

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 20. junij 2003

1. Telo iz linearno elastičnega, izotropnega, homogenega materiala v točki $T(0, 0, 0)$ prerežemo s tremi ravninami. Normale ravnin so podane z vektorji: $\vec{e}_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$, $\vec{e}_{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)$, $\vec{e}_{n_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$. Znani so napetostni vektorji v točki T , ki pripadajo tem trem ravninam: $\vec{\sigma}_{n_1} = -2\sigma\vec{e}_x - \sigma\vec{e}_z$, $\vec{\sigma}_{n_2} = -6\sigma\vec{e}_y + 3\sigma\vec{e}_z$, $\vec{\sigma}_{n_3} = 4\sigma\vec{e}_x + 4\sigma\vec{e}_y - 9\sigma\vec{e}_z$. Izračunaj komponente napetostnega tenzorja v točki T v kartezičnem koordinatnem sistemu. Kakšne so komponente napetostnega tenzorja v točki T , če vektor $\vec{\sigma}_{n_3}$ zamenjamo z vektorjem $\vec{\sigma}_{n_3} = 4\sigma\vec{e}_x + 4\sigma\vec{e}_y + 9\sigma\vec{e}_z$? Ali rešitev takrat obstaja? Odgovor utemelji.

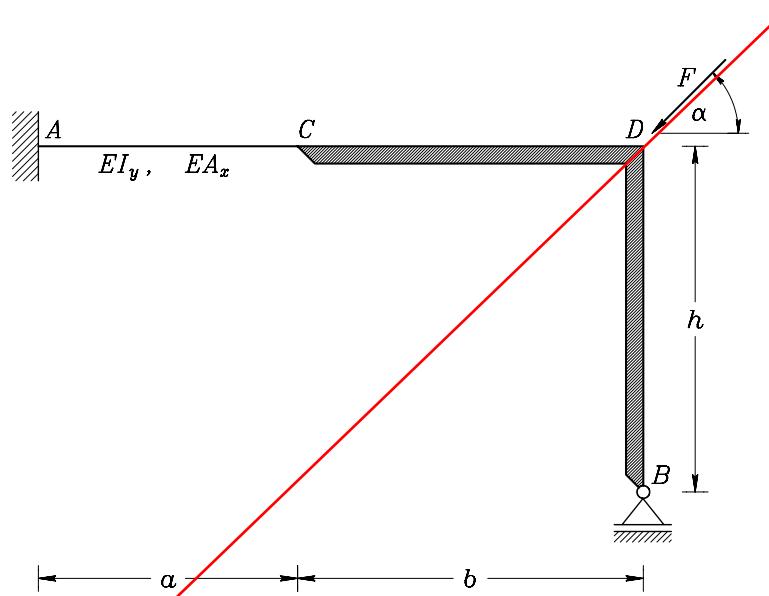
Podatki: $\sigma = \frac{5\sqrt{3}}{3} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

2. Ravninski okvir je obtežen s silo F kot prikazuje slika. Del CBD je neskončno tog v primerjavi z delom AC . V točki C sta oba dela togo povezana med seboj.

Izračunaj notranje sile na delu AC in nariši diagrame notranjih sil.

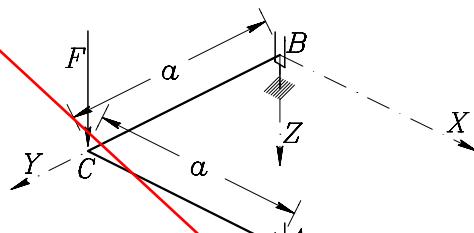
Izračunaj horizontalni pomik na mestu prijemališča sile.

Podatki: $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $A_x = 50 \text{ cm}^2$, $I_y = 5000 \text{ cm}^4$, $F = 10 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$.



3. Za prikazano ravninsko mrežo izračunaj reakcije v podporah in notranje sile ter nariši diagrame notranjih sil. V točkah A in B sta viličasti podpori (viličasta podpora preprečuje vse pomike in zasuk v smeri osi nosilca (torzijski zasuk), dopušča pa preostala upogibna zasuka). Izračunaj tudi navpični pomik točke C .

Podatki: $a = 2 \text{ m}$, $F = 10 \text{ kN}$, $\nu = 0.25$, $I_y = 5000 \text{ cm}^4$, $I_x = 10000 \text{ cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



Točkovanje: $(25 + 15)\% + (25 + 15)\% + (20+20)\% = 120\%$.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 20. junij 2003 - Rešitve

1. Ovedemo okrašave $\vec{\sigma}_a = \vec{\sigma}_{n_1}$, $\vec{\sigma}_b = \vec{\sigma}_{n_2}$, $\vec{\sigma}_c = \vec{\sigma}_{n_3}$ in $\vec{e}_a = \vec{e}_{n_1}$, $\vec{e}_b = \vec{e}_{n_2}$, $\vec{e}_c = \vec{e}_{n_3}$. Komponente tenzorja napetosti dobimo iz ravnotežnih enačb

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_a &= \vec{\sigma}_x e_{ax} + \vec{\sigma}_y e_{ay} + \vec{\sigma}_z e_{az}, \\ \vec{\sigma}_b &= \vec{\sigma}_x e_{bx} + \vec{\sigma}_y e_{by} + \vec{\sigma}_z e_{bz}, \\ \vec{\sigma}_c &= \vec{\sigma}_x e_{cx} + \vec{\sigma}_y e_{cy} + \vec{\sigma}_z e_{cz}.\end{aligned}$$

Enačbe lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \sigma_{ax} \\ \sigma_{ay} \\ \sigma_{az} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{ax} \\ e_{ay} \\ e_{az} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{bx} \\ \sigma_{by} \\ \sigma_{bz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{bx} \\ e_{by} \\ e_{bz} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{cx} \\ \sigma_{cy} \\ \sigma_{cz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{cx} \\ e_{cy} \\ e_{cz} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ali vse skupaj z eno samo matrično enačbo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ax} & \sigma_{bx} & \sigma_{cx} \\ \sigma_{ay} & \sigma_{by} & \sigma_{cy} \\ \sigma_{az} & \sigma_{bz} & \sigma_{cz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{ax} & e_{bx} & e_{cx} \\ e_{ay} & e_{by} & e_{cy} \\ e_{az} & e_{bz} & e_{cz} \end{bmatrix},$$

ki se v konkretnem primeru glasi

$$\begin{bmatrix} -2\sigma & 0 & 4\sigma \\ 0 & -6\sigma & 4\sigma \\ -\sigma & 3\sigma & -9\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iz zadnje enačbe lahko neposredno izračunamo komponente tenzorja napetosti. Dobimo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sigma & 0 & 4\sigma \\ 0 & -6\sigma & 4\sigma \\ -\sigma & 3\sigma & -9\sigma \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ -5 & 15 & -10 \\ -15 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

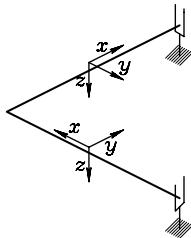
Tenzor napetosti je simetričen, torej je to iskana rešitev. V drugem primeru dobimo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sigma & 0 & 4\sigma \\ 0 & -6\sigma & 4\sigma \\ -\sigma & 3\sigma & 9\sigma \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ -5 & 15 & -10 \\ 30 & -10 & -25 \end{bmatrix}.$$

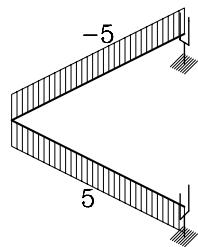
Tokrat rešitve v okviru omenjene teorije nimamo, saj tenzor napetosti ni simetričen. V drugem primeru zato vektorji $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$ in $\vec{\sigma}_c$ niso napetostni vektorji.

2. Na delu AC so prisotne samo osne sile $N_x = -F \frac{\sqrt{2}}{2} = -7.0711$ kN. Prečne sile in upogibni momenti so enaki nič. Horizontalni pomik točke D znaša $u_D = -F \frac{\sqrt{2}a}{2EA_x} = -0.00212$ cm.
Rezultat je fizikalno očiten, če silo F pred izračunam razstavimo na horizontano in vertikalno komponento in pogledamo prispevka obeh delov.

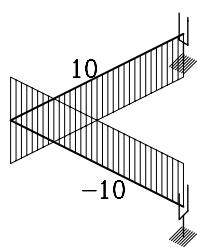
3. Reakcije so in notranje sile lahko dobimo z upoštevanjem simetrije kar iz ravnotežnih enačb. Dobimo $A_z = B_z = -\frac{F}{2} = -5 \text{ kN}$, $M_X^A = \frac{Fa}{2} = -10 \text{ kN m}$, $M_Y^B = \frac{Fa}{2} = -10 \text{ kN m}$.
 Diagrami notranjih sil



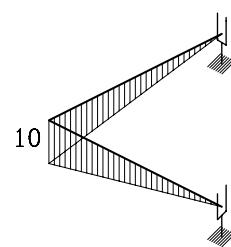
Prečne sile N_z [kN]



Torzijski momenti M_x [kNm]



Upogibni momenti M_y [kNm]



$$\text{Navpični pomik točke } C \text{ znaša } w_C = \frac{F a^3 (G I_x + 3 E I_y)}{6 E I_y G I_x} = 0.6333 \text{ cm.}$$