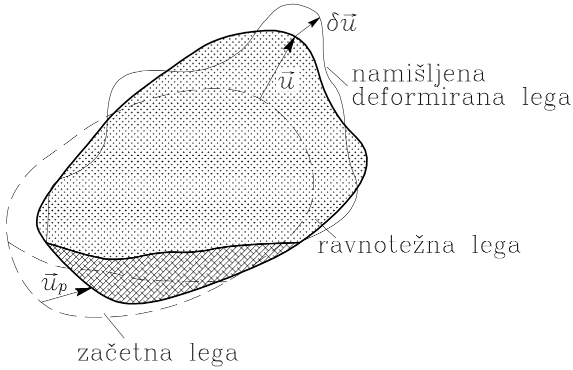
torji $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$ in $\vec{\sigma}_z$. Ker je telo v ravnotežju, morajo biti izpolnjene ravnotežne enačbe

$$\mathscr{V}: \qquad \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{v} = \vec{0}, \tag{4.1}$$

$$\mathscr{V}: \qquad \vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \vec{\sigma}_z = \vec{0}, \tag{4.2}$$

$$\mathscr{S}: \qquad \vec{p}_S = \vec{\sigma}_x \, e_{Sx} + \vec{\sigma}_y \, e_{Sy} + \vec{\sigma}_z \, e_{Sz}. \tag{4.3}$$

Sedaj si zamislimo, da se obravnavano telo, ki je v ravnotežju, premakne oziroma deformira. Namišljeno deformirano lego opišemo z virtualnimi oziroma namišljenimi pomiki $\delta\vec{u}(x, y, z)$ (slika 4.2).



Slika 4.2: Deformiranemu telesu, katerega lega je določena s pomiki $\vec{u}$, vsilimo virtualne pomike $\delta\vec{u}$

Virtualne pomike definiramo takole:

– Virtualni pomik delca $\mathscr{D}$ je **poljubni linearni del možnega** (kinematično dopustnega) pomika. S posplošenimi koordinatami q_j, $j = 1, \ldots, n_{ps}$ ga zapišemo takole:

$$\delta\vec{u} = \sum_{j=1}^{n_{ps}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \, \delta q_j,$$

kjer je n_{ps} število prostostnih stopenj obravnavanega sistema delcev oziroma število posplošenih koordinat, s katerimi opišemo pomike $\delta\vec{u}$ poljubnega delca. Z $\vec{r}$ označimo krajevni vektor, ki določa lego delca $\mathscr{D}$. Če upoštevamo, da je virtualni pomik linearni del možnega pomika, izrazimo komponente tenzorja virtualnih deformacij in tenzorja virtualnih zasukov z virtualnimi pomiki $\delta\vec{u}$ takole (glej primer 4.1):

$$2\,\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}, \qquad 2\,\delta\omega_{ij} = \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}. \tag{4.4}$$

Če enačbi seštejemo, dobimo

$$\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} = \delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}$$

ali v vektorski obliki

$$\frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial x} = \delta\vec{\varepsilon}_x + \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_x, \quad \frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial y} = \delta\vec{\varepsilon}_y + \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_y, \quad \frac{\partial(\delta\vec{u})}{\partial z} = \delta\vec{\varepsilon}_z + \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_z. \tag{4.5}$$

Z $\delta\vec{\varepsilon}_x$, $\delta\vec{\varepsilon}_y$, $\delta\vec{\varepsilon}_z$ so označeni vektorji virtualnih deformacij, z $\delta\vec{\omega}$ pa vektor virtualnega zasuka.[†] Kinematične enačbe za virtualne pomike so enake kinematičnim enačbam za resnične pomike.

– Na delu $\mathscr{S}_u$ mejne ploskve $\mathscr{S}$, kjer so pomiki $\vec{u}$ predpisani, so virtualni pomiki $\delta\vec{u}$ enaki nič

$$\mathscr{S}_u: \qquad \delta\vec{u} = \vec{0}. \tag{4.6}$$

– Virtualni pomiki so **neodvisni** od pomikov $\vec{u}$, ki jih povzročita obtežbi $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$.

Zapišimo izraz za delo, ki ga opravita obtežbi $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$ na virtualnih pomikih $\delta\vec{u}$. Tako delo imenujemo **virtualno delo zunanjih sil** in ga označimo z δW_z

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{S}} \vec{p}_S \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV. \tag{4.7}$$

Če želimo z izrekom o virtualnih pomikih izpeljati ravnotežne enačbe za **nedeformirano lego telesa**,[†] v (4.7) predpostavimo, da so pomiki zanemarljivi ter integriramo po območjih $\mathscr{S}$ in $\mathscr{V}$ in ne po območjih $\mathscr{S}'$ in $\mathscr{V}'$.

Enačbo (4.3) vstavimo v (4.7) in dobimo

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \int_{\mathscr{S}} (\vec{\sigma}_x\, e_{Sx} + \vec{\sigma}_y\, e_{Sy} + \vec{\sigma}_z\, e_{Sz}) \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV = \\ &= \int_{\mathscr{S}} [\,(\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sx} + (\vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sy} + (\vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sz}]\, dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Integral po sklenjeni ploskvi $\mathscr{S}$ pretvorimo z Gaussovim [‡] integralnim izrekom na integral po območju $\mathscr{V}$. Če so P_x, P_y in P_z zvezne in zvezno odvedljive funkcije koordinat x, y, z, ki so definirane znotraj območja $\mathscr{V}$ in vzdolž ploskve $\mathscr{S}$, e_{Sx}, e_{Sy} in e_{Sz} pa smerni kosinusi zunanje normale na ploskev $\mathscr{S}$, zapišemo Gaussov integralni izrek takole:

$$\int_{\mathscr{S}} (P_x\, e_{Sx} + P_y\, e_{Sy} + P_z\, e_{Sz})\, dS = \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dV. \tag{4.9}$$

[†] M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.
[†] M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.
[‡] Johann Karl Friedrich Gauss, nemški matematik, fizik in astronom, 1777–1855.
I. Vidav, Višja matematika II, Ljubljana, 1986, stran 405.
Dokaz izreka je podan v člankih: J. Vrabec, Stokesov in Gaussov izrek I, Obzornik za matematiko in fiziko, 36, 1, 1–12, 1989 in J. Vrabec, Stokesov in Gaussov izrek II, Obzornik za matematiko in fiziko, 36, 2, 33–43, 1989.

Če integriranje v (4.8) po mejni ploskvi $\mathscr{S}$ prevedemo na integriranje po območju $\mathscr{V}$ (enačba (4.9)), dobimo

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{V}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{u}\,) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{u}\,) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{u}\,) \right] dV + \int_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV. \tag{4.10}$$

Po odvajanju sledi

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{v} \right) \cdot \delta\vec{u}\, dV + \int_{\mathscr{V}} \left[\vec{\sigma}_x \cdot \frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial x} + \vec{\sigma}_y \cdot \frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial y} + \vec{\sigma}_z \cdot \frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial z} \right] dV. \tag{4.11}$$

Ker so izpolnjeni ravnotežni pogoji (4.1), se enačba (4.11) poenostavi

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{V}} \left[\vec{\sigma}_x \cdot \frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial x} + \vec{\sigma}_y \cdot \frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial y} + \vec{\sigma}_z \cdot \frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial z} \right] dV. \tag{4.12}$$

V (4.12) upoštevamo (4.5) in dobimo

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{V}} [\vec{\sigma}_x \cdot (\delta\vec{\varepsilon}_x + \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_x) + \vec{\sigma}_y \cdot (\delta\vec{\varepsilon}_y + \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_y) + \vec{\sigma}_z \cdot (\delta\vec{\varepsilon}_z + \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_z)]\, dV. \tag{4.13}$$

Upoštevamo še pravilo za mešani produkt treh vektorjev

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}\,) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}\,) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}\,) = (\vec{c} \times \vec{a}\,) \cdot \vec{b} \tag{4.14}$$

ter pravili o asociativnosti in komutitativnosti skalarnega produkta in iz (4.13) dobimo

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{\varepsilon}_z)\, dV + \int_{\mathscr{V}} [(\vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \vec{\sigma}_z) \cdot \delta\vec{\omega}\,]\, dV. \tag{4.15}$$

Ker je telo v ravnotežju (enačba (4.2)), je izraz v okroglem oklepaju v drugem integralu na desni strani enačbe (4.15) enak nič. Tako dobimo

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{\varepsilon}_z)\, dV. \tag{4.16}$$

Desna stran enačbe (4.16) predstavlja delo napetosti $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$ in $\vec{\sigma}_z$, ki jih povzročita obtežbi $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$ na virtualnih deformacijah $\delta\vec{\varepsilon}_x$, $\delta\vec{\varepsilon}_y$ in $\delta\vec{\varepsilon}_z$. Imenujemo ga tudi **virtualno delo notranjih sil** in označimo z δW_n

$$\delta W_n = \int_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{\varepsilon}_z)\, dV. \tag{4.17}$$

Če upoštevamo enačbo (4.6), lahko v (4.7) integriramo po delu $\mathscr{S}_p$ mejne ploskve $\mathscr{S}$

$$\delta W_z = \int_{\mathscr{S}_p} \vec{p}_S \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV, \tag{4.18}$$

ter enačbo (4.16) zapišemo takole:

$$\delta W_z = \delta W_n \tag{4.19}$$

oziroma v razširjeni obliki takole:

$$\boxed{\int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{p}_S \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV = \int\limits_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{\varepsilon}_z)\, dV.} \tag{4.20}$$

Tako enačba (4.19) kakor tudi (4.20) predstavljata **izrek o virtualnih pomikih** ali izrek o virtualnem delu. Z besedami ga opišemo takole: Če je deformabilno telo v ravnotežju, je virtualno delo zunanjih sil δW_z enako virtualnemu delu notranjih sil δW_n. Velja pa tudi obratno: če virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notanjih sil, je telo v ravnotežju. Dokažimo!
Virtualne deformacije $\delta\vec{\varepsilon}_x$, $\delta\vec{\varepsilon}_y$ in $\delta\vec{\varepsilon}_z$ v enačbi (4.20) izrazimo z odvodi virtualnega pomika $\delta\vec{u}$ in z virtualnim zasukom $\delta\vec{\omega}$ (enačba (4.5)). Zato desno stran enačbe (4.20) zapišemo v naslednji obliki

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{\varepsilon}_z)\, dV = \\
&\int\limits_{\mathscr{V}} \left\{ \vec{\sigma}_x \cdot \left[\frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial x} - \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_x \right] + \vec{\sigma}_y \cdot \left[\frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial y} - \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_y \right] + \vec{\sigma}_z \cdot \left[\frac{\partial(\delta\vec{u}\,)}{\partial z} - \delta\vec{\omega} \times \vec{e}_z \right] \right\} dV = \\
&\int\limits_{\mathscr{V}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{u}\,) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{u}\,) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{u}\,) \right] dV - \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \cdot \delta\vec{u}\, dV - \\
&- \int\limits_{\mathscr{V}} [\vec{\sigma}_x \cdot (\delta\vec{\omega} \times \vec{e}_x) + \vec{\sigma}_y \cdot (\delta\vec{\omega} \times \vec{e}_y) + \vec{\sigma}_z \cdot (\delta\vec{\omega} \times \vec{e}_z)]\, dV.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Prvi integral na desni strani v izrazu (4.21) transformiramo z Gaussovim integralnim izrekom (4.9) in upoštevamo pravilo za mešani produkt treh vektorjev (4.14) in dobimo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{\varepsilon}_x + \vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{\varepsilon}_y + \vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{\varepsilon}_z)\, dV = \int\limits_{\mathscr{S}} [\,(\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sx} + (\vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sy} + (\vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sz}\,]\, dS - \\
&- \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \cdot \delta\vec{u}\, dV - \int\limits_{\mathscr{V}} [\,(\vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \vec{\sigma}_z) \cdot \delta\vec{\omega}\,]\, dV.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ker je $\delta\vec{u}$ na $\mathscr{S}_u$ enak nič (enačba (4.6)), zapišemo (4.22) takole:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{p}_S \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV = \int\limits_{\mathscr{S}} [\,(\vec{\sigma}_x \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sx} + (\vec{\sigma}_y \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sy} + (\vec{\sigma}_z \cdot \delta\vec{u}\,)\, e_{Sz}\,]\, dS - \\
&- \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} \right) \cdot \delta\vec{u}\, dV - \int\limits_{\mathscr{V}} [\,(\vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \vec{\sigma}_z) \cdot \delta\vec{\omega}\,]\, dV.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Enačbo (4.23) vstavimo v (4.20)

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathscr{S}_p} [\vec{p}_S - (\vec{\sigma}_x\, e_{Sx} + \vec{\sigma}_y\, e_{Sy} + \vec{\sigma}_z\, e_{Sz}\,)] \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{v} \right) \cdot \delta\vec{u}\, dV + \\ &+ \int\limits_{\mathscr{V}} [\,(\vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \vec{\sigma}_z) \cdot \delta\vec{\omega}]\, dV = 0\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ker so virtualni pomiki $\delta\vec{u}$ in virtualni zasuki $\delta\vec{\omega}$ poljubni in neodvisni, velja (glej primer 4.3)

$$\begin{aligned}\mathscr{V}: &\qquad \frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{v} = \vec{0}, \\ \mathscr{V}: &\qquad \vec{e}_x \times \vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \vec{\sigma}_z = \vec{0}, \\ \mathscr{S}_p: &\qquad \vec{p}_S = \vec{\sigma}_x\, e_{Sx} + \vec{\sigma}_y\, e_{Sy} + \vec{\sigma}_z\, e_{Sz}.\end{aligned}$$

Dobili smo ravnotežne enačbe znotraj telesa $\mathscr{V}$ in na površini $\mathscr{S}_p$. Zato velja: če je virtualno delo zunanjih sil pri kinematično dopustnih virtualnih pomikih enako virtualnemu delu notranjih sil, so izpolnjeni ravnotežni pogoji.

Če učinkuje na telo tudi n_F točkovnih sil $\vec{F}_i$ in n_M točkovnih momentov $\vec{M}_j$, zapišemo virtualno delo zunanjih sil takole:

$$\delta W_z = \int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{p}_S \cdot \delta\vec{u}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v} \cdot \delta\vec{u}\, dV + \sum_{i=1}^{n_F} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{j=1}^{n_M} \vec{M}_j \cdot \delta\vec{\omega}_j. \tag{4.25}$$

Tu je $\delta\vec{u}_i$ virtualni pomik na mestu delovanja sile $\vec{F}_i$, $\delta\vec{\omega}_j$ pa virtualni zasuk na mestu delovanja točkovnega momenta $\vec{M}_j$.

Ker pri izpeljavi izreka nismo upoštevali vrste materiala, iz katerega je telo, velja izrek o virtualnih pomikih za **poljuben material**, oziroma za poljubno zvezo med napetostmi in deformacijami.

Izrek o virtualnih pomikih uporabimo pri reševanju nalog, pri katerih kinematične pogoje obravnavanega problema poznamo in želimo določiti **pripadajoče** ravnotežne enačbe.

4.1.1 Betti-Rayleighjev in Maxwellov izrek

Obravnavajmo nosilno telo iz idealno elastičnega materiala, na katerega delujeta dve obtežbi. Vsako izmed obtežb določata površinska in prostorninska obtežba. Prvo obtežbo označimo z $\vec{p}_{S(1)}, \vec{v}_{(1)}$, drugo pa z $\vec{p}_{S(2)}, \vec{v}_{(2)}$. Če na telo deluje le obtežba $\vec{p}_{S(1)}, \vec{v}_{(1)}$, nastanejo pomiki $\vec{u}_{(1)}$, deformacije $\vec{\varepsilon}_{x(1)}, \vec{\varepsilon}_{y(1)}, \vec{\varepsilon}_{z(1)}$ ter napetosti $\vec{\sigma}_{x(1)}, \vec{\sigma}_{y(1)}, \vec{\sigma}_{z(1)}$. Če pa na telo deluje le obtežba $\vec{p}_{S(2)}, \vec{v}_{(2)}$, nastanejo pomiki $\vec{u}_{(2)}$, deformacije $\vec{\varepsilon}_{x(2)}, \vec{\varepsilon}_{y(2)}, \vec{\varepsilon}_{z(2)}$ ter napetosti $\vec{\sigma}_{x(2)}, \vec{\sigma}_{y(2)}, \vec{\sigma}_{z(2)}$. Pomiki, napetosti in deformacije zaradi prve obtežbe so neodvisni od druge obtežbe. Prav tako so pomiki, napetosti in deformacije zaradi druge obtežbe neodvisni od prve obtežbe. Ker v izrazu za delo δW_z, ki ga opravi resnična obtežba na virtualnih pomikih, nastopajo sile in napetosti, ki so neodvisne od virtualnih pomikov in virtualnih deformacij, lahko zapišemo izraz δW_z tako (enačba (4.7)), da vzamemo prvo obtežbo $\vec{p}_{S(1)}, \vec{v}_{(1)}$ kot resnično obtežbo, pomike in deformacije zaradi druge obtežbe, pa kot virtualne pomike in virtualne deformacije

$$\delta\vec{u} \equiv \vec{u}_{(2)}, \quad \delta\vec{\varepsilon}_x \equiv \vec{\varepsilon}_{x(2)}, \quad \delta\vec{\varepsilon}_y \equiv \vec{\varepsilon}_{y(2)}, \quad \delta\vec{\varepsilon}_z \equiv \vec{\varepsilon}_{z(2)}.$$

Tako dobimo

$$\delta W_{z(1)} = \int\limits_{\mathscr{S}} \vec{p}_{S(1)} \cdot \vec{u}_{(2)}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v}_{(1)} \cdot \vec{u}_{(2)}\, dV.$$

Če upoštevamo še enačbo (4.16), sledi

$$\delta W_{z(1)} = \int\limits_{\mathscr{S}} \vec{p}_{S(1)} \cdot \vec{u}_{(2)}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v}_{(1)} \cdot \vec{u}_{(2)}\, dV = \int\limits_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_{x(1)} \cdot \vec{\varepsilon}_{x(2)} + \vec{\sigma}_{y(1)} \cdot \vec{\varepsilon}_{y(2)} + \vec{\sigma}_{z(1)} \cdot \vec{\varepsilon}_{z(2)})\, dV. \tag{4.26}$$

Podobno lahko zapišemo delo $\delta W_{z(2)}$ druge obtežbe na pomikih prve obtežbe tako, da vzamemo drugo obtežbo $\vec{p}_{S(2)}, \vec{v}_{(2)}$ kot resnično obtežbo, pomike in deformacije zaradi prvee obtežbe, pa kot virtualne pomike in virtualne deformacije

$$\delta\vec{u} \equiv \vec{u}_{(1)}, \quad \delta\vec{\varepsilon}_x \equiv \vec{\varepsilon}_{x(1)}, \quad \delta\vec{\varepsilon}_y \equiv \vec{\varepsilon}_{y(1)}, \quad \delta\vec{\varepsilon}_z \equiv \vec{\varepsilon}_{z(1)}.$$

Tako dobimo

$$\delta W_{z(2)} = \int\limits_{\mathscr{S}} \vec{p}_{S(2)} \cdot \vec{u}_{(1)}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v}_{(2)} \cdot \vec{u}_{(1)}\, dV.$$

Če upoštevamo še enačbo (4.16), sledi

$$\delta W_{z(2)} = \int\limits_{\mathscr{S}} \vec{p}_{S(2)} \cdot \vec{u}_{(1)}\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{v}_{(2)} \cdot \vec{u}_{(1)}\, dV = \int\limits_{\mathscr{V}} (\vec{\sigma}_{x(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_{x(1)} + \vec{\sigma}_{y(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_{y(1)} + \vec{\sigma}_{z(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_{z(1)})\, dV. \tag{4.27}$$

Upoštevamo Hookov zakon

$$\vec{\sigma}_{x(1)} = 2\,\mu\,\vec{\varepsilon}_{x(1)} + \lambda\, I_{1\varepsilon(1)}\, \vec{e}_x, \quad \vec{\sigma}_{y(1)} = 2\,\mu\,\vec{\varepsilon}_{y(1)} + \lambda\, I_{1\varepsilon(1)}\, \vec{e}_y, \quad \vec{\sigma}_{z(1)} = 2\,\mu\,\vec{\varepsilon}_{z(1)} + \lambda\, I_{1\varepsilon(1)}\, \vec{e}_z \tag{4.28}$$

in

$$\vec{\sigma}_{x(2)} = 2\,\mu\,\vec{\varepsilon}_{x(2)} + \lambda\, I_{1\varepsilon(2)}\, \vec{e}_x, \quad \vec{\sigma}_{y(2)} = 2\,\mu\,\vec{\varepsilon}_{y(2)} + \lambda\, I_{1\varepsilon(2)}\, \vec{e}_y, \quad \vec{\sigma}_{z(2)} = 2\,\mu\,\vec{\varepsilon}_{z(2)} + \lambda\, I_{1\varepsilon(2)}\, \vec{e}_z. \tag{4.29}$$

Enačbo (4.28) upoštevamo v (4.26)

$$\delta W_{z(1)} = \int\limits_{\mathscr{V}} [\, 2\,\mu\,(\vec{\varepsilon}_{x(1)} \cdot \vec{\varepsilon}_{x(2)} + \vec{\varepsilon}_{y(1)} \cdot \vec{\varepsilon}_{y(2)} + \vec{\varepsilon}_{z(1)} \cdot \vec{\varepsilon}_{z(2)}\,) + \lambda\, I_{1\varepsilon(1)}\, I_{1\varepsilon(2)}\,]\, dV, \tag{4.30}$$

enačbo (4.29) pa v (4.27)

$$\delta W_{z(2)} = \int_{\mathscr{V}} [\, 2\,\mu\,(\vec{\varepsilon}_{x(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_{x(1)} + \vec{\varepsilon}_{y(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_{y(1)} + \vec{\varepsilon}_{z(2)} \cdot \vec{\varepsilon}_{z(1)}\,) + \lambda\, I_{1\varepsilon(2)}\, I_{1\varepsilon(1)}\,]\, dV. \tag{4.31}$$

Iz primerjave enačb (4.30) in (4.31) sledi **Betti-Rayleighjev izrek o vzajemnosti dela** za idealno elastične materiale

$$\delta W_{z(1)} = \delta W_{z(2)}. \tag{4.32}$$

Z besedami ga opišemo takole: virtualno delo prve obtežbe na pomikih druge obtežbe je enako virtualnemu delu druge obtežbe na pomikih prve obtežbe.

Maxwellov izrek o vzajemnosti pomikov

Zapišimo Betti-Rayleighjev izrek za naslednje tri primere: a) da na telo delujeta dve točkovni sili, b) da na telo delujeta točkovna sila in točkovni moment ter c) da na telo delujeta dva točkovna momenta.

a) Na telo delujeta dve točkovni sili

Prijemališče prve sile $\vec{F}_{(1)} = \vec{F}_M$ je točka M, prijemališče druge sile $\vec{F}_{(2)} = \vec{F}_N$ pa točka N. Pomika zaradi sile $\vec{F}_M$ v točkah M in N označimo z $\vec{u}_{MM}$ in $\vec{u}_{NM}$. Pomika zaradi sile $\vec{F}_N$ v točkah M in N označimo z $\vec{u}_{MN}$ in $\vec{u}_{NN}$ (slika4.3).

Slika 4.3: V točki M deluje sila $\vec{F}_M$, v točki N pa sila $\vec{F}_N$

Zapišimo virtualno delo sile $\vec{F}_M$ na pomiku $\vec{u}_{MN}$ zaradi sile $\vec{F}_N$

$$\delta W_{z(1)} = \vec{F}_M \cdot \vec{u}_{MN},$$

ter virtualno delo sile $\vec{F}_N$ na pomiku $\vec{u}_{NM}$ zaradi sile $\vec{F}_M$

$$\delta W_{z(2)} = \vec{F}_N \cdot \vec{u}_{NM}.$$

Upoštevamo Betti-Rayleighjev izrek (4.32) in dobimo

$$\vec{F}_M \cdot \vec{u}_{MN} = \vec{F}_N \cdot \vec{u}_{NM}. \tag{4.33}$$

Sili $\vec{F}_M$ in $\vec{F}_N$ ter pomika $\vec{u}_{MN}$ in $\vec{u}_{NM}$ izrazimo z njunuma velikostima ter enotskima vektorjema

$$\vec{F}_M = F_M\,\vec{e}_M, \quad \vec{F}_N = F_N\,\vec{e}_N, \qquad \vec{u}_{MN} = u_{MN}\,\vec{e}_M, \quad \vec{u}_{NM} = u_{NM}\,\vec{e}_N. \tag{4.34}$$

Izraze (4.34) upoštevamo v (4.33) in dobimo

$$F_M\,u_{MN} = F_N\,u_{NM}. \tag{4.35}$$

Če sta sili $\vec{F}_M$ in $\vec{F}_N$ po velikosti enaki

$$F_M = F_N,$$

iz (4.35) sledi, da je

$$\boxed{u_{MN} = u_{NM}.} \tag{4.36}$$

Enačba (4.36) predstavlja Maxwellov izrek o vzajemnosti oziroma enakosti pomikov in pravi, da je projekcija u_{MN} pomika točke M na smer sile $\vec{F}_M$, ki je nastal zaradi sile $\vec{F}_N$, enaka projekciji u_{NM} pomika točke N na smer sile $\vec{F}_N$, ki je nastal zaradi sile $\vec{F}_M$, če sta sili po velikosti enaki (slika4.4).

Slika 4.4: u_{MN} je pomik točke M v smeri sile $\vec{F}_M$ zaradi sile $\vec{F}_N$, u_{NM} pa pomik točke N v smeri sile $\vec{F}_N$ zaradi sile $\vec{F}_M$

b) Na telo delujeta točkovna sila in točkovni moment

Delo točkovnega momenta $\vec{M}_N$, ki deluje v točki N, na zasuku $\vec{\varphi}_{NM}$ okrog točke N zaradi sile $\vec{F}_M$, označimo z $\delta W_{z(2)}$ in izračunamo po enačbi

$$\delta W_{z(2)} = \vec{M}_N \cdot \vec{\varphi}_{NM}.$$

Če upoštevamo Betti-Rayleighjev izrek, sledi

$$F_M\, u_{MN} = M_N\, \varphi_{NM}. \tag{4.37}$$

Če je sila po velikosti enaka momentu in če sta njuni velikosti enaki ena ($F_M = 1$ in $M_N = 1$), sledi (slika 4.5a)

$$\boxed{u_{MN} = \varphi_{NM}.} \tag{4.38}$$

c) Na telo delujeta dva točkovna momenta

V primeru dveh točkovnih momentov dobimo, da je (slika 4.5b)

$$\boxed{\varphi_{MN} = \varphi_{NM}.} \tag{4.39}$$

Slika 4.5: a) u_{MN} je pomik točke M v smeri xx zaradi momenta $\vec{M}_N$, φ_{NM} pa zasuk točke N okrog osi yy zaradi sile $\vec{F}_M$,
b) φ_{MN} je zasuk točke M okrog osi cc zaradi momenta $\vec{M}_N$, φ_{NM} pa zasuk točke N okrog osi bb zaradi momenta $\vec{M}_M$

4.1.2 Podajnostna in togostna matrika

Podajnostni koeficienti

Pomike in zasuke skupaj imenujemo posplošeni pomiki ali kar pomiki, sile in momente pa posplošene sile ali kar sile. Pri linearni zvezi med napetostmi in deformacijami so pomiki premo sorazmerni silam. Zato lahko pomika u_{MN} in u_{NM} v (4.34) izrazimo s silama, ki sta povzročili ta pomika

$$u_{MN} = f_{MN}\,F_N, \qquad u_{NM} = f_{NM}\,F_M. \tag{4.40}$$

Sorazmernostna faktorja f_{MN} in f_{NM} sta **podajnostna koeficienta**, ki sta neodvisna od obtežbe. Velikost podajnostnega koeficienta je odvisna od lastnosti materiala, oblike in dimenzije konstrukcije ter od točk, na kateri se nanašata. Če (4.40) vstavimo v (4.35), dobimo

$$F_M\,f_{MN}\,F_N = F_N\,f_{NM}\,F_M. \tag{4.41}$$

Iz enačbe (4.41) sledi, da je

$$\boxed{f_{MN} = f_{NM}.} \tag{4.42}$$

Podajnostni koeficient f_{MN} določa pomik na mestu in v smeri delovanja sile $\vec{F}_M$, ki je nastal zaradi sile $\vec{F}_N$ velikosti ena ($F_N = 1$) in je enak pomiku f_{NN} na mestu in v smeri delovanja sile $\vec{F}_N$, ki je nastal zaradi sile $\vec{F}_M$ velikosti ena ($F_M = 1$).

Za primer konzole, ki je obtežena v točki M s silo $\vec{F}_M$ in v točki N z momentom $\vec{M}_N$, velja zaradi Maxwellovega izreka, da je pomik v točki M zaradi momenta $M_N = 1$ enak zasuku v točki N zaradi sile $F_M = 1$ (4.6).

Slika 4.6: a) f_{NM} je zasuk točke N okrog osi momenta $\vec{M}_N$ zaradi $M_N = 1$,
b) f_{MN} je pomik točke M v smeri sile $\vec{F}_M$ zaradi $F_M = 1$

Podajnostna in togostna matrika

Obravnavajmo primer, ko na telo delujejo le točkovne sile in točkovni momenti oziroma posplošene sile. V tem primeru določimo posplošeni pomik tako, da seštejemo vse pomike, ki jih povzročijo na določenem mestu v izbrani smeri posamezne posplošene sile:

$$u_i = u_{i1} + u_{i2} + \cdots + u_{ij} + \cdots + u_{ii} + \cdots + u_{iM}. \tag{4.43}$$

Za delež, ki ga prispeva vsaka sila, uporabimo (4.40) in dobimo

$$u_i = \sum_{j=1}^{M} u_{ij} = \sum_{j=1}^{M} f_{ij}\,F_j. \tag{4.44}$$

Posplošene pomike zberemo v posplošeni vektor pomikov $[u]$, posplošene sile pa v posplošeni vektor sil $[F]$. Vse podajnostne koeficiente zapišemo v podajnostni matriki $[F]$. Izraz (4.44) zapišemo z matrikami takole

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1M} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M1} & f_{M2} & \cdots & f_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix}$$

ali krajše

$$[u] = [FF][F]. \tag{4.45}$$

Zaradi Maxwellovega izreka (4.42) je podajnostna matrika simetrična

$$[FF] = [FF]^T. \tag{4.46}$$

Če zapišemo obratno zvezo v (4.44), izrazimo posplošene sile s pomiki

$$F_i = \sum_{j=1}^{M} k_{ij} u_j. \tag{4.47}$$

Sorazmernostni faktorji k_{ij} so togostni koeficienti. Togostni koeficient k_{ij} določa silo v točki i, da je pomik u_j enak ena, vsi ostali pomiki pa so enaki nič. Izraz (4.47) zapišemo v matrično obliko

$$[F] = [K][u]. \tag{4.48}$$

Če (4.48) vstavimo v (4.45) ugotovimo, da je produkt podajnostne in togostne metrike enotska matrika $[I]$

$$[FF][K] = [I]. \tag{4.49}$$

Iz zadnje enačbe sledi, da je

$$[K] = [FF]^{-1} \quad \text{in} \quad [FF] = [K]^{-1}. \tag{4.50}$$

Ker je podajnostna matrika simetrična, je simetrična tudi togostna matrika

$$[K] = [K]^T \tag{4.51}$$

oziroma

$$k_{ij} = k_{ji}.$$

4.1.3 Primeri

Primer 4.1 *Pri izpeljavi izreka o virtualnih pomikih smo zapisali zvezo med virtualnimi pomiki, zasuki in deformacijami z enačbama* (4.4). *Pokažimo, da enačbi* (4.4) *izpeljemo tako, da v izrazu, ki velja za velike deformacije upoštevamo le linearni del kinematično možnih pomikov! Možni pomik $\vec{u}$ delca $\mathscr{D}$ je pomik, ki je skladen z vezmi.*

Sistem N delcev $\mathscr{D}_d$ $(d=1,\ldots,N)$, katerih gibanje je omejeno z vezmi, ima n_{ps} prostostnih stopenj gibanja. Lege delcev v sistemu lahko izrazimo z materialnimi koordinatami x_d, y_d, z_d $(d=1,\ldots,N)$ ali s posplošenimi koordinatami q_l $(l=1,\ldots,n_{ps})$.[†] Obravnavajmo gibanje delca $\mathscr{D}_d$ in zaradi preglednosti opustimo pisanje indeksa d. Krajevni vektor $\vec{r}$ določa lego delca

$$\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)=\vec{r}(q_1,\ldots,q_{n_{ps}}). \tag{4.52}$$

Možni pomik $\vec{u}$ delca $\mathscr{D}$ dobimo, če zapišemo razliko krajevnih vektorjev dveh možnih leg delca $\mathscr{D}$, podanih z vektorjema $\vec{r}(q_1+\Delta q_1,\ldots,q_{n_{ps}}+\Delta q_{n_{ps}})$ in $\vec{r}(q_1,\ldots,q_{n_{ps}})$:

$$\vec{u}=\vec{r}(q_1+\Delta q_1,\ldots,q_{n_{ps}}+\Delta q_{n_{ps}})-\vec{r}(q_1,\ldots,q_{n_{ps}}). \tag{4.53}$$

Zapišimo enačbo (4.53) še v komponentni obliki, kjer oznaka x_k, $k=x,y,z$ predstavlja koordinate x, y in z:

$$u_k=x_k(q_1+\Delta q_1,\ldots,q_{n_{ps}}+\Delta q_{n_{ps}})-x_k(q_1,\ldots,q_{n_{ps}}),\qquad k=x,y,z. \tag{4.54}$$

Enačba, ki povezuje poljubno velike deformacije E_{ij} s pomiki je [†]

$$2\,E_{ij}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_x}{\partial x_i}\frac{\partial u_x}{\partial x_j}+\frac{\partial u_y}{\partial x_i}\frac{\partial u_y}{\partial x_j}+\frac{\partial u_z}{\partial x_i}\frac{\partial u_z}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\sum_{k=x,y,z}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\quad i,j=x,y,z. \tag{4.55}$$

Funkcije $x_k(q_1+\Delta q_1,\ldots,q_{n_{ps}}+\Delta q_{n_{ps}})$, $(x_k=x,y,z)$ razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$\begin{aligned}x_k(q_1+\Delta q_1,\ldots,q_{n_{ps}}+\Delta q_{n_{ps}})&=x_k(q_1,\ldots,q_{n_{ps}})+\\&+\sum_{l=1}^{n_{ps}}\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\,\Delta q_l+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_{ps}}\sum_{m=1}^{n_{ps}}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_l\,\partial q_m}\,\Delta q_l\,\Delta q_m+\ldots\,,\qquad k=x,y,z.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Pomike u_k lahko ob upoštevanju enačbe (4.56) zapišemo s posplošenimi koordinatami

$$u_k=\sum_{l=1}^{n_{ps}}\frac{\partial x_k}{\partial q_l}\,\Delta q_l+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_{ps}}\sum_{m=1}^{n_{ps}}\frac{\partial^2 x_k}{\partial q_l\,\partial q_m}\,\Delta q_l\,\Delta q_m+\ldots\,,\qquad k=x,y,z. \tag{4.57}$$

Komponente tenzorja deformacije E_{ij} lahko zapišemo s posplošenimi koordinatami, če enačbo (4.57)

[†] M. Stanek, G. Turk, Statika II, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1996.

[†] M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.

vstavimo v (4.55)

$$
\begin{aligned}
2\,E_{ij} =& \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}\,\Delta q_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_{ps}}\sum_{m=1}^{n_{ps}} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_l\,\partial q_m}\,\Delta q_l\,\Delta q_m + \ldots\right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\,\Delta q_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_{ps}}\sum_{m=1}^{n_{ps}} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l\,\partial q_m}\,\Delta q_l\,\Delta q_m + \ldots\right) + \\
&+ \sum_{x_k=x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_k}{\partial q_l}\,\Delta q_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_{ps}}\sum_{m=1}^{n_{ps}} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_l\,\partial q_m}\,\Delta q_l\,\Delta q_m + \ldots\right) \cdot \\
&\cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_k}{\partial q_l}\,\Delta q_l + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n_{ps}}\sum_{m=1}^{n_{ps}} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_l\,\partial q_m}\,\Delta q_l\,\Delta q_m + \ldots\right), \quad i,j = x,y,z.
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

Če v enačbi (4.58) upoštevamo le linearne člene in uporabimo oznake

$$
\Delta q_l \equiv \delta q_l, \quad \delta u_k = \sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_k}{\partial q_l}\,\delta q_l, \quad k = x,y,z, \tag{4.59}
$$

lahko komponente deformacij E_{ij} zapišemo v odvisnosti od pomika δu_k. Komponente E_{ij} v tem primeru označimo z $\delta\varepsilon_{ij}$

$$
2\,\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_j}{\partial q_l}\,\delta q_l\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\,\delta q_l\right) = \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}, \quad i,j = x,y,z. \tag{4.60}
$$

Pri izpeljavi enačbe (4.60) smo upoštevali, da je virtualni pomik $\delta\vec{u}$ poljuben linearni del kinematično dopustnega pomika! Drugo izmed enačb (4.4) izpeljemo tako, da odvod $\partial(\delta u_j)/\partial x_i$ zapišemo kot vsoto simetričnega in nesimetričnega dela

$$
\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}\right] = \delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}, \quad i,j = x,y,z.
$$

Iz zadnje enačbe sledi

$$
2\,\delta\omega_{ij} = \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j}, \quad i,j = x,y,z.
$$

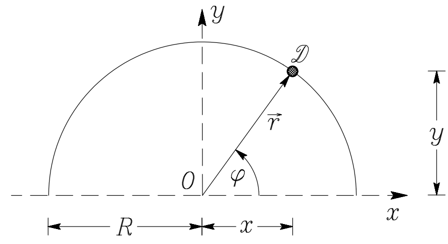
Vidimo, da so tako izpeljane zveze med virtualnimi pomiki, deformacijami in zasuki povsem enake tistim, ki veljajo za majhne deformacije, čeprav nismo nikjer predpostavili, da so virtualni pomiki ali deformacije majhni.

Primer 4.2 *Pokažimo, da v primeru, če vezi dopuščajo pomik delca $\mathscr{D}$ vzdolž polkrožnice, leži virtualni pomik na tangenti na polkrožnico. Pokažimo tudi, da v primeru, ko vezi dovoljujejo premikanje delca $\mathscr{D}$ po ukrivljeni ploskvi, virtualni pomik $\delta\vec{u}$ tega delca leži v tangentni ravnini na to ploskev.*

Virtualni pomik $\delta\vec{u}$ delca $\mathscr{D}$ zapišemo s posplošenimi koordinatami z enačbo (4.59), ki jo v vektorski obliki zapišemo takole:

$$\delta\vec{u} = \sum_{l=1}^{n_{ps}} \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_l}\,\delta q_l. \tag{4.61}$$

Vzemimo, da se delec $\mathscr{D}$ lahko premika vzdolž polovice krožnice (slika4.7).



Slika 4.7: Delec $\mathscr{D}$ se lahko giblje le po polkrožnici

Delec $\mathscr{D}$ ima eno prostostno stopnjo gibanja. Za $q_1 = \varphi$ sledi

$$\vec{r} = R\,\cos\varphi\,\vec{e}_x + R\,\sin\varphi\,\vec{e}_y.$$

Iz (4.61) dobimo

$$\delta\vec{u} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\,\delta\varphi = (-R\,\sin\varphi\,\vec{e}_x + R\,\cos\varphi\,\vec{e}_y)\,\delta\varphi.$$

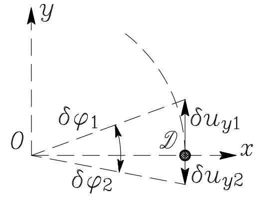
Določimo virtualni pomik $\delta\vec{u}$ delca $\mathscr{D}$ za primer, ko je $\varphi = 0$. V tem primeru je

$$\delta\vec{u} = R\,\delta\varphi\,\vec{e}_y$$

oziroma

$$\delta u_x = 0, \qquad \delta u_y = R\,\delta\varphi. \tag{4.62}$$

Na sliki 4.8 prikazujemo virtualno premaknjeno lego delca pri $\varphi = 0$. Velikost in predznak virtualnega zasuka $\delta\varphi$ v enačbi (4.62) sta poljubna, a ne nujno majhna!

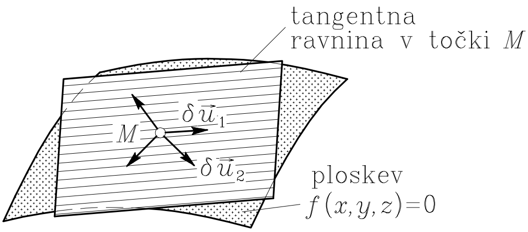


Slika 4.8: Virtualni pomik $\delta\vec{u}$ delca $\mathscr{D}$ za lego $\varphi = 0$

Če se delec $\mathscr{D}$ lahko premika po ploskvi $f(x, y, z) = 0$ v tridimenzionalnem prostoru, ima dve prostostni stopnji gibanja $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$. Njegov virtualni pomik po enačbi (4.61) izrazimo v odvisnosti od posplošenih koordinat q_1 in q_2

$$\delta\vec{u} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\,\delta q_2. \tag{4.63}$$

Če izberemo za posplošeni koordinati q_1 in q_2 koordinatni črti ploskve, po katerih se delec lahko giblje, sledi iz enačbe (4.63), da leži virtualni pomik $\delta\vec{u}$ v tangentni ravnini na ploskev možnih pomikov. Tangentna ravnina virtualnih pomikov $\delta\vec{u}$ na ploskev možnih pomikov leži v tisti točki, v kateri se delec nahaja, preden ga virtualno premaknemo (točka M). Velikost in smer virtualnega pomika v tangentni ravnini sta **poljubni** (slika 4.9).



Slika 4.9: Virtualni pomik $\delta\vec{u}$ leži v tangentni ravnini na ploskev možnih pomikov $f = 0$

Primer 4.3 *Dokažimo naslednjo trditev: naj bodo $\Psi_i(x)$ zvezne funkcije na intervalu $a \leq x \leq b$. Če je enačba*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b \Psi_i(x)\,\eta_i(x)\,dx = 0 \tag{4.64}$$

zadoščena za **poljubne** *zvezne funkcije $\eta_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, morajo biti funkcije $\Psi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ enake nič na celotnem intervalu od a do b*

$$\boxed{\Psi_i(x) \equiv 0; \qquad (i = 1, \ldots, n).} \tag{4.65}$$

Z n označimo poljubno celo število.

Dokaz

Ker so funkcije $\eta_i(x)$ poljubne, jih lahko izberemo tako, da bo

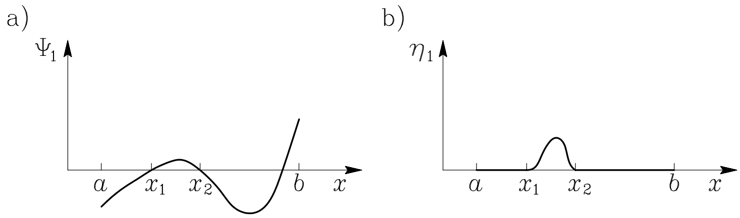
$$\eta_1 \neq 0 \ \text{ in } \ \eta_2 = \cdots = \eta_n = 0.$$

V tem primeru dobi enačba (4.64) naslednjo obliko

$$\int_a^b \Psi_1\,\eta_1\,dx = 0. \tag{4.66}$$

Osnovna trditev pravi, da mora biti v primeru **poljubne** funkcije η_1, **funkcija Ψ_1 enaka nič po celotnem intervalu** $a \leq x \leq b$. Da bi to trditev dokazali, vzemimo, da funkcija Ψ_1 ni enaka nič po celotnem intervalu $a \leq x \leq b$ in da obstaja podinterval $x_1 \leq x \leq x_2$ znotraj intervala $(a < x_1 < x_2 < b)$, kjer je funkcija $\Psi_1 \geq 0$ (slika4.10a). Poljubno funkcijo $\eta_1(x)$ izberimo tako, da je

$$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = 0; \qquad \eta_1 > 0 \ \text{ v } \ \text{podintervalu} \ \ x_1 < x < x_2,$$



Slika 4.10: Izbrani funkciji Ψ_1 in η_1

drugje na intervalu $a \leq x \leq b$ pa naj bo nič: $\eta_1 \equiv 0$ (slika 4.10b).

V tem primeru je integral $\int_a^b \Psi_1 \eta_1 \, dx$ pozitivnega integranda pozitiven

$$\int_a^b \Psi_1 \, \eta_1 \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi_1 \, \eta_1 \, dx > 0,$$

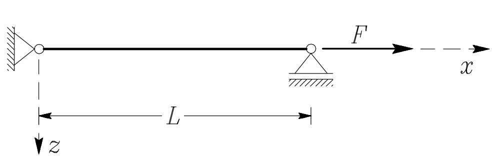
kar je v nasprotju z osnovno enačbo (4.66). Sledi, da funkcija Ψ_1 ne more biti pozitivna. Če sedaj vzamemo, da obstaja podinterval intervala $a \leq x \leq b$, v katerem je $\Psi_1 \leq 0$, dobimo na podoben način, da je zaradi poljubnosti funkcije η_1

$$\int_a^b \Psi_1 \, \eta_1 \, dx < 0,$$

kar je zopet v nasprotju z osnovno enačbo (4.66). Zato sledi, da je enačba (4.66) izpolnjena le, če je vzdolž celotnega intervala $\Psi_1(x) \equiv 0$. Prav tako pokažemo, da je

$$\Psi_2(x) \equiv 0, \ldots, \Psi_n(x) \equiv 0.$$

Primer 4.4 *Z izrekom o virtualnih pomikih določimo ravnotežno enačbo in statični robni pogoj za palico s konstantnim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x$, obteženo s silo F in podprto, kot kaže slika 4.11! Pri tem upoštevajmo, da je v palici enoosno deformacijsko stanje. Ravnotežno enačbo in pripadajoči robni pogoj najprej izrazimo z notranjo osno silo N_x, nato pa ob upoštevanju linearno elastičnega modela materiala še s pomikom u_x.*



Slika 4.11: Pri $x = 0$ sta preprečena pomika u_x in u_z, pri $x = L$ je $u_z = 0$ ter deluje vodoravna sila F

Zvezo med deformacijo ε_{xx} in pomikom $u_x = u$ v osi palice (enoosno deformacijsko stanje) podamo z naslednjo enačbo

$$0 \le x \le L: \qquad \frac{du(x)}{dx} = \varepsilon_{xx}(x), \tag{4.67}$$

kinematični robni pogoj pri $x = 0$ pa je

$$x = 0: \qquad u = 0.$$

Izrek o virtualnih pomikih uporabimo tako, da vanj vstavimo znane kinematične zveze za virtualne pomike, nato integriramo po prostornini telesa in dobimo ravnotežne enačbe, ki pripadajo danim kinematičnim pogojem.

V obravnavanem primeru so znane kinematične zveze za dejanske pomike. Če upoštevamo (4.4), zapišemo kinematične pogoje za virtualne pomike takole:

$$0 \le x \le L: \qquad \frac{d[\delta u(x)]}{dx} = \delta\varepsilon_{xx}(x). \tag{4.68}$$

Kjer so pomiki predpisani, so virtualni pomiki enaki nič (enačba (4.6))

$$x = 0: \qquad \delta u \equiv \delta u_0 = 0.$$

Izrek o virtualnih pomikih (enačba (4.20) oziroma (4.25)) zapišemo v naslednji obliki

$$F\,\delta u_L = \int\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,dV = \int\limits_0^L \Big(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,dA_x\Big)dx.$$

V zadnjo enačbo vstavimo kinematično zvezo za virtualni pomik (4.68)

$$F\,\delta u_L = \int\limits_0^L \Big\{\int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,\frac{d[\delta u(x)]}{dx}\,dA_x\Big\}dx = \int\limits_0^L \frac{d(\delta u)}{dx}\Big(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,dA_x\Big)dx, \tag{4.69}$$

upoštevamo definicijo osne sile

$$N_x = \int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,dA_x$$

in zapišemo

$$F\,\delta u_L = \int\limits_0^L N_x\,\frac{d(\delta u)}{dx}\,dx.$$

Enačbo integriramo po delih. Če sta $a(x)$ in $b(x)$ zvezno odvedljivi funkciji, velja

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x)\, b'(x)\, dx = a(x)\, b(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} a'(x)\, b(x)\, dx. \tag{4.70}$$

Z $a'(x)$ je označen odvod da/dx, z $b'(x)$ pa odvod db/dx. V obravnavanem primeru je

$$a(x) = N_x, \quad b(x) = \delta u, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = L$$

in dobimo

$$F\, \delta u_L = (N_x\, \delta u)\Big|_0^L - \int_0^L \frac{dN_x}{dx}\, \delta u\, dx.$$

Po delih integriramo tolikokrat, da v končnih izrazih nastopajo le med seboj neodvisne virtualne kinematične količine. V prikazanem primeru je bilo dovolj, da smo po delih integrirali enkrat. Po ureditvi sledi

$$F\, \delta u_L = N_{xL}\, \delta u_L - N_{x0}\, \delta u_0 - \int_0^L \frac{dN_x}{dx}\, \delta u\, dx.$$

Upoštevamo, da je $\delta u_0 = 0$ in dobimo

$$(F - N_{xL})\, \delta u_L + \int_0^L \frac{dN_x}{dx}\, \delta u\, dx = 0. \tag{4.71}$$

Da je virtualni pomik linearni del možnega pomika, smo že upoštevali (enačba (4.68)). Sedaj upoštevamo še lastnost virtualnih pomikov, ki pravi, da so **poljubni**. Vzemimo, da je $\delta u_L = 0$. Tedaj ostane $\int_0^L dN_x/dx\, \delta u\, dx = 0$ in ker so δu poljubni, mora biti tudi $dN_x/dx = 0$ (glej primer 4.3). Ker je δu_L poljuben, lahko vzamemo tudi, da je različen od nič, in dobimo $F = N_{xL}$. Iz enačbe (4.71) sledi

$$\boxed{\begin{array}{rr} 0 \le x \le L: & \dfrac{dN_x}{dx} = 0, \\ x = L: & N_{xL} = F. \end{array}}$$

Prva enačba predstavlja ravnotežni pogoj vzdolž palice (območje $\mathscr{V}$), druga pa ravnotežni pogoj na robu palice, to je robni pogoj (območje $\mathscr{S}_p$). Enačbi sta izraženi z notranjo silo N_x.

Če želimo z izrekom o virtualnih pomikih izpeljati ravnotežno enačbo in statične robne pogoje izražene s pomiki, moramo upoštevati tudi enačbe snovi (zveze med napetostmi in deformacijami) ter kinematične pogoje za resnične pomike.

Vzemimo, da je zveza med napetostmi in deformacijami linearna (E je konstanta)

$$\sigma_{xx} = E\, \varepsilon_{xx}. \tag{4.72}$$

Kinematični pogoj za resnične pomike smo podali z enačbo (4.67). Izrek o virtualnih pomikih (4.69) zapišimo ob upoštevanju zveze med napetostmi in deformacijami (4.72) in kinematičnega pogoja (4.67)

$$F\,\delta u_L = \int_0^L \left\{ \int_{\mathscr{A}_x} E\,\frac{du(x)}{dx}\,\frac{d[\delta u(x)]}{dx}\,dA_x \right\} dx = \int_0^L E\,A_x\,\frac{du}{dx}\,\frac{d(\delta u)}{dx}\,dx.$$

Zadnjo enačbo integriramo po delih (enačba (4.70))

$$a = E\,A_x\,\frac{du}{dx}, \quad db = \frac{d(\delta u)}{dx}\,dx \quad \rightarrow \quad b = \delta u, \quad da = \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)dx$$

in zapišemo

$$F\,\delta u_L = \left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\,\delta u\right)\Big|_0^L - \int_0^L \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)\delta u\,dx =$$

$$= \left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L}\delta u_L - \left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0}\delta u_0 - \int_0^L \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)\delta u\,dx,$$

oziroma ob upoštevanju $\delta u_0 = 0$

$$\left[F - \left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=L}\right]\delta u_L + \int_0^L \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\frac{du}{dx}\right)\delta u\,dx = 0.$$

Ker so virtualni pomiki poljubni, je zadnja enačba izpolnjena le, če je (glej primer 4.3)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0 \le x \le L: & \dfrac{d}{dx}\left(E\,A_x\,\dfrac{du}{dx}\right) = 0, \\[2ex] x = L: & E\,A_x\,\dfrac{du}{dx} = F. \end{array}}$$

Ravnotežna enačba in robni pogoj sta sedaj izražena s pomikom u in njegovimi odvodi.

Primer 4.5 *Obravnavamo isti mehanski problem kot v primeru 4.4. Izpeljimo ravnotežne enačbe in pripadajoče robne pogoje, izražene s pomiki, če je zveza med napetostmi in deformacijami nelinearna (E je konstanta)*

$$\sigma_{xx} = E\,\sqrt{\varepsilon_{xx}}\,!$$

Zapišemo izrek o virtualnih pomikih

$$F\,\delta u_L = \int\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,dV = \int\limits_0^L \Big[\int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,dA_x\Big]dx = \int\limits_0^L \Big(\int\limits_{\mathscr{A}_x} E\,\sqrt{\varepsilon_{xx}}\,\delta\varepsilon_{xx}\,dA_x\Big)dx =$$

$$= \int\limits_0^L \Big[\int\limits_{\mathscr{A}_x} E\,\sqrt{\frac{du}{dx}}\frac{d(\delta u)}{dx}\,dA_x\Big]dx = \int\limits_0^L \left[E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\frac{d(\delta u)}{dx}\right]dx.$$

Zadnjo enačbo integriramo po delih (enačba (4.70))

$$a = E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}, \quad db = \frac{d(\delta u)}{dx}\,dx \quad \rightarrow \quad b = \delta u, \quad da = \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)dx$$

in dobimo

$$F\,\delta u_L = \left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\,\delta u\right)\Big|_0^L - \int\limits_0^L \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)\delta u\,dx =$$

$$= \left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)\Big|_{x=L}\delta u_L - \left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)\Big|_{x=0}\delta u_0 - \int\limits_0^L \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)\delta u\,dx,$$

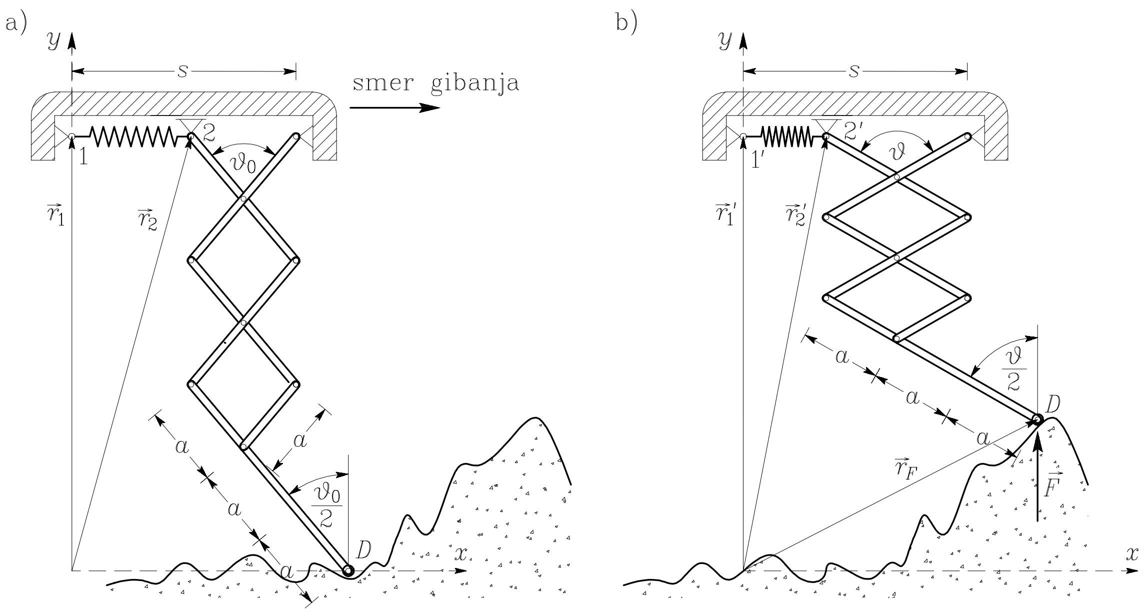
oziroma ob upoštevanju robnih pogojev za virtualne pomike $\delta u_0 = 0$

$$\left[F - \left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)\Big|_{x=L}\right]\delta u_L + \int\limits_0^L \frac{d}{dx}\left(E\,A_x\sqrt{\frac{du}{dx}}\right)\delta u\,dx = 0.$$

Ker so virtualni pomiki poljubni, je zadnja enačba izpolnjena le, če je (glej primer 4.3)

$$\boxed{\begin{array}{ll} 0 \le x \le L: & \dfrac{d}{dx}\left(E\,A_x\sqrt{\dfrac{du}{dx}}\right) = 0, \\[2ex] x = L: & E\,A_x\sqrt{\dfrac{du}{dx}} = F. \end{array}}$$

Primer 4.6 *Naprava za raziskovanje lunine površine na vesoljskem vozilu je sestavljena iz togih palic, linearno elastične linijske vzmeti ter detektorske glave D (slika4.12). Določimo togost linijske vzmeti k tako, da bo pri kotu $\vartheta = 120°$ velikost navpične kontaktne sile F enaka 20 N! Težo togih ročic in glave zanemarimo. Sila v vzmeti je enaka nič, če je kot $\vartheta = 80°$. Razdalja $a = 12$ cm, s pa je 33 cm. Nalogo rešimo z izrekom o virtualnih pomikih.*



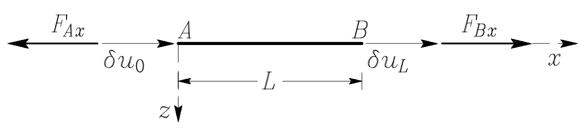
Slika 4.12: a) Lega naprave pri nestisnjeni vzmeti b) Lega naprave pri stisnjeni vzmeti

Za obravnavani primer zapišemo izrek o virtualnih pomikih z enačbo

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r}_F = \delta W_{n,v}. \tag{4.73}$$

Izračunajmo najprej delo $\delta W_{n,v}$ napetosti na virtualnih deformacijah v linearno elastični linijski vzmeti.

V ta namen obravnavajmo ravni linijski nosilec s konstantnim prečnim prerezom $\mathscr{A}_x$ in dolžino L, ki je v krajišču A obtežen s silo F_{Ax}, v krajišču B pa s silo F_{Bx}! Sili F_{Ax} in F_{Bx} sta enako veliki in nasproti usmerjeni (slika4.13). Delo δW_n napetosti na virtualnih deformacijah izrazimo z notranjo silo N_x in z virtualnima pomikoma δu_0 in δu_L krajišč nosilca.



Slika 4.13: Nosilec je obtežen v krajiščih s silama F_{Ax} in F_{Bx}

V palici predpostavimo enoosno deformacijsko stanje

$$0 \leq x \leq L : \qquad \frac{du(x)}{dx} = \varepsilon_{xx}(x).$$

Kinematične pogoje za virtualne pomike zapišemo z enačbo

$$0 \leq x \leq L: \qquad \frac{d[\delta u(x)]}{dx} = \delta\varepsilon_{xx}(x).$$

Delo δW_n za obravnavani primer zapišemo takole:

$$\delta W_n = \int\limits_{\mathscr{V}} \sigma_{xx}\, \delta\varepsilon_{xx}\, dV = \int\limits_0^L \Bigg(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\, \delta\varepsilon_{xx}\, dA_x \Bigg) dx = \int\limits_0^L \Bigg\{ \int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\, \frac{d[\delta u(x)]}{dx}\, dA_x \Bigg\} dx =$$
$$= \int\limits_0^L \frac{d(\delta u)}{dx} \Bigg(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\, dA_x \Bigg) dx = \int\limits_0^L N_x\, \frac{d(\delta u)}{dx}\, dx = N_x \int\limits_0^L d(\delta u) = N_x\, (\delta u_L - \delta u_0).$$

Upoštevali smo, da se osna sila vzdolž nosilca ne spreminja: $N_x = \text{konst}$. Prikazani element lahko predstavlja **linijsko vzmet**, ki jo shematično narišemo na sliki 4.14.

Slika 4.14: Linijska vzmet

Če vpeljemo oznake

$$N_v \equiv N_x, \qquad \delta u_v \equiv \delta u_B - \delta u_A, \qquad \delta W_n \equiv \delta W_{n,v},$$

dobimo

$$\delta W_{n,v} = N_v\, \delta u_v. \tag{4.74}$$

Pri tem je N_v notranja sila v vzmeti zaradi dejanske obtežbe, δu_v pa virtualna sprememba dolžine vzmeti. Če je vzmet linearno elastična, lahko izrazimo notranjo silo N_v s togostnim koeficientom k_v in s spremembo dolžine vzmeti u_v

$$N_v = k_v\, u_v$$

in sledi

$$\delta W_{n,v} = k_v\, u_v\, \delta u_v. \tag{4.75}$$

Izrek o virtualnih pomikih (4.73) je sedaj

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r}_F = k_v\, u_v\, \delta u_v. \tag{4.76}$$

Določiti moramo še $\delta\vec{r}_F$

$$\vec{r}_F = x_F\, \vec{e}_x + y_F\, \vec{e}_y$$

kjer je

$$x_F = s + a\, \sin\frac{\vartheta}{2}, \quad y_F = 7\, a\, \cos\frac{\vartheta_0}{2} - 7\, a\, \cos\frac{\vartheta}{2} = 7\, a \left(\cos\frac{\vartheta_0}{2} - \cos\frac{\vartheta}{2} \right)$$

in sledi

$$\vec{r}_F = \left(s + a\,\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\vec{e}_x + 7\,a\left(\cos\frac{\vartheta_0}{2} - \cos\frac{\vartheta}{2}\right)\vec{e}_y.$$

Spremembo dolžine vzmeti $\vec{u}_v$ zapišemo z enačbo

$$\vec{u}_v = \vec{r}_2' - \vec{r}_2$$

Ker je

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1' = 7\,a\,\cos\frac{\vartheta_0}{2}\,\vec{e}_y, \quad \vec{r}_2 = \left(s - 2\,a\,\sin\frac{\vartheta_0}{2}\right)\vec{e}_x + 7\,a\,\cos\frac{\vartheta_0}{2}\,\vec{e}_y,$$
$$\vec{r}_2' = \left(s - 2\,a\,\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\vec{e}_x + 7\,a\,\cos\frac{\vartheta_0}{2}\,\vec{e}_y,$$

sledi

$$\vec{u}_v = 2\,a\left(\sin\frac{\vartheta_0}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2}\right)\vec{e}_x$$

oziroma

$$u_v = 2\,a\left(\sin\frac{\vartheta_0}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Pri zapisu $\delta\vec{r}_F$ upoštevamo, da ima obravnavani sistem eno prostostno stopnjo gibanja. Če za posplošeno koordinato izberemo kot ϑ, sledi

$$\delta\vec{r}_F = \frac{\partial\vec{r}_F}{\partial\vartheta}\delta\vartheta = \frac{a}{2}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\,\vec{e}_x + 7\,\sin\frac{\vartheta}{2}\,\vec{e}_y\right)\delta\vartheta.$$

Na enak način izračunamo δu_v

$$\delta u_v = \frac{\partial(\delta u_v)}{\partial\vartheta}\delta\vartheta = -a\,\cos\frac{\vartheta}{2}\,\delta\vartheta.$$

Ker je $\vec{F} = F\,\vec{e}_y$, zapišemo izrek o virtualnih pomikih (4.76) takole:

$$F\,\frac{a}{2}\,7\,\sin\frac{\vartheta}{2}\,\delta\vartheta = k_v\,2\,a\left(\sin\frac{\vartheta_0}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2}\right)\left(-a\,\cos\frac{\vartheta}{2}\,\delta\vartheta\right).$$

V zadnji enačbi izpostavimo $\delta\vartheta$

$$\left[7\,F\,\sin\frac{\vartheta}{2} + 4\,a\,k_v\,\cos\frac{\vartheta}{2}\left(\sin\frac{\vartheta_0}{2} - \sin\frac{\vartheta}{2}\right)\right]\frac{a}{2}\,\delta\vartheta = 0$$

in upoštevamo, da je $\delta\vartheta$ poljuben ter dobimo iskani izraz za togost vzmeti

$$k_v = -\frac{7\,F\,\sin\dfrac{\vartheta}{2}}{4\,a\,\cos\dfrac{\vartheta}{2}\left(\sin\dfrac{\vartheta_0}{2} - \sin\dfrac{\vartheta}{2}\right)}.$$

Vstavimo vrednosti $a = 12$ cm, $\vartheta_0 = 80°$, $\vartheta = 120°$ in $F = 20$ N ter dobimo

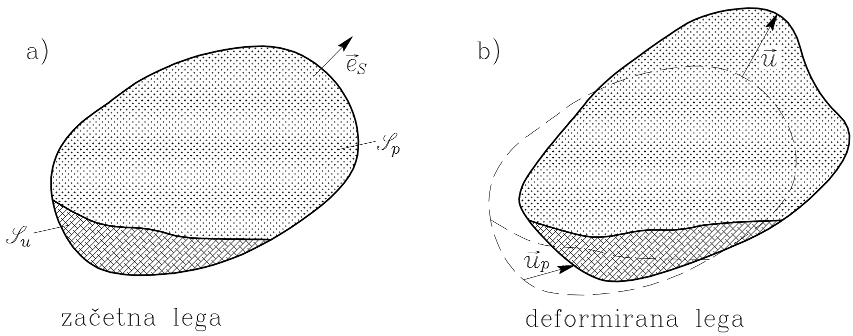
$$k_v = -\frac{7\cdot 20\,\sin 60°}{4\cdot 0.12\,\cos 60°\,(\sin 40° - \sin 60°)} = 2263\ \mathrm{N/m} = 22,63\ \mathrm{N/cm}.$$

4.2 Izrek o virtualnih silah

Mejno ploskev $\mathscr{S}$ obteženega in podprtega deformabilnega telesa razdelimo na del $\mathscr{S}_p$, kjer je predpisana površinska obtežba $\vec{p}_S$ in na del $\mathscr{S}_u$, kjer so predpisani pomiki $\vec{u}$ (slika4.15a)

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_p \cup \mathscr{S}_u.$$

Zaradi površinske obtežbe $\vec{p}_S$ in prostorninske obtežbe $\vec{v}$ se telo **deformira**. Pomik poljubne točke telesa označimo z $\vec{u}(x, y, z)$, predpisane pomike označimo z $\vec{u}_p$ (slika 4.15b).



Slika 4.15: Deformirano lego telesa določajo pomiki $\vec{u}$

Predpostavimo, da pomiki $\vec{u}(x, y, z)$ izpolnjujejo kinematične pogoje: [†]

$$\mathscr{V}: \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z \tag{4.77}$$

ter kinematične robne pogoje

$$\mathscr{S}_u: \quad \vec{u} = \vec{u}_p. \tag{4.78}$$

Sedaj si zamislimo, da obravnavano **deformirano** telo obtežimo s **poljubno virtualno površinsko** obtežbo $\delta\vec{p}_S$ in s **poljubno virtualno prostorninsko** obtežbo $\delta\vec{v}$, ki povzročita **virtualne napetosti** $\delta\vec{\sigma}_x$, $\delta\vec{\sigma}_y$ in $\delta\vec{\sigma}_z$ (slika 4.16).

Virtualno obtežbo definiramo takole:

Virtualna obtežba $\delta\vec{p}_S$ in $\delta\vec{v}$ ter virtualne napetosti $\delta\vec{\sigma}_x$, $\delta\vec{\sigma}_y$ in $\delta\vec{\sigma}_z$ morajo izpolnjevati ravnotežne pogoje

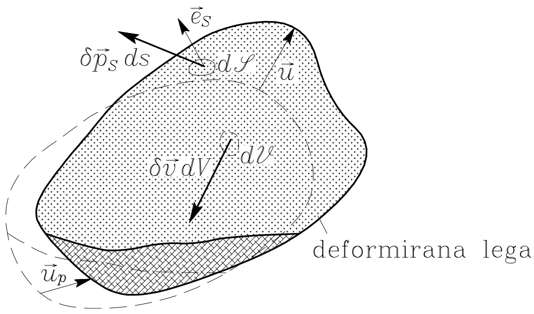
$$\mathscr{V}: \quad \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_z)}{\partial z} + \delta\vec{v} = \vec{0}, \tag{4.79}$$

$$\mathscr{V}: \quad \vec{e}_x \times \delta\vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \delta\vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \delta\vec{\sigma}_z = \vec{0}, \tag{4.80}$$

$$\mathscr{S}: \quad \delta\vec{p}_S = \delta\vec{\sigma}_x\, e_{Sx} + \delta\vec{\sigma}_y\, e_{Sy} + \delta\vec{\sigma}_z\, e_{Sz}. \tag{4.81}$$

Virtualna obtežba je **neodvisna** od obtežb $\vec{p}_S$ in $\vec{v}$, ki na telo delujeta.

[†] M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.



Slika 4.16: Deformirano telo obtežimo z virtualno obtežbo $\delta\vec{p}_S$ in $\delta\vec{v}$

Delo virtualnih obtežb $\delta\vec{p}_S$ in $\delta\vec{v}$ na dejanskih pomikih $\vec{u}$ imenujemo **dopolnilno virtualno delo zunanjih sil** in ga označimo z δW_z^*

$$\delta W_z^* = \int\limits_{\mathscr{S}} \vec{u}\cdot\delta\vec{p}_S\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\, dV. \tag{4.82}$$

Ker želimo z izrekom o virtualnih silah izpeljati kinematične enačbe, ki pripadajo ravnotežnim enačbam za **nedeformirano lego telesa**,† predpostavimo, da so pomiki zanemarljivi in integriramo po območjih $\mathscr{S}$ in $\mathscr{V}$ začetne lege. Enačbo (4.81) vstavimo v (4.82)

$$\begin{aligned}\delta W_z^* &= \int\limits_{\mathscr{S}} \vec{u}\cdot(\delta\vec{\sigma}_x\, e_{Sx} + \delta\vec{\sigma}_y\, e_{Sy} + \delta\vec{\sigma}_z\, e_{Sz})\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\, dV = \\ &= \int\limits_{\mathscr{S}} [\,(\delta\vec{\sigma}_x\cdot\vec{u}\,)\, e_{Sx} + (\delta\vec{\sigma}_y\cdot\vec{u}\,)\, e_{Sy} + (\delta\vec{\sigma}_z\cdot\vec{u}\,)\, e_{Sz}]\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\, dV.\end{aligned} \tag{4.83}$$

Integral po sklenjeni ploskvi $\mathscr{S}$ pretvorimo z Gaussovim integralnim izrekom (enačba (4.9)) v integral po prostornini $\mathscr{V}$

$$\begin{aligned}\delta W_z^* &= \int\limits_{\mathscr{V}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\delta\vec{\sigma}_x\cdot\vec{u}\,) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta\vec{\sigma}_y\cdot\vec{u}\,) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta\vec{\sigma}_z\cdot\vec{u}\,)\right] dV + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\, dV = \\ &= \int\limits_{\mathscr{V}} \left[\frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_z)}{\partial z} + \delta\vec{v}\right]\cdot\vec{u}\, dV + \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\delta\vec{\sigma}_x\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x} + \delta\vec{\sigma}_y\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial y} + \delta\vec{\sigma}_z\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\right) dV.\end{aligned} \tag{4.84}$$

Če upoštevamo ravnotežni pogoj (4.79), sledi, da je prvi integral na desni strani enačbe (4.84) enak nič.

† M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1998.

Ko upoštevamo še enačbo (4.77) in pravilo za mešani produkt treh vektorjev (enačba (4.14)), dobimo

$$\delta W_z^* = \int\limits_{\mathscr{V}} [\,\delta\vec{\sigma}_x \cdot (\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x) + \delta\vec{\sigma}_y \cdot (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y) + \delta\vec{\sigma}_z \cdot (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z)]\, dV =$$
$$= \int\limits_{\mathscr{V}} (\delta\vec{\sigma}_x \cdot \vec{\varepsilon}_x + \delta\vec{\sigma}_y \cdot \vec{\varepsilon}_y + \delta\vec{\sigma}_z \cdot \vec{\varepsilon}_z) dV + \int\limits_{\mathscr{V}} (\,(\vec{e}_x \times \delta\vec{\sigma}_x + \vec{e}_y \times \delta\vec{\sigma}_y + \vec{e}_z \times \delta\vec{\sigma}_z) \cdot \vec{\omega}\,)\, dV. \tag{4.85}$$

Izraz v okroglem oklepaju v zadnjem integralu je zaradi momentnih ravnotežnih pogojev (4.80) enak nič. Zato je

$$\delta W_z^* = \int\limits_{\mathscr{V}} (\delta\vec{\sigma}_x \cdot \vec{\varepsilon}_x + \delta\vec{\sigma}_y \cdot \vec{\varepsilon}_y + \delta\vec{\sigma}_z \cdot \vec{\varepsilon}_z)\, dV. \tag{4.86}$$

Izraz na desni strani enačbe (4.86) predstavlja delo virtualnih napetosti na dejanskih deformacijah $\vec{\varepsilon}_x$, $\vec{\varepsilon}_y$ in $\vec{\varepsilon}_z$. Označimo ga z δW_n^*, imenujemo pa ga tudi **dopolnilno virtualno delo notranjih sil**:

$$\delta W_n^* = \int\limits_{\mathscr{V}} (\delta\vec{\sigma}_x \cdot \vec{\varepsilon}_x + \delta\vec{\sigma}_y \cdot \vec{\varepsilon}_y + \delta\vec{\sigma}_z \cdot \vec{\varepsilon}_z)\, dV. \tag{4.87}$$

Z upoštevanjem definicije δW_z^* (4.82) lahko enačbo (4.86) zapišemo takole:

$$\boxed{\int\limits_{\mathscr{S}} \vec{u} \cdot \delta\vec{p}_S\, dS + \int\limits_{\mathscr{V}} \vec{u} \cdot \delta\vec{v}\, dV = \int\limits_{\mathscr{V}} (\delta\vec{\sigma}_x \cdot \vec{\varepsilon}_x + \delta\vec{\sigma}_y \cdot \vec{\varepsilon}_y + \delta\vec{\sigma}_z \cdot \vec{\varepsilon}_z)\, dV.} \tag{4.88}$$

Enačbo (4.88) zapišemo tudi v obliki

$$\delta W_z^* = \delta W_n^*. \tag{4.89}$$

Enačba (4.88) oziroma (4.89) predstavlja **izrek o virtualnih silah** oziroma izrek o dopolnilnem virtualnem delu. Z besedami ga izrazimo takole:

Če so izpolnjeni kinematični pogoji, je dopolnilno virtualno delo zunanjih sil δW_z^*, ki ga opravijo **virtualne sile** $\delta\vec{p}_S$ in $\delta\vec{v}$ na dejanskih pomikih enako dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil δW_n^*, ki ga opravijo virtualne napetosti na dejanskih deformacijah.

Velja pa tudi obratno: če je dopolnilno virtualno delo zunanjih sil pri virtualni obtežbi enako dopolnilnemu virtualnemu delu notranjih sil, so **izpolnjeni kinematični pogoji**. Dokažimo!

Desno stran enačbe (4.88) razširimo tako, da enačbo (4.79) skalarno množimo s pomikom $\vec{u}$, enačbo (4.80) pa z zasukom $\vec{\omega}$ ter tako dobljena izraza integriramo po območju $\mathscr{V}$. Ker sta ravnotežna pogoja izpolnjena, je velikost prištetih izrazov enaka nič in enačbe (4.88) ne spremenimo

$$\int_{\mathscr{S}} \vec{u}\cdot\delta\vec{p}_S\,dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\,dV = \int_{\mathscr{V}} (\vec{\varepsilon}_x\cdot\delta\vec{\sigma}_x + \vec{\varepsilon}_y\cdot\delta\vec{\sigma}_y + \vec{\varepsilon}_z\cdot\delta\vec{\sigma}_z)\,dV +$$
$$+ \int_{\mathscr{V}} \left[\frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\vec{\sigma}_z)}{\partial z} + \delta\vec{v}\right]\cdot\vec{u}\,dV + \int_{\mathscr{V}} (\,(\vec{e}_x\times\delta\vec{\sigma}_x + \vec{e}_y\times\delta\vec{\sigma}_y + \vec{e}_z\times\delta\vec{\sigma}_z)\cdot\vec{\omega}\,)\,dV. \tag{4.90}$$

V enačbi (4.90) upoštevamo pravilo za mešani produkt treh vektorjev (4.14) in pravilo za odvajanje produkta dveh funkcij

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{S}} \vec{u}\cdot\delta\vec{p}_S\,dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\,dV = \\
&= \int_{\mathscr{V}} [\,(\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega}\times\vec{e}_x)\cdot\delta\vec{\sigma}_x + (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega}\times\vec{e}_y)\cdot\delta\vec{\sigma}_y + (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega}\times\vec{e}_z)\cdot\delta\vec{\sigma}_z]\,dV + \\
&+ \int_{\mathscr{V}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_z)\right] dV - \\
&- \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\cdot\delta\vec{\sigma}_x + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\cdot\delta\vec{\sigma}_y + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\cdot\delta\vec{\sigma}_z\right) dV + \int_{\mathscr{V}} \vec{u}\cdot\delta\vec{v}\,dV.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Drugi integral na desni strani (4.91) spremenimo z upoštevanjem Gaussovega integralnega izreka (4.9)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{S}} \vec{u}\cdot\delta\vec{p}_S\,dS = &\int_{\mathscr{V}} (\,(\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega}\times\vec{e}_x)\cdot\delta\vec{\sigma}_x + (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega}\times\vec{e}_y)\cdot\delta\vec{\sigma}_y + (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega}\times\vec{e}_z)\cdot\delta\vec{\sigma}_z)\,dV + \\
&+ \int_{\mathscr{S}} (\,(\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_x)\,e_{Sx} + (\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_y)\,e_{Sy} + (\vec{u}\cdot\delta\vec{\sigma}_z)\,e_{Sz})\,dS - \\
&- \int_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\cdot\delta\vec{\sigma}_x + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\cdot\delta\vec{\sigma}_y + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\cdot\delta\vec{\sigma}_z\right) dV
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Pri integriranju po mejni ploskvi $\mathscr{S}$ v enačbi (4.92) upoštevamo, da lahko mejno ploskev $\mathscr{S}$ razdelimo na del $\mathscr{S}_u$, kjer je predpisan pomik in na del $\mathscr{S}_p$, kjer je predpisana obtežba. Pri tem na levi, kjer je zapisano delu zunanjih sil, upoštevamo enačbo (4.78) in na območju $\mathscr{S}_u$ namesto $\vec{u}$ pišemo $\vec{u}_p$. Na desni strani enačbe (4.92) obravnavamo delo notranjih sil po telesu, kjer pomike označimo z $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{S}_u} \vec{u}_p \cdot \delta\vec{p}_S \, dS + \int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{u} \cdot \delta\vec{p}_S \, dS = \\
&= \int\limits_{\mathscr{V}} [\,(\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x) \cdot \delta\vec{\sigma}_x + (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y) \cdot \delta\vec{\sigma}_y + (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z) \cdot \delta\vec{\sigma}_z]\, dV + \\
&+ \int\limits_{\mathscr{S}_u} \vec{u} \cdot (\,\delta\vec{\sigma}_x \, e_{Sx} + \delta\vec{\sigma}_y \, e_{Sy} + \delta\vec{\sigma}_z \, e_{Sz})\, dS + \int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{u} \cdot (\,\delta\vec{\sigma}_x \, e_{Sx} + \delta\vec{\sigma}_y \, e_{Sy} + \delta\vec{\sigma}_z \, e_{Sz})\, dS - \\
&- \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \delta\vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \delta\vec{\sigma}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \delta\vec{\sigma}_z \right) dV.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Integrala po $\mathscr{S}_u$ in $\mathscr{S}_p$ na desni strani enačbe prenesemo na levo stran

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{S}_u} \vec{u}_p \cdot \delta\vec{p}_S \, dS - \int\limits_{\mathscr{S}_u} \vec{u} \cdot (\delta\vec{\sigma}_x \, e_{Sx} + \delta\vec{\sigma}_y \, e_{Sy} + \delta\vec{\sigma}_z \, e_{Sz})\, dS + \int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{u} \cdot \delta\vec{p}_S \, dS - \\
&- \int\limits_{\mathscr{S}_p} \vec{u} \cdot (\delta\vec{\sigma}_x \, e_{Sx} + \delta\vec{\sigma}_y \, e_{Sy} + \delta\vec{\sigma}_z \, e_{Sz})\, dS = \\
&= \int\limits_{\mathscr{V}} [\,(\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x) \cdot \delta\vec{\sigma}_x + (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y) \cdot \delta\vec{\sigma}_y + (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z) \cdot \delta\vec{\sigma}_z]\, dV - \\
&- \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \delta\vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \delta\vec{\sigma}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \delta\vec{\sigma}_z \right) dV.
\end{aligned}$$

in upoštevamo enačbo (4.81)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathscr{S}_u} (\vec{u}_p - \vec{u}) \cdot \delta\vec{p}_S \, dS + \int\limits_{\mathscr{S}_p} (\vec{u} - \vec{u}) \cdot \delta\vec{p}_S \, dS = \\
&= \int\limits_{\mathscr{V}} [\,(\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x) \cdot \delta\vec{\sigma}_x + (\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y) \cdot \delta\vec{\sigma}_y + (\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z) \cdot \delta\vec{\sigma}_z]\, dV - \\
&- \int\limits_{\mathscr{V}} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \cdot \delta\vec{\sigma}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \cdot \delta\vec{\sigma}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \cdot \delta\vec{\sigma}_z \right) dV.
\end{aligned}$$

Ker je drugi integral na levi strani zadnje enačbe enak nič, je delo virtualne obtežbe $\delta\vec{p}_S$ na območju $\mathscr{S}_p$

enako nič in dobimo:

$$\int_{\mathscr{S}_u} (\vec{u}_p - \vec{u}) \cdot \delta\vec{p}_S \, dS =$$
$$= \int_{\mathscr{V}} \left[\left(\vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x - \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) \cdot \delta\vec{\sigma}_x + \left(\vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y - \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right) \cdot \delta\vec{\sigma}_y + \left(\vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z - \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) \cdot \delta\vec{\sigma}_z \right] dV. \tag{4.94}$$

Ker je virtualna obtežba poljubna, mora veljati (glej primer 4.4)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathscr{V}: & \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{\varepsilon}_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x, \quad \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \vec{\varepsilon}_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y, \quad \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{\varepsilon}_z + \vec{\omega} \times \vec{e}_z, \\ \mathscr{S}_u: & \vec{u} = \vec{u}_p. \end{array}}$$

Tako smo dobili kinematične pogoje za področje $\mathscr{V}$ in za del mejne ploskve $\mathscr{S}_u$.

Če na telo učinkuje tudi n_F točkovnih virtualnih sil $\delta\vec{F}_i$ in n_M točkovnih virtualnih momentov $\delta\vec{M}_j$, dobi izraz za delo virtualnih obtežb na dejanskih pomikih naslednjo obliko

$$\delta W_z^* = \int_{\mathscr{S}} \vec{u} \cdot \delta\vec{p}_S \, dS + \int_{\mathscr{V}} \vec{u} \cdot \delta\vec{v} \, dV + \sum_{i=1}^{n_F} \vec{u}_i \cdot \delta\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n_M} \vec{\omega}_j \cdot \delta\vec{M}_j. \tag{4.95}$$

Z $\vec{u}_i$ označimo pomik prijemališča virtualne sile $\delta\vec{F}_i$, z $\vec{\omega}_j$ pa zasuk na mestu delovanja točkovnega virtualnega momenta $\delta\vec{M}_j$.

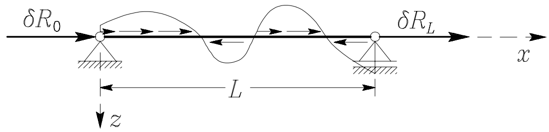
Ker pri izpeljavi izreka nismo upoštevali zveze med napetostmi in deformacijami, velja izrek o virtualnih silah za **poljubno zvezno snov**.

Izrek o virtualnih silah uporabljamo pri reševanju nalog, pri katerih izberemo statično dopustno virtualno obtežbo, določamo pa k izbrani virtualni obtežbi pripadajoče kinematične pogoje.

Z ustrezno izbiro virtualne obtežbe lahko z izrekom o virtualnih pomikih izračunamo pomik ali zasuk nekega delca statično določene konstrukcije ali pa izračunamo notranje sile ter pomik statično nedoločene linijske? konstrukcije.

4.2.1 Primeri

Primer 4.7 *Na ravni gredni nosilec konstantnega prečnega prereza postavimo statično dopustno virtualno obtežbo v smeri osi x. Virtualna obtežba učinkuje v vzdolžni smeri nosilca (smer x) in je različna od nič po celotnem nosilcu $\mathscr{S}_u = \mathscr{S}$ (slika 4.17)!*



Slika 4.17: Virtualna obtežba je različna od nič vzdolž osi in v krajnih prerezih

Virtualna obtežba mora izpolnjevati ravnotežne pogoje:

$$0 < x < L: \quad \frac{d(\delta N_x)}{dx} + \delta \mathscr{P}_x = 0, \tag{4.96}$$

$$x = 0: \quad \delta N_x(+0) + \delta R_0 = 0, \tag{4.97}$$

$$x = L: \quad -\delta N_x(L-0) + \delta R_L = 0. \tag{4.98}$$

Določimo pripadajoče kinematične pogoje z izrekom o virtualnih silah! Izrazimo kinematične pogoje vzdolž osi nosilca tudi z notranjo silo N_x! Pri tem upoštevajmo, da sta osi y in z glavni vztrajnostni osi skozi težišče prereza.

Delo virtualnih obtežb na dejanskih pomikih zapišimo po enačbi (4.95)

$$\delta W_z^* = \delta R_0\, u_0 + \delta R_L\, u_L + \int_0^L \delta \mathscr{P}_x(x)\, u(x)\, dx,$$

ker je u_0 pomik pri $x = 0$, u_L pomik pri $x = L$, $u(x)$ pa pomik v poljubni točki vzdolž osi nosilca. Z upoštevanjem ravnotežne enačbe vzdolž osi nosilca (enačba (4.96)), sledi

$$\delta W_z^* = \delta R_0\, u_0 + \delta R_L\, u_L - \int_0^L u\, \frac{d(\delta N_x)}{dx}\, dx.$$

Integriramo po delih (enačba (4.70)) in dobimo

$$\delta W_z^* = \delta R_0\, u_0 + \delta R_L\, u_L - (u\, \delta N_x)|_0^L + \int_0^L \frac{du}{dx}\, \delta N_x\, dx =$$

$$= \delta R_0\, u_0 + \delta R_L\, u_L - u(L)\, \delta N_x(L) + u(0)\, \delta N_x(0) + \int_0^L \frac{du}{dx}\, \delta N_x\, dx.$$

Upoštevamo še ravnotežna pogoja na obeh koncih nosilca (4.97) in (4.98) in zapišemo

$$\delta W_z^* = \delta R_0\, u_0 + \delta R_L\, u_L - u(L)\, \delta R_L - u(0)\, \delta R_0 + \int_0^L \frac{du}{dx}\, \delta N_x\, dx.$$

Delo virtualnih napetosti na dejanskih deformacijah je odvisno le od $\delta\sigma_{xx}$, saj so vse druge virtualne napetosti enake nič

$$\delta W_n^* = \int\limits_{\mathscr{V}} \varepsilon_{xx}\,\delta\sigma_{xx}\,dV = \int\limits_0^L \varepsilon_{xx}\Big(\int\limits_{\mathscr{A}_x} \delta\sigma_{xx}\,dA_x\Big)dx = \int\limits_0^L \varepsilon_{xx}\,\delta N_x\,dx.$$

Izrek o virtualnih silah zapišemo tako, da izenačimo delo virtualnih obtežb na dejanskih pomikih z delom virtualnih napetosti na dejanskih deformacijah $\delta W_z^* - \delta W_n^* = 0$

$$\delta R_0\,[u_0 - u(0)] + \delta R_L\,[u_L - u(L)] + \int\limits_0^L \Big(\frac{du}{dx} - \varepsilon_{xx}\Big)\delta N_x\,dx = 0.$$

Iz slike 4.17 lahko vidimo, da je pomik pri $x = 0$ predpisan $u_0 = u_{p0} = 0$, pomik pri $x = L$ pa je odvisen od zunanje obtežbe. Ker je virtualna obtežba poljubna, je zadnja enačba izpolnjena le, če velja (glej primer 4.4)

$$\begin{aligned} 0 < x < L: &\qquad \frac{du}{dx} = \varepsilon_{xx}, \\ x = 0: &\qquad u(0) = u_0 = u_{p0} = 0, \\ x = L: &\qquad u(L) = u_L. \end{aligned}$$

Dobili smo kinematični pogoj vzdolž osi nosilca in kinematična pogoja za krajna prereza nosilca. Kaj povedati o $\mathscr{S}_u$ in $\mathscr{S}_p$??

Če izberemo linearno zvezo med napetostjo σ_{xx} in deformacijo ε_{xx}

$$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx}, \qquad (E = \text{konstanta})$$

in upoštevamo še zvezo med vzdolžnimi normalnimi napetostmi in notranjimi silami grednega nosilca

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x},$$

zapišemo izraz δW_n^* takole:

$$\delta W_n^* = \int\limits_0^L \left[\int\limits_{\mathscr{A}_x} \frac{1}{E}\,\frac{N_x}{A_x}\,\delta\sigma_{xx}\,dA_x\right]dx = \int\limits_0^L \frac{N_x\,\delta N_x}{E A_x}\,dx.$$

Izrek o virtualnih silah $\delta W_z^* - \delta W_n^* = 0$ zapišemo v tem primeru z enačbo:

$$\delta R_0\,[u_0 - u(0)] + \delta R_L\,[u_L - u(L)] + \int\limits_0^L \Big(\frac{du}{dx} - \frac{N_x}{E\,A_x}\Big)\delta N_x\,dx = 0.$$