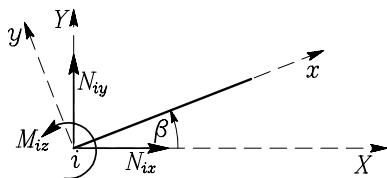


Matriko $[T]$ izrazimo s kotom β med osjo X in osjo x po enačbah (slika 3.36)

$$\begin{aligned} n_{ix} &= N_{iX} \cos \beta + N_{iY} \sin \beta, \\ n_{iy} &= -N_{iX} \sin \beta + N_{iY} \cos \beta, \\ m_{iz} &= M_{iZ}. \end{aligned} \quad (3.114)$$



Slika 3.36: Kot β merimo med osjo X in osjo x v pozitivni smeri zasuka

Enačbe (3.114) zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ m_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{iX} \\ N_{iY} \\ M_{iZ} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} N_{iX} \\ N_{iY} \\ M_{iZ} \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

Matrika $[T]$ je ortogonalna, zato velja[†]

$$[T]^T [T] = [I] \quad \rightarrow \quad [T]^{-1} = [T]^T. \quad (3.116)$$

Iz (3.113) izračunamo $[N_i]$ in $[N_j]$

$$[N_i] = [T]^T [n_i], \quad [N_j] = [T]^T [n_j]. \quad (3.117)$$

Enačbi (3.113) in (3.117) sta zapisani za vozliščne sile. Na enak način zapišemo enačbe za vozliščne pomike

$$[u_i] = [T][U_i], \quad [u_j] = [T][U_j] \quad (3.118)$$

oziroma

$$[U_i] = [T]^T [u_i], \quad [U_j] = [T]^T [u_j]. \quad (3.119)$$

Enačbo (3.111) lahko zapišemo v obliki dveh matričnih enačb

$$\begin{aligned} [k_{ii}] [u_i] + [k_{ij}] [u_j] &= [n_i], \\ [k_{ji}] [u_i] + [k_{jj}] [u_j] &= [n_j]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

[†]

$$[T]^T [T] = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$



Upošteevamo enačbe (3.113) in (3.118) in dobimo

$$\begin{aligned} [k_{ii}][T][U_i] + [k_{ij}][T][U_j] &= [T][N_i], \\ [k_{ji}][T][U_i] + [k_{jj}][T][U_j] &= [T][N_j]. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Enačbi (3.121) množimo z leve s $[T]^T$ in dobimo

$$\begin{aligned} [T]^T[k_{ii}][T][U_i] + [T]^T[k_{ij}][T][U_j] &= [N_i], \\ [T]^T[k_{ji}][T][U_i] + [T]^T[k_{jj}][T][U_j] &= [N_j]. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Če označimo

$$[K_{ii}] = [T]^T[k_{ii}][T], \quad [K_{jj}] = [T]^T[k_{jj}][T], \quad (3.123)$$

$$[K_{ij}] = [T]^T[k_{ij}][T], \quad [K_{ji}] = [T]^T[k_{ji}][T], \quad (3.124)$$

sledi

$$\begin{aligned} [K_{ii}][U_i] + [K_{ij}][U_j] &= [N_i], \\ [K_{ji}][U_i] + [K_{jj}][U_j] &= [N_j]. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Matriki $[K_{ii}]$ in $[K_{jj}]$ sta simetrični, za matriki $[K_{ij}]$ in $[K_{ji}]$ pa velja[†]

$$[K_{ij}] = [K_{ji}]^T. \quad (3.126)$$

Z enačbama (3.125) je zveza (3.111) zapisana glede na globalni koordinatni sistem. Če v prvi enačbi (3.123) upošteevamo (3.112) in (3.115), zapišemo $[K_{ii}]$ takole:

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} \frac{E A_x}{L} \cos^2 \beta + \frac{12 E I_z}{L^3} \sin^2 \beta & \left(\frac{E A_x}{L} - \frac{12 E I_z}{L^3} \right) \sin \beta \cos \beta & -\frac{6 E I_z}{L^2} \sin \beta \\ \left(\frac{E A_x}{L} - \frac{12 E I_z}{L^3} \right) \sin \beta \cos \beta & \frac{E A_x}{L} \sin^2 \beta + \frac{12 E I_z}{L^2} \cos^2 \beta & \frac{6 E I_z}{L^2} \cos \beta \\ -\frac{6 E I_z}{L^2} \sin \beta & \frac{6 E I_z}{L^2} \cos \beta & \frac{4 E I_z}{L} \end{bmatrix}.$$

V primeru, ko je linijski element členkasto povezan v začetnem vozlišču, dobimo matrike $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$,

[†] $([K_{ij}] = [T]^T[k_{ij}][T])^T \rightarrow [K_{ij}]^T = [T]^T[k_{ij}]^T[T]$
Ker je $[k_{ij}]^T = [k_{ji}]$, sledi $[K_{ij}]^T = [K_{ji}]$.



$[k_{ji}]$ in $[k_{jj}]$ iz enačbe (3.105)

$$\begin{aligned}
 [k_{ii}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ij}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & 3 E I_z/L^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ji}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^2 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{jj}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & -3 E I_z/L^2 \\ 0 & -3 E I_z/L^2 & 3 E I_z/L \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.127}$$

če je linijski element členkasto povezan v končnem vozlišču, zapišemo matrike $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$, $[k_{ji}]$ in $[k_{jj}]$ iz enačbe (3.107)

$$\begin{aligned}
 [k_{ii}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 3 E I_z/L^2 \\ 0 & 3 E I_z/L^2 & 3 E I_z/L \end{bmatrix}, \\
 [k_{ij}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^2 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ji}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -3 E I_z/L^3 & -3 E I_z/L^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{jj}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 3 E I_z/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.128}$$

če pa je linijski element členkasto povezan v obeh vozliščih, zapišemo matrike $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$, $[k_{ji}]$ in $[k_{jj}]$ iz enačbe (3.110)

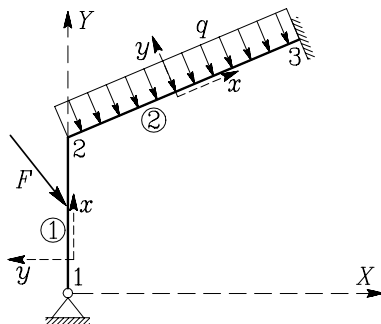


$$\begin{aligned}
 [k_{ii}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ij}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ji}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [k_{jj}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

Pri izpeljavi ravnotežnih enačb (3.75) so bile upoštevane kinematične enačbe in zveze med napetostmi in deformacijami, ne pa tudi ravnotežne enačbe. Zato moramo zapisati še ravnotežne enačbe. Izrazimo jih z reakcijami in s pomiki vozlišč okvirja.

3.2.5 Ravnotežni pogoji

Ravnotežne pogoje za računsko analizo ravninskega okvirja opišimo na primeru okvirja iz dveh elementov (slika 3.37).



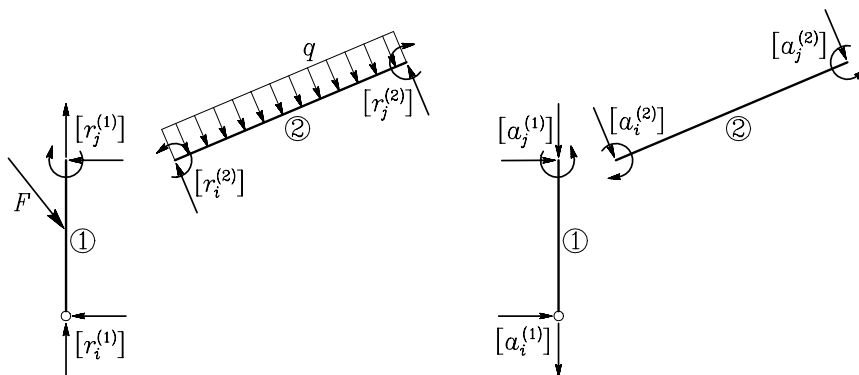
Slika 3.37: Okvir določajo tri vozlišča in dva elementa

Izpeljavo ravnotežnih pogojev za račun reakcij ter pomikov in zasukov vozlišč okvirja zapišimo v štirih točkah:

- 1) Obtežbo, ki deluje po elementu (izven vozlišč), nadomestimo s statično enakovrednimi silami in momenti $[a_i]$ in $[a_j]$ v vozliščih elementa (slika 3.38). Statično enakovredne sile $[a_i]$ in $[a_j]$ so po velikosti enake reakcijam $[r_i]$ in $[r_j]$, imajo pa nasprotno smeri

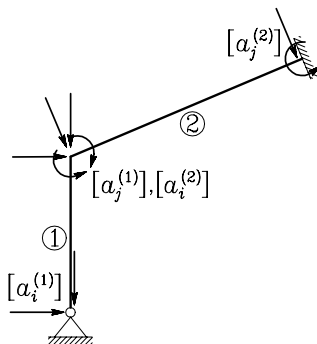
$$[a_i] = -[r_i] = \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ m_{riz} \end{bmatrix}, \quad [a_j] = -[r_j] = - \begin{bmatrix} r_{jx} \\ r_{jy} \\ m_{rjz} \end{bmatrix}. \tag{3.130}$$





Slika 3.38: a) Obtežba in reakcije $[r_i]$ in $[r_j]$ v vozliščih i in j ,
 b) Statično enakovredne sile $[a_i]$ in $[a_j]$ v vozliščih i in j

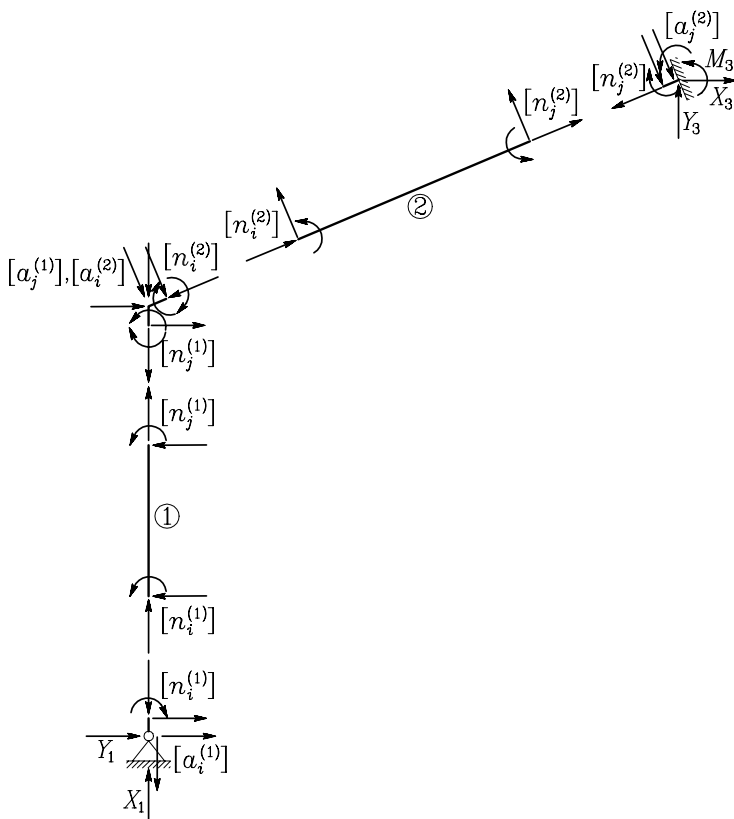
Tako dobimo okvir, na katerega delujejo le sile in momenti v vozliščih (slika 3.39). Za račun reakcij ter pomikov in zasukov vozlišč obravnavamo konstrukcijo na sliki 3.39 in ne konstrukcije s slike 3.37.



Slika 3.39: a) Na okvir delujejo le sile in momenti v vozliščih

- Konstrukcijo na sliki 3.39 razrežemo na elemente in vozlišča. Vpliv podpor nadomestimo z reakcijami v smereh osi globalnega koordinatnega sistema. V prerezih upoštevamo notranje sile $[n_i]$ in $[n_j]$, ki jih imenujemo vozliščne sile (razdelek 3.2.2). Njihove smeri predpostavimo tako, da na vozlišči elementa delujejo v pozitivnih smereh osi lokalnega koordinatnega sistema (slika 3.40). Vidimo, da na posamezne elemente delujejo le vozliščne sile.
- V razdelku 3.2.3 pokažemo, da so vozliščne sile, ki na element delujejo, v ravnotežju (enačbi (3.96) in (3.97)). To pomeni, da lahko zapišemo ravnotežne enačbe le za vozlišča. Iz teh enačb izračunamo reakcije ter pomike in zasuke vozlišč (razdelek 3.2.6). Ko pomike in zasuke vozlišč poznamo, lahko po enačbah (3.84), (3.92) in (3.93) izračunamo vozliščne sile za posamezne elemente. Tako izračunane vozliščne sile ustrezajo primeru na sliki 3.39.





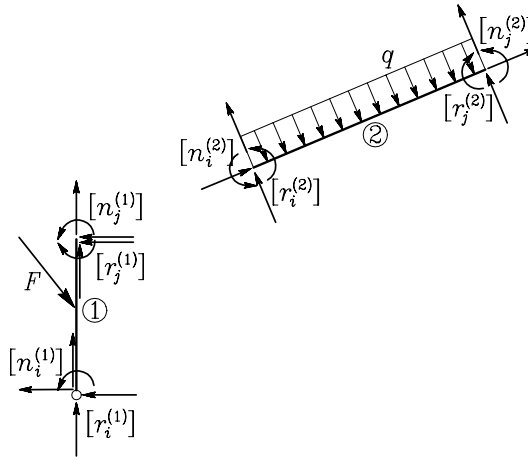
Slika 3.40: Okvir razrežemo na vozlišča in elemente

- 4) Izračunati moramo še notranje sile v elementih, ki ustrezajo primeru na sliki 3.37. Vozliščne sile $[n_i]$ in $[n_j]$ ustrezajo primeru, ko obtežbo po elementu nadomestimo s silami $[a_i]$ in $[a_j]$ v vozliščih. Pri računu notranjih sil v elementu moramo upoštevati, da deluje obtežba po elementu in ne v vozliščih. To naredimo tako, da na element, na katerega delujejo vozliščne sile $[n_i]$ in $[n_j]$, dodamo še obtežbo po elementu ter pripadajoče reakcije $[r_i]$ in $[r_j]$ (slika 3.41). V tem primeru izračunamo vozliščne sile po enačbah (glej (3.111) in (3.118))

$$\begin{aligned} [n_i] &= [k_{ii}] [T] [U_i] + [k_{ij}] [T] [U_j] + [r_i], \\ [n_j] &= [k_{ji}] [T] [U_i] + [k_{jj}] [T] [U_j] + [r_j]. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Notranje sile v poljubnem prerezu elementa izračunamo iz ravnotežnih enačb za del tako obteženega elementa.

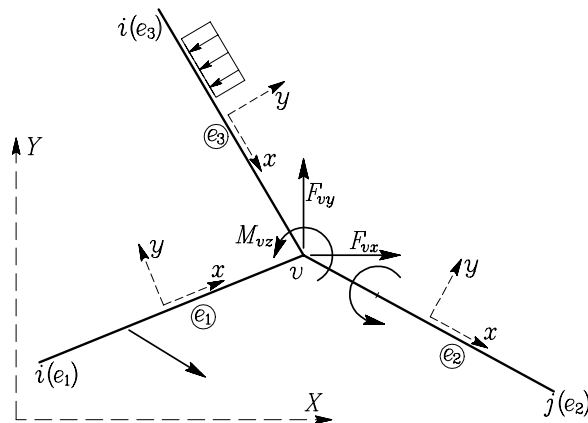




Slika 3.41: Na element delujejo vzdolžne sile $[n_i]$, $[n_j]$, reakcije $[r_i]$, $[r_j]$ in obtežba po elementu

Ravnotežne enačbe za vozlišče

Ravnotežne enačbe za vozlišče ravninskega okvirja razložimo na primeru, ko so v vozlišču s številko $v \equiv j(e_1) \equiv i(e_2) \equiv j(e_3)$ togo povezani trije elementi e_1 , e_2 in e_3 (slika 3.42).



Slika 3.42: V vozlišču v so trije elementi med seboj togo povezani

Zunanjo obtežbo na vozlišče zapišemo v stolpčno matriko $[F_v]$

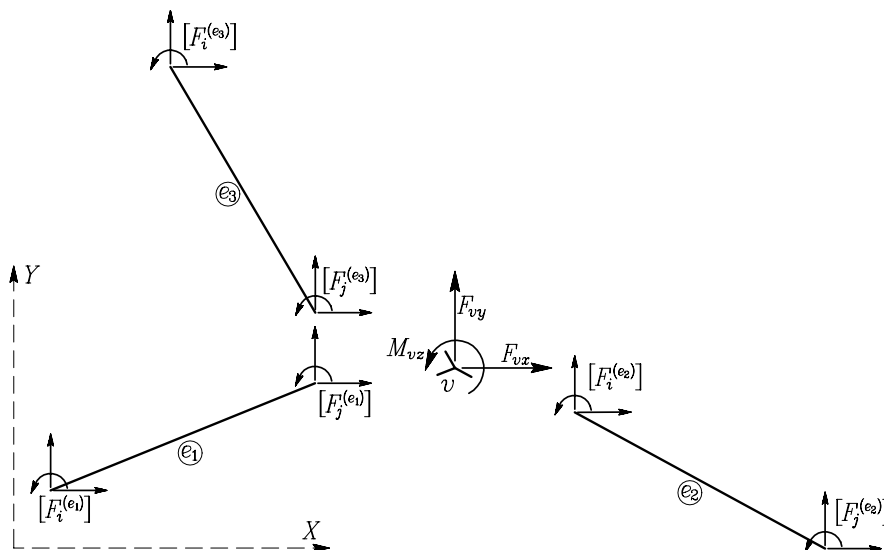
$$[F_v] = \begin{bmatrix} F_{vX} \\ F_{vY} \\ M_{vZ} \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Najprej obtežbo po elementih nadomestimo z enakovrednimi silami (akcijami) v vozliščih posameznih elementov $[a_i^{(e)}]$ in $[a_j^{(e)}]$. Velikosti teh sil so enake reakcijam, smeri pa so nasprotni od smeri reakcij.



Nekaj primerov izračunanih reakcij je prikazanih v prvem poglavju v preglednici 1.5 (strani 52–63). Te sile predstavljajo obtežbo vozlišča zaradi obtežbe na elementu. Če te sile izrazimo glede na globalni koordinatni sistem (enačbi (3.117)), jih v začetnem vozlišču elementa e označimo z $[F_i^{(e)}]$, v končnem vozlišču pa z $[F_j^{(e)}]$ (slika 3.43).

$$[F_i^{(e)}] = [T]^T [a_i^{(e)}], \quad [F_j^{(e)}] = [T]^T [a_j^{(e)}]. \quad (3.133)$$

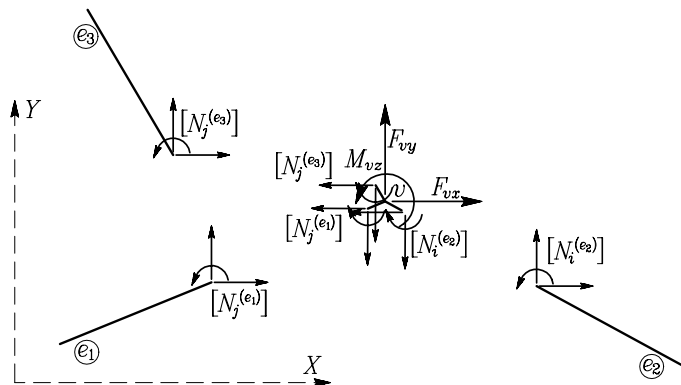


Slika 3.43: Obtežbo po elementih nadomestimo z enakovrednimi silami $[F_i^{(e)}]$ in $[F_j^{(e)}]$ v vozliščih

Število elementov v obravnavanem vozlišču v , ki imajo v tem vozlišču začetek elementa, označimo z n_z , število elementov, ki imajo v vozlišču v konec elementa, pa z n_k . V primeru na sliki 3.42 je n_z enak ena, n_k pa dva. Sedaj obravnavano vozlišče izrežemo in upoštevamo, da delujejo v prerezi vozliščne sile $[n_i^{(e)}]$ in $[n_j^{(e)}]$. Te sile izrazimo glede na globalni koordinatni sistem in upoštevamo da delujejo na prečne prereze vozlišča oziroma na prečne prereze elementov enako velike in nasproti usmerjene vozliščne sile (slika 3.44). Vozliščne sile na element predpostavimo v pozitivnih smereh globalnega koordinatnega sistema. Na prečni prerez elementa jih zapišemo takole:

$$[N_i^{(e)}] = [T]^T [n_i^{(e)}], \quad [N_j^{(e)}] = [T]^T [n_j^{(e)}]. \quad (3.134)$$





Slika 3.44: Vozliščne sile, ki delujejo na vozlišče, imajo enako velikost in nasprotno smer kot sile, ki delujejo na element (Zaradi preglednosti v vozlišču ni narisanih sil $F_i^{(e)}$ in $F_j^{(e)}$ zaradi obtežbe po elementih)

Vozlišče miruje, če so izpolnjeni ravnotežni pogoji za vse sile, ki na vozlišče delujejo. Ravnotežne pogoje za obravnavano vozlišče glede na smeri globalnega koordinatnega sistema zapišemo takole:

$$[F_v] + \sum_{e=1}^{n_z} [F_i^{(e)}] + \sum_{e=1}^{n_k} [F_j^{(e)}] - \sum_{e=1}^{n_z} [N_i^{(e)}] - \sum_{e=1}^{n_k} [N_j^{(e)}] = \{\emptyset\}. \quad (3.135)$$

Matrika $[\emptyset]$ pomeni

$$[\emptyset] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pri pisanju enačb smo upoštevali, da imajo vozliščne sile na prečne prereze vozlišča negativne smeri glede na osi globalnega koordinatnega sistema. Vozliščne sile v (3.135) izrazimo s pomiki vozlišč po enačbah (3.125)

$$[F_v] + \sum_{e=1}^{n_z} [F_i^{(e)}] + \sum_{e=1}^{n_k} [F_j^{(e)}] - \sum_{e=1}^{n_z} ([K_{ii}^{(e)}][U_i^{(e)}] + [K_{ij}^{(e)}][U_j^{(e)}]) - \sum_{e=1}^{n_k} ([K_{ji}^{(e)}][U_i^{(e)}] + [K_{jj}^{(e)}][U_j^{(e)}]) = [\emptyset]. \quad (3.136)$$

Če uporabimo oznako $[\bar{F}_v]$ za

$$[\bar{F}_v] = [F_v] + \sum_{e=1}^{n_z} [F_i^{(e)}] + \sum_{e=1}^{n_k} [F_j^{(e)}], \quad (3.137)$$

lahko pišemo

$$\sum_{e=1}^{n_z} ([K_{ii}^{(e)}][U_i^{(e)}] + [K_{ij}^{(e)}][U_j^{(e)}]) + \sum_{e=1}^{n_k} ([K_{ji}^{(e)}][U_i^{(e)}] + [K_{jj}^{(e)}][U_j^{(e)}]) = [\bar{F}]. \quad (3.138)$$



Enačba (3.138) predstavlja **ravnotežne pogoje za vozlišče okvirja**. Enačba je zapisana s pomiki vozlišč glede na globalni koordinatni sistem. V enačbi nastopajo pomiki vozlišč elementov, ki so v vozlišču v med seboj povezani.

Enačbo (3.138) zapišemo za primer na sliki 3.42 takole:

$$[K_{ii}^{(e_2)}][U_i^{(e_2)}] + [K_{ij}^{(e_2)}][U_j^{(e_2)}] + [K_{ji}^{(e_1)}][U_i^{(e_1)}] + [K_{jj}^{(e_1)}][U_j^{(e_1)}] + [K_{ji}^{(e_3)}][U_i^{(e_3)}] + [K_{jj}^{(e_3)}][U_j^{(e_3)}] = [\bar{F}_v].$$

Uporabimo oznako $[K_{vv}]$

$$[K_{vv}] = [K_{jj}^{(e_1)}] + [K_{ii}^{(e_2)}] + [K_{jj}^{(e_3)}]. \quad (3.139)$$

ter upoštevamo, da je

$$[U_i^{(e_2)}] = [U_j^{(e_1)}] = [U_j^{(e_3)}] \equiv [U_v]$$

in

$$[K_{ij}^{(e_2)}] \equiv [K_{vj}^{(e_2)}], \quad [K_{ji}^{(e_1)}] \equiv [K_{vi}^{(e_1)}], \quad [K_{ji}^{(e_3)}] \equiv [K_{vi}^{(e_3)}].$$

in dobimo

$$[K_{vv}][U_v] + [K_{vi}^{(e_1)}][U_i^{(e_1)}] + [K_{vj}^{(e_2)}][U_j^{(e_2)}] + [K_{vi}^{(e_3)}][U_i^{(e_3)}] = [\bar{F}_v]. \quad (3.140)$$

Iz enačbe (3.140) sledi pravilo za pisanje ravnotežnih enačb vozlišča v . Vidimo, da nastopajo od nič različne matrike na mestu s številko obravnavanega vozlišča ter na mestih s številkami vozlišč, ki določajo preostala vozlišča elementov, ki so povezani v obravnavanem vozlišču.

3.2.6 Sestavljanje togostne matrike konstrukcije

Za določitev pomikov, reakcij in notranjih sil ravninskega okvirja zapišemo ravnotežne enačbe (3.138) oziroma (3.140) za vsa vozlišča. V matrični obliki jih zapišemo takole:

$$[K][U] = [\bar{F}], \quad (3.141)$$

kjer je s $[K]$ označena **togostna matrika konstrukcije**. Za primer na sliki 3.32 zapišemo ravnotežne enačbe za vsa vozlišča takole:

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [\emptyset] & [\emptyset] & [\emptyset] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [\emptyset] & [K_{2,4}] & [K_{2,5}] \\ [\emptyset] & [\emptyset] & [K_{3,3}] & [K_{3,4}] & [\emptyset] \\ [\emptyset] & [K_{4,2}] & [K_{4,3}] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [\emptyset] & [K_{5,2}] & [\emptyset] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \\ [U_4] \\ [U_5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{F}_1] \\ [\bar{F}_2] \\ [\bar{F}_3] \\ [\bar{F}_4] \\ [\bar{F}_5] \end{bmatrix}. \quad (3.142)$$



Oznaka $[\emptyset]$ predstavlja podmatriko velikosti 3×3 z vsemi členi enakimi nič

$$[\emptyset] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stolpec $\{U_i\}$ določa enačba (3.72), stolpec $\{\bar{F}_i\}$ pa enačba (3.137). Podmatrike v enačbi (3.142) imajo naslednji pomen

$$\begin{aligned} [K_{1,1}] &= [K_{i,i}^{(1)}], \\ [K_{2,2}] &= [K_{j,j}^{(1)}] + [K_{i,i}^{(4)}] + [K_{i,i}^{(5)}], \\ [K_{3,3}] &= [K_{i,i}^{(2)}], \\ [K_{4,4}] &= [K_{j,j}^{(2)}] + [K_{i,i}^{(3)}] + [K_{j,j}^{(4)}], \\ [K_{5,5}] &= [K_{j,j}^{(3)}] + [K_{j,j}^{(5)}], \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} [K_{1,2}] &= [K_{i,j}^{(1)}], & [K_{2,1}] &= [K_{j,i}^{(1)}] = [K_{1,2}]^T, \\ [K_{2,4}] &= [K_{i,j}^{(4)}], & [K_{4,2}] &= [K_{j,i}^{(4)}] = [K_{2,4}]^T, \\ [K_{2,5}] &= [K_{i,j}^{(5)}], & [K_{5,2}] &= [K_{j,i}^{(5)}] = [K_{2,5}]^T, \\ [K_{3,4}] &= [K_{i,j}^{(2)}], & [K_{4,3}] &= [K_{j,i}^{(2)}] = [K_{3,4}]^T, \\ [K_{4,5}] &= [K_{i,j}^{(3)}], & [K_{5,4}] &= [K_{j,i}^{(3)}] = [K_{4,5}]^T. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Upoštevanje robnih pogojev

Matrika $[K]$ sistema enačb (3.141) je zaradi (3.126) simetrična. Enačb pa ne moremo rešiti, ker je matrika $[K]$ **singularna**. Enačbe **niso neodvisne**. Sistem enačb lahko rešimo, če upoštevamo **robne pogoje**. To pomeni, da moramo preprečiti, da se konstrukcija premika kot nepodprt sistem togih teles. Enačba (3.142) predstavlja ravnotežne enačbe za nepodprt okvir, ki se pod vplivom sil pospešeno premika. Zato ne moremo enolično izračunati pomikov v ravnotežni legi konstrukcije.

Podpore upoštevamo tako, da v ravnotežnih enačbah za podprto vozlišče reakcije zapišemo kot neznane vozliščne sile ter upoštevamo, da so pomiki znani. Nato ravnotežne enačbe za vsa vozlišča razdelimo na dve skupini tako, da najprej iz prve skupine izračunamo pomike vozlišč, nato pa iz druge skupine enačb še reakcije. To prikažemo v primeru 3.9.

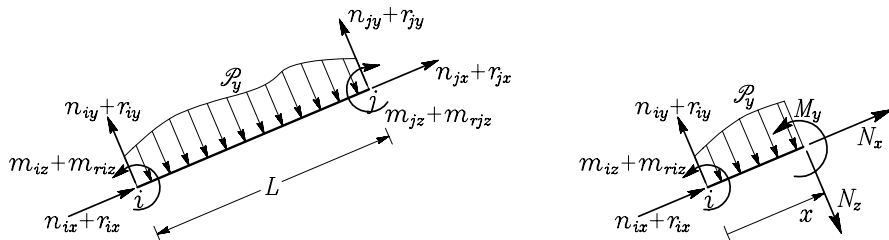
Upoštevanje členkasto povezanih elementov

Pri določanju togostnih matrik $[K_{i,j}]$ moramo upoštevati, da je element 5 členkasto povezan na ostale elemente. Zato v enačbah (3.123) upoštevamo izraze (3.129). Če notranje členkasto povezavo elementa v vozlišču upoštevamo z uporabo kondenzirane togostne matrike, zasuka vozlišča elementa s členkom iz ravnotežnih enačb ne dobimo.



Notranje sile v elementih

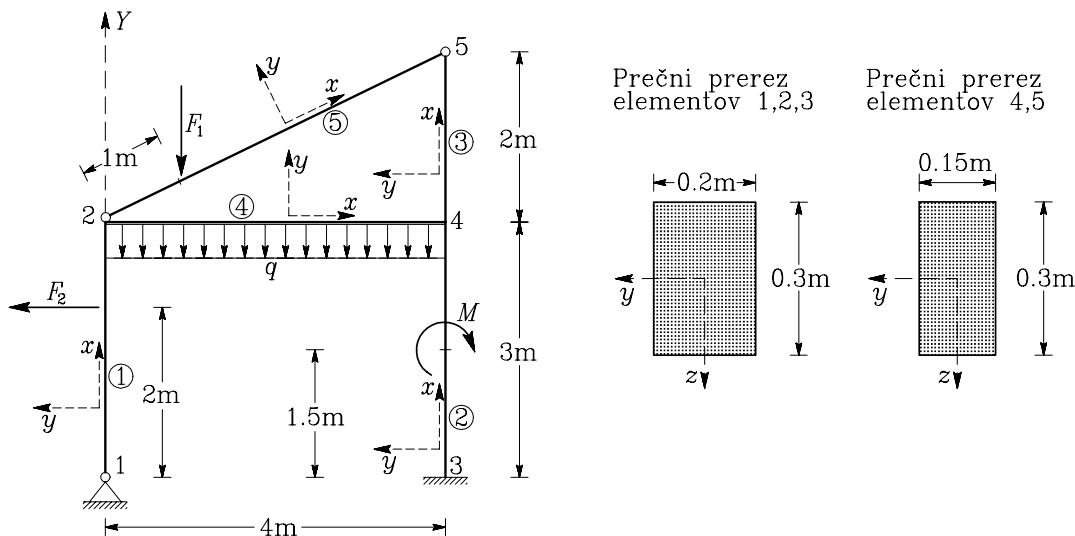
Iz znanih vozliščnih pomikov $[U_i]$ in $[U_j]$ nato izračunamo vozliščne pomike $[u_i]$ in $[u_j]$ glede na lokalne koordinatne sisteme (enačbi (3.118), ter nato vozliščne sile $[n_i]$ in $[n_j]$ po enačbah (3.111). Ko izračunamo vozliščne sile, dobimo notranje sile v posameznih elementih iz ravnotežnih pogojev za del elementa. Pri tem upoštevamo razen vozliščnih sil $[n_i]$ in $[n_j]$ še reakcije $[r_i]$ in $[r_j]$ ter obtežbo po elementu (slika 3.45).



Slika 3.45: Računski model za račun notranjih sil N_x , N_y in M_z

3.2.7 Računski primer

Primer 3.10 Določimo reakcije ter diagrame notranjih sil za konstrukcijo na sliki 3.46. Modul elastičnosti materiala $E = 3.5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$. Konstrukcija je obtežena z zvezno obtežbo $q = 3 \text{ kN/m}$, dvema točkovnima silama $F_1 = 3.5 \text{ kN}$ in $F_2 = 2 \text{ kN}$ ter točkovnim momentom $M = 2 \text{ kNm}$.



Slika 3.46: Geometrija in obtežba

Togostno matriko konstrukcije $[K]$ za obravnavani primer smo že zapisali (enačba (3.142))

$$\begin{bmatrix} [K_{1,1}] & [K_{1,2}] & [\emptyset] & [\emptyset] & [\emptyset] \\ [K_{2,1}] & [K_{2,2}] & [\emptyset] & [K_{2,4}] & [K_{2,5}] \\ [\emptyset] & [\emptyset] & [K_{3,3}] & [K_{3,4}] & [\emptyset] \\ [\emptyset] & [K_{4,2}] & [K_{4,3}] & [K_{4,4}] & [K_{4,5}] \\ [\emptyset] & [K_{5,2}] & [\emptyset] & [K_{5,4}] & [K_{5,5}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \\ [U_4] \\ [U_5] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{F}_1] \\ [\bar{F}_2] \\ [\bar{F}_3] \\ [\bar{F}_4] \\ [\bar{F}_5] \end{bmatrix}. \quad (3.145)$$

Podmatrike na glavni diagonalni izračunamo po enačbi (3.139)

$$\begin{aligned} [K_{1,1}] &= [K_{i,i}^{(1)}], \\ [K_{2,2}] &= [K_{j,j}^{(1)}] + [K_{i,i}^{(4)}] + [K_{i,i}^{(5)}], \\ [K_{3,3}] &= [K_{i,i}^{(2)}], \\ [K_{4,4}] &= [K_{j,j}^{(2)}] + [K_{i,i}^{(3)}] + [K_{j,j}^{(4)}], \\ [K_{5,5}] &= [K_{j,j}^{(3)}] + [K_{j,j}^{(5)}], \end{aligned} \quad (3.146)$$

podmatrike izven glavne diagonale pa po enačbah (3.124) in (3.126)

$$\begin{aligned} [K_{1,2}] &= [K_{i,j}^{(1)}], & [K_{2,1}] &= [K_{1,2}]^T, \\ [K_{2,4}] &= [K_{i,j}^{(4)}], & [K_{4,2}] &= [K_{2,4}]^T, \\ [K_{2,5}] &= [K_{i,j}^{(5)}], & [K_{5,2}] &= [K_{2,5}]^T, \\ [K_{3,4}] &= [K_{i,j}^{(2)}], & [K_{4,3}] &= [K_{3,4}]^T, \\ [K_{4,5}] &= [K_{i,j}^{(3)}], & [K_{5,4}] &= [K_{4,5}]^T. \end{aligned} \quad (3.147)$$

V enačbah (3.146) upoštevamo (3.123) in dobimo

$$\begin{aligned} [K_{1,1}] &= [T^{(1)}]^T [k_{ii}^{(1)}] [T^{(1)}], \\ [K_{2,2}] &= [T^{(1)}]^T [k_{jj}^{(1)}] [T^{(1)}] + [T^{(4)}]^T [k_{ii}^{(4)}] [T^{(4)}] + [T^{(5)}]^T [k_{ii}^{(5)}] [T^{(5)}], \\ [K_{3,3}] &= [T^{(2)}]^T [k_{ii}^{(2)}] [T^{(2)}], \\ [K_{4,4}] &= [T^{(2)}]^T [k_{jj}^{(2)}] [T^{(2)}] + [T^{(3)}]^T [k_{ii}^{(3)}] [T^{(3)}] + [T^{(4)}]^T [k_{jj}^{(4)}] [T^{(4)}], \\ [K_{5,5}] &= [T^{(3)}]^T [k_{jj}^{(3)}] [T^{(3)}] + [T^{(5)}]^T [k_{jj}^{(5)}] [T^{(5)}], \end{aligned} \quad (3.148)$$



v enačbah (3.147) pa (3.124)

$$\begin{aligned}
 [K_{1,2}] &= [T^{(1)}]^T [k_{ij}^{(1)}] [T^{(1)}], \\
 [K_{2,4}] &= [T^{(4)}]^T [k_{ij}^{(4)}] [T^{(4)}], \\
 [K_{2,5}] &= [T^{(5)}]^T [k_{ij}^{(5)}] [T^{(5)}], \\
 [K_{3,4}] &= [T^{(2)}]^T [k_{ij}^{(2)}] [T^{(2)}], \\
 [K_{4,5}] &= [T^{(3)}]^T [k_{ij}^{(3)}] [T^{(3)}].
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

Za račun matrik (3.148) in (3.149) potrebujemo transformacijske matrike $[T]$ ter togostne matrike $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$ in $[k_{jj}]$ za vse elemente. Za element 1 je kot $\beta = \pi/2$ in dobimo (enačba (3.115))

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.150}$$

Čeprav ima element 1 v vozlišču i členkasto podporo, pri računu togostnih matrik upoštevamo, da je obojestransko vpet!!pojasni Togostne matrike v lokalnem koordinatnem sistemu za element 1 so podane z enačbami (3.127)

$$\begin{aligned}
 [k_{ii}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 & 0 & 0 \\ 0 & 311.111 & 466.667 \\ 0 & 466.667 & 933.333 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ij}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70000 & 0 & 0 \\ 0 & -311.111 & 466.667 \\ 0 & -466.667 & 466.667 \end{bmatrix}, \\
 [k_{jj}^{(1)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 & 0 & 0 \\ 0 & 311.111 & -466.667 \\ 0 & -466.667 & 933.333 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

Za element 2 je kot $\beta = \pi/2$ in je matrika $[T]$ enaka kot za element 1 (glej (3.150)). Togostne matrike elementa 2 v lokalnem koordinatnem sistemu so enake kot za element 1 (glej (3.151)). Za element 3 je kot $\beta = \pi/2$ in je matrika $[T]$ enaka kot za element 1 in 2 (glej (3.150)). Togostne matrike v lokalnem koordinatnem sistemu za element 3 so podane z enačbami (3.128).

$$\begin{aligned}
 [k_{ii}^{(3)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105000 & 0 & 0 \\ 0 & 1050 & 1050 \\ 0 & 1050 & 1400 \end{bmatrix}, \\
 [k_{ij}^{(3)}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -105000 & 0 & 0 \\ 0 & -1050 & 1050 \\ 0 & -1050 & 700 \end{bmatrix}, \\
 [k_{jj}^{(3)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105000 & 0 & 0 \\ 0 & 1050 & -1050 \\ 0 & -1050 & 1400 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.152}$$



Za element 4 je kot $\beta = 0$ in dobimo (enačba (3.115))

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.153)$$

Togostne matrike v lokalnem koordinatnem sistemu za element 4 so podane z enačbami (3.112)

$$\begin{aligned} [k_{ii}^{(4)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & 6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39375 & 0 & 0 \\ 0 & 55.371 & 110.742 \\ 0 & 110.742 & 295.312 \end{bmatrix}, \\ [k_{ij}^{(4)}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & -12 E I_z/L^3 & 6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 2 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39375 & 0 & 0 \\ 0 & -55.371 & 110.742 \\ 0 & -110.742 & 147.656 \end{bmatrix}, \\ [k_{jj}^{(4)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 12 E I_z/L^3 & -6 E I_z/L^2 \\ 0 & -6 E I_z/L^2 & 4 E I_z/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39375 & 0 & 0 \\ 0 & 55.371 & -110.742 \\ 0 & -110.742 & 295.312 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Za element 5 je kot $\beta = 26.56505^\circ$ in dobimo (enačba (3.115))

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.894427 & 0.447214 & 0 \\ -0.447214 & 0.894427 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.155)$$

Togostne matrike v lokalnem koordinatnem sistemu za element 5 so podane z enačbami (3.129)

$$\begin{aligned} [k_{ii}^{(5)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35218.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [k_{ij}^{(5)}] &= \begin{bmatrix} -E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35218.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ [k_{jj}^{(5)}] &= \begin{bmatrix} E A_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35218.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.156)$$



Matrike (3.150) in (3.156) upoštevamo v (3.148) in (3.149) in dobimo

$$\begin{aligned}
 [K_{1,1}] &= \begin{bmatrix} 311.111 & 0 & -466.667 \\ 0 & 70000 & 0 \\ -466.667 & 0 & 933.333 \end{bmatrix}, \\
 [K_{2,2}] &= \begin{bmatrix} 311.111 & 0 & -466.667 \\ 0 & 70000 & 0 \\ -466.667 & 0 & 933.333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 39375 & 0 & 0 \\ 0 & 55.371 & 110.742 \\ 0 & 110.742 & 295.312 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 28174.5 & 14087.2 & 0 \\ 14087.2 & 7043.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67860.6 & 14087.2 & 466.667 \\ 14087.2 & 77099 & 110.742 \\ 466.667 & 110.742 & 1228.65 \end{bmatrix}, \\
 [K_{3,3}] &= \begin{bmatrix} 311.111 & 0 & -466.667 \\ 0 & 70000 & 0 \\ -466.667 & 0 & 933.333 \end{bmatrix}, \\
 [K_{4,4}] &= \begin{bmatrix} 311.111 & 0 & 466.667 \\ 0 & 70000 & 0 \\ 466.667 & 0 & 933.333 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 39375 & 0 & 0 \\ 0 & 55.371 & -110.742 \\ 0 & -110.742 & 295.312 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 1050 & 0 & -1050 \\ 0 & 105000 & 0 \\ -1050 & 0 & 1400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40736.1 & 0 & -583.333 \\ 0 & 175055 & -110.742 \\ -583.333 & -110.742 & 2628.65 \end{bmatrix}, \\
 [K_{5,5}] &= \begin{bmatrix} 1050 & 0 & 1050 \\ 0 & 105000 & 0 \\ 1050 & 0 & 1400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28174.5 & 14087.2 & 0 \\ 14087.2 & 7043.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 29224.5 & 14087.2 & 1050 \\ 14087.2 & 112044 & 0 \\ 1050 & 0 & 1400 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.157}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{1,2}] &= \begin{bmatrix} -311.111 & 0 & -466.667 \\ 0 & -70000 & 0 \\ 466.667 & 0 & 466.667 \end{bmatrix}, \\
 [K_{2,4}] &= \begin{bmatrix} -39375 & 0 & 0 \\ 0 & -55.371 & 110.742 \\ 0 & -110.742 & 147.656 \end{bmatrix}, \\
 [K_{2,5}] &= \begin{bmatrix} -28174.5 & -14087.2 & 0 \\ -14087.2 & -7043.61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [K_{3,4}] &= \begin{bmatrix} -311.111 & 0 & -466.667 \\ 0 & -70000 & 0 \\ 466.667 & 0 & 466.667 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.158}$$



$$[K_{4,5}] = \begin{bmatrix} -1050 & 0 & -1050 \\ 0 & -105000 & 0 \\ 1050 & 0 & 700 \end{bmatrix}.$$

Sedaj določimo še desno stran v enačbi (3.145). Določiti moramo obtežbo na posamezna vozlišča glede na globalni koordinatni sistem

$$[\bar{F}] = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \end{bmatrix}. \quad (3.159)$$

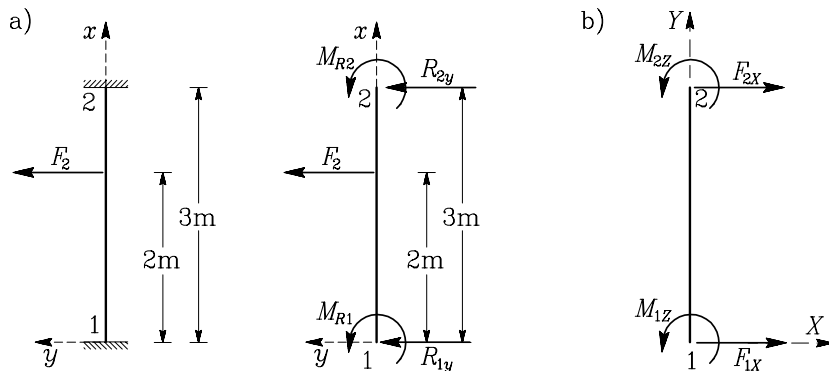
Najprej določimo reakcije in akcije posameznih elementov zaradi zunanje obtežbe glede na lokalni koordinatni sistem.

Element 1

Za element 1 uporabimo rezultate iz preglednice 1.5 za obojestransko vpeti nosilec, obtežen s silo F_2 (slika 3.47)

$$R_{1y} = -\frac{F_2 1^2}{L_1^3} (3 \cdot 2 + 1), \quad M_{R1} = -\frac{F_2 1^2 \cdot 2}{L_1^2}$$

$$R_{2y} = -\frac{F_2 2^2}{L_1^3} (3 \cdot 1 + 2), \quad M_{R2} = \frac{F_2 2^2 \cdot 1}{L_1^2}$$



Slika 3.47: a) Reakcije zaradi obtežbe na nosilec b) Akcije nosilca na vozlišči

Dobimo

$$R_{1y} = -\frac{2 \cdot 1^2}{3^3} (3 \cdot 2 + 1) = -0.5185 \text{ kN}, \quad M_{R1} = -\frac{2 \cdot 1^2 \cdot 2}{9^2} = -0.4444 \text{ kNm}$$

$$R_{2y} = -\frac{2 \cdot 2^2}{3^3} (3 \cdot 1 + 2) = -1.4815 \text{ kN}, \quad M_{R2} = \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 1}{3^2} = 0.8889 \text{ kNm.} \quad (3.160)$$

Reakcije glede na lokalni koordinatni sistem v vozliščih 1 in 2 zapišimo v stolpec

$$[r_1^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5185 \\ -0.4444 \end{bmatrix}, \quad [r_2^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.4815 \\ 0.8889 \end{bmatrix}. \quad (3.161)$$

Obtežba v vozlišču 1 glede na globalni koordinatni sistem je (glej enačbo (3.133))

$$F_{1X}(F_2) = -0.5185 \text{ kN}, \quad M_{1Z}(F_2) = 0.4444 \text{ kNm}.$$

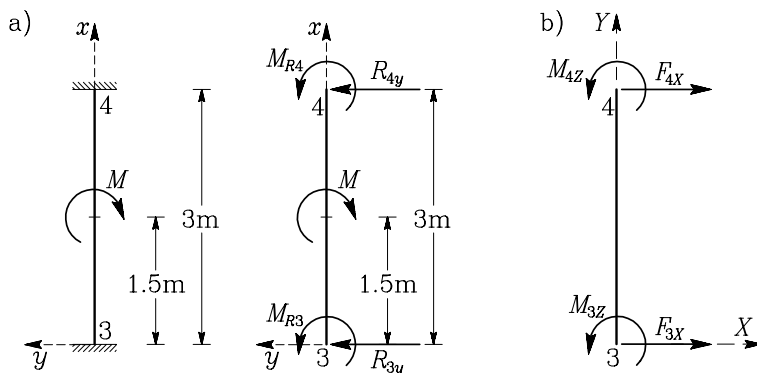
Obtežba v vozlišču 2 glede na globalni koordinatni sistem je

$$F_{2X}(F_2) = -1.4815 \text{ kN}, \quad M_{2Z}(F_2) = -0.8889 \text{ kNm}.$$

Element 2

Za element 2 uporabimo rezultate iz preglednice 1.5 za trikrat statično nedoločeni obojestransko vpeti nosilec, obtežen z momentom $M = -2 \text{ kNm}$ (slika 3.48)

$$\begin{aligned} R_{3y} &= \frac{6 M 1.5 \cdot 1.5}{L^3}, & M_{R3} &= \frac{M 1.5}{L^2} (2 L - 3 \cdot 1.5), \\ R_{4y} &= -\frac{6 M 1.5 \cdot 1.5}{L^3}, & M_{R4} &= \frac{M 1.5}{L^2} (3 \cdot 1.5 - L). \end{aligned}$$



Slika 3.48: a) Reakcije zaradi obtežbe na nosilec b) Akcije nosilca na vozlišči

Dobimo

$$\begin{aligned} R_{3y} &= \frac{6 \cdot (-2) 1.5 1.5}{3^3} = -1 \text{ kN}, & M_{R3} &= \frac{-2 \cdot 1.5}{3^2} (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1.5) = -0.5 \text{ kNm}, \\ R_{4y} &= -\frac{6 \cdot (-2) 1.5 1.5}{3^3} = 1 \text{ kN}, & M_{R4} &= \frac{-2 \cdot 1.5}{3^2} (3 \cdot 1.5 - 3) = -0.5 \text{ kNm}. \end{aligned}$$



Reakcije glede na lokalni koordinatni sistem v vozliščih 3 in 4 zapišimo v stolpec

$$[r_3^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad [r_4^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0 \\ -0.5 \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

Obtežba v vozlišču 3 glede na globalni koordinatni sistem je (glej enačbo (3.133))

$$F_{3X}(M) = -1 \text{ kN}, \quad M_{3Z}(M) = 0.5 \text{ kNm}.$$

Obtežba v vozlišču 4 glede na globalni koordinatni sistem je

$$F_{4X}(M) = 1 \text{ kN}, \quad M_{4Z}(M) = 0.5 \text{ kNm}.$$

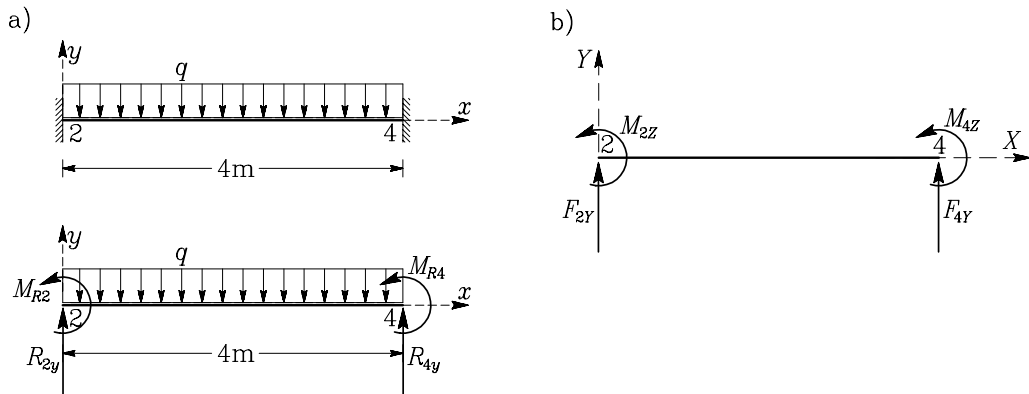
Element 3

Ker ne element 3 ne deluje nobena zunanja obtežba, so reakcije in obtežbe na ustrezna vozlišča enaki nič.

Element 4

Za element 4 uporabimo rezultate iz preglednice 1.5 za trikrat statično nedoločeni nosilec obtežen s konstantno linijsko obtežbo $q = 3 \text{ kNm}$ (slika 3.49)

$$R_{2y} = -\frac{qL}{2}, \quad M_{R2} = \frac{qL^2}{12}, \quad R_{4y} = -\frac{qL}{2}, \quad M_{R4} = -\frac{qL^2}{12}.$$



Slika 3.49: a) Reakcije zaradi obtežbe na nosilec b) Akcije nosilca na vozlišči

Dobimo

$$R_{2y} = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ kN}, \quad M_{R2} = \frac{3 \cdot 4^2}{12} = 4 \text{ kNm},$$

$$R_{4y} = -\frac{3 \cdot 4}{2} = -6 \text{ kN}, \quad M_{R4} = -\frac{3 \cdot 4^2}{12} = -4 \text{ kNm}.$$

Reakcije glede na lokalni koordinatni sistem v vozliščih 2 in 4 zapišimo v stolpec

$$[r_2^{(4)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [r_4^{(4)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad (3.163)$$

Obtežba v vozlišču 2 glede na globalni koordinatni sistem je (glej enačbo (3.133))

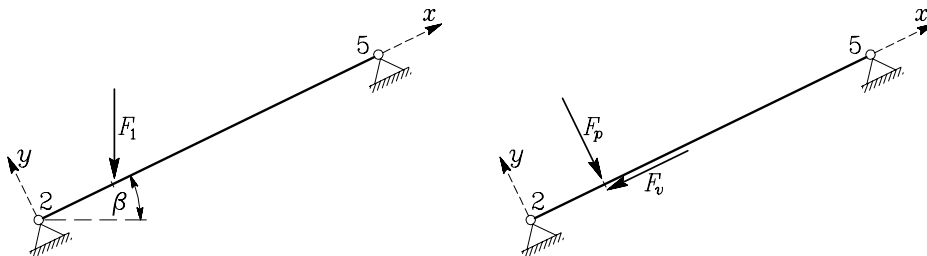
$$F_{2Y}(q) = -6 \text{ kN}, \quad M_{2Z}(q) = -4 \text{ kNm}.$$

Obtežba v vozlišču 4 glede na globalni koordinatni sistem je

$$F_{4Y}(q) = -6 \text{ kN}, \quad M_{4Z}(q) = 4 \text{ kNm}.$$

Element 5

Silo $F_1 = 3.5 \text{ kN}$ na elementu 5 razdelimo na komponento $F_p = 3.1305 \text{ kN}$, ki je pravokotna na os nosilca in na komponento $F_v = -1.5653 \text{ kN}$, ki je vzporedna z osjo nosilca (slika 3.50)



Slika 3.50: Silo F razdelimo na dve komponenti in upoštevamo princip superpozicije

Za silo F_p izračunamo reakciji R_{2y} in R_{5y} (slika 3.51)

$$R_{2y} = -\frac{F_p (L_5 - 1)}{L_5}, \quad R_{5y} = -\frac{F_p 1}{L_5}.$$

Pri določanju reakcij zaradi sile F_v moramo rešiti enkrat statično nedoločeno konstrukcijo. Reakciji R_{2x} in R_{5x} sta (slika 3.51)

$$R_{2x} = -\frac{F_v (L_5 - 1)}{L_5}, \quad R_{5x} = -\frac{F_v 1}{L_5}.$$

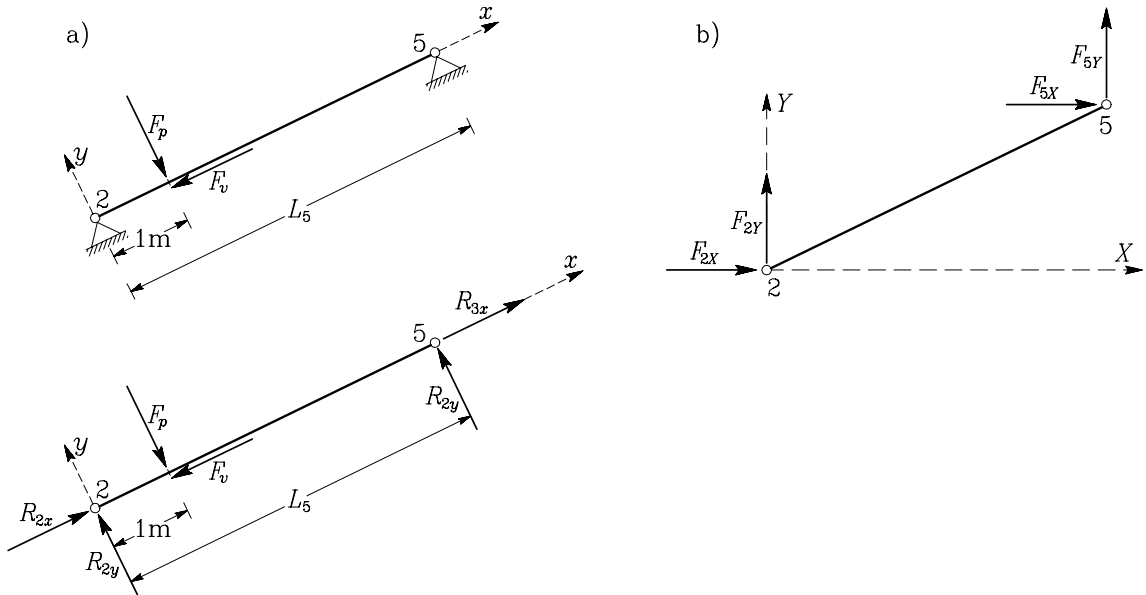


Dobimo

$$R_{2y} = -\frac{3.1305 \cdot 3.4721}{4.4721} = -2.4305 \text{ kN}, \quad R_{5y} = -\frac{3.1305 \cdot 1}{4.4721} = -0.7 \text{ kN}$$

oziroma

$$R_{2x} = -\frac{-1.5653 \cdot 3.4721}{4.4721} = 1.2153 \text{ kN}, \quad R_{5x} = -\frac{-1.5653 \cdot 1}{4.4721} = 0.35 \text{ kN}$$



Slika 3.51: a) Reakcije zaradi obtežbe na nosilec b) Akcije nosilca na vozlišči

Reakcije glede na lokalni koordinatni sistem v vozliščih 2 in 5 zapišimo v stolpec

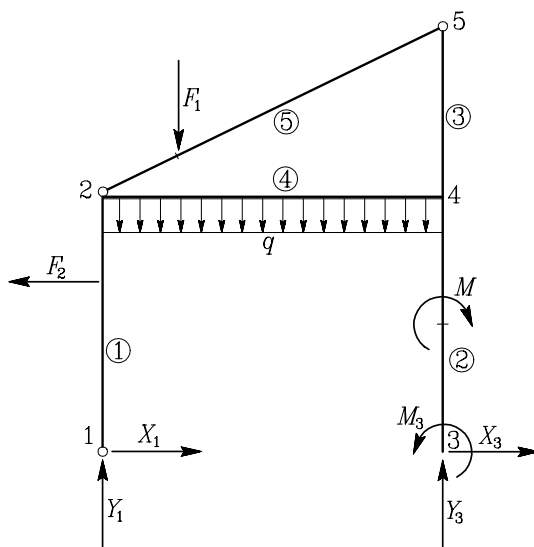
$$[r_2^{(5)}] = \begin{bmatrix} 1.2153 \\ 2.4305 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [r_5^{(5)}] = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

Upoštevamo princip superpozicije iz dobimo silo v vozliščih 2 in 5 glede na globalni koordinatni sistem (glej enačbo (3.133)) (slika 3.51)

$$F_{2Y}(F_1) = -2.7174 \text{ kN}, \quad F_{5Y}(F_1) = -0.7826 \text{ kN}.$$



Sedaj lahko zapišemo obtežbo na vozlišča. Pri tem upoštevamo tudi reakcije X_1 , Y_1 in X_3 , Y_3 , M_3 v vozliščih 1 in 3 (slika 3.52).



Slika 3.52: Reakcije v podprtih vozliščih 1 in 3

$$\begin{aligned}
 [\bar{F}_1] &= \begin{bmatrix} X_1 - 0.5185 \\ Y_1 \\ 0.4444 \end{bmatrix}, & [\bar{F}_2] &= \begin{bmatrix} -1.4815 \\ -8.7174 \\ -4.8889 \end{bmatrix}, & [\bar{F}_3] &= \begin{bmatrix} X_3 - 1 \\ Y_3 \\ M_3 + 0.5 \end{bmatrix}, \\
 [\bar{F}_4] &= \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4.5 \end{bmatrix}, & [\bar{F}_5] &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7826 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.165}$$

Enačba za celotno konstrukcijo je:



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 3.11 & 0 & -4.67 & -3.11 & 0 & -4.67 & 0 & -4.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 & 0 & -700 & 0 & -700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.67 & 0 & 9.33 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 \\ -3.11 & 0 & 4.67 & 678.61 & 140.87 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -700 & 0 & 140.87 & 770.99 & 1.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.67 & 0 & 4.67 & 4.67 & 1.11 & 12.29 & 0 & 0 & 3.11 & 0 & -4.67 & -3.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.67 & 0 & 9.33 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.11 & 0 & 4.67 & 407.36 & 0 & 1750.55 & -1.11 & 0 & -10.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -393.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ \Phi_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ \Phi_{2Z} \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \\ \Phi_{3Z} \\ U_{4X} \\ U_{4Y} \\ \Phi_{4Z} \\ U_{5X} \\ U_{5Y} \\ \Phi_{5Z} \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} X_1 - 0.5185 \\ Y_1 \\ 0.4444 \\ -1.4815 \\ -8.7174 \\ -4.8889 \\ X_3 - 1 \\ Y_3 \\ M_3 + 0.5 \\ 1 \\ -6 \\ 4.5 \\ 0 \\ -0.7826 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(3.166)

Sistem ravnotežnih enačb (3.166) rešimo tako, da upoštevamo znane pomike in zasuke podpor. Ker poznamo pomika v vozlišču 1 ($U_{1X} = U_{1Y} = 0$) ter pomika in zasuk vozlišča 3 ($U_{3X} = U_{3Y} = \Phi_{3Z} = 0$), iz togostne matrike brišemo 1., 2. 7., 8. in 9. vrstico ter 1., 2. 7., 8. in 9. stolpec. Tudi v stolpcu desne strani brišemo 1., 2. 7., 8. in 9. element.

$$100 \begin{bmatrix} 9.33 & 4.67 & 0 & 4.67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.67 & 678.616 & 140.87 & 4.67 & -393.75 & 0 & 0 & -281.75 & -140.87 & 0 \\ 0 & 140.87 & 770.99 & 1.11 & 0 & -0.55 & 1.11 & -140.87 & -70.44 & 0 \\ 4.67 & 4.67 & 1.11 & 12.29 & 0 & -1.11 & 1.48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -393.75 & 0 & 0 & 407.36 & 0 & -5.83 & -10.5 & 0 & -10.5 \\ 0 & 0 & -0.55 & -1.11 & 0 & 1750.55 & -1.11 & 0 & -1050 & 0 \\ 0 & 0 & 1.11 & 1.48 & -5.83 & -1.11 & 26.29 & 10.5 & 0 & 7 \\ 0 & -281.75 & -140.87 & 0 & -10.5 & 0 & 10.5 & 292.25 & 140.87 & 10.5 \\ 0 & -140.87 & -70.44 & 0 & 0 & -1050 & 0 & 140.87 & 1120.44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10.5 & 0 & 7 & 10.5 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{1Z} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ \Phi_{2Z} \\ U_{4X} \\ U_{4Y} \\ \Phi_{4Z} \\ U_{5X} \\ U_{5Y} \\ \Phi_{5Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4444 \\ -1.4815 \\ -8.7174 \\ -4.8889 \\ 1 \\ -6 \\ 4.5 \\ 0 \\ -0.7826 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

Z rešitvijo sistema enačb (3.167) dobimo naslednje vrednosti: zasuk vozlišča 1: Φ_{1Z} ter pomike in zasuke vozlišč 2, 4 in 5: $U_{2X}, U_{2Y}, \Phi_{2Z}, U_{4X}, U_{4Y}, \Phi_{4Z}$ in $U_{5X}, U_{5Y}, \Phi_{5Z}$. Rešitev zapišemo v obliki stolpcev:

$$\begin{aligned} [U_1] &= \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ \Phi_{1Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.004061 \end{bmatrix}, & [U_2] &= \begin{bmatrix} U_{2X} \\ U_{2Y} \\ \Phi_{2Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002130 \\ -0.000131 \\ -0.005040 \end{bmatrix}, \\ [U_3] &= \begin{bmatrix} U_{3X} \\ U_{3Y} \\ \Phi_{3Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & [U_4] &= \begin{bmatrix} U_{4X} \\ U_{4Y} \\ \Phi_{4Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002085 \\ -0.000090 \\ 0.002757 \end{bmatrix}, \\ [U_5] &= \begin{bmatrix} U_{5X} \\ U_{5Y} \\ \Phi_{5Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002200 \\ -0.000091 \\ -0.001292 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Reakcije izračunamo iz enačb, ki jih pri računu pomikov in zasukov nismo upoštevali. Pri tem zopet upoštevamo robne pogoje: $U_{1X} = 0, U_{1Y} = 0, U_{3X} = 0, U_{3Y} = 0$ in $\Phi_{3Z} = 0$. Tako dobimo enačbe

$$\begin{aligned} -4666.67 \Phi_{1Z} - 3111.11 U_{2X} - 4666.67 \Phi_{2Z} &= X_1 - 0.5185, \\ -700000 U_{2Y} &= Y_1, \\ -3111.11 U_{4X} - 4666.67 \Phi_{4Z} &= X_3 - 1, \\ -700000 U_{4Y} &= Y_3, \\ 4666.67 U_{4X} + 4666.67 \Phi_{4Z} &= M_3 + 0.5. \end{aligned}$$

Rešitev je

$$\begin{aligned} X_1 &= 1.6380 \text{ kN}, & Y_1 &= 9.1708 \text{ kN}, \\ X_3 &= 0.3620 \text{ kN}, & Y_3 &= 6.3292 \text{ kN}, & M_3 &= -0.1862 \text{ kNm}. \end{aligned}$$



Notranje sile v elementih glede na lokalni koordinatni sistem izračunamo po enačbah (3.131). Enačbi (3.131) zapišimo za posamezne elemente obravnavanega primera.

Element 1

$$\begin{aligned} [n_1] &= [k_{ii}^{(1)}] [T^{(1)}] [U_1] + [k_{ij}^{(1)}] [T^{(1)}] [U_2] + [r_1^{(1)}], \\ [n_2] &= [k_{ji}^{(1)}] [T^{(1)}] [U_1] + [k_{jj}^{(1)}] [T^{(1)}] [U_2] + [r_2^{(1)}]. \end{aligned}$$

Element 2

$$\begin{aligned} [n_3] &= [k_{ii}^{(2)}] [T^{(2)}] [U_3] + [k_{ij}^{(2)}] [T^{(2)}] [U_4] + [r_3^{(2)}], \\ [n_4] &= [k_{ji}^{(2)}] [T^{(2)}] [U_3] + [k_{jj}^{(2)}] [T^{(2)}] [U_4] + [r_4^{(2)}]. \end{aligned}$$

Element 3

$$\begin{aligned} [n_4] &= [k_{ii}^{(3)}] [T^{(3)}] [U_4] + [k_{ij}^{(3)}] [T^{(3)}] [U_5], \\ [n_5] &= [k_{ji}^{(3)}] [T^{(3)}] [U_4] + [k_{jj}^{(3)}] [T^{(3)}] [U_5]. \end{aligned}$$

Element 4

$$\begin{aligned} [n_2] &= [k_{ii}^{(4)}] [T^{(4)}] [U_2] + [k_{ij}^{(4)}] [T^{(4)}] [U_4] + [r_2^{(4)}], \\ [n_4] &= [k_{ji}^{(4)}] [T^{(4)}] [U_2] + [k_{jj}^{(4)}] [T^{(4)}] [U_4] + [r_4^{(4)}]. \end{aligned}$$

Element 5

$$\begin{aligned} [n_2] &= [k_{ii}^{(5)}] [T^{(5)}] [U_2] + [k_{ij}^{(5)}] [T^{(5)}] [U_5] + [r_2^{(5)}], \\ [n_5] &= [k_{ji}^{(5)}] [T^{(5)}] [U_2] + [k_{jj}^{(5)}] [T^{(5)}] [U_5] + [r_5^{(5)}]. \end{aligned}$$

Ko v zgornje enačbe vstavimo (3.151)–(3.156), (3.161)–(3.164) ter (3.168), dobimo vozliščne sile za elemente:

Element 1

$$[n_1] = \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ m_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.1708 \\ -1.6380 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [n_2] = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ m_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.1708 \\ -0.3620 \\ -2.9141 \end{bmatrix}.$$

Element 2

$$[n_3] = \begin{bmatrix} n_{3x} \\ n_{3y} \\ m_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3292 \\ -0.3620 \\ -0.1862 \end{bmatrix}, \quad [n_4] = \begin{bmatrix} n_{4x} \\ n_{4y} \\ m_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.3292 \\ 0.3620 \\ 1.1004 \end{bmatrix}.$$

Element 3

$$[n_4] = \begin{bmatrix} n_{4x} \\ n_{4y} \\ m_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0741 \\ 1.4171 \\ 2.8342 \end{bmatrix}, \quad [n_5] = \begin{bmatrix} n_{5x} \\ n_{5y} \\ m_{5z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0741 \\ -1.4171 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Element 4

$$[n_2] = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ m_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7791 \\ 5.7449 \\ 2.9141 \end{bmatrix}, \quad [n_4] = \begin{bmatrix} n_{4x} \\ n_{4y} \\ m_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7791 \\ 6.2551 \\ -3.9346 \end{bmatrix}.$$

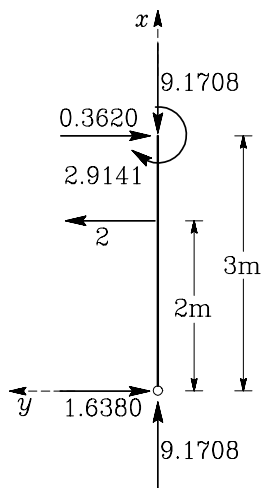
Element 5

$$[n_2] = \begin{bmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ m_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7996 \\ 2.4305 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [n_5] = \begin{bmatrix} n_{5x} \\ n_{5y} \\ m_{5z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2344 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Določimo še potek notranjih sil po elementih.

Element 1

Na sliki 3.53 prikazujemo vozliščne sile n_1 in $[n_2]$ ter obtežbo F_2 v smereh delovanja na element 1.



Slika 3.53: Vozliščne sile in obtežba elementa 1

Izračunamo notranje sile v značilnih točkah elementa:

$$N_x = -9.1708 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 3$$

$$N_y = 1.6380 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 2$$

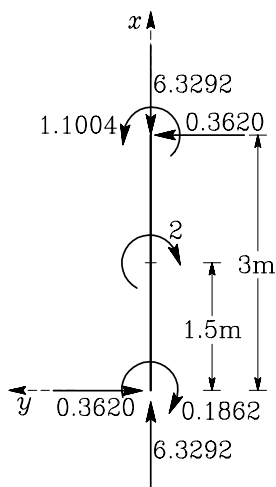
$$N_y = -0.3620 \text{ kN}, \quad \text{za } 2 < x < 3$$

$$M_z(0) = 0, \quad M_z(2) = -3.2761 \text{ kNm}, \quad M_z(3-0) = -2.9141 \text{ kNm}.$$

Element 2

Na sliki 3.54 prikazujemo vozliščne sile n_3 in $[n_4]$ ter obtežbo M v smereh delovanja na element 2.





Slika 3.54: Vozliščne sile in obtežba elementa 2

Izračunamo notranje sile v značilnih točkah elementa:

$$N_x = -6.3292 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 3$$

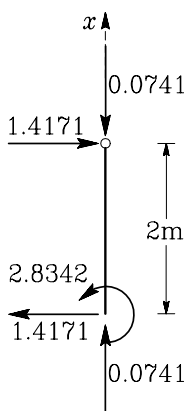
$$N_y = 0.3620 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 3$$

$$M_z(+0) = 0.1862 \text{ kNm}, \quad M_z(1.5 - 0) = -0.3567 \text{ kNm},$$

$$M_z(1.5 + 0) = 1.6433 \text{ kNm}, \quad M_z(3 - 0) = 1.1004 \text{ kNm}.$$

Element 3

Na sliki 3.55 prikazujemo vozliščne sile n_4 in $[n_5]$ smereh delovanja na element 3.



Slika 3.55: Vozliščne sile in obtežba elementa 3



Izračunamo notranje sile v značilnih točkah elementa:

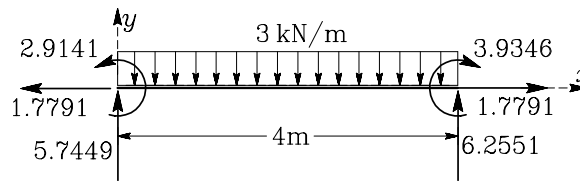
$$N_x = -0.0741 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 3$$

$$N_y = -1.4171 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 3$$

$$M_z(+0) = -2.8344 \text{ kNm}, \quad M_z(2-0) = 0 \text{ kNm}.$$

Element 4

Na sliki 3.56 prikazujemo vozliščne sile n_2 in $[n_4]$ ter obtežbo q v smereh delovanja na element 4.



Slika 3.56: Vozliščne sile in obtežba elementa 4

Izračunamo notranje sile v značilnih točkah elementa:

$$N_x = 1.7791 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 3$$

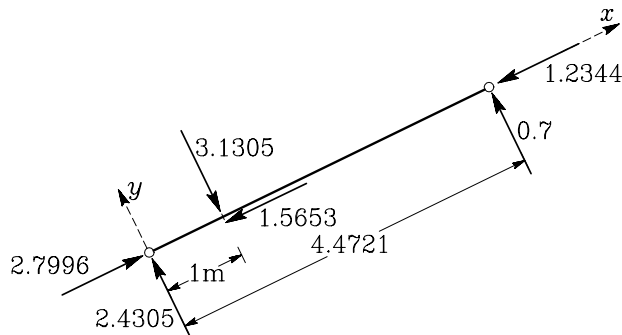
$$N_y(+0) = -5.7449 \text{ kN}, \quad N_y(4-0) = 6.2551 \text{ kN},$$

$$M_z(+0) = -2.9141 \text{ kNm}, \quad M_z(4-0) = -3.9346 \text{ kNm},$$

$$x_m = 1.9150 \text{ m} \quad M_{zm} = 2.5865 \text{ kNm}, \quad M_z(2) = 2.5757 \text{ kNm}.$$

Element 5

Na sliki 3.57 prikazujemo vozliščne sile n_2 in $[n_5]$ ter obtežbo F_1 v smereh delovanja na element 5.



Slika 3.57: Vozliščne sile in obtežba elementa 5



Izračunamo notranje sile v značilnih točkah elementa:

$$N_x = -2.7996 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 1$$

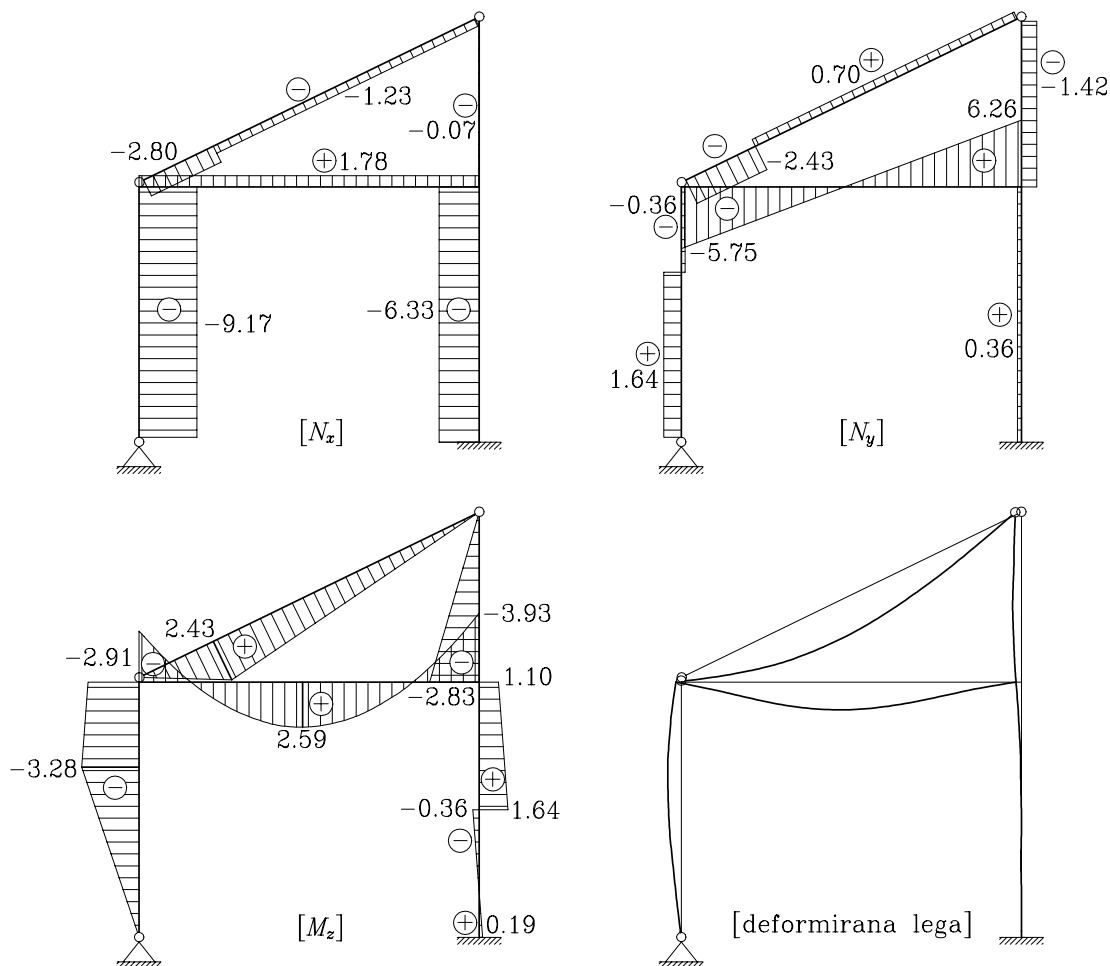
$$N_x = -1.2344 \text{ kN}, \quad \text{za } 1 < x < \sqrt{20}$$

$$N_y = -2.4305 \text{ kN}, \quad \text{za } 0 < x < 1$$

$$N_y = 0.7 \text{ kN}, \quad \text{za } 1 < x < \sqrt{20}$$

$$M_z(+0) = 0 \quad M_z(1) = 2.4305 \text{ kNm}, \quad M_z(\sqrt{20} - 0) = 0 \text{ kNm}.$$

Na sliki 3.58 prikazujemo diagrame notranjih sil in deformirano lego konstrukcije.



Slika 3.58: Diagrami notranjih sil in slika deformirane lege konstrukcije

4 Virtualni pomiki in virtualne sile

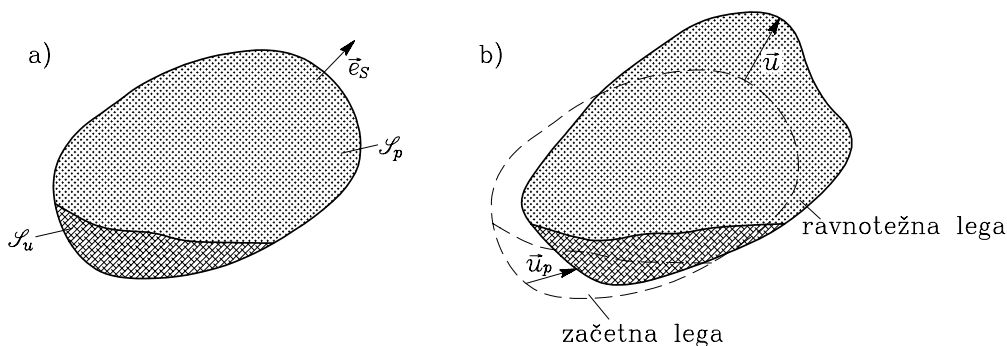
Oglejmo si dva izreka, s katerima lahko bolj učinkovito rešujemo različne vrste nalog pri statični analizi konstrukcij. Z izrekom o virtualnih pomikih izpeljemo **ravnotežne enačbe**, ki ustrezajo podanim kinematičnim pogojem. Izrek o virtualnih pomikih imenujemo tudi izrek o virtualnem delu. Z izrekom o virtualnih silah izpeljemo **kinematične pogoje**, ki ustrezajo podanim ravnotežnim enačbam. Izrek o virtualnih silah pogosto imenujemo tudi izrek o dopolnilnem virtualnem delu. Uporabo izreka o virtualnih silah pri linijskih konstrukcijah prikazujemo v [poglavju 5](#).

4.1 Izrek o virtualnih pomikih

Podprto deformabilno telo je obteženo s površinsko obtežbo \vec{p}_S in s prostorninsko obtežbo \vec{v} tako, da je v **ravnotežju**. Mejno ploskev telesa \mathcal{S} razdelimo na del \mathcal{S}_p , kjer je predpisana površinska obtežba \vec{p}_S in na del \mathcal{S}_u , kjer so predpisani pomiki \vec{u} (slika 4.1a)

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_p \cup \mathcal{S}_u.$$

Predpisani pomik na delu \mathcal{S}_u označimo z \vec{u}_p (slika 4.1b).



Slika 4.1: a) Začetna lega telesa b) Ravnotežna lega telesa

Napetostno stanje v poljubnem delcu $\mathcal{D}(x, y, z)$ telesa (točki kontinuuma) opišemo z napetostnimi vek-

