

Enačba nepodprte konstrukcije je:

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & -354 \\ 354 & -1354 & 0 & 1000 & -354 & 354 \\ 0 & 0 & -1000 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & -1000 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & 1000 & 0 & -1354 & 354 \\ -354 & 354 & 0 & 0 & 354 & -354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Robni pogoji v vozlišču 2 so enaki, kot pri prejšnji nalogi, zato tretjo in četrto vrstico in stolpec črtamo. Podporo v vozlišču 3 pa upoštevati tako, da sistemu (3.56) dodamo dve enačbi (3.44) in (3.45). Pri tem upoštevamo, da sta reakciji R_{3X} in R_{3Y} neznani

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 & -354 & 0 & 0 \\ 354 & -1354 & -354 & 354 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & -1354 & 354 & 1 & 0 \\ -354 & 354 & 354 & -354 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_p & \cos \beta_p \\ 0 & 0 & -\cos \beta_p & \cos \alpha_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Upoštevamo, da je

$$\cos \alpha_p = \cos 30^\circ = 0.866, \quad \cos \beta_p = \sin 30^\circ = 0.500$$

in dobimo sistem enačb

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 & -354 & 0 & 0 \\ 354 & -1354 & -354 & 354 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & -1354 & 354 & 1 & 0 \\ -354 & 354 & 354 & -354 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.866 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

katerega rešitev je

$$u_1 = 0.0801 \text{ m}, \quad v_1 = 0.0200 \text{ m}, \quad u_3 = 0.0085 \text{ m}, \quad v_3 = 0.0049 \text{ m}, \\ R_{3X} = -11.5 \text{ MN}, \quad R_{3Y} = 20 \text{ MN}.$$

Reakcije v vozlišču 2 izračunamo iz druge in tretje enačbe v sistemu (3.56)

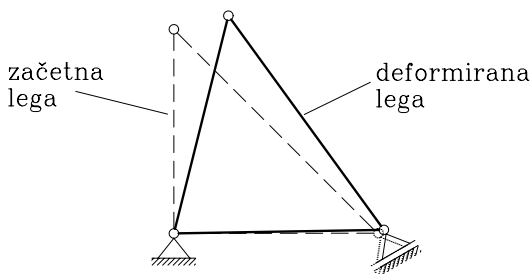
$$\begin{aligned} -R_{2X} &= 0 u_1 + 0 v_1 + 1000 u_3 + 0 v_3 \rightarrow R_{2X} = 8.5 \text{ MN}, \\ -R_{2Y} &= 0 u_1 + 1000 v_1 + 0 u_3 + 0 v_3 \rightarrow R_{2Y} = 20 \text{ MN}, \end{aligned}$$

Določimo še osne sile v palicah (enačba (3.20))

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 1000 [(0 - 0.0801) 0 + (0 - 0.02) (-1)] = 20 \text{ MN}, \\ N_{1,3} &= 707 [(0.0085 - 0.0801) 0.707 + (0.0049 - 0.02) (-0.707)] = -28.3 \text{ MN}, \\ N_{2,3} &= 1000 [(0.0085 - 0) 1] = 8.5 \text{ MN}. \end{aligned}$$

Sili $N_{1,2}$ in $N_{2,3}$ sta natezni, sila N_{13} pa je tlačna. Na sliki 3.16 je prikazana deformirana oblika paličja.





Slika 3.16: Deformirana oblika paličja

Togostna matrika konstrukcije (3.57) zaradi poševne podpore ni simetrična. S posebno operacijo, ki ji pravimo **kondenzacija**, lahko dosežemo, da bo matrika simetrična. Tokrat bomo kondenzacijo uporabili tako, da bomo izločili spremenljivke v_3 (ki je linearno odvisna od pomika u_3), R_{3X} in R_{3Y} .

Sistem enačb (3.57)

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 & -354 & 0 & 0 \\ 354 & -1354 & -354 & 354 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & -1354 & 354 & 1 & 0 \\ -354 & 354 & 354 & -354 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.866 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

razdelimo na dva dela. Prve tri enačbe pripadajo tistim prostostnim stopnjam, ki jih želimo ohraniti $[u_a]$, druge tri pa tistim, ki jih želimo izločiti $[u_b]$

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ab}] \\ [K_{ba}] & [K_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_a] \\ [u_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_a] \\ [F_b] \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Izpišimo drugo vrstico matrične enačbe (3.58)

$$[K_{ba}] [u_a] + [K_{bb}] [u_b] = [F_b]. \quad (3.59)$$

Iz enačbe (3.59) lahko izrazimo $[u_b]$

$$[u_b] = [K_{bb}]^{-1} (-[K_{ba}] [u_a] + [F_b]), \quad (3.60)$$

kjer smo z $[K_{bb}]^{-1}$ označili inverzno matriko matrike $[K_{bb}]$. Sedaj vstavimo enačbo (3.60) v prvo vrstico enačbe (3.58) in dobimo

$$\begin{aligned} [K_{aa}] [u_a] + [K_{ab}] [K_{bb}]^{-1} (-[K_{ba}] [u_a] + [F_b]) &= [F_a] \rightarrow \\ ([K_{aa}] - [K_{ab}] [K_{bb}]^{-1} [K_{ba}]) [u_a] &= [F_a] - [K_{ab}] [K_{bb}]^{-1} [F_b]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Simetrično matriko $[K_{aa}] - [K_{ab}] [K_{bb}]^{-1} [K_{ba}]$ imenujemo kondenzirana matrika in jo označimo s $[\bar{K}_{aa}]$

$$[\bar{K}_{aa}] = [K_{aa}] - [K_{ab}] [K_{bb}]^{-1} [K_{ba}].$$



Desno stran sistema enačb (3.61) označimo s $[\bar{F}_a]$:

$$[\bar{F}_a] = [F_a] - [K_{ab}] [K_{bb}]^{-1} [F_b].$$

Enačbo konstrukcije sedaj zapišemo v kondenzirani obliki z enačbo

$$[\bar{K}_{aa}][u_a] = [\bar{F}_a].$$

Inverzna matrika $[K_{bb}]^{-1}$ je

$$[K_{bb}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 & 2\sqrt{3}/3 & 707/3 \\ 1 & 0 & 707\sqrt{3}/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.155 \\ -0.577 & 1.155 & 235.7 \\ 1 & 0 & 408.2 \end{bmatrix}.$$

Kondenzirana matrika $[\bar{K}_{aa}]$ pa je

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{aa}] &= \begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 \\ 354 & -1354 & -354 \\ 354 & -354 & -1354 \end{bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} -354 & 0 & 0 \\ 354 & 0 & 0 \\ 354 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.155 \\ -0.577 & 1.155 & 235.7 \\ 1 & 0 & 408.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -354 & 354 & 149.6 \\ 354 & -1354 & -149.6 \\ 149.6 & -149.6 & -1063.2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ker je $[F_b]$ enak nič, ostane desna stran nespremenjena

$$[\bar{F}_a] = [F_a] = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

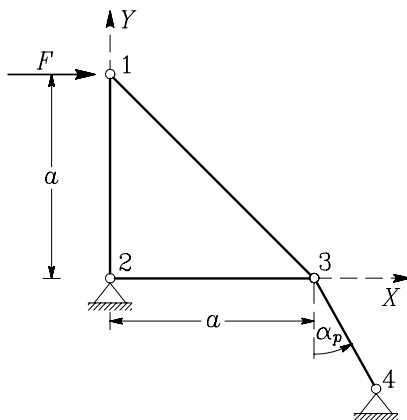
Če sedaj rešimo simetrični sistem enačb

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 149.6 \\ 354 & -1354 & -149.6 \\ 149.6 & -149.6 & -1063.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dobimo enake rešitve, kot prej, ko smo naznanke računali iz enačbe (3.57).

Poševno drsno podporno lahko obravnavamo tudi tako, da jo modeliramo s poševno palico z zelo veliko osno togostjo (slika 3.17). Izberemo lahko dolžino palice 34 z $l_{3,4} = 1$ m. Izberemo tudi, da je osna togost $k_{3,4} = 10\,000\,k_{1,2} = 10\,000\,000$.





Slika 3.17: Poševno podporo lahko računsko obravnavamo s palico zelo velike togosti

Togostne matrike palic $\overline{12}$, $\overline{13}$ in $\overline{23}$ ostanejo nespremenjene. Dodatno pa moramo izračunati togostno matriko palice $\overline{34}$. Upoštevamo, da je $\cos \alpha_{3,4} = \sin \alpha_p$ in $\cos \beta_{3,4} = -\cos \alpha_p$ ter dejstvo, da je osna togost $k_{3,4}$ zelo velika

$$[K_{3,4}] = k_{3,4} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_p & -\sin \alpha_p \cos \alpha_p \\ -\sin \alpha_p \cos \alpha_p & \cos^2 \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500000 & -4330130 \\ -4330130 & 7500000 \end{bmatrix}.$$

Izračunati moramo še togostno matriko $[K_{3,4}]$, ki je v tem primeru nekoliko spremenjena

$$[K_{3,4}] = -[K_{3,1}] - [K_{3,2}] - [K_{3,4}] = \begin{bmatrix} -2.50135 & 4.33048 \\ 4.33048 & -7.50035 \end{bmatrix} 10^6.$$

Enačba konstrukcije ob upoštevanju robnih pogojev v vozliščih 2 in 4 je

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 & 354 & -354 \\ 354 & -1354 & -354 & 354 \\ 354 & -354 & -2501350 & 4330480 \\ -354 & 354 & 4330480 & -7500350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

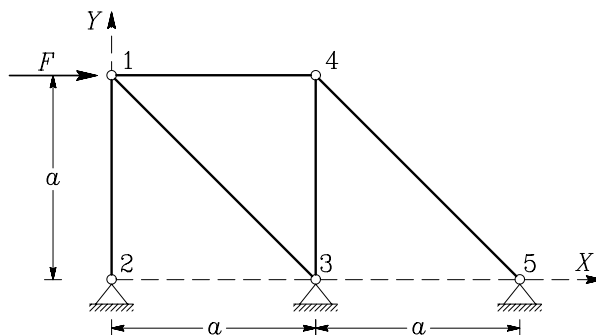
Rešitev tega sistema enačb

$$u_1 = 0.0801 \text{ m}, \quad v_1 = 0.0200 \text{ m}, \quad u_3 = 0.0085 \text{ m}, \quad v_3 = 0.0049 \text{ m},$$

je povsem enaka, kot pri prejšnjem računu.

Primer 3.4 Paličje na sliki 3.18 je obteženo z vodoravno silo $F = 20 \text{ MN}$. Elastični modul palic je $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, ploščina prereza palic pa $A = 0.01 \text{ m}^2$. Določimo pomike vozlišč 1 in 4, reakcije v podporah 2, 3 in 5 ter sile v palicah! Dolžina a na sliki 3.18 je $a = 2 \text{ m}$.





Slika 3.18: Paličje sestavlja pet palic

Stopnjo statične nedoločenosti za paličje s 5 palicami in 2 prostima vozliščema je

$$n = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Za vseh pet palic napišimo preglednico 3.4.

Tabela 3.4: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos \alpha_{i,j}$	$\cos \beta_{i,j}$	$E_{i,j} A_{i,j} / l_{i,j}$
1, 2	2	0	-1	1000
1, 3	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	707
1, 4	2	1	0	1000
4, 3	2	0	-1	1000
4, 5	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	707

Togostne matrike posameznih palic smo že izračunali pri prejšnjih dveh nalogah, zato jih sedaj samo prepišemo

$$[K_{1,2}] = [K_{4,3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, \quad [K_{1,3}] = [K_{4,5}] = \begin{bmatrix} 354 & -354 \\ -354 & 354 \end{bmatrix}, \quad [K_{1,4}] = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrike $[K_{i,i}]$ so

$$[K_{1,1}] = -([K_{1,2}] + [K_{1,3}] + [K_{1,4}]) = \begin{bmatrix} -1354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix},$$

$$[K_{2,2}] = -[K_{2,1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix},$$

$$[K_{3,3}] = -([K_{3,1}] + [K_{3,4}]) = \begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix},$$

$$[K_{4,4}] = -([K_{4,1}] + [K_{4,3}] + [K_{4,5}]) = \begin{bmatrix} -1354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix},$$



$$[K_{5,5}] = -[K_{5,4}] = \begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -354 \end{bmatrix}.$$

Togostno matriko konstrukcije sestavimo iz podmatrik $[K_{i,j}]$, tako kot kaže naslednja enačba

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [K_{1,3}] & [K_{1,4}] & [\emptyset] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [\emptyset] & [\emptyset] & [\emptyset] \\ [K_{3,1}] & [\emptyset] & [K_{3,3}] & [K_{3,4}] & [\emptyset] \\ [K_{4,1}] & [\emptyset] & [K_{4,3}] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [\emptyset] & [\emptyset] & [\emptyset] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_4 \\ v_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ R_{2X} \\ R_{2Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \\ 0 \\ 0 \\ R_{5X} \\ R_{5Y} \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

Ker so pomiki u_2, v_2, u_3, v_3, u_5 in v_5 enaki nič, lahko v enačbi konstrukcije (3.62) črtamo tretjo, četrto, peto, šesto, deveto in deseto vrstico in ustrezne stolpce

$$\begin{bmatrix} -1354 & 354 & 1000 & 0 \\ 354 & -1354 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & -1354 & 354 \\ 0 & 0 & 354 & -1354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema enačb je

$$u_1 = 0.0427 \text{ m}, \quad v_1 = 0.0112 \text{ m}, \quad u_4 = 0.0338 \text{ m}, \quad v_4 = 0.0088 \text{ m}.$$

Iz enačb, ki smo jih črtali, lahko izračunamo reakcije v podporah 2, 3 in 5

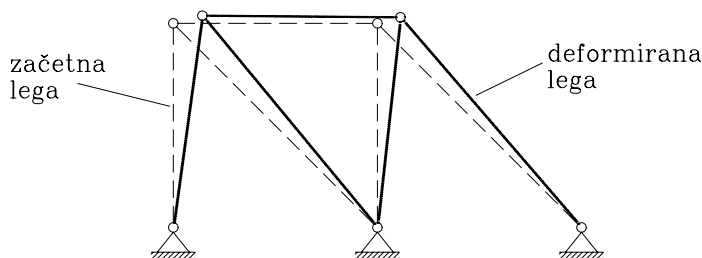
$$\begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 354 & -354 & 0 & 0 \\ -354 & 354 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 354 & -354 \\ 0 & 0 & -354 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0427 \\ 0.0112 \\ 0.0338 \\ 0.0088 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -11.2 \\ -11.2 \\ 2.4 \\ -8.9 \\ 8.9 \end{bmatrix}.$$

Osne sile v palicah so

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 1000 [(0 - 0.0427) 0 + (0 - 0.0112) (-1)] = 11.2 \text{ MN}, \\ N_{1,3} &= 707 [(0 - 0.0427) 0.707 + (0 - 0.0112) (-0.707)] = -15.7 \text{ MN}, \\ N_{1,4} &= 1000 [(0.0338 - 0.0427) 1 + (0.0088 - 0.0112) 0] = -8.9 \text{ MN}, \\ N_{4,3} &= 1000 [(0 - 0.0338) 0 + (0 - 0.0088) (-1)] = 8.8 \text{ MN}, \\ N_{4,5} &= 707 [(0 - 0.0338) 0.707 + (0 - 0.0088) (-0.707)] = -12.5 \text{ MN} \end{aligned}$$

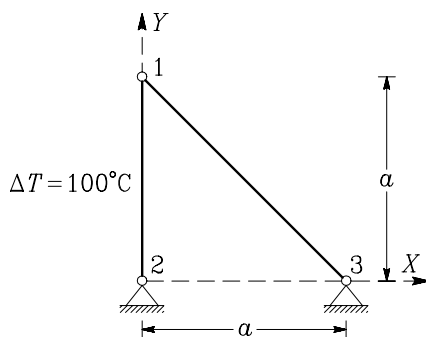
Sile $N_{1,2}$ in $N_{4,3}$ so natezne, $N_{1,3}$, $N_{1,4}$ in $N_{4,5}$ so tlačne. Pomiki vozlišča 1 so manjši kot pri prejšnjih primerih, saj so dodatne palice povečale togost konstrukcije. Na sliki 3.19 je prikazana deformirana oblika paličja.





Slika 3.19: Deformirana oblika paličja

Primer 3.5 Palica 1 paličja na sliki 3.20 se segreje za 100°C . Elastični modul palic je $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, temperaturni razteznostni koeficient $\alpha_T = 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$, ploščina prereza palic pa $A = 0.01 \text{ m}^2$. Določimo pomika vozlišča 1, reakcije v podporah 2 in 3 ter sile v palicah! Dolžina a na sliki 3.20 je $a = 2 \text{ m}$.

Slika 3.20: Navpična palica se segreje za 100°C

Konstrukcija je povsem enaka kot pri primeru 3.1. Zato je njena togostna matrika enaka

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \end{bmatrix}.$$

Nadomestne sile izračunamo po enačbi (3.33)

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{1X} \\ \bar{F}_{1Y} \end{bmatrix} = -E_{1,2} A_{1,2} \alpha_{T1,2} \Delta T_{1,2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \end{bmatrix} = -E_{2,1} A_{2,1} \alpha_{T2,1} \Delta T_{2,1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Z rešitvijo sistema enačb

$$\begin{bmatrix} -354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$



izračunamo neznana pomika

$$u_1 = 0.002 \text{ m}, \quad v_1 = 0.002 \text{ m}.$$

Reakcije izračunamo po enačbah (3.40)

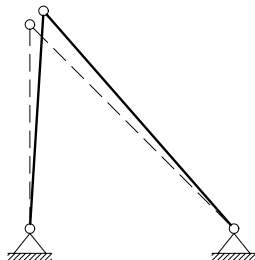
$$\begin{bmatrix} R_{2X} \\ R_{2Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1000 \\ 354 & -354 \\ -354 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.002 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \\ \bar{F}_{3X} \\ \bar{F}_{3Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunati moramo še osne sile v palicah po enačbi (3.20)

$$N_{1,2} = 1000 [(0 - 0.002) \cdot 0 + (0 - 0.002) \cdot (-1)] - 2 \cdot 10^5 \cdot 0.01 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = 0,$$

$$N_{1,3} = 0.$$

Obe osni sili sta enaki nič. Pri statično določeni konstrukciji enakomerne temperaturne spremembe povzročijo pomike, ne pa tudi reakcij in notranjih sil. Na sliki 3.21 je prikazana deformirana oblika paličja, prikazani pomiki so v primerjavi z dimenzijami konstrukcije povečani za 100-krat.



Slika 3.21: Deformirana oblika paličja

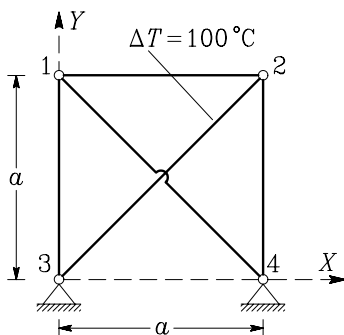
Primer 3.6 Palica 5 paličja na sliki 3.22 se segreje za 100°C . Elastični modul palic je $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, temperaturni razteznostni koeficient $\alpha_T = 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$, ploščina prerezov palic pa $A = 0.01 \text{ m}^2$. Določimo pomike vozlišč 1 in 2, reakcije v podporah in sile v palicah! Dolžina a na sliki 3.22 je $a = 2 \text{ m}$.

Upoštevamo, da paličje sestavlja pet palic in sta dve vozlišči nepodprti

$$n = 5 - 2 \cdot 2 = 1.$$

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena.





Slika 3.22: Statično nedoločeno paličje je obteženo le s temperaturno obtežbo

Za vse palice napišimo preglednico 3.5.

Tabela 3.5: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos \alpha_{i,j}$	$\cos \beta_{i,j}$	$E_{i,j} A_{i,j} / l_{i,j}$
1, 3	2	0	-1	1000
2, 4	2	0	-1	1000
1, 2	2	1	0	1000
1, 4	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	707
4, 5	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	707

Togostne matrike za posamezne palice so

$$\begin{aligned}
 [K_{1,3}] &= [K_{2,4}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, & [K_{1,2}] &= \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [K_{1,4}] &= \begin{bmatrix} 354 & -354 \\ -354 & 354 \end{bmatrix}, & [K_{2,3}] &= \begin{bmatrix} 354 & 354 \\ 354 & 354 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

togostni matriki $[K_{1,1}]$ in $[K_{2,2}]$ sta

$$\begin{aligned}
 [K_{1,1}] &= -([K_{1,3}] + [K_{1,2}] + [K_{1,4}]) = \begin{bmatrix} -1354 & 354 \\ 354 & -1354 \end{bmatrix}, \\
 [K_{2,2}] &= -([K_{2,3}] + [K_{2,1}] + [K_{2,4}]) = \begin{bmatrix} -1354 & -354 \\ -354 & -1354 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Togostno matriko konstrukcije sestavimo iz podmatrik $[K_{i,j}]$, tako, da za vozlišči 1 in 2 zapišemo enačbo



(3.32), za vozlišči 3 in 4 pa enačbo (3.40)

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [K_{1,3}] & [K_{1,4}] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [K_{2,3}] & [K_{2,4}] \\ [K_{3,1}] & [K_{3,2}] & [I] & [\emptyset] \\ [K_{4,1}] & [K_{4,2}] & [\emptyset] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{F}_{1X} \\ \bar{F}_{1Y} \\ \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \\ R_{3X} + \bar{F}_{3X} \\ R_{3Y} + \bar{F}_{3Y} \\ R_{4X} + \bar{F}_{4X} \\ R_{4Y} + \bar{F}_{4Y} \end{bmatrix}.$$

Izračunati moramo nadomestne obtežbe. Segrevanje palice 5 vpliva le na obtežbo v vozliščih 2 in 3. Zato izračunamo (enačba (3.33))

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{2X} \\ \bar{F}_{2Y} \end{bmatrix} = -E_{2,3} A_{2,3} \alpha_{T2,3} \Delta T_{2,3} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{3X} \\ \bar{F}_{3Y} \end{bmatrix} = -E_{3,2} A_{3,2} \alpha_{T3,2} \Delta T_{3,2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Upoštevamo, da sta vozlišči 3 in 4 podprti. Zato lahko iz enačbe konstrukcije črtamo tretjo in četrto enačbo ter tretji in četrti stolpec. Iz enačbe konstrukcije

$$\begin{bmatrix} -1354 & 354 & 1000 & 0 \\ 354 & -1354 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & -1354 & -354 \\ 0 & 0 & -354 & -1354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

izračunamo neznane pomike

$$u_1 = 0.00177 \text{ m}, \quad v_1 = 0.00046 \text{ m}, \quad u_2 = 0.00223 \text{ m}, \quad v_2 = 0.00046 \text{ m}.$$

Iz enačb, ki smo jih črtali, izračunamo reakcije v podporah 3 in 4

$$\begin{bmatrix} R_{3X} \\ R_{3Y} \\ R_{4X} \\ R_{4Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 354 & 354 \\ 0 & 1000 & 354 & 354 \\ 354 & -354 & 0 & 0 \\ -354 & 354 & 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00177 \\ 0.00046 \\ 0.00223 \\ 0.00046 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.952 \\ -1.414 \\ -0.462 \\ 0.000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.414 \\ 1.414 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 \\ 0.00 \\ -0.46 \\ 0.00 \end{bmatrix} \text{ MN}.$$



Osne sile so

$$N_{1,3} = 1000 [(0 - 0.00177) 0 + (0 - 0.00046)(-1)] = 0.46 \text{ MN},$$

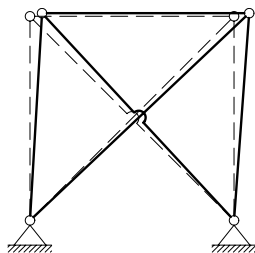
$$N_{2,4} = 1000 [(0 - 0.00223) 0 + (0 - 0.00046)(-1)] = 0.46 \text{ MN},$$

$$N_{1,2} = 1000 [(0.00223 - 0.00177) 1 + (0.00046 - 0.00046) 0] = 0.46 \text{ MN},$$

$$N_{1,4} = 707 [(0 - 0.00177) 0.707 + (0 - 0.00046)(-0.707)] = -0.65 \text{ MN},$$

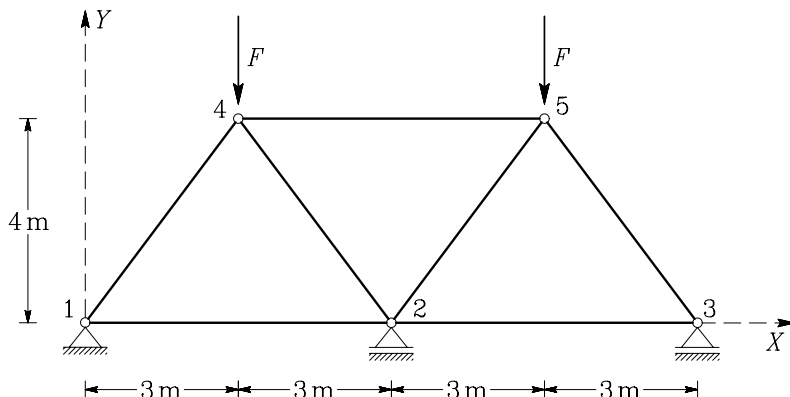
$$N_{2,3} = 707 [(0 - 0.00223)(-0.707) + (0 - 0.00046)(-0.707)] - 2 \cdot 10^5 \cdot 0.01 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = -0.65 \text{ MN}.$$

Sile $N_{1,3}$, $N_{2,4}$ in $N_{1,2}$ so natezne, sili $N_{1,4}$ in $N_{2,3}$ pa sta tlačni. Pri statično nedoločeni konstrukciji je temperaturna obtežba povzročila pomike ter notranje sile in reakcije. Na sliki 3.23 je prikazana deformirana oblika paličja.



Slika 3.23: Deformirana oblika paličja

Primer 3.7 Izračunajmo pomike prostih vozlišč, reakcije v podporah in sile v palicah za prikazano paličje na sliki 3.24! Elastični modul palic je $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, ploščina prereza palic pa $A = 0.01 \text{ m}^2$. Velikost sile $P = 2 \text{ m}$, pomik vozlišča 2 pa $\Delta v_2 = -0.002 \text{ m}$.



Slika 3.24: Vozlišče 2 se premakne v navpični smeri za 2 mm



Vozlišči 4 in 5 sta obteženi z enakima navpičnima silama F . Zaradi podajnosti podlage je navpični pomik v točki 2 različen od nič $\Delta v_2 = -0.002$ m.

Zapišimo preglednico s podatki o posameznih palicah.

Tabela 3.6: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos \alpha_{i,j}$	$\cos \beta_{i,j}$	$E_{i,j} A_{i,j} / l_{i,j}$
1, 4	5	0.6	0.8	400
1, 2	6	1.0	0.0	333
4, 5	6	1.0	0.0	333
4, 2	5	0.6	-0.8	400
2, 5	5	0.6	0.8	400
2, 3	6	1.0	0.0	333
5, 3	5	0.6	-0.8	400

Togostne matrike posameznih palic izračunamo po enačbah (3.27) in (3.34)

$$[K_{1,4}] = 400 \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & 192 \\ 192 & 256 \end{bmatrix},$$

$$[K_{1,2}] = 333 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K_{4,5}] = 333 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K_{4,2}] = 400 \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & -192 \\ -192 & 256 \end{bmatrix},$$

$$[K_{2,5}] = 400 \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & 192 \\ 192 & 256 \end{bmatrix},$$

$$[K_{2,3}] = 333 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K_{5,3}] = 400 \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 144 & -192 \\ -192 & 256 \end{bmatrix},$$

$$[K_{1,1}] = -([K_{1,2}] + [K_{1,4}]) = \begin{bmatrix} -477 & -192 \\ -192 & -256 \end{bmatrix},$$

$$[K_{2,2}] = -([K_{2,1}] + [K_{2,4}] + [K_{2,5}] + [K_{2,3}]) = \begin{bmatrix} -954.7 & 0 \\ 0 & -512 \end{bmatrix},$$

$$[K_{3,3}] = -([K_{3,2}] + [K_{3,5}]) = \begin{bmatrix} -477 & 192 \\ 192 & -256 \end{bmatrix},$$



$$[K_{4,4}] = -([K_{4,1}] + [K_{4,2}] + [K_{4,5}]) = \begin{bmatrix} -621 & 0 \\ 0 & -512 \end{bmatrix},$$

$$[K_{5,5}] = -([K_{5,4}] + [K_{5,2}] + [K_{5,3}]) = \begin{bmatrix} -621 & 0 \\ 0 & -512 \end{bmatrix}.$$

Togostno matriko konstrukcije sestavimo iz podmatrik $[K_{i,j}]$

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [\emptyset] & [K_{1,4}] & [\emptyset] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [K_{2,3}] & [K_{2,4}] & [K_{2,4}] \\ [\emptyset] & [K_{3,2}] & [K_{3,3}] & [\emptyset] & [K_{3,5}] \\ [K_{4,1}] & [K_{4,2}] & [\emptyset] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [\emptyset] & [K_{5,2}] & [K_{5,3}] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{1X} \\ R_{1Y} \\ 0 \\ R_{2Y} \\ 0 \\ R_{3Y} \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ -F \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

in jo izrazimo s togostnimi koeficienti

$$\begin{bmatrix} -477 & -192 & 333 & 0 & 0 & 0 & 144 & -192 & 0 & 0 \\ -192 & -256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & 256 & 0 & 0 \\ 333 & 0 & -955 & 0 & 333 & 0 & 144 & -192 & 144 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & -512 & 0 & 0 & -192 & 256 & 192 & 256 \\ 0 & 0 & 333 & 0 & -477 & 192 & 0 & 0 & 144 & -192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & -256 & 0 & 0 & -192 & 256 \\ 144 & 192 & 144 & -192 & 0 & 0 & -621 & 0 & 333 & 0 \\ 192 & 256 & -192 & 256 & 0 & 0 & 0 & -512 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144 & 192 & 144 & -192 & 333 & 0 & -621 & 0 \\ 0 & 0 & 192 & 256 & -192 & 256 & 0 & 0 & 0 & -512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{1X} \\ -R_{1Y} \\ 0 \\ -R_{2Y} \\ 0 \\ -R_{3Y} \\ 0 \\ F \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Ob upoštevanju podpor v vozliščih 1 in 3 je enačba konstrukcije taka:

$$\begin{bmatrix} -954.7 & 0 & 333.3 & 144 & -192 & 144 & 192 \\ 0 & -512 & 0 & -192 & 256 & 192 & 256 \\ 333.3 & 0 & -477.3 & 0 & 0 & 144 & -192 \\ 144 & -192 & 0 & -621.3 & 0 & 333.3 & 0 \\ -192 & 256 & 0 & 0 & -512 & 0 & 0 \\ 144 & 192 & 144 & 333.3 & 0 & -621.3 & 0 \\ 192 & 256 & -192 & 0 & 0 & 0 & -512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ R_{2Y} \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ -F \end{bmatrix} \quad (3.65)$$



Sedaj upoštevamo še, da je pomik v vozlišču 2 predpisan: $v_2 = \Delta v_2$ in iz (3.65) dobimo

$$\begin{bmatrix} -954.7 & 333.3 & 144 & -192 & 144 & 192 \\ 333.3 & -477.3 & 0 & 0 & 144 & -192 \\ 144 & 0 & -621.3 & 0 & 333.3 & 0 \\ -192 & 0 & 0 & -512 & 0 & 0 \\ 144 & 144 & 333.3 & 0 & -621.3 & 0 \\ 192 & -192 & 0 & 0 & 0 & -512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 + 192 \Delta v_2 \\ F - 256 \Delta v_2 \\ 0 - 192 \Delta v_2 \\ F - 256 \Delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.384 \\ 2.512 \\ 0.384 \\ 2.512 \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Rešitve sistema enačb (3.66) so:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.002305 \text{ m}, & u_3 &= 0.004609 \text{ m}, \\ u_4 &= 0.002359 \text{ m}, & v_4 &= -0.005770 \text{ m}, \\ u_5 &= 0.002250 \text{ m}, & v_5 &= -0.005770 \text{ m}. \end{aligned}$$

Reakcije izračunamo po enačbah (3.40) (glej (3.64))

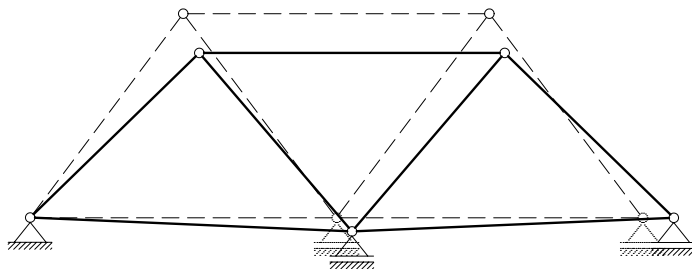
$$\begin{aligned} -R_{1X} &= 333 u_2 + 144 u_4 + 192 v_4 & \rightarrow & R_{1X} = 0 \text{ MN}, \\ -R_{1Y} &= 192 u_4 + 256 v_4 & \rightarrow & R_{1Y} = 1.024 \text{ MN}, \\ -R_{2Y} &= -512 v_2 - 192 u_4 + 256 v_4 + 192 u_5 + 256 v_5 & \rightarrow & R_{2Y} = 1.951 \text{ MN}, \\ -R_{3Y} &= 192 u_3 - 192 u_5 + 256 v_5 & \rightarrow & R_{3Y} = 1.024 \text{ MN}. \end{aligned}$$

Osne sile v palicah izračunamo iz pomikov vozlišč po enačbi (3.20):

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 333 [(u_2 - u_1) 1] = 0.7682 \text{ MN}, \\ N_{1,4} &= 400 [(u_4 - u_1) 0.6 + (v_4 - v_1) 0.8] = -1.2803 \text{ MN}, \\ N_{4,2} &= 400 [(u_4 - u_2) 0.6 + (v_4 - v_2) (-0.8)] = -1.2197 \text{ MN}, \\ N_{4,5} &= 333 [(u_5 - u_4) 1] = -0.0364 \text{ MN}, \\ N_{2,5} &= 400 [(u_5 - u_2) 0.6 + (v_5 - v_2) 0.8] = -1.2197 \text{ MN}, \\ N_{2,3} &= 333 [(u_3 - u_2) 1] = 0.7682 \text{ MN}, \\ N_{5,3} &= 400 [(u_5 - u_3) 0.6 + (v_5 - v_3) (-0.8)] = -1.2803 \text{ MN}, \end{aligned}$$

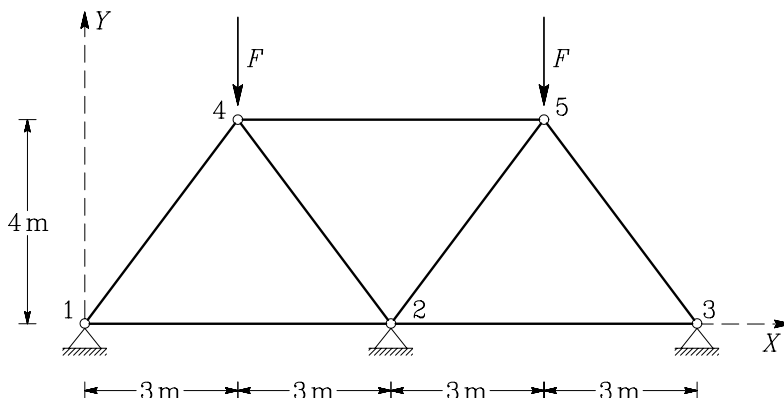
Na sliki 3.25 je prikazana deformirana oblika paličja.





Slika 3.25: Deformirana oblika paličja

Primer 3.8 Izračunajmo pomike prostih vozlišč, reakcije v podporah in sile v palicah za prikazano paličje (slika 3.26)! Elastični modul palic je $E = 2 \times 10^5$ MPa, ploščina prereza palic pa $A = 0.01$ m². Velikost sile F je 2 MN, pomik vozlišča 2 pa $\Delta \vec{u}_2 = 0.002 \vec{e}_x - 0.004 \vec{e}_y$ m.



Slika 3.26: Vozlišče 2 se premakne v poševni smeri

V vozlišču 2 je predpisan pomik v vodoravni in navpični smeri. Vozlišči 1 in 3 sta nepomično podprti. Sistem enačb za konstrukcijo, pri kateri smo že upoštevali robne pogoje v vozliščih 1 in 3, je

$$\begin{bmatrix} -954.7 & 0 & 144 & -192 & 144 & 192 \\ 0 & -512 & -192 & 256 & 192 & 256 \\ 144 & -192 & -621.3 & 0 & 333.3 & 0 \\ -192 & 256 & 0 & -512 & 0 & 0 \\ 144 & 192 & 333.3 & 0 & -621.3 & 0 \\ 192 & 256 & 0 & 0 & 0 & -512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{2X} \\ R_{2Y} \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}.$$

Upoštevamo še predpisani pomik v vozlišču 2: $u_2 = 0.002$ in $v_2 = -0.004$:



$$\begin{bmatrix} -621.3 & 0 & 333.3 & 0 \\ 0 & -512 & 0 & 0 \\ 333.3 & 0 & -621.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 - 144 u_2 + 192 v_2 \\ F + 192 u_2 - 256 v_2 \\ 0 - 144 u_2 - 192 v_2 \\ F - 192 u_2 - 256 v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.056 \\ 3.408 \\ 0.480 \\ 2.640 \end{bmatrix}.$$

Rešitve sistema enačb so:

$$u_4 = 0.001804 \text{ m}, \quad v_4 = -0.006656 \text{ m}, \quad u_5 = 0.0001955 \text{ m}, \quad v_5 = -0.005156 \text{ m}.$$

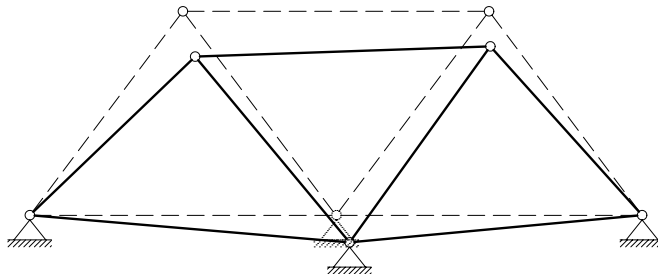
Reakcije izračunamo po enačbah

$$\begin{aligned} -R_{1X} &= 333 u_2 + 144 u_4 + 192 v_4 && \rightarrow R_{1X} = 0.3515 \text{ MN}, \\ -R_{1Y} &= 192 u_4 + 256 v_4 && \rightarrow R_{1Y} = 1.3575 \text{ MN}, \\ -R_{2X} &= -954.7 u_2 + 144 u_4 - 192 v_4 + 144 u_5 + 192 v_5 && \rightarrow R_{2X} = 1.3333 \text{ MN}, \\ -R_{2Y} &= -512 v_2 - 192 u_4 + 256 v_4 + 192 u_5 + 256 v_5 && \rightarrow R_{2Y} = 1.2844 \text{ MN}, \\ -R_{3X} &= 333.3 u_2 + 144 u_5 - 192 v_5 && \rightarrow R_{3X} = -1.6848 \text{ MN}, \\ -R_{3Y} &= -192 u_5 + 256 v_5 && \rightarrow R_{3Y} = 1.3575 \text{ MN}. \end{aligned}$$

Osne sile v palicah so:

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= 333 [(u_2 - u_1) 1] = 0.6666 \text{ MN}, \\ N_{1,4} &= 400 [(u_4 - u_1) 0.6 + (v_4 - v_1) 0.8] = -1.6969 \text{ MN}, \\ N_{4,2} &= 400 [(u_4 - u_2) 0.6 + (v_4 - v_2) (-0.8)] = -0.8031 \text{ MN}, \\ N_{4,5} &= 333 [(u_5 - u_4) 1] = -0.5363 \text{ MN}, \\ N_{2,5} &= 400 [(u_5 - u_2) 0.6 + (v_5 - v_2) 0.8] = -0.8031 \text{ MN}, \\ N_{2,3} &= 333 [(u_3 - u_2) 1] = -0.6667 \text{ MN}, \\ N_{5,3} &= 400 [(u_5 - u_3) 0.6 + (v_5 - v_3) (-0.8)] = -1.6969 \text{ MN}. \end{aligned}$$

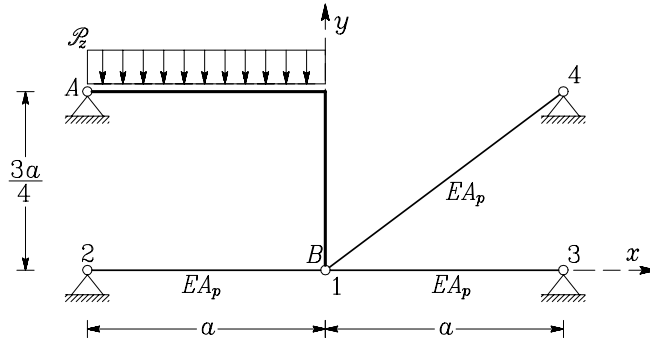
Na sliki 3.27 je prikazana deformirana oblika paličja.



Slika 3.27: Deformirana oblika paličja

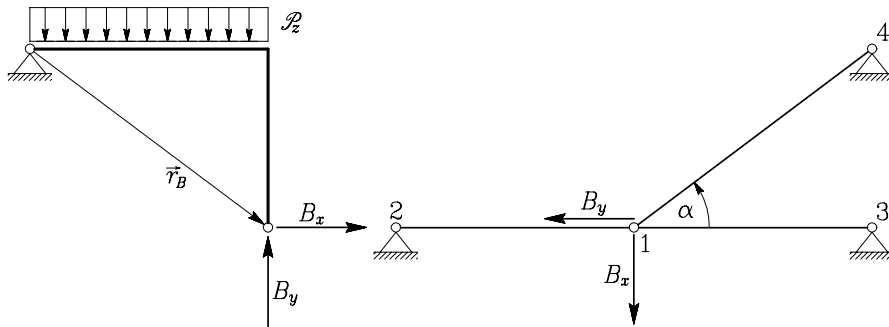


Primer 3.9 Določimo osne sile v palicah $\overline{12}$, $\overline{13}$ in $\overline{14}$ (slika 3.28)! Podajnost nosilca \overline{AB} je v primerjavi s podajnostjo palic zanemarljiva. Dolžina $a = 2$ m, ploščina prečnega prereza palic $A_p = 5 \text{ cm}^2$, modul elastičnosti materiala palic $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, velikost linijske obtežbe pa $\mathcal{P}_z = 80 \text{ kN/m}$.



Slika 3.28: Geometrijski podatki o konstrukciji

Nalogo rešimo tako, da nosilec ločimo od paličja. Prekinjeno zvezo med paličjem in nosilcem nadomestimo s silama B_x in B_y v vozlišču $B \equiv 1$ (slika 3.29).



Slika 3.29: Zvezo med paličjem in nosilcem nadomestimo s silama B_x in B_y v vozlišču B

Izračunati moramo pomika $u_1 = u_B$ in $v_1 = v_B$ vozlišča B , zasuk φ nosilca \overline{AB} ter sili B_x in B_y . Pet neznank določimo tako, da za nosilec zapišemo momentni pogoj na točko 0 ter kinematični enačbi, s katerima izrazimo pomika u_B in v_B z zasukom φ , za paličje pa ravnotežni enačbi za vozlišče B .

Nosilec

Ravnotežna enačba:

$$B_x \frac{3a}{4} + B_y a - \mathcal{P}_z \frac{a^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{3B_x + 4B_y = 2\mathcal{P}_z a.} \quad (3.67)$$



Kinematični pogoj zapišemo z enačbo [†]

$$\vec{u}_B = \vec{u}_0 + \vec{\varphi} \times \vec{r}_B.$$

Upoštevamo, da je $\vec{u}_0 = \vec{0}$, $\vec{\varphi} = \varphi \vec{e}_z$, $\vec{r}_B = a \vec{e}_x - (3a/4) \vec{e}_y$ in dobimo

$$\vec{u}_B = \frac{3a}{4} \varphi \vec{e}_x + a \varphi \vec{e}_y \quad \rightarrow \quad \boxed{u_B = u_1 = \frac{3a}{4} \varphi, \quad v_B = v_1 = a \varphi.} \quad (3.68)$$

Paličje

Tabela 3.7: Dolžina, smerni kosinusi in osna togost palic

Vozlišči i in j	$l_{i,j}$	$\cos \alpha_{i,j}$	$\cos \beta_{i,j}$	$E_{i,j} A_{i,j} / l_{i,j}$ [kN/cm]
1, 2	200	-1.0	0.0	525
1, 3	200	1.0	0.0	525
1, 4	250	0.8	0.6	420

Togostni matriki za palici $\overline{12}$ in $\overline{13}$ sta pri prejšnji nalogi

$$[K_{1,2}] = [K_{1,3}] = \begin{bmatrix} 525 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [K_{1,4}] = \begin{bmatrix} 268.8 & 201.6 \\ 201.6 & 151.2 \end{bmatrix},$$

matrika $[K_{1,1}]$ pa je

$$[K_{1,1}] = -([K_{1,2}] + [K_{1,3}] + [K_{1,4}]) = \begin{bmatrix} -1318.8 & -201.6 \\ -201.6 & -151.2 \end{bmatrix}.$$

Ravnotežno enačbo za vozlišče B

$$[K_{1,1}] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_x \\ -B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

zapišemo takole:

$$\boxed{\begin{aligned} -1318.8 u_1 - 201.6 v_1 &= B_x, \\ -201.6 u_1 - 151.2 v_1 &= B_y. \end{aligned}} \quad (3.69)$$

Rešitev enačb (3.67), (3.68) in (3.69) je

$$u_1 = -0.0502 \text{ cm}, \quad v_1 = -0.0670 \text{ cm}, \quad \varphi = -0.000335 \text{ rad}, \quad B_x = 79.68 \text{ kN}, \quad B_y = 20.24 \text{ kN}.$$

Določimo še osne sile v palicah (enačba (3.20))

$$N_{1,2} = 525 (0.050 \cdot (-1) + 0.067 \cdot 0) = -26.35 \text{ kN},$$

$$N_{1,3} = 525 (0.050 \cdot 1 + 0.067 \cdot 0) = 26.35 \text{ kN},$$

$$N_{1,4} = 420 (0.050 \cdot 0.8 + 0.067 \cdot 0.6) = 33.73 \text{ kN}.$$

[†] M. Stanek, G. Turk, Statika I, Univerza v Ljubljani, 1996.



3.2 Ravninski okvir

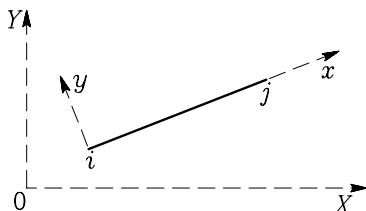
V tem razdelku izpeljemo enačbe za računanje pomikov vozlišč in reakcij ravninskih okvirjev ter notranjih sil v elementih takih okvirjev. Pri tem upoštevamo, da so pomiki majhni in da so tlačne osne sile manjše od uklonskih sil. Zato lahko pišemo ravnotežne enačbe na nedeformirani legi konstrukcije. Okvirje obravnavamo po metodi pomikov (deformacijska metoda). To pomeni, da osnovne enačbe teorije elastičnosti izrazimo s pomiki.

3.2.1 Osnovne predpostavke

Posamezni elementi ravninskega okvirja potekajo od začetnega vozlišča i do končnega vozlišča j . Elementi imajo ravno os in konstanten prečni prerez. Predpostavimo, da leži glavna vztrajnostna os prečnega prereza vsakega elementa v ravnini konstrukcije, strižno središče pa se ujema s težiščem prečnega prereza. Ker vsa obtežba deluje v ravnini konstrukcije, so od nič različni le pomiki v tej ravnini.

3.2.2 Opis oznak in koordinatnih sistemov

Uporabimo dva desnosučna koordinatna sistema. Osi lokalnega koordinatnega sistema x, y in z izberemo tako, da os x sovpada z osjo vsakega elementa in kaže od vozlišča i proti vozlišču j , os y pa leži v ravnini konstrukcije. Osi y in z sta glavni vztrajnostni osi prečnega prereza elementa. Notranje sile v elementih okvirja računamo glede na osi lokalnega koordinatnega sistema. Osi globalnega koordinatnega sistema označimo z X, Y in Z . Geometrijo konstrukcije opišemo v ravnini X, Y , os Z pa ima enako smer kot os z (slika 3.30). Glede na osi globalnega koordinatnega sistema podajamo koordinate vozlišč, vozliščno obtežbo ter računamo reakcije in pomike vozlišč.



Slika 3.30: Globalni in lokalni koordinatni sistem

Pri ravninski okvirni konstrukciji ima vsako vozlišče elementa po tri prostostne stopnje gibanja. Vozliščne pomike v krajišču i označimo z $[u_i]$, v krajišču j pa z $[u_j]$ (slika 3.31a):

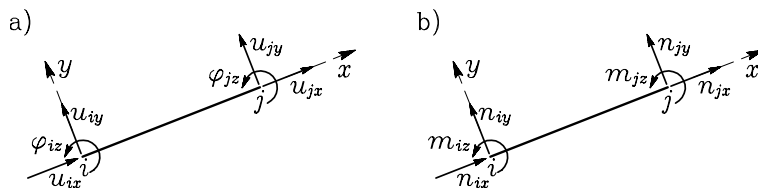
$$[u_i] = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ \varphi_{iz} \end{bmatrix}, \quad [u_j] = \begin{bmatrix} u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Vsaki prostostni stopnji v vozlišču pripada komponenta (posplošene) vozliščne sile. Vozliščne sile ele-



menta v krajišču i označimo z $[n_i]$, v krajišču j pa z $[n_j]$ (slika 3.31b):

$$[n_i] = \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ m_{iz} \end{bmatrix}, \quad [n_j] = \begin{bmatrix} n_{jx} \\ n_{jy} \\ m_{jz} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$



Slika 3.31: a) Vozliščni pomiki b) Vozliščne sile

Vidimo, da so vozliščne sile v vozlišču i enake negativnim vrednostim notranjih sil, v vozlišču j pa enake notranjim silam. Vozliščne pomike in vozliščne sile glede na lokalni koordinatni sistem označujemo z malimi črkami (enačbi (3.70) in (3.71)), glede na globalni koordinatni sistem pa z velikimi črkami:

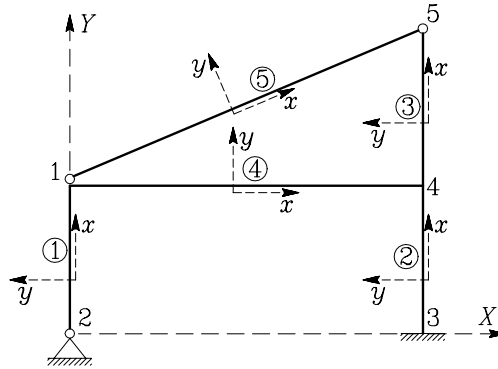
$$[U_i] = \begin{bmatrix} U_{iX} \\ U_{iY} \\ \Phi_{iZ} \end{bmatrix}, \quad [U_j] = \begin{bmatrix} U_{jX} \\ U_{jY} \\ \Phi_{jZ} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

oziroma

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_{iX} \\ N_{iY} \\ M_{iZ} \end{bmatrix}, \quad [N_j] = \begin{bmatrix} N_{jX} \\ N_{jY} \\ M_{jZ} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Na sliki 3.32 prikazujemo ravninski okvir, globalni in lokalne koordinatne sisteme ter številke vozlišč konstrukcije. Vsak element je podan s številka začetnega in končnega vozlišča. Za element, ki ga določata vozlišči 2 in 4, smo izbrali lokalno os x od vozlišča 2 proti vozlišču 4. Zato je številka i začetnega vozlišča tega elementa 2, številka j končnega vozlišča pa 4. Običajno vsak element označimo še s številko elementa e . Element z vozliščema 2 in 4 na sliki 3.32 ima številko 4.





Slika 3.32: Posamezne elemente okvirja določajo številke vozlišč oziroma številke elementov

3.2.3 Togostna matrika elementa v lokalnem koordinatnem sistemu

Določimo togostno matriko $[k]$ linijskega elementa s konstantnim prečnim prerezom in z ravno osjo za primer ravninske konstrukcije v ravnini x, y .

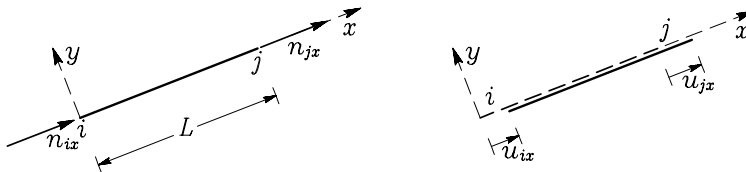
Togostna matrika $[k]$ linijskega elementa je definirana z enačbo

$$\begin{bmatrix} n_i \\ n_j \end{bmatrix} = [k] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad \text{ozioroma} \quad [n] = [k][u]. \quad (3.74)$$

Koeficiente togostne matrike $[k]$ določimo z integracijo ravnotežnih enačb (1.87)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\mathcal{P}_x}{E A_x}, \quad \frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{1}{E I_z} \left(\mathcal{P}_y - \frac{d\mathcal{M}_z}{dx} \right). \quad (3.75)$$

Določiti želimo zvezo med silama n_{ix} in n_{jx} ter pomikoma u_{ix} in u_{jx} za linijski element na sliki 3.33.



Slika 3.33: Vozliščni sili n_{ix} in n_{iy} ter vozliščna pomika u_{ix} in u_{jx}

Iskano zvezo dobimo, če rešimo prvo izmed diferencialno enačbo (3.75)

$$\frac{d^2 u_x}{dx^2} = 0 \quad (3.76)$$



ob upoštevanju robnih pogojev

$$x = 0 : \quad u_x(0) = u_{ix}, \quad x = L : \quad u_x(L) = u_{jx}. \quad (3.77)$$

Enačbo (3.76) dvakrat integriramo

$$\frac{du_x}{dx} = C_1, \quad u_x = C_1 x + C_2 \quad (3.78)$$

in upoštevamo robna pogoja (3.77). Tako dobimo izraza za integracijski konstanti C_1 in C_2

$$C_1 = \frac{u_{jx} - u_{ix}}{L}, \quad C_2 = u_{ix} \quad (3.79)$$

ter izraz za pomik u_x

$$u_x = \frac{u_{jx} - u_{ix}}{L} x + u_{ix}. \quad (3.80)$$

Upoštevamo enačbo (glej (1.80))

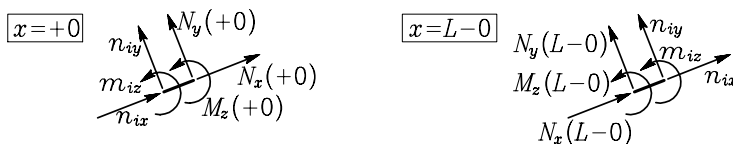
$$\frac{du_x}{dx} = \frac{N_x}{E A_x} \quad (3.81)$$

ter prvi izmed enačb (3.78) in (3.79) in dobimo

$$\frac{du_x}{dx} = \frac{u_{jx} - u_{ix}}{L} = \frac{N_x}{E A_x} \rightarrow N_x = \frac{E A_x}{L} (u_{jx} - u_{ix}). \quad (3.82)$$

Velikost osne sile N_x se vzdolž osi elementa ne spreminja. Iz ravnotežnih pogojev za del elementa ob vozliščih sledi (slika 3.34).

$$N_x(+0) = -n_{ix}, \quad N_x(L-0) = n_{jx}. \quad (3.83)$$



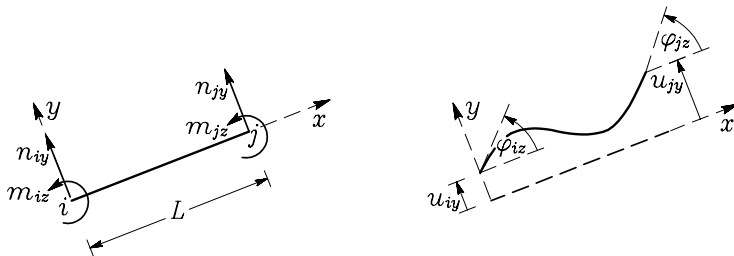
Slika 3.34: Zvezo med notranjimi silami pri $x = +0$ in $x = L - 0$ ter vozliščnimi silami dobimo iz ravnotežnih enačb za del elementa ob vozliščih

Enačbi (3.83) vstavimo v (3.82) in dobimo iskani zvezi

$$n_{ix} = \frac{E A_x}{L} (u_{ix} - u_{jx}), \quad n_{jx} = -\frac{E A_x}{L} (u_{ix} - u_{jx}). \quad (3.84)$$

Določiti moramo še zvezo med silama n_{iy} , n_{jy} in momentoma m_{iz} , m_{jz} ter pomikoma u_{iy} , u_{jy} in zasokoma φ_{iz} , φ_{jz} za linijski element na sliki 3.35.





Slika 3.35: Vozliščni sili n_{iy} in n_{jy} , vozliščna momenta m_{iz} in m_{jz} ter vozliščna pomika u_{iy} , u_{jy} in zasuka φ_{iz} in φ_{jz}

Iskano zvezo dobimo, če integriramo drugo izmed enačbo (3.75)

$$\frac{d^4 u_y}{dx^4} = 0 \quad (3.85)$$

in upoštevamo robne pogoje

$$x = 0 : \quad u_y(0) = u_{iy}, \quad \left. \frac{du_y}{dx} \right|_{x=0} = \varphi_{iz}, \quad x = L : \quad u_y(L) = u_{jy}, \quad \left. \frac{du_y}{dx} \right|_{x=L} = \varphi_{jz}. \quad (3.86)$$

Enačbo (3.85) štirikrat integriramo

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u_y}{dx^3} &= C_1, \\ \frac{d^2 u_y}{dx^2} &= C_1 x + C_2, \\ \frac{du_y}{dx} &= C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3, \\ u_y &= C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned} \quad (3.87)$$

in upoštevamo robne pogoje (3.86). Tako dobimo izraze za integracijske konstante C_1 do C_4

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{12}{L^3} u_{iy} - \frac{12}{L^3} u_{jy} + \frac{6}{L^2} \varphi_{iz} + \frac{6}{L^2} \varphi_{jz}, \\ C_2 &= -\frac{6}{L^2} u_{iy} + \frac{6}{L^2} u_{jy} - \frac{4}{L} \varphi_{iz} - \frac{2}{L} \varphi_{jz}, \\ C_3 &= \varphi_{iz}, \\ C_4 &= u_{iy}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Konstante (3.88) vstavimo v četrto izmed enačb (3.87) in dobimo izraz za pomik u_y

$$\begin{aligned} u_y &= \left(\frac{2}{L^3} u_{iy} - \frac{2}{L^3} u_{jy} + \frac{1}{L^2} \varphi_{iz} + \frac{1}{L^2} \varphi_{jz} \right) x^3 + \\ &+ \left(-\frac{3}{L^2} u_{iy} + \frac{3}{L^2} u_{jy} - \frac{2}{L} \varphi_{iz} - \frac{2}{L} \varphi_{jz} \right) x^2 + \varphi_{iz} x + u_{iy}. \end{aligned} \quad (3.89)$$



Iz ravnotežnih pogojev za del elementa ob vozliščih sledi (slika 3.34)

$$N_y(+0) = -n_{iy}, \quad N_y(L-0) = n_{jy}, \quad M_z(+0) = -m_{iz}, \quad M_z(L-0) = m_{jz}. \quad (3.90)$$

Drugi dve izmed enačb (3.90) upoštevamo v enačbi (glej (1.81))

$$\frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{M_z}{E I_z}$$

in dobimo

$$m_{iz} = -E I_z \left. \frac{d^2 u_y}{dx^2} \right|_{x=0}, \quad m_{jz} = E I_z \left. \frac{d^2 u_y}{dx^2} \right|_{x=L}. \quad (3.91)$$

Izraz (3.89) vstavimo v (3.91) in dobimo zvezo med m_{iz} , m_{jz} ter u_{iy} , u_{jy} , φ_{iz} in φ_{jz}

$$\begin{aligned} m_{iz} &= \frac{6 E I_z}{L^2} u_{iy} - \frac{6 E I_z}{L^2} u_{jy} + \frac{4 E I_z}{L} \varphi_{iz} + \frac{2 E I_z}{L} \varphi_{jz}, \\ m_{jz} &= \frac{6 E I_z}{L^2} u_{iy} - \frac{6 E I_z}{L^2} u_{jy} + \frac{2 E I_z}{L} \varphi_{iz} + \frac{4 E I_z}{L} \varphi_{jz}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Ko upoštevamo prvi dve izmed enačb (3.90), izračunamo iz enačb (1.82) in (3.87)

$$N_y = -E I_z \frac{d^3 u_y}{dx^3} = -E I_z C_1$$

vozliščni sili n_{iy} in n_{iz}

$$\begin{aligned} n_{iy} &= \frac{12 E I_z}{L^3} u_{iy} - \frac{12 E I_z}{L^3} u_{jy} + \frac{6 E I_z}{L^2} \varphi_{iz} + \frac{6 E I_z}{L^2} \varphi_{jz}, \\ n_{jy} &= -\frac{12 E I_z}{L^3} u_{iy} + \frac{12 E I_z}{L^3} u_{jy} - \frac{6 E I_z}{L^2} \varphi_{iz} - \frac{6 E I_z}{L^2} \varphi_{jz}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Izraze (3.88), (3.92) in (3.93) dobimo s programom Mathematica z naslednjimi ukazi:




```

uy[x_]=c1 x^3 / 6 + c2 x^2 / 2 + c3 x + c4;
uyc[x_]=c1 x^2 / 2 + c2 x + c3;
uycc[x_]=c1 x + c2;
res=Solve[{uy[0]==Uiy, uyc[0]==Fiiz, uy[L]==Ujy, uyc[L]==Fijz},
{c1,c2,c3,c4}];
Print["C1 = ", C1 = Expand[c1 /. res[[1]]]]
Print["C2 = ", C2 = Expand[c2 /. res[[1]]]]
Print["C3 = ", C3 = Expand[c3 /. res[[1]]]]
Print["C4 = ", C4 = Expand[c4 /. res[[1]]]]
Uycc[x_]=C1 x + C2;
Uyccc[x_]=C1;
Print["miz = ", Expand[-EI Uycc[0]]]
Print["mjz = ", Expand[EI Uycc[L]]]
Print["niy = ", Expand[EI Uyccc[0]]]
Print["njy = ", Expand[-EI Uyccc[L]]]

```

$$\begin{aligned}
C1 &= -\frac{6 \text{ Fiiz}}{L^2} + \frac{6 \text{ Fijz}}{L^2} + \frac{12 \text{ Uiy}}{L^3} - \frac{12 \text{ Ujy}}{L^3} \\
C2 &= -\frac{4 \text{ Fiiz}}{L} - \frac{2 \text{ Fijz}}{L} - \frac{6 \text{ Uiy}}{L^2} + \frac{6 \text{ Ujy}}{L^2} \\
C3 &= \text{Fiiz} \\
C4 &= \text{Uiy} \\
miz &= -\frac{4 \text{ EI Fiiz}}{L} + \frac{2 \text{ EI Fijz}}{L} + \frac{6 \text{ EI Uiy}}{L^2} - \frac{6 \text{ EI Ujy}}{L^2} \\
mjz &= -\frac{2 \text{ EI Fiiz}}{L} + \frac{4 \text{ EI Fijz}}{L} + \frac{6 \text{ EI Uiy}}{L^2} - \frac{6 \text{ EI Ujy}}{L^2} \\
niy &= -\frac{6 \text{ EI Fiiz}}{L^2} + \frac{6 \text{ EI Fijz}}{L^2} + \frac{12 \text{ EI Uiy}}{L^3} - \frac{12 \text{ EI Ujy}}{L^3} \\
njy &= -\frac{6 \text{ EI Fiiz}}{L^2} - \frac{6 \text{ EI Fijz}}{L^2} - \frac{12 \text{ EI Uiy}}{L^3} + \frac{12 \text{ EI Ujy}}{L^3}
\end{aligned}$$

Izraz za **togostno matriko** $[k]$ elementa na sliki 3.31 dobimo, če enačbe (3.84), (3.92) in (3.93) zapišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix}
E A_x/L & 0 & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 \\
0 & 12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\
0 & 6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L & 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L \\
-E A_x/L & 0 & 0 & E A_x/L & 0 & 0 \\
0 & -12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 & 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\
0 & 6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L & 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{ix} \\
u_{iy} \\
\varphi_{iz} \\
u_{jx} \\
u_{jy} \\
\varphi_{jz}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
n_{ix} \\
n_{iy} \\
m_{iz} \\
n_{jx} \\
n_{jy} \\
m_{jz}
\end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Enačbo (3.94) krajše zapišemo takole

$$[k]\{u\} = \{n\}. \quad (3.95)$$

Z matriko $[k]$ je označena togostna matrika elementa z ravno osjo, ki se lahko premika le v ravnini x, y . Zapišimo še ravnotežne enačbe za element, na katerega delujejo le vozliščne sile. Če v enačbi $\sum X = n_{ix} + n_{jx}$ upoštevamo (3.84), dobimo

$$n_{ix} + n_{jx} = 0. \quad (3.96)$$

Če pa v enačbi $\sum Y = n_{iy} + n_{jy}$ upoštevamo (3.93), v enačbi $\sum M_z^i = m_{iz} + m_{jz} + n_{jy} L$ pa (3.92), dobimo

$$n_{iy} + n_{jy} = 0, \quad m_{iz} + m_{jz} + n_{jy} L = 0. \quad (3.97)$$

To pomeni, da so vozliščne sile $n_{ix}, n_{iy}, m_{iz}, n_{jx}, n_{jy}$ in m_{jz} , ki na element delujejo, v ravnotežju.

Togostna matrika (3.94) ustreza linijskemu elementu, ki je v obeh krajiščih tega povezan z ostalimi elementi. V primeru, ko je element v začetnem ali pa v končnem vozlišču členkasto povezan z ostalimi elementi, je v takem vozlišču vozliščni moment enak nič. Togostno matriko takega elementa dobimo, če v enačbi (3.94) upoštevamo, da je m_{iz} oziroma m_{jz} enak nič. Tako lahko zasuk φ_{iz} oziroma φ_{jz} izrazimo s preostalimi petimi vozliščnimi prostostnimi stopnjami linijskega elementa in dobimo **kondenzirano** togostno matriko, ki je reda 5×5 .

Vzemimo, da ravnotežne enačbe linijskega elementa razdelimo takole:

$$\begin{bmatrix} [k_{aa}] & [k_{ab}] \\ [k_{ba}] & [k_{bb}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_a] \\ [U_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_a] \\ [F_b] \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

Če je $[F_b] = [0]$, iz (3.98) sledi

$$[k_{ba}][U_a] + [k_{bb}][U_b] = [0]$$

oziroma

$$[U_b] = -[k_{bb}]^{-1}[k_{ba}][U_a]. \quad (3.99)$$

Iz (3.98) sledi še

$$[k_{aa}][U_a] + [k_{ab}][U_b] = [F_a]. \quad (3.100)$$

Izraz (3.99) vstavimo v (3.100)

$$[k_{aa}][U_a] - [k_{ab}][k_{bb}]^{-1}[k_{ba}][U_a] = ([k_{aa}] - [k_{ab}][k_{bb}]^{-1}[k_{ba}])[U_a] = [F_a].$$

Matriko v okroglem oklepaju označimo s $[k_c]$ in imenujemo kondenzirana togostna matrika

$$[k_c] = [k_{aa}] - [k_{ab}][k_{bb}]^{-1}[k_{ba}]. \quad (3.101)$$

Tako dobimo

$$[k_c][U_a] = [F_a]. \quad (3.102)$$



Vidimo, da v enačbi (3.102) nastopata stolpca $[F_a]$ in $[U_a]$, ki imata manj elementov, kot je velikost matrike v enačbi (3.94). Zaradi enostavnejšega sestavljanja togostne matrike celotne konstrukcije kondenzirano togostno matriko običajno razširimo na velikost 6×6 tako, da dodamo na ustrezno mesto vrstico in stolpec z ničlami.

Če pomike $[U_a]$ poznamo, izračunamo pomike $[U_b]$ iz enačbe (3.99). V nadaljevanju določimo tri kondenzirane togostne matrike elementa.

Linijski element je členkasto povezan v začetnem vozlišču

Enačbo (3.94) najprej preuredimo tako, da prestavimo m_{iz} v $[n]$ ter $[\varphi_{iz}]$ v $[u]$ na zadnje mesto. V tem primeru moramo tretjo vrstico v vseh treh matrikah in tretji stolpec v matriki $[k]$ zapisati na zadnje mesto

$$\begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 & 6 E I_z/L^2 \\ -E A_x/L & 0 & E A_x/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L & 2 E I_z/L \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L & 4 E I_z/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_{jz} \\ \varphi_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{jx} \\ n_{jy} \\ m_{jz} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

Podmatrike $[k_{aa}]$, $[k_{ab}]$, $[k_{ba}]$ in $[k_{bb}]$ so

$$\begin{aligned} [k_{aa}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ -E A_x/L & 0 & E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix}, \\ [k_{ab}] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 6 E I_z/L^2 \\ 0 \\ -6 E I_z/L^2 \\ 6 E I_z/L \end{bmatrix}, \\ [k_{ba}] &= [0 \quad 6 E I_z/L^2 \quad 0 \quad -6 E I_z/L^2 \quad 2 E I_z/L], \\ [k_{bb}] &= [4 E I_z/L]. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da je $[k_{bb}]^{-1} = [L/4 E I_z]$ in iz (3.101) dobimo kondenzirano togostno matriko za element, ki je členkasto povezan v začetnem vozlišču

$$[k_c] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 0 & -3 E I_z/L^3 & 3 E I_z/L^2 \\ -E A_x/L & 0 & E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & 0 & 3 E I_z/L^3 & -3 E I_z/L^2 \\ 0 & 3 E I_z/L^2 & 0 & -3 E I_z/L^2 & 3 E I_z/L \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$



Če kondenzirano togostno matriko razširimo, dobimo

$$[k] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 0 & 0 & -3 E I_z/L^3 & 3 E I_z/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E A_x/L & 0 & 0 & E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & 0 & 0 & 3 E I_z/L^3 & -3 E I_z/L^2 \\ 0 & 3 E I_z/L^2 & 0 & 0 & -3 E I_z/L^2 & 3 E I_z/L \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

Linijski element je členkasto povezan v končnem vozlišču

V tem primeru so podmatrike $[k_{aa}]$, $[k_{ab}]$, $[k_{ba}]$ in $[k_{bb}]$ take (glej (3.94))

$$[k_{aa}] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 & -E A_x/L & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -12 E I_z/L^3 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L & 0 & -6 E I_z/L^2 \\ -E A_x/L & 0 & 0 & E A_x/L & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 & 0 & 12 E I_z/L^3 \end{bmatrix},$$

$$[k_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 E I_z/L^2 \\ 2 E I_z/L \\ 0 \\ -6 E I_z/L^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{ba}] = [0 \quad 6 E I_z/L^2 \quad 2 E I_z/L \quad 0 \quad -6 E I_z/L^2],$$

$$[k_{bb}] = [4 E I_z/L].$$

Upoštevamo, da je $[k_{bb}]^{-1} = [L/4 E I_z]$ in iz (3.101) dobimo kondenzirano togostno matriko za element, ki je členkasto povezan v končnem vozlišču

$$[k_c] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 & -E A_x/L & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 3 E I_z/L^2 & 0 & -3 E I_z/L^3 \\ 0 & 3 E I_z/L^2 & 3 E I_z/L & 0 & -3 E I_z/L^2 \\ -E A_x/L & 0 & 0 & E A_x/L & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & -3 E I_z/L^2 & 0 & 3 E I_z/L^3 \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Če sedaj kondenzirano togostno matriko razširimo, dobimo

$$[k] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 3 E I_z/L^2 & 0 & -3 E I_z/L^3 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^2 & 3 E I_z/L & 0 & -3 E I_z/L^2 & 0 \\ -E A_x/L & 0 & 0 & E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & -3 E I_z/L^2 & 0 & 3 E I_z/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$



Linijski element je členkasto povezan v obeh vozliščih

Enačbo (3.94) najprej preuredimo tako, da prestavimo m_{iz} in m_{jz} v $[n]$ ter $[\varphi_{iz}]$ in $[\varphi_{jz}]$ v $[u]$ na predzadnje in zadnje mesto. V tem primeru tretjo vrstico v matriki $[k]$ v (3.94) zapišemo v peto vrstico, tretji stolpec pa v petega. Vzamemo, da sta $m_{iz} = 0$ in $m_{jz} = 0$ in dobimo

$$\begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 & 6 E I_z/L^2 \\ -E A_x/L & 0 & E A_x/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L & 2 E I_z/L \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L & 4 E I_z/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ \varphi_{iz} \\ \varphi_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{jx} \\ n_{jy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

Podmatrike $[k_{aa}]$, $[k_{ab}]$, $[k_{ba}]$ in $[k_{bb}]$ so

$$\begin{aligned} [k_{aa}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & -E A_x/L & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 0 & -12 E I_z/L^3 \\ -E A_x/L & 0 & E A_x/L & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 0 & 12 E I_z/L^3 \end{bmatrix}, \\ [k_{ab}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 E I_z/L^2 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & 0 \\ -6 E I_z/L^2 & -6 E I_z/L^2 \end{bmatrix}, \\ [k_{ba}] &= \begin{bmatrix} 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 0 & -6 E I_z/L^2 \end{bmatrix}, \\ [k_{bb}] &= \begin{bmatrix} 4 E I_z/L & 2 E I_z/L \\ 2 E I_z/L & 4 E I_z/L \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Izračunamo $[k_{bb}]^{-1}$

$$[k_{bb}]^{-1} = \frac{L}{12 E I_z} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

in dobimo kondenzirano togostno matriko za element, ki je členkasto povezan v obeh vozliščih

$$[k_c] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & -E A_x/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E A_x/L & 0 & E A_x/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.109)$$



Če sedaj kondenzirano togostno matriko razširimo, dobimo

$$[k] = \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 & -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E A_x/L & 0 & 0 & E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

3.2.4 Togostna matrika elementa v globalnem koordinatnem sistemu

Izraz za **togostno matriko** $[k]$ elementa na sliki 3.31 glede na lokalni koordinatni sistem zapišimo takole (enačba (3.74)):

$$\begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_i] \\ [u_j] \end{bmatrix} = [k] \begin{bmatrix} [u_i] \\ [u_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [n_i] \\ [n_j] \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Če upoštevamo enačbo (3.94), zapišemo matrike $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$, $[k_{ji}]$ in $[k_{jj}]$ takole:

$$\begin{aligned} [k_{ii}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix}, \\ [k_{ij}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L \end{bmatrix}, \\ [k_{ji}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L \end{bmatrix}, \\ [k_{jj}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Iz (3.112) sledi, da sta matriki $[k_{ii}]$ in $[k_{jj}]$ simetrični, za matriki $[k_{ij}]$ in $[k_{ji}]$ pa velja zveza $[k_{ij}] = [k_{ji}]^T$.

Zapis enačbe (3.111) v globalnem koordinatnem sistemu

Enačba (3.111) je zapisana glede na lokalni koordinatni sistem elementa. V nadaljevanju to enačbo zapišemo glede na globalni koordinatni sistem. Zvezi med vozliščnimi silami $[n_i]$ in $[N_i]$ ter $[n_j]$ in $[N_j]$ zapišemo z enačbama

$$[n_i] = [T][N_i], \quad [n_j] = [T][N_j]. \quad (3.113)$$

