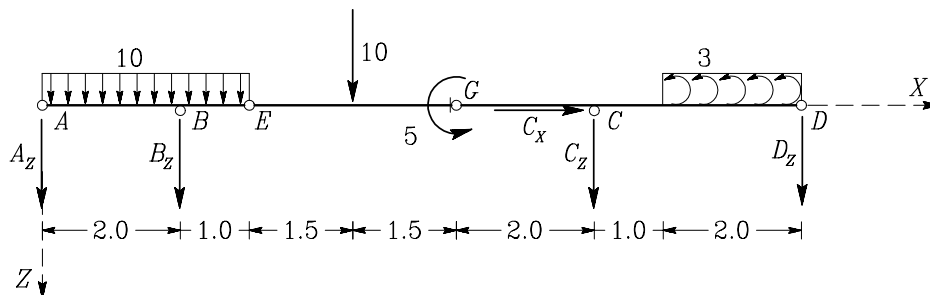
**Primer 2:** Določimo reakcije in notranje sile za Gerberjev nosilec (slika 17)!  $q = 10 \text{ kN/m}$ ,  $\mathcal{M} = 3 \text{ kNm/m}$ ,  $F = 10 \text{ kN}$  in  $M = 5 \text{ kNm}$ . Dimenzije podajamo v m.



SLIKA 17 Gerberjev nosilec in obtežba

### Reševanje naloge

Podpore odstranimo in jih nadomestimo z reakcijami (slika 18).



SLIKA 18 Podpore nadomestimo z reakcijami

Neznane reakcije  $A_Z$ ,  $B_Z$ ,  $C_Z$  in  $D_Z$  upoštevamo kot prečno obtežbo in jih izračunamo iz robnih pogojev. Linijsko obtežbo  $\mathcal{P}_z$  zapišemo z enačbo

$$\mathcal{P}_z = A_Z \delta(x) + q [H(x) - H(x - 3)] + B_Z \delta(x - 2) + F \delta(x - 4.5) + C_Z \delta(x - 8) + D_Z \delta(x - 11).$$

Člen  $qH(x)$  je za območje konstrukcije ( $0 < x < 11$ ) vedno enak  $q$ . Prečna obtežba je torej

$$\mathcal{P}_z = A_Z \delta(x) + q - qH(x - 3) + B_Z \delta(x - 2) + F \delta(x - 4.5) + C_Z \delta(x - 8) + D_Z \delta(x - 11). \quad (52)$$

Linijsko momentno obtežbo opišemo z enačbo

$$\mathcal{M}_y = M \delta(x - 6) + \mathcal{M} [H(x - 9) - H(x - 11)]. \quad (53)$$

V ravnotežni pogoj

$$DN_z = -\mathcal{P}_z \quad (54)$$

vstavimo enačbo (52), upoštevamo obrazca (41) in (42) ter izračunamo (glej (39))

$$\begin{aligned}
N_z &= - \int \mathcal{P}_z dx + K_1 = - \int [A_Z \delta(x) + q - qH(x-3) + B_Z \delta(x-2) + F \delta(x-4.5) + \\
&\quad + C_Z \delta(x-8) + D_Z \delta(x-11)] dx + K_1 = \\
&= -A_Z H(x) - qx + q(x-3)H(x-3) - B_Z H(x-2) - FH(x-4.5) - \\
&\quad - C_Z H(x-8) - D_Z H(x-11) + K_1.
\end{aligned} \tag{55}$$

Enačbi (53) in (55) upoštevamo v ravnotežni enačbi

$$DM_y = N_z - \mathcal{M}_y \tag{56}$$

in zapišemo (glej (39))

$$\begin{aligned}
M_y &= \int (N_z - \mathcal{M}_y) dx + K_2 = \int [-A_Z H(x) - qx + q(x-3)H(x-3) - B_Z H(x-2) - \\
&\quad - FH(x-4.5) - C_Z H(x-8) - D_Z H(x-11) + K_1 - M \delta(x-6) - \\
&\quad - \mathcal{M} H(x-9) + \mathcal{M} H(x-11)] dx + K_2 = \\
&= -A_Z x H(x) - \frac{qx^2}{2} + q \frac{(x-3)^2}{2} H(x-3) - B_Z (x-2)H(x-2) - \\
&\quad - F(x-4.5)H(x-4.5) - C_Z (x-8)H(x-8) - D_Z (x-11)H(x-11) + \\
&\quad + K_1 x - M H(x-6) - \mathcal{M} (x-9)H(x-9) + \mathcal{M} (x-11)H(x-11) + K_2.
\end{aligned} \tag{57}$$

V enačbah (55) in (57) je šest neznanih konstant  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $A_Z$ ,  $B_Z$ ,  $C_Z$  in  $D_Z$ . Izračunamo jih iz robnih pogojev pri  $x = 0$  in  $x = 11$  ter iz pogoja, da sta v členkih  $E$  in  $G$  momenta  $M_y$  enaka nič:

$$\begin{aligned}
N_z(x=0) &= -A_Z \quad \rightarrow \quad -A_Z + K_1 = -A_Z, \\
M_y(x=0) &= 0 \quad \rightarrow \quad K_2 = 0, \\
M_y(x=3) &= 0 \quad \rightarrow \quad -3A_Z - \frac{q3^2}{2} - B_Z \cdot 1 = 0, \\
M_y(x=6) &= 0 \quad \rightarrow \quad -6A_Z - \frac{q6^2}{2} + \frac{q3^2}{2} - B_Z \cdot 4 - F \cdot 1.5 - M = 0, \\
M_y(x=11) &= 0 \quad \rightarrow \quad -11A_Z - \frac{q11^2}{2} + \frac{q8^2}{2} - B_Z \cdot 9 - F \cdot 6.5 - C_Z \cdot 3 - \\
&\quad - M - \mathcal{M} \cdot 2 = 0, \\
N_z(x=11) &= D_Z \quad \rightarrow \quad -A_Z - 11q + 8q - B_Z - F - C_Z = D_Z.
\end{aligned} \tag{58}$$

V prvem robnem pogoju  $N_z(x=+0) = -A_Z$  obravnavamo prerez **z desne strani podpore**, zato je  $A_Z H(x) = A_Z$ . V zadnjem pogoju  $N_z(x=11-0) = D_Z$  pa obravnavamo prerez **na levi strani podpore**, zato je  $D_Z H(x-11) = 0$ . Rešitev enačb (58) je

$$\boxed{A_Z = -4.17, \quad B_Z = -32.5, \quad C_Z = -7.56, \quad D_Z = 4.22, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0.} \tag{59}$$

Prečno silo  $N_z$  in upogibni moment  $M_y$  lahko zdaj dokončno zapišemo z enačbama

$$N_z = 4.17 H(x) - qx + q(x-3)H(x-3) + 32.5 H(x-2) - F H(x-4.5) + 7.56 H(x-8) - 4.22 H(x-11), \quad (60)$$

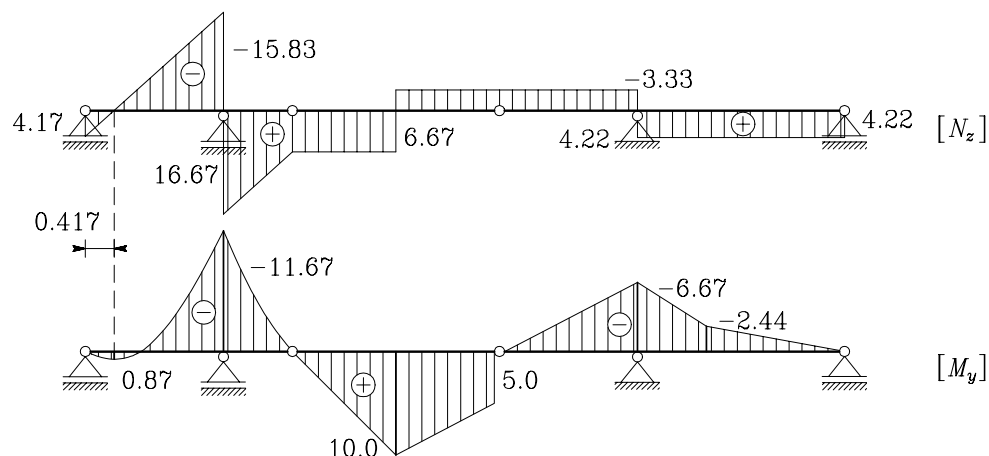
$$M_y = 4.17x H(x) - \frac{qx^2}{2} + q \frac{(x-3)^2}{2} H(x-3) + 32.5(x-2)H(x-2) - F(x-4.5)H(x-4.5) + 7.56(x-8)H(x-8) - 4.22(x-11)H(x-11) - M H(x-6) - \mathcal{M}(x-9)H(x-9) + \mathcal{M}(x-11)H(x-11). \quad (61)$$

V preglednici 2 so prikazane vrednosti za  $N_z$  in  $M_y$  za nekaj značilnih prerezov nosilca.

Preglednica 2: Prečne sile in upogibni momenti za značilne  $x$

$x$ [m]	+0	1	2-0	2+0	3	4.5-0	4.5+0
$N_z$	4.17	-5.83	-15.83	16.67	6.67	6.67	-3.33
$M_y$	0.00	-0.83	-11.67	-11.67	0.00	10.00	10.00
$x$ [m]	6-0	6+0	8-0	8+0	9	10	11-0
$N_z$	-3.33	-3.33	-3.33	4.22	4.22	4.22	4.22
$M_y$	5.00	0.00	-6.67	-6.67	-2.44	-1.22	0.00

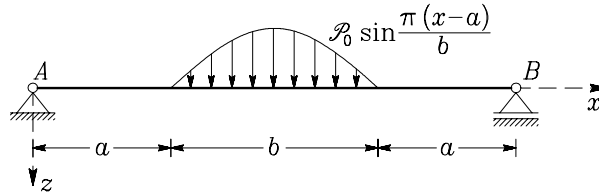
Diagrame notranjih sil prikazujemo v sliki 19.



SLIKA 19 Diagram prečnih sil  $N_z$  [kN] in upogibnega momenta  $M_y$  [kNm]



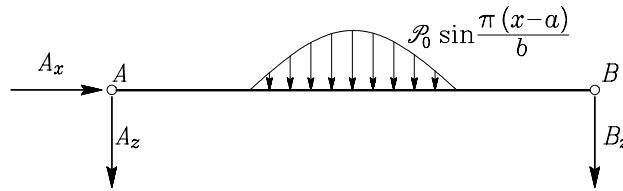
**Primer 3:** Določimo reakcije in notranje sile za prostoležeči nosilec na sliki 20! Linijska obtežba ima obliko sinusa  $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_0 \sin[\pi(x-a)/b]$ .



SLIKA 20 Prostoležeči nosilec in obtežba

### Reševanje naloge

Podpore odstranimo in jih nadomestimo z reakcijami (slika 21).



SLIKA 21 Podpore nadomestimo z reakcijami

Neznani reakciji  $A_Z$  in  $B_Z$  upoštevamo kot prečno obtežbo

$$\mathcal{P}_z = A_Z \delta(x) + [H(x-a) - H(x-a-b)] \mathcal{P}_0 \sin \frac{\pi(x-a)}{b} + B_Z \delta(x-2a-b). \quad (62)$$

V ravnotežni pogoj

$$DN_z = -\mathcal{P}_z \quad (63)$$

vstavimo enačbo (62) (glej (39))

$$N_z = - \int \mathcal{P}_z dx + K_1 = - \int \left\{ A_Z \delta(x) + [H(x-a) - H(x-a-b)] \mathcal{P}_0 \sin \frac{\pi(x-a)}{b} + B_Z \delta(x-2a-b) \right\} dx + K_1. \quad (64)$$

Pri integriranju člena s sinusom upoštevamo obrazec (37) ter izraz

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + K,$$

kjer so  $z$ ,  $a$ ,  $b$  in  $K$  označene konstante. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
& - \int \mathcal{P}_0 \sin \frac{\pi(x-a)}{b} H(x-a) dx + \int \mathcal{P}_0 \sin \frac{\pi(x-a)}{b} H(x-a-b) dx = \\
& = - \mathcal{P}_0 \left[ -\frac{b}{\pi} \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + \frac{b}{\pi} \cos \frac{\pi(a-a)}{b} \right] H(x-a) + \\
& + \mathcal{P}_0 \left[ -\frac{b}{\pi} \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + \frac{b}{\pi} \cos \frac{\pi(a+b-a)}{b} \right] H(x-a-b) = \\
& = \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} - 1 \right] H(x-a) - \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + 1 \right] H(x-a-b) \right\}.
\end{aligned}$$

Prečna sila  $N_z$  je torej (glej tudi enačbo (38))

$$\begin{aligned}
N_z(x) = & -A_z H(x) + \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} - 1 \right] H(x-a) - \right. \\
& \left. - \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + 1 \right] H(x-a-b) \right\} - B_z H(x-2a-b) + K_1.
\end{aligned} \tag{65}$$

Upogibni moment  $M_y$  izračunamo, če enačbo (65) upoštevamo v ravnotežni enačbi

$$DM_y = N_z - \mathcal{M}_y. \tag{66}$$

Tako dobimo (glej (39))

$$\begin{aligned}
M_y = & \int (N_z - \mathcal{M}_y) dx + K_2 = \int \left\{ -A_z H(x) + \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} - 1 \right] H(x-a) - \right. \\
& \left. - \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + 1 \right] H(x-a-b) - B_z H(x-2a-b) + K_1 \right\} dx + K_2.
\end{aligned} \tag{67}$$

Pri računanju integrala členov s kosinusom upoštevamo, da je

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + K$$

in dobimo (glej tudi enačbo (37))

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} - 1 \right] H(x-a) dx - \int \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + 1 \right] H(x-a-b) dx = \\
& = \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} - x - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(a-a)}{b} + a \right] H(x-a) - \right. \\
& \left. - \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} + x - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(a+b-a)}{b} - a - b \right] H(x-a-b) \right\} = \\
& = \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} - x + a \right] H(x-a) - \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} + x - a - b \right] H(x-a-b) \right\}.
\end{aligned} \tag{68}$$

Če izraz (68) upoštevamo v (67) ter upoštevamo še (38), zapišemo izraz za upogibni moment  $M_y$  takole

$$\begin{aligned}
 M_y(x) = & -A_z x H(x) + \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} - x + a \right] H(x-a) - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} + x - a - b \right] H(x-a-b) \right\} - \\
 & - B_z (x - 2a - b) H(x - 2a - b) + K_1 x + K_2.
 \end{aligned} \tag{69}$$

Reakciji  $A_Z$  in  $B_Z$  ter konstanti  $K_1$  in  $K_2$  v enačbah (65) in (69) izračunamo iz robnih pogojev

$$\begin{aligned}
 N_z(+0) = -A_Z & \rightarrow -A_Z + K_1 = -A_Z, \\
 M_y(+0) = 0 & \rightarrow K_2 = 0, \\
 N_z(2a+b-0) = B_Z & \rightarrow -A_Z + \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi(a+b)}{b} - 1 - \cos \frac{\pi(a+b)}{b} - 1 \right] + K_1 = \\
 & -A_Z - 2 \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} + K_1 = B_Z, \\
 M_y(2a+b-0) = 0 & \rightarrow -A_Z(2a+b) + \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(a+b)}{b} - a - b - \right. \\
 & \left. - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(a+b)}{b} - a \right] + K_1(2a+b) + K_2 = \\
 & -A_Z(2a+b) + \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} (-2a-b) + K_1(2a+b) + K_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Rešitev sistema linearnih enačb (70) je

$$A_Z = -\frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi}, \quad B_Z = -\frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi}, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0. \tag{71}$$

Prečno silo  $N_z$  dobimo, če (71) vstavimo v (65)

$$N_z(x) = \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ 1 + \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} - 1 \right] H(x-a) - \left[ \cos \frac{\pi(x-a)}{b} + 1 \right] H(x-a-b) \right\}.$$

Upogibni moment  $M_y$  dobimo, če (71) vstavimo v (69)

$$\begin{aligned}
 M_y(x) = & \frac{\mathcal{P}_0 b}{\pi} \left\{ x + \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} - x + a \right] H(x-a) - \right. \\
 & \left. - \left[ \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi(x-a)}{b} + x - a - b \right] H(x-a-b) \right\}.
 \end{aligned}$$

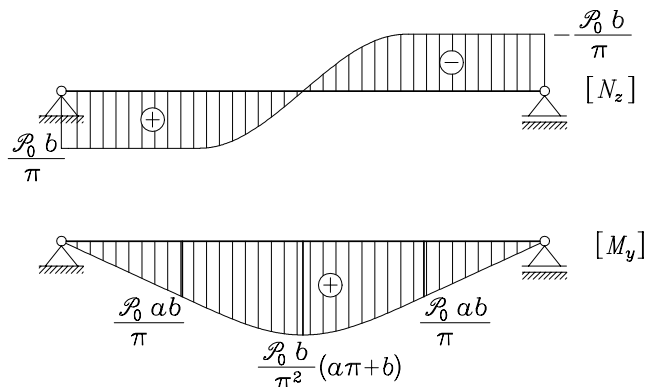
Upoštevali smo, da je  $0 < x < 2a + b$  in je zato  $H(x) = 1$  ter  $H(x - 2a - b) = 0$ . V preglednici

3 so prikazane vrednosti za  $N_z$  in  $M_y$  za nekaj značilnih prerezov nosilca.

Preglednica 3: Prečne sile in upogibni momenti za značilne  $x$

$x$	+0	$a \pm 0$	$a + b/2$	$a + b \pm 0$	$2a + b - 0$
$N_z$	$\mathcal{P}_0 b/\pi$	$\mathcal{P}_0 b/\pi$	0	$-\mathcal{P}_0 b/\pi$	$-\mathcal{P}_0 b/\pi$
$M_y$	0	$\mathcal{P}_0 a b/\pi$	$\mathcal{P}_0 b(a + b/\pi)/\pi$	$\mathcal{P}_0 a b/\pi$	0

Diagrama notranjih sil prikazujemo na sliki 22.



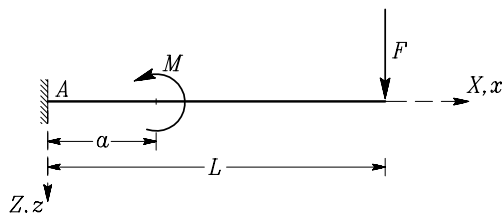
SLIKA 22 Diagram prečnih sil  $N_z$  in upogibnega momenta  $M_y$

## RAČUNANJE POMIKOV NOSILCA

Z uporabo Diracove in Heavisidove funkcije lahko računamo tudi pomike nosilca. Navpični pomik  $w$  ter zasuk  $\omega_y$  nosilca v ravnini  $x, z$  izračunamo po enačbah

$$E I_y D^2 w = -M_y, \quad \omega_y = Dw. \quad (72)$$

**Primer 4:** Izračunajmo reakcije, notranje sile in navpični pomik  $w$  za primer na sliki 23!

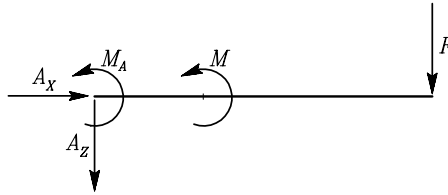


SLIKA 23: Previsni nosilec, obtežen s silo  $F$  in momentom  $M$

**Zapis obtežbe**

Podpore nadomestimo z reakcijami, nato vse sile in momente, ki na nosilec delujejo, zapišemo z Diracovo funkcijo (slika 24)

$$\mathcal{P}_z = A_Z \delta(x) + F \delta(x - L), \quad \mathcal{M}_y = M_A \delta(x) + M \delta(x - a). \quad (73)$$



SLIKA 24: Vpliv podpore nadomestimo z ustreznimi reakcijami

**Račun reakcij in notranjih sil**

Prečno silo  $N_z$  in upogibni moment  $M_y$  izračunamo iz enačb

$$DN_z = -\mathcal{P}_z, \quad DM_y = N_z - \mathcal{M}_y.$$

Ravnotežno enačbo za prečno silo

$$DN_z = -\mathcal{P}_z$$

integriramo

$$N_z = - \int \mathcal{P}_z dx + K_1 = \int [-A_Z \delta(x) - F \delta(x - L)] dx + K_1$$

in dobimo

$$N_z(x) = -A_Z H(x) - F H(x - L) + K_1. \quad (74)$$

Integriramo še ravnotežno enačbo za upogibni moment

$$DM_y = N_z - \mathcal{M}_y.$$

Upoštevamo (74) in drugo izmed enačb (73) in dobimo

$$M_y = \int (N_z - \mathcal{M}_y) dx + K_2 = \int [-A_Z H(x) - F H(x - L) + K_1 - M_A \delta(x) - M \delta(x - a)] dx + K_2.$$

Zaradi enačb (38) in (42) je

$$M_y(x) = -A_Z x H(x) - F(x - L) H(x - L) + K_1 x - M_A H(x) - M H(x - a) + K_2.$$

Vrednosti konstant  $A_Z$ ,  $M_A$ ,  $K_1$  in  $K_2$  dobimo iz robnih pogojev:

$$N_z(+0) = -A_Z, \quad M_y(+0) = -M_A, \quad N_z(L-0) = F, \quad M_y(L-0) = 0,$$

ki jih zapišemo takole

$$-A_Z + K_1 = -A_Z, \quad -M_A + K_2 = -M_A, \quad -A_Z + K_1 = F, \quad -A_Z L + K_1 L - M_A - M + K_2 = 0.$$

Rešitev teh enačb je  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 0$ ,  $A_Z = -F$  in  $M_A = F L - M$ . Prečno silo  $N_z$  in upogibni moment  $M_y$  sedaj zapišemo takole:

$$\boxed{N_z = F H(x) - F H(x - L)}, \quad (75)$$

$$\boxed{M_y = F x H(x) - F (x - L) H(x - L) - (F L - M) H(x) - M H(x - a)}. \quad (76)$$

### Račun navpičnega pomika

Upogibni moment (76) vstavimo v (72)

$$E I_y D^2 w = -F x H(x) + F (x - L) H(x - L) + (F L - M) H(x) + M H(x - a).$$

Enačbo dvakrat integriramo in dobimo

$$E I_y D w = -F \frac{x^2}{2} H(x) + F \frac{(x - L)^2}{2} H(x - L) + (F L - M) x H(x) + M (x - a) H(x - a) + K_3$$

oziroma

$$E I_y w = -\frac{F}{2} \frac{x^3}{3} H(x) + \frac{F}{2} \frac{(x - L)^3}{3} H(x - L) + (F L - M) \frac{x^2}{2} H(x) + M \frac{(x - a)^2}{2} H(x - a) + K_3 x + K_4.$$

Upoštevamo robne pogoje

$$x = 0: \quad w = 0, \quad D w = 0,$$

iz katerih izračunamo  $K_3 = 0$  in  $K_4 = 0$ . Tako dobimo:

$$D w = \frac{1}{E I_y} \left[ -\frac{F x^2}{2} H(x) + \frac{F (x - L)^2}{2} H(x - L) + (F L - M) x H(x) + M (x - a) H(x - a) \right]$$

in

$$w = \frac{1}{E I_y} \left[ -\frac{F x^3}{6} H(x) + \frac{F (x - L)^3}{6} H(x - L) + \frac{(F L - M) x^2}{2} H(x) + \frac{M (x - a)^2}{2} H(x - a) \right].$$

Zapišimo še pomik  $w$  in zasuk  $\omega_y = -D w$  pri  $x = a$  in  $x = L$ :

$$w(a) = \frac{1}{E I_y} \left[ \frac{F a^2}{6} (3L - a) - \frac{M a^2}{2} \right], \quad \omega_y(a) = \frac{1}{E I_y} \left[ -\frac{F a}{2} (2L - a) + M a \right],$$

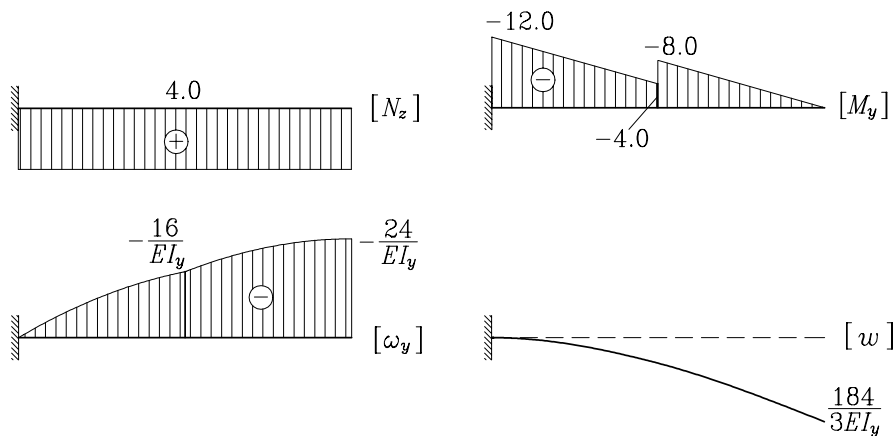
$$w(L) = \frac{1}{E I_y} \left[ \frac{F L^3}{3} + \frac{M a}{2} (a - 2L) \right], \quad \omega_y(L) = \frac{1}{E I_y} \left[ -\frac{F L^2}{2} + M a \right].$$

Vrednosti notranjih sil za  $a = 2$  m,  $L = 4$  m,  $F = 4$  kN in  $M = 4$  kNm v nekaterih točkah nosilca podajamo v preglednici 4.

Preglednica 4: Notranji sili, zasuk in pomik

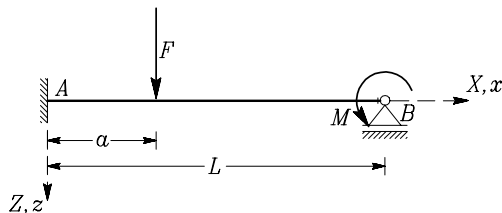
$x$	$N_z$	$M_y$	$\omega_y$	$w$
+0	4.000	-12.000	0.000	0.000
0.4	4.000	-10.400	-4.480	-0.917
0.8	4.000	-8.800	-8.320	-3.499
1.2	4.000	-7.200	-11.520	-7.488
1.6	4.000	-5.600	-14.080	-12.629
2 - 0	4.000	-4.000	-16.000	-18.667
2 + 0	4.000	-8.000	-16.000	-18.667
2.4	4.000	-6.400	-18.880	-25.664
2.8	4.000	-4.800	-21.120	-33.685
3.2	4.000	-3.200	-22.720	-42.475
3.6	4.000	-1.600	-23.680	-51.776
4 - 0	4.000	0.000	-24.000	-61.333

Diagrame prečne sile  $N_z$ , upogibnega momenta  $M_y$ , zasuka  $\omega_y$  ter pomika  $w$  prikazujemo na sliki 25.



SLIKA 25: Prečna sila, upogibni moment, zasuk in pomik

**Primer 5:** Izračunajmo reakcije, notranje sile in navpični pomik  $w$  za statično nedoločeni nosilec na sliki 26!

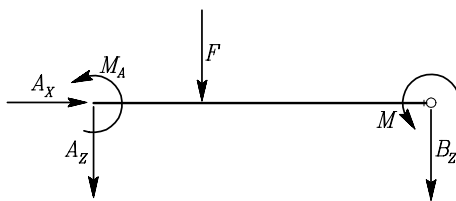


SLIKA 26: Statično nedoločeni nosilec, obtežen s silo  $F$  in momentom  $M$

### Zapis obtežbe

Podpore nadomestimo z reakcijami, nato vse sile in momente, ki na nosilec delujejo, zapišemo z Diracovo funkcijo (slika 27)

$$\mathcal{P}_z = A_Z \delta(x) + F \delta(x - a) + B_Z \delta(x - L), \quad \mathcal{M}_y = M_A \delta(x) + M \delta(x - L). \quad (77)$$



SLIKA 27: Vpliv podpore nadomestimo z ustreznimi reakcijami

### Račun reakcij in notranjih sil

Prečno silo  $N_z$  in upogibni moment  $M_y$  izračunamo iz enačb

$$DN_z = -\mathcal{P}_z, \quad DM_y = N_z - \mathcal{M}_y.$$

Ravnotežno enačbo za prečno silo

$$DN_z = -\mathcal{P}_z$$

integriramo

$$N_z = - \int \mathcal{P}_z dx + K_1 = \int [-A_Z \delta(x) - F \delta(x - a) - B_Z \delta(x - L)] dx + K_1$$

in dobimo

$$N_z(x) = -A_Z H(x) - F H(x - a) - B_Z H(x - L) + K_1. \quad (78)$$

Integriramo še ravnotežno enačbo za upogibni moment

$$DM_y = N_z - \mathcal{M}_y.$$



Upoštevamo (78) in drugo izmed enačb (77) in dobimo

$$\begin{aligned} M_y &= \int (N_z - \mathcal{M}_y) dx + K_2 = \\ &= \int [-A_Z H(x) - F H(x-a) - B_Z H(x-L) + K_1 - M_A \delta(x) - M \delta(x-L)] dx + K_2. \end{aligned}$$

Zaradi enačb (38) in (42) je

$$\begin{aligned} M_y(x) &= -A_Z x H(x) - F(x-a) H(x-a) - B_Z(x-L) H(x-L) + K_1 x - M_A H(x) - \\ &\quad - M H(x-L) + K_2. \end{aligned}$$

Upoštevamo robne pogoje:

$$N_z(+0) = -A_Z, \quad M_y(+0) = -M_A, \quad N_z(L-0) = B_Z, \quad M_y(L-0) = M,$$

ki jih zapišemo takole

$$\begin{aligned} -A_Z + K_1 &= -A_Z, \quad -M_A + K_2 = -M_A, \quad -A_Z - F + K_1 = B_Z, \\ -A_Z L - F(L-a) + K_1 L - M_A + K_2 &= M. \end{aligned}$$

Rešitev teh enačb je  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = 0$ ,  $A_Z = -F - B_Z$  in  $M_A = B_Z L + F a - M$ . Prečno silo  $N_z$  in upogibni moment  $M_y$  sedaj zapišemo takole:

$$N_z = (F + B_Z) H(x) - F H(x-a) - B_Z H(x-L), \quad (79)$$

$$\begin{aligned} M_y &= (F + B_Z) x H(x) - F(x-a) H(x-a) - B_Z(x-L) H(x-L) - \\ &\quad - (B_Z L + F a - M) H(x) - M H(x-L). \end{aligned} \quad (80)$$

Izraz (80) vstavimo v (72)

$$\begin{aligned} E I_y D^2 w &= -(F + B_Z) x H(x) + F(x-a) H(x-a) + B_Z(x-L) H(x-L) + \\ &\quad + (B_Z L + F a - M) H(x) + M H(x-L). \end{aligned}$$

Enačbo dvakrat integriramo in dobimo

$$\begin{aligned} E I_y D w &= -(F + B_Z) \frac{x^2}{2} H(x) + F \frac{(x-a)^2}{2} H(x-a) + B_Z \frac{(x-L)^2}{2} H(x-L) + \\ &\quad + (B_Z L + F a - M) x H(x) + M(x-L) H(x-L) + K_3 \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} E I_y w &= -\frac{F + B_Z}{2} \frac{x^3}{3} H(x) + \frac{F}{2} \frac{(x-a)^3}{3} H(x-a) + \frac{B_Z}{2} \frac{(x-L)^3}{3} H(x-L) + \\ &\quad + (B_Z L + F a - M) \frac{x^2}{2} H(x) + M \frac{(x-L)^2}{2} H(x-L) + K_3 x + K_4. \end{aligned}$$

V zadnji enačbi nastopajo tri neznanke  $B_Z$ ,  $K_3$  in  $K_4$ , katerih velikosti izračunamo, če upoštevamo robne pogoje

$$x = 0: \quad w = 0, \quad Dw = 0, \quad x = L: \quad w = 0$$

iz katerih izračunamo  $K_3 = 0$  in  $K_4 = 0$

$$-\frac{F + B_Z}{6} L^3 + \frac{F}{6} (L - a)^3 + (B_Z L + F a - M) \frac{L^2}{2} = 0$$

ter

$$B_Z = -\frac{F a^2}{2 L^3} (3 L - a) + \frac{3 M}{2 L}.$$

Za  $a = 2$  m,  $L = 4$  m,  $F = 4$  kN in  $M = 2$  kNm, dobimo:

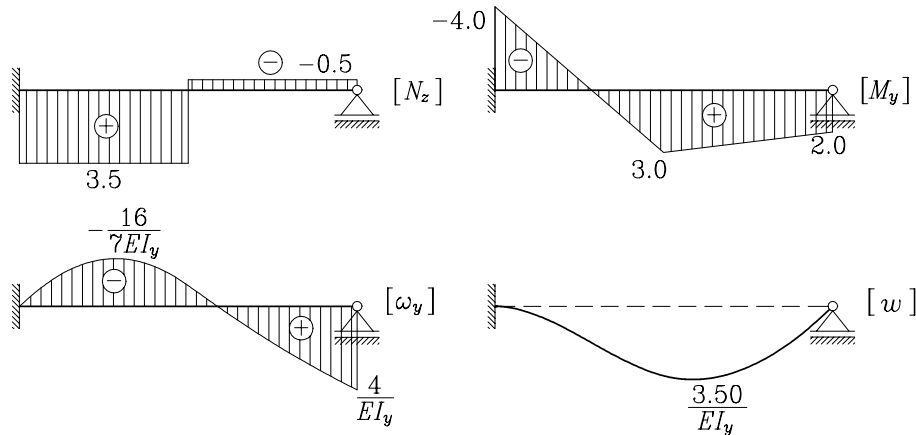
$$\begin{aligned} B_Z &= -0.5 \text{ kN}, \\ N_z &= 3.5 H(x) - 4 H(x - 2), \\ M_y &= 3.5 x H(x) - 4 (x - 2) H(x - 2) - 4 H(x), \\ w &= \frac{1}{E I_y} \left[ -\frac{3.5}{6} x^3 H(x) + \frac{2}{3} (x - 2)^3 H(x - 2) + 2 x^2 H(x) \right], \\ \omega_y &= -Dw = \frac{1}{E I_y} \left[ \frac{3.5}{2} x^2 H(x) - 2 (x - 2)^2 H(x - 2) - 4 x H(x) \right]. \end{aligned}$$

Vrednosti notranjih sil za  $a = 2$  m,  $L = 4$  m,  $F = 4$  kN in  $M = 2$  kNm v nekaterih točkah nosilca podajamo v preglednici 5.

Preglednica 5: Notranji sili, zasuk in pomik

$x$	$N_z$	$M_y$	$\omega_y$	$w$
+0	3.500	-4.000	0.000	0.000
0.4	3.500	-2.600	-1.320	-0.283
0.8	3.500	-1.200	-2.080	-0.981
1.2	3.500	0.200	-2.280	-1.872
1.6	3.500	1.600	-1.920	-2.731
2 - 0	3.500	3.000	-1.000	-3.333
2 + 0	-0.500	3.000	-1.000	-3.333
2.4	-0.500	2.800	0.160	-3.499
2.8	-0.500	2.600	1.240	-3.216
3.2	-0.500	2.400	2.240	-2.517
3.6	-0.500	2.200	3.160	-1.435
4 - 0	-0.500	2.000	4.000	0.000

Diagrame prečne sile  $N_z$ , upogibnega momenta  $M_y$ , zasuka  $\omega_y$  ter pomika  $w$  prikazujemo na sliki 28.



SLIKA 28: Prečna sila, upogibni moment, zasuk in pomik

## 6. Literatura

1. F. Križanič, Temeljni realne matematične analize, Državna založba Slovenije, 1990.
2. J. I. Richards, H. K. Youn, Theory of Distributions: a Nontechnical Introduction, Cambridge University Press, 1995.
3. I. Stakgold, Green's Functions and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, New York, 1998.
4. R.S. Strichartz, A Guide to Distribution theory and Fourier Transforms, CRC Press, Boca Raton, 1994.
5. A.H. Zemanian, Distribution Theory and Transform Analysis, Dover Publications, New York, 1987.
6. I.M. Gelfand, G.E. Shilov, Generalized Functions, Academic Press, Vol 1: Properties and Operations, New York, 1964.