

Slika 5.233: Notranje sile na osnovni konstrukciji

Koeficiente a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 in b_2 določimo iz diagramov na sliki 5.233

$$a_{11} = \frac{a^3}{3 E I_y} = \frac{160^3}{3 \cdot 20000 \cdot 20000} = 0.003413,$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{a^3}{3 E I_y} = 0.003413,$$

$$a_{22} = \frac{2 a^3}{3 E I_y} + \frac{a^3}{G I_x} = \frac{2 \cdot 160^3}{3 \cdot 20000 \cdot 20000} + \frac{160^3}{8000 \cdot 40000} = 0.019627,$$

$$b_1 = 0,$$

$$b_2 = -\frac{M_3 a^2}{G I_x} = \frac{16000 \cdot 160^2}{8000 \cdot 40000} = 1.28.$$

Kinematična pogoja lahko zapišemo v matrični obliki

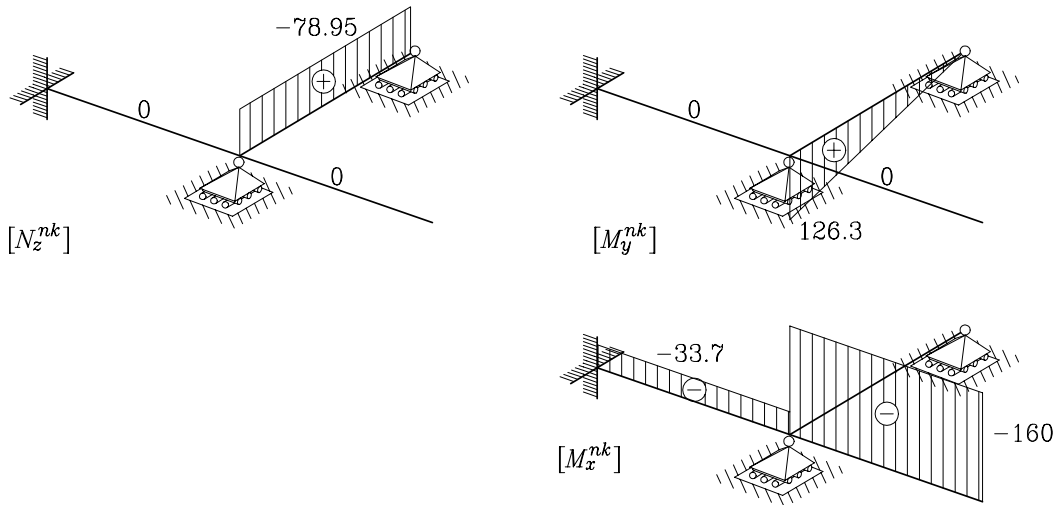
$$\begin{bmatrix} 0.003413 & 0.003413 \\ 0.003413 & 0.019627 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1.28 \end{bmatrix},$$



katerih rešitev je

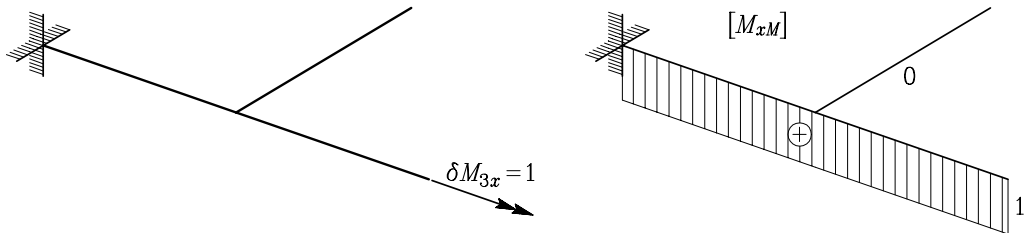
$$X_1 = -78.95 \text{ kN}, \quad X_2 = 78.95 \text{ kN}.$$

Diagrame notranjih sil na statično nedoločeni konstrukciji prikazujemo na sliki 5.234.



Slika 5.234: Notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji

Za račun zasuka ω_{3x} postavimo v točko 3 virtualni moment $\delta M_{3x} = 1$ in izračunamo notranje sile (slika 5.235).



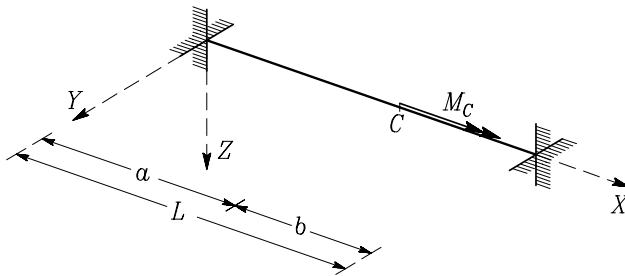
Slika 5.235: Notranje sile na statično določeni konstrukciji zaradi $\delta M_{3x} = 1$

Zasuk ω_{3x} izračunamo po enačbi

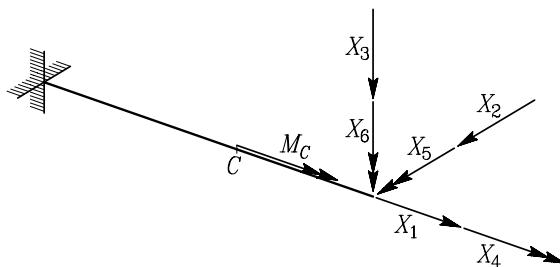
$$\begin{aligned} \omega_{3x} &= \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{xM} M_x^{nk}}{G I_x} dx = \frac{1}{8000 \cdot 40000} (-3368 \cdot 160 \cdot 1 - 16000 \cdot 160 \cdot 1) = \\ &= -0.00968 \text{ rad} = -0.555^\circ. \end{aligned}$$

Primer 5.54 Za nosilec na sliki 5.236 izračunajmo reakcije, notranje sile in zasuk ω_{Cx} v točki C. Prečni prerez nosilca je krožne oblike.



Slika 5.236: Nosilec je v točki C obtežen z momentom M_C

Stopnja statične nedoločenosti za nosilec na sliki 5.236 je $n = 6 + 6 - 6 \cdot 1 = 6$, torej je konstrukcija šestkrat statično nedoločena. Osnovna konstrukcija naj bo konzola, prikazana na sliki 5.237.



Slika 5.237: Osnovna konstrukcija

Takoj lahko opazimo, da je na osnovni konstrukciji edina od nič različna notranja količina M_x . Zato so vsi koeficienti b_i razen b_4 enaki nič. Podobno velja, da so na osnovni konstrukciji virtualne notranje količine δN_x , δN_y , δN_z , δM_y in δM_z zaradi virtualnega momenta δX_4 enake nič in obratno, da je virtualni torzijski moment δM_x zaradi virtualnih sil in momentov δX_1 , δX_2 , δX_3 , δX_5 in δX_6 enaki nič. Zaradi tega so vsi koeficienti a_{i4} , za $i \neq 4$ enaki nič. Matriko za izračun neznanih sil X_i lahko sedaj zapišemo takole:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da lahko ločeno obravnavamo izračun X_4 :

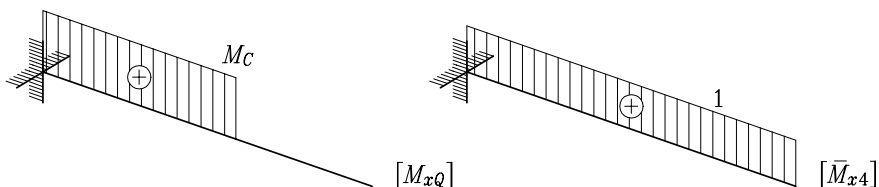
$$a_{44} X_4 = -b_4 \quad (5.63)$$

in ločeno izračun vseh ostalih X_i , kar skrajšano zapišemo takole:

$$[A']\{X'\} = \{0\}. \quad (5.64)$$



Rešitev homogenega sistema enačb (5.64) pri nesesingularni matriki $[A']$ je $\{X'\} = \{0\}$. Ker je matrika $[A']$ nesesingularna, so neznane sile in momenti enaki nič $X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$. Zato lahko račun torzijskega momenta X_4 izpeljemo po enačbi (5.63) tako, kot da je konstrukcija le enkrat in ne šestkrat statično nedoločena. Ker ima prečni prerez krožno obliko, se ne izboči, so vzdolžne normalne napetosti σ_{xx} enake nič. Zato lahko tak primer obravnavamo z enačbami enakomerne torzije. Na sliki 5.238 prikazujemo diagrama torzijskega momenta zaradi momentov M_C in $X_4 = 1$.



Slika 5.238: Notranje sile na osnovni konstrukciji

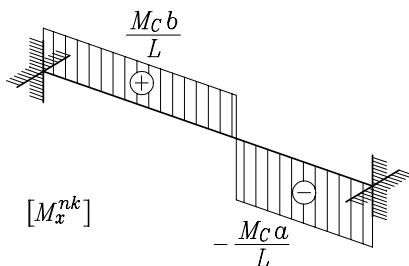
Koeficienta a_{44} in b_4 izračunamo po naslednjih enačbah:

$$a_{44} = \frac{L}{G I_x}, \quad b_4 = \frac{M_C a}{G I_x},$$

iz katerih lahko določimo neznani moment

$$X_4 = -\frac{M_C a}{L}.$$

Diagrame torzijskega momenta statično nedoločene konstrukcije prikazujemo na sliki 5.239.



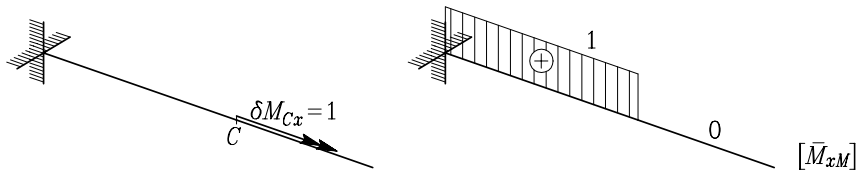
Slika 5.239: Torzijski moment statično nedoločene konstrukcije

Za račun zasuka ω_{Cx} postavimo v točko C virtualni moment $\delta M_{Cx} = 1$ in izračunamo torzijski moment (slika 5.240).

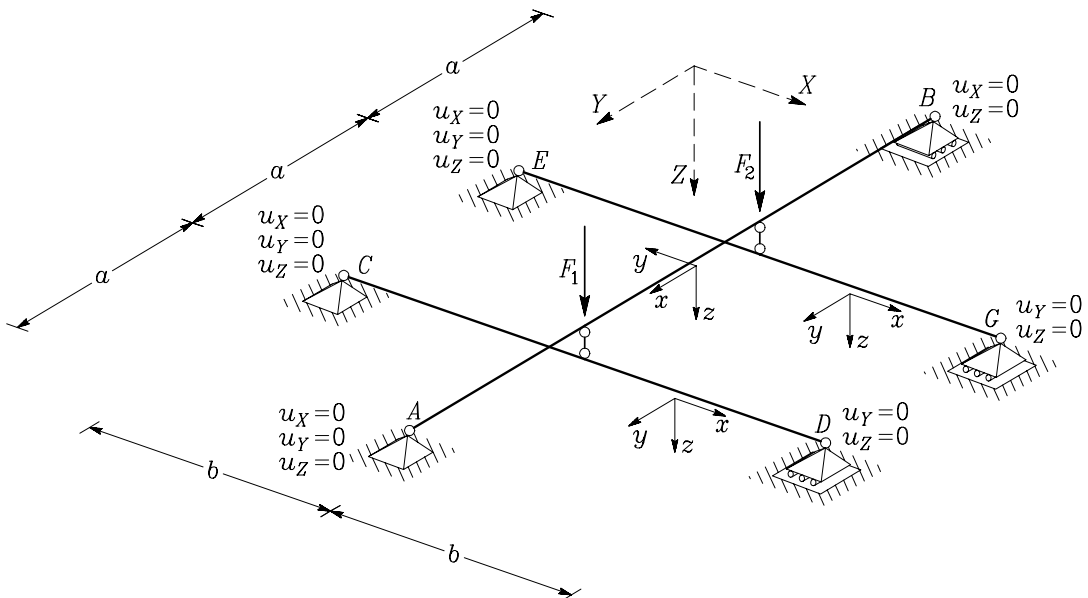
Zasuk ω_{Cx} izračunamo po enačbi

$$\omega_{Cx} = \int_0^L \frac{\bar{M}_{xM} M_x^{nk}}{G I_x} dx = \frac{1}{G I_x} \frac{M_C b a}{L}.$$



Slika 5.240: Torzijski moment statično določene konstrukcije zaradi $\delta M_{Cx} = 1$

Primer 5.55 Nosilec AB na sliki 5.241 je položen preko nosilcev CD in EG tako, da se med nosilcema prenaša le navpična sila. Na mestih križanja nosilcev delujeta na nosilec AB navpični sili $F_1 = 4$ kN in $F_2 = 8$ kN. Razdalji a in b sta 2.0 m in 2.5 m, razmerja med vztrajnostnimi momenti nosilcev je podano z zvezo $I_y^{CD} = I_y^{EG} = 2 I_y^{AB} = 2 I_y$. Določimo notranje sile v konstrukciji!

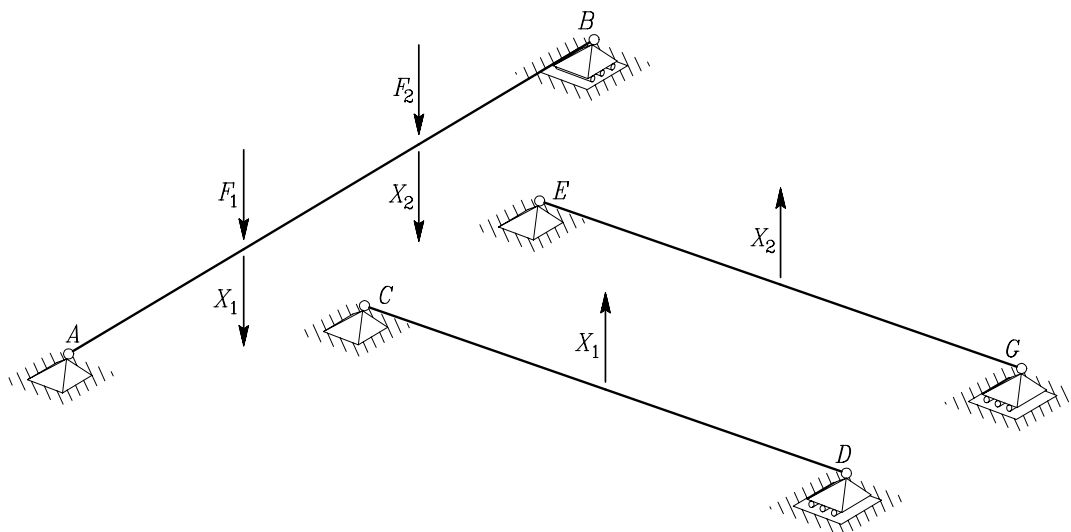


Slika 5.241: Nosilec AB je položen preko nosilcev CD in EG

Računsko število prostostnih stopenj je $\tilde{n}_{ps} = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 (2 - 1) = 1$. Podrobnejša analiza konstrukcije pokaže (glej: M. Stanek, G. Turk, Statika I), da je dejansko število prostostnih stopenj enako $n_{ps} = 3$. Vsi trije nosilci se glede na opisane podpore lahko vrtijo okoli svoje osi. Če v konstrukcijo dodamo še tri take vezi, ki preprečujejo to vrtenje, se dejansko število prostostnih stopenj zmanjša na nič: konstrukcija torej miruje. Računsko število prostostnih stopenj pa postane $\tilde{n}_{ps} = -2$, torej je konstrukcija dvakrat statično nedoločena ($n = -\tilde{n}_{ps} = 2$).

Osnovno konstrukcijo prikazujemo na sliki 5.242.





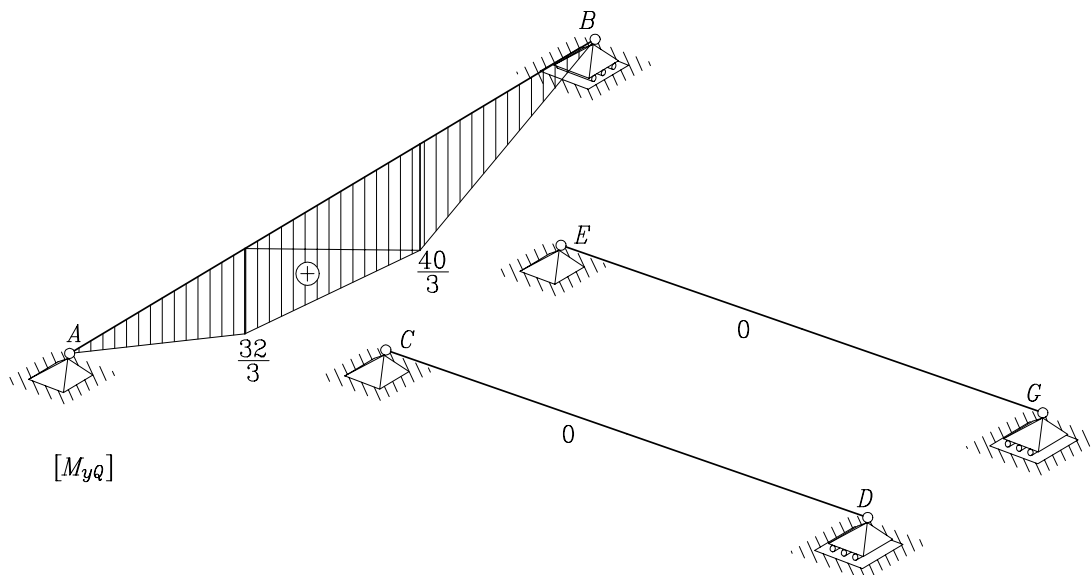
Slika 5.242: Osnovna konstrukcija

Sili X_1 in X_2 izračunamo iz kinematičnih pogojev:

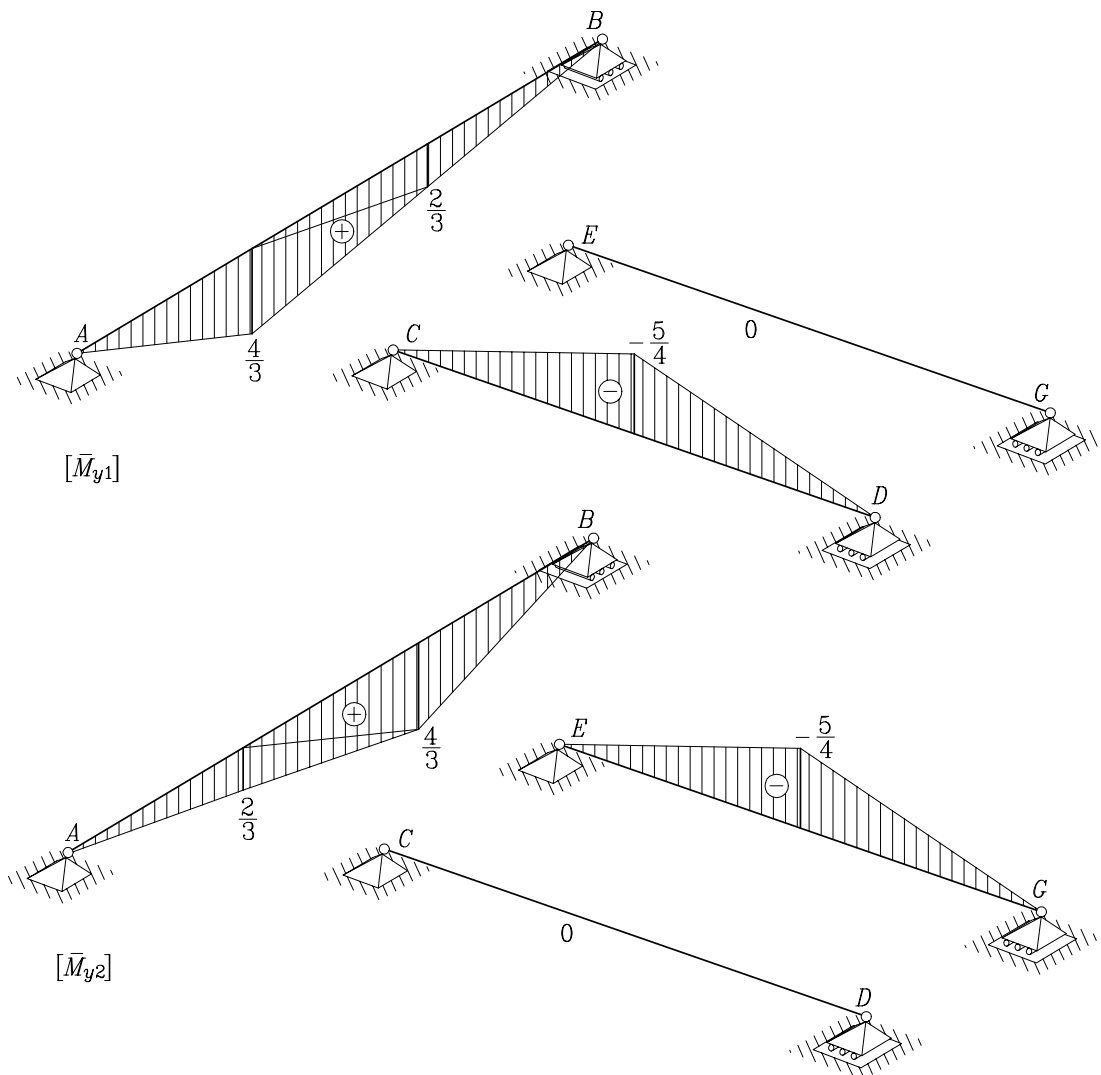
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Na sliki 5.243 prikazujemo diagrame upogibnega momenta M_{yQ} zaradi sil F_1 in F_2 .

Slika 5.243: Upogibni momenti M_{yQ} na osnovni konstrukciji

Na sliki 5.244 prikazujemo diagrame upogibnih momentov \bar{M}_{y1} in \bar{M}_{y2} na osnovni konstrukciji.



Slika 5.244: Upogibni momenti \bar{M}_{y1} in \bar{M}_{y2} na osnovni konstrukciji

Koeficiente sistema kinematičnih enačb določimo s slik 5.243 in 5.244:

$$a_{11} = \frac{1}{E I_y^{AB}} \left(\frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{E I_y^{CD}} \left(\frac{5}{4} \frac{5}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{5}{4} \cdot 2 \right) = \frac{1399}{288} \frac{1}{E I_y},$$

$$a_{12} = \frac{1}{E I_y^{AB}} \left(\frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{4}{3} \right) \right) + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \frac{2}{3} \right) = \frac{28}{9} \frac{1}{E I_y},$$

$$a_{22} = a_{11} = \frac{1399}{288} \frac{1}{E I_y},$$



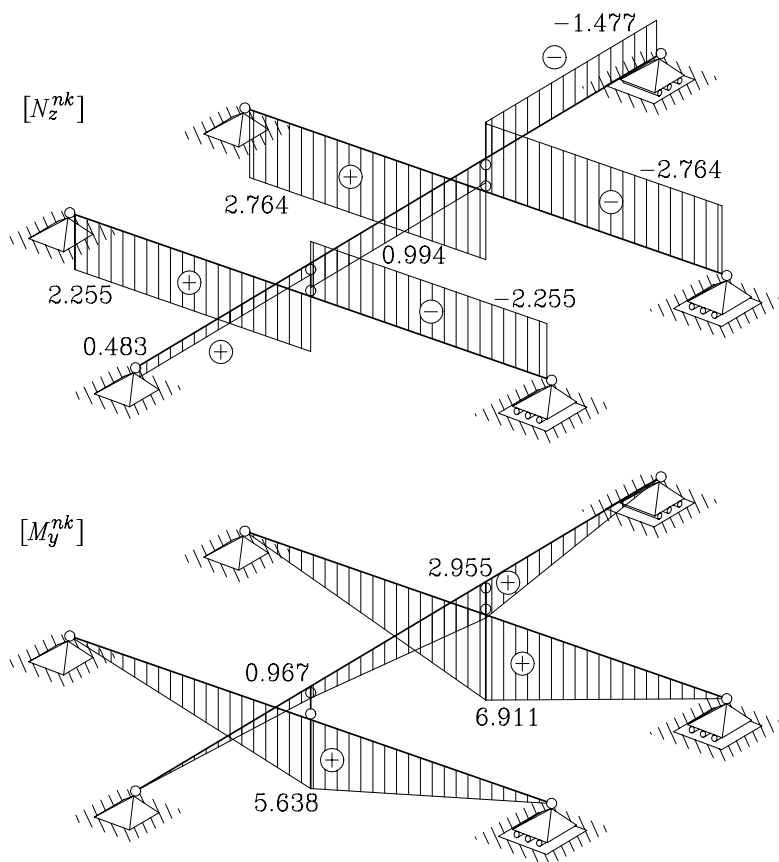
$$b_1 = \frac{1}{E I_y^{AB}} \left(\frac{32}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \frac{32}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} \right) + \frac{40}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 3} \right) + \frac{40}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} \right) =$$

$$= \frac{352}{9} \frac{1}{E I_y},$$

$$b_2 = \frac{1}{E I_y^{AB}} \left(\frac{32}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} + \frac{32}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} \right) + \frac{40}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} \right) + \frac{40}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \right) =$$

$$= \frac{368}{9} \frac{1}{E I_y}.$$

Rešitev sistema enačb je: $X_1 = -4.511$ kN in $X_2 = -5.529$ kN. Ko poznamo vrednosti sil X_1 in X_2 v obeh vezeh, lahko izračunamo vse notranje količine. Osa sila N_x , prečna sila N_y , torzijski moment M_x in upogibni moment M_z so povsod nič. Diagrama prečnih sil N_z in upogibnega momenta M_y prikazujemo na sliki 5.245.



Slika 5.245: Notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji

Primer 5.56 Izpeljimo izraze za koeficiente a_{ij} in b_i v kinematičnih enačbah za nosilec v ravnini x, z iz dveh različnih materialov E_1, α_{T1} in E_2, α_{T2} . Na enem delu prečnega prereza nastopijo deformacije



zaradi spremembe temperature in krčenja po naslednji enačbi

$$\varepsilon_{TK1} = \varepsilon_{K1} + \alpha_{T1} \Delta T_1,$$

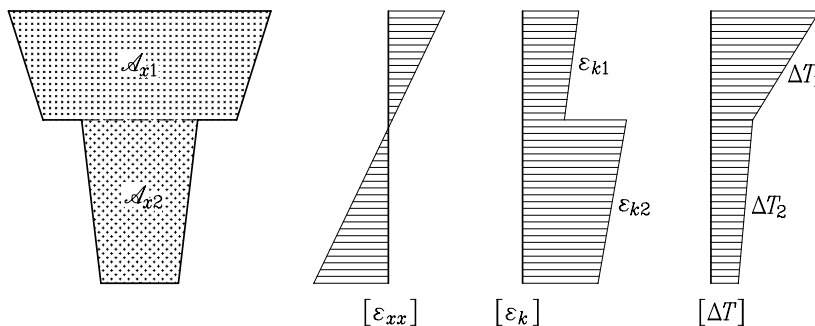
na drugem pa po enačbi

$$\varepsilon_{TK2} = \varepsilon_{K2} + \alpha_{T2} \Delta T_2.$$

Vzemimo, da sta deformacija zaradi krčenja ε_K in sprememba temperature ΔT v obeh delih prečnega prereza linearni funkciji koordinate z :

$$\varepsilon_{K1}(z) = a_1 + b_1 z, \quad \Delta T_1 = c_1 + d_1 z \quad \text{in} \quad \varepsilon_{K2}(z) = a_2 + b_2 z, \quad \Delta T_2 = c_2 + d_2 z.$$

Običajno velja, da je temperatura zvezna funkcija koordinate z kar pomeni, da na meji med dvema deloma prereza ne sme priti do skoka. Deformacija zaradi krčenja je lahko nezvezna (slika 5.246).



Slika 5.246: Prečni prerez nosilca je sestavljen iz dveh delov

Predpostavimo, da je potek deformacije ε_{xx} linearen (slika 5.246).

Upoštevamo predpostavke linijskega elementa, obteženega na upogib z osno silo, iz katerih sledi (enačba (1.66))

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} - E \varepsilon_{TK}. \quad (5.65)$$

Deformacijo ε_{xx} izrazimo s pomikoma u in w osi nosilca

$$\varepsilon_{xx} = u' - z w''. \quad (5.66)$$

Z u' in w'' sta označena odvoda du/dx in d^2w/dx^2 . Prvo izmed enačb (5.66) vstavimo v (5.65)

$$\sigma_{xx} = E [(u' - z w'') - \varepsilon_{TK}]. \quad (5.67)$$

Oсно silo

$$N_x = \int_{A_x} \sigma_{xx} dA_x = \int_{A_{x1}} \sigma_{xx} dA_x + \int_{A_{x2}} \sigma_{xx} dA_x \quad (5.68)$$



in upogibni moment

$$M_y = \int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_{xx} dA_x = \int_{\mathcal{A}_{x1}} z \sigma_{xx} dA_x + \int_{\mathcal{A}_{x2}} z \sigma_{xx} dA_x \quad (5.69)$$

izrazimo s pomiki, če upoštevamo enačbo (5.67). Tako dobimo

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{\mathcal{A}_{x1}} E_1 \{ (u' - z w'') - [a_1 + b_1 z + \alpha_{T1} (c_1 + d_1 z)] \} dA_x + \\ &+ \int_{\mathcal{A}_{x2}} E_2 \{ (u' - z w'') - [a_2 + b_2 z + \alpha_{T2} (c_2 + d_2 z)] \} dA_x \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\mathcal{A}_{x1}} z E_1 \{ (u' - z w'') - [a_1 + b_1 z + \alpha_{T1} (c_1 + d_1 z)] \} dA_x + \\ &+ \int_{\mathcal{A}_{x2}} z E_2 \{ (u' - z w'') - [a_2 + b_2 z + \alpha_{T2} (c_2 + d_2 z)] \} dA_x. \end{aligned}$$

Enačbi za N_x in M_y lahko zapišemo krajše

$$N_x = u' P_1 - w'' P_2 - G_1, \quad M_y = u' P_2 - w'' P_3 - G_2. \quad (5.70)$$

Če upoštevamo naslednje oznake

$$\begin{aligned} P_1 &= E_1 A_{x1} + E_2 A_{x2}, \\ P_2 &= E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2}, \\ P_3 &= E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2}, \\ G_1 &= E_1 (a_1 A_{x1} + b_1 S_{y1} + \alpha_{T1} (c_1 A_{x1} + d_1 S_{y1})) + \\ &+ E_2 (a_2 A_{x2} + b_2 S_{y2} + \alpha_{T2} (c_2 A_{x2} + d_2 S_{y2})), \\ G_2 &= E_1 (a_1 S_{y1} + b_1 I_{y1} + \alpha_{T1} (c_1 S_{y1} + d_1 I_{y1})) + \\ &+ E_2 (a_2 S_{y2} + b_2 I_{y2} + \alpha_{T2} (c_2 S_{y2} + d_2 I_{y2})). \end{aligned} \quad (5.71)$$

A_{x1} in A_{x2} sta plosčini, I_{y1} in I_{y2} pa vztrajnostna momenta obeh delov prečnega prereza:

$$\begin{aligned} A_{x1} &= \int_{\mathcal{A}_{x1}} dA_x, & S_{y1} &= \int_{\mathcal{A}_{x1}} z dA_x, & I_{y1} &= \int_{\mathcal{A}_{x1}} z^2 dA_x, \\ A_{x2} &= \int_{\mathcal{A}_{x2}} dA_x, & S_{y2} &= \int_{\mathcal{A}_{x2}} z dA_x, & I_{y2} &= \int_{\mathcal{A}_{x2}} z^2 dA_x. \end{aligned} \quad (5.72)$$



Enačbi (5.70) zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & -P_2 \\ P_2 & -P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ w'' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Iz enačbe (5.73) izrazimo pomika u' in w''

$$\begin{bmatrix} u' \\ w'' \end{bmatrix} = \frac{1}{P_2^2 - P_1 P_3} \begin{bmatrix} -P_3 & P_2 \\ -P_2 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x + G_1 \\ M_y + G_2 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

in ju vstavimo v enačbo (5.66)

$$\varepsilon_{xx} = K_1 + z K_2 + (K_3 + z K_4) N_x + (K_4 + z K_5) M_y. \quad (5.75)$$

Upoštevali smo naslednje oznake

$$K_1 = \frac{P_2 G_2 - P_3 G_1}{P_2^2 - P_1 P_3}, \quad K_2 = \frac{P_2 G_1 - P_1 G_2}{P_2^2 - P_1 P_3}, \quad K_3 = -\frac{P_3}{P_2^2 - P_1 P_3},$$

$$K_4 = \frac{P_2}{P_2^2 - P_1 P_3}, \quad K_5 = -\frac{P_1}{P_2^2 - P_1 P_3}, \quad (5.76)$$

Če vpeljemo oznaki D_1 in D_2

$$D_1 = K_1 + K_3 N_x + K_4 M_y, \quad D_2 = K_2 + K_4 N_x + K_5 M_y, \quad (5.77)$$

zapišemo deformacijo ε_{xx} takole:

$$\varepsilon_{xx} = D_1 + z D_2. \quad (5.78)$$

Pri zapisu dela virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za ravninski nosilec

$$\delta W_n^* = \int_V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} dV = \int_L \left(\int_{\mathcal{A}_{x1}} \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} dA_x + \int_{\mathcal{A}_{x2}} \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} dA_x \right) dx \quad (5.79)$$

potrebujemo izraza za virtualni napetosti $\delta \sigma_{xx,1}$ in $\delta \sigma_{xx,2}$. Virtualne napetosti določimo po enačbi $\delta \sigma_{xx} = E \delta \varepsilon_{xx}$ in enačbi (5.75)

$$\delta \varepsilon_{xx} = (K_3 + z K_4) \delta N_x + (K_4 + z K_5) \delta M_y,$$

pri čemer členov K_1 in K_2 , ki sta odvisna od deformacij ε_{TK} , ne upoštevamo (glej razdelek zz SNK-Metoda sil ??)

$$\delta \sigma_{xx,1} = E_1 [(K_3 + z K_4) \delta N_x + (K_4 + z K_5) \delta M_y],$$

$$\delta \sigma_{xx,2} = E_2 [(K_3 + z K_4) \delta N_x + (K_4 + z K_5) \delta M_y]. \quad (5.80)$$



Izraza (5.78) in (5.80) vstavimo v (5.79) in dobimo

$$\begin{aligned}
 \delta W_n^* &= \int_L \left(\int_{\mathcal{A}_{x1}} (D_1 + z D_2) E_1 ((K_3 + z K_4) \delta N_x + (K_4 + z K_5) \delta M_y) dA_x + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathcal{A}_{x2}} (D_1 + z D_2) E_2 ((K_3 + z K_4) \delta N_x + (K_4 + z K_5) \delta M_y) dA_x \right) dx = \\
 &= \int_L \left(E_1 ((D_1 K_3 A_{x1} + D_1 K_4 S_{y1} + D_2 K_3 S_{y1} + D_2 K_4 I_{y1}) \delta N_x + \right. \\
 &\quad + (D_1 K_4 A_{x1} + D_1 K_5 S_{y1} + D_2 K_4 S_{y1} + D_2 K_5 I_{y1}) \delta M_y) + \\
 &\quad + E_2 ((D_1 K_3 A_{x2} + D_1 K_4 S_{y2} + D_2 K_3 S_{y2} + D_2 K_4 I_{y2}) \delta N_x + \\
 &\quad + (D_1 K_4 A_{x2} + D_1 K_5 S_{y2} + D_2 K_4 S_{y2} + D_2 K_5 I_{y2}) \delta M_y) \Big) dx. \tag{5.81}
 \end{aligned}$$

Izkaže se, da lahko izraz (5.81) zapišemo v naslednji preprosti obliki (dokaz podajamo na koncu tega primera)

$$\begin{aligned}
 \delta W_n^* &= \int_L ((K_1 + K_3 N_x + K_4 M_y) \delta N_x + (K_2 + K_4 N_x + K_5 M_y) \delta M_y) dx = \\
 &= \int_L (D_1 \delta N_x + D_2 \delta M_y) dx. \tag{5.82}
 \end{aligned}$$

Oсно silo N_x in upogibni moment M_y razdelimo na del zaradi neznanih sil X_i ($i = 1, \dots, n$) in na del zaradi zunanje obtežbe Q (glej xx(5.46))

$$N_x = \sum_{j=1}^n \bar{N}_{xj} X_j + N_{xQ}, \quad M_y = \sum_{j=1}^n \bar{M}_{yj} X_j + M_{yQ}. \tag{5.83}$$

Podobno zapišemo osno silo δN_x in upogibni moment δM_y zaradi virtualne obtežbe (glej (5.47))

$$\delta N_x = \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} \delta X_i, \quad \delta M_y = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} \delta X_i. \tag{5.84}$$



Enačbe (5.83) in (5.84) vstavimo v enačbo (5.82) in dobimo

$$\begin{aligned} \delta W_n^* = \int_L \left(\left(K_1 + K_3 \left(\sum_{j=1}^n X_j \bar{N}_{xj} + N_{xQ} \right) + K_4 \left(\sum_{j=1}^n X_j \bar{M}_{yj} + M_{yQ} \right) \right) \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} \delta X_i + \right. \\ \left. + \left(K_2 + K_4 \left(\sum_{j=1}^n X_j \bar{N}_{xj} + N_{xQ} \right) + K_5 \left(\sum_{j=1}^n X_j \bar{M}_{yj} + M_{yQ} \right) \right) \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} \delta X_i \right) dx. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Če zapišemo še izraz za virtualno delo zunanjih sil

$$\delta W_z^* = \sum_{i=1}^n u_i \delta X_i,$$

dobi izrek o virtualnih silah obliko

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + b_i = u_i, \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (5.86)$$

Koeficienti a_{ij} in b_i so

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_L (K_3 \bar{N}_{xi} \bar{N}_{xj} + K_4 \bar{N}_{xi} \bar{M}_{yj} + K_4 \bar{N}_{xj} \bar{M}_{yi} + K_5 \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj}) dx, \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ b_i &= \int_L ((K_1 + K_3 N_{xQ} + K_4 M_{yQ}) \bar{N}_{xi} + (K_2 + K_4 N_{xQ} + K_5 M_{yQ}) \bar{M}_{yi}) dx. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Ko določamo notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji, lahko napetosti določimo tako, da enačbo (5.75) vstavimo v (5.65) in dobimo izraza za normalno napetost za del \mathcal{A}_{x1} in za del \mathcal{A}_{x2}

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,1}^z &= E_1 (K_1 + z K_2 + (K_3 + z K_4) N_x + (K_4 + z K_5) M_y) - E_1 \varepsilon_{TK1}, \\ \sigma_{xx,2} &= E_2 (K_1 + z K_2 + (K_3 + z K_4) N_x + (K_4 + z K_5) M_y) - E_2 \varepsilon_{TK2}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Dokaz enačbe (5.85)

Izraz (5.81) za δW_n^* zapišemo krajše

$$\delta W_n^* = \int_L ((\alpha + \beta N_x + \gamma M_y) \delta N_x + (\bar{\alpha} + \bar{\beta} N_x + \bar{\gamma} M_y) \delta M_y) dx,$$



kjer $\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ in $\bar{\gamma}$ zapišemo ob upoštevanju (5.71), (5.76) in (5.81)

$$\begin{aligned}\alpha &= E_1(K_1 K_3 A_{x1} + K_2 K_3 S_{y1} + K_1 K_4 S_{y1} + K_2 K_4 I_{y1}) + \\ &+ E_2(K_1 K_3 A_{x2} + K_2 K_3 S_{y2} + K_1 K_4 S_{y2} + K_2 K_4 I_{y2}) = \\ &= E_1 \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x1} & S_{y1} \\ S_{y1} & I_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x2} & S_{y2} \\ S_{y2} & I_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= E_1(K_3 K_3 A_{x1} + K_3 K_4 S_{y1} + K_3 K_4 S_{y1} + K_4 K_4 I_{y1}) + \\ &+ E_2(K_3 K_3 A_{x2} + K_3 K_4 S_{y2} + K_3 K_4 S_{y2} + K_4 K_4 I_{y2}) = \\ &= E_1 \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x1} & S_{y1} \\ S_{y1} & I_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x2} & S_{y2} \\ S_{y2} & I_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= E_1(K_3 K_4 A_{x1} + K_3 K_5 S_{y1} + K_4 K_4 S_{y1} + K_4 K_5 I_{y1}) + \\ &+ E_2(K_3 K_4 A_{x2} + K_3 K_5 S_{y2} + K_4 K_4 S_{y2} + K_4 K_5 I_{y2}) = \\ &= E_1 \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x1} & S_{y1} \\ S_{y1} & I_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x2} & S_{y2} \\ S_{y2} & I_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= E_1(K_1 K_4 A_{x1} + K_2 K_4 S_{y1} + K_1 K_5 S_{y1} + K_2 K_5 I_{y1}) + \\ &+ E_2(K_1 K_4 A_{x2} + K_2 K_4 S_{y2} + K_1 K_5 S_{y2} + K_2 K_5 I_{y2}) = \\ &= E_1 \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x1} & S_{y1} \\ S_{y1} & I_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x2} & S_{y2} \\ S_{y2} & I_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\beta} &= E_1(K_3 K_4 A_{x1} + K_4 K_4 S_{y1} + K_3 K_5 S_{y1} + K_4 K_5 I_{y1}) + \\ &+ E_2(K_3 K_4 A_{x2} + K_4 K_4 S_{y2} + K_3 K_5 S_{y2} + K_4 K_5 I_{y2}) = \\ &= E_1 \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x1} & S_{y1} \\ S_{y1} & I_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x2} & S_{y2} \\ S_{y2} & I_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \gamma,\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\bar{\gamma} &= E_1(K_4 K_4 A_{x1} + K_4 K_5 S_{y1} + K_4 K_5 S_{y1} + K_5 K_5 I_{y1}) + \\
&+ E_2(K_4 K_4 A_{x2} + K_4 K_5 S_{y2} + K_4 K_5 S_{y2} + K_5 K_5 I_{y2}) = \\
&= E_1 \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x1} & S_{y1} \\ S_{y1} & I_{y1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{x2} & S_{y2} \\ S_{y2} & I_{y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ob upoštevanju (5.76) lahko preprosto preverimo, da velja

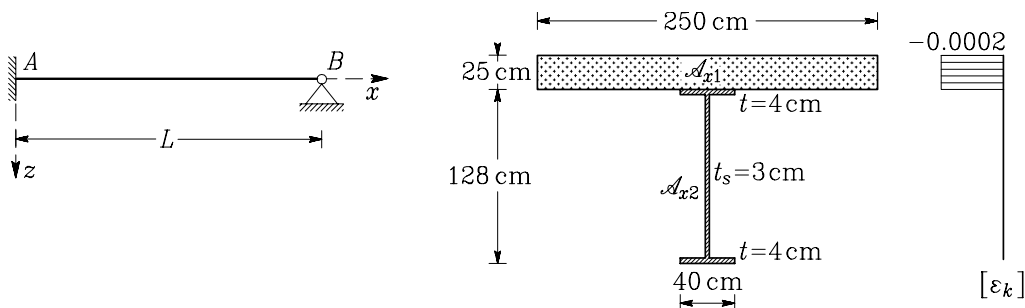
$$\begin{bmatrix} K_3 \\ K_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} K_4 \\ K_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T.$$

Od tod sledijo preproste zveze za parametre α , β , γ , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ in $\bar{\gamma}$:

$$\alpha = K_1, \quad \beta = K_3, \quad \gamma = K_4, \quad \bar{\alpha} = K_2, \quad \bar{\beta} = K_4, \quad \bar{\gamma} = K_5.$$

S tem je enačba (5.85) dokazana.

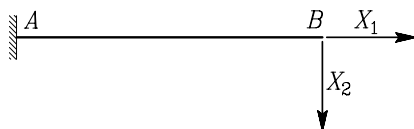
Primer 5.57 Ravninski nosilec dolžine $L = 30$ m iz dveh različnih materialov je v levem krajišču polno vpet, desna podpora pa je nepomična členkasta (slika 5.247). Na sliki so podane tudi dimenzije prečnega prereza. Zgornji del nosilca je betonski, spodnji pa jekleni nosilec prečnega prereza v obliki črke I. Vzemimo, da je krčenje betonskega dela prereza konstantno in enako $\varepsilon_{K1} = -0.0002$. Krčenja v jeklenem delu prereza ni; temperaturnih sprememb v prečnem prerezu ni. Elastični modul betona je $E_b = E_1 = 2500$ kN/cm², elastični modul jekla pa $E_j = E_2 = 21000$ kN/cm².



Slika 5.247: Dvakrat statično nedoločena konstrukcija in prečni prerez

Glede na podatke o krčenju in temperaturnih spremembah lahko zaključimo, da so parametri b_1 , c_1 , d_1 , a_2 , b_2 , c_2 in d_2 v enačbi (5.2.1) enaki nič, parameter a_1 pa je enak -0.0002 . Določimo potek napetosti v prečnem prerezu $x = L/2$! Notranje sile določimo z metodo sil.

Stopnja statične nedoločenosti je $n = 2$. Osnovno konstrukcijo prikazujemo na sliki 5.248.



Slika 5.248: Osnovna konstrukcija

Kinematična pogoja za račun sil X_1 in X_2 sta:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$

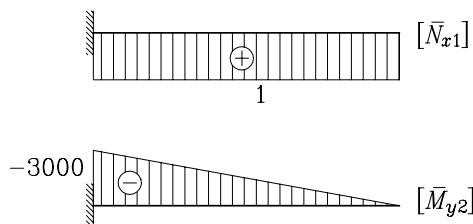
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Ker so notranje sile \bar{M}_{y1} , \bar{N}_{x2} , N_{xQ} in M_{yQ} enake nič, se izrazi za koeficiente a_{ij} in b_i poenostavijo:

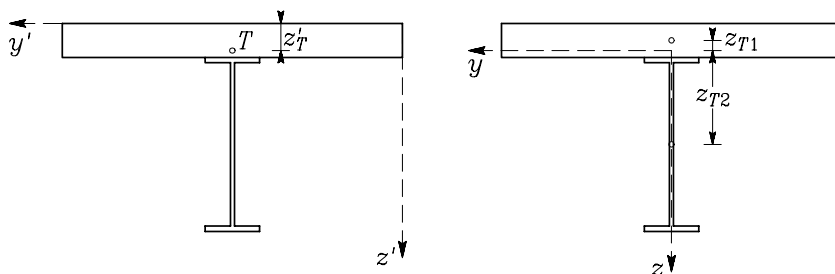
$$a_{11} = \int_L K_3 \bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1} dx, \quad a_{12} = \int_L K_4 \bar{N}_{x1} \bar{M}_{y2} dx, \quad a_{22} = \int_L K_5 \bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2} dx,$$

$$b_1 = \int_L K_1 \bar{N}_{x1} dx, \quad b_2 = \int_L K_2 \bar{M}_{y2} dx.$$

Notranje sile zaradi sil $\bar{X}_1 = 1$ in $\bar{X}_2 = 1$ prikazujemo na sliki 5.249.

Slika 5.249: Notranje sile zaradi sil $\bar{X}_1 = 1$ in $\bar{X}_2 = 1$

Potrebujemo koeficiente K_1 do K_5 (enačbe (5.76)) oziroma P_1 , P_2 , P_3 , G_1 in G_2 (5.71)). Za njihov račun potrebujemo geometrijske karakteristike prečnega prereza (enačbe (5.72), slika 5.250).



Slika 5.250: Prečni prerez



Ploščina prečnega prereza je

$$A_{x1} = 250 \cdot 25 = 6250 \text{ cm}^2, \quad A_{x2} = 2 \cdot 4 \cdot 40 + 3 \cdot 120 = 680 \text{ cm}^2, \quad A_x = A_{x1} + A_{x2} = 6930 \text{ cm}^2.$$

Koordinati težišča zgornjega in spodnjega dela prečnega prereza izrazimo takole (glej sliko 5.250):

$$z'_T = \frac{A_{x1} \cdot 12.5 + A_{x2} \cdot (25 + 64)}{A_x} = 20.0065 \text{ cm},$$

$$z_{T1} = 12.5 - z'_T = -7.50649 \text{ cm}, \quad z_{T2} = (25 + 64) - z'_T = 68.9935 \text{ cm}.$$

Statična momenta zgornjega in spodnjega dela prečnega prereza sta

$$S_{y1} = z_{T1} A_{x1} = -46\,915.6 \text{ cm}^3, \quad S_{y2} = z_{T2} A_{x2} = 46\,915.6 \text{ cm}^3.$$

Vztrajnostna momenta zgornjega in spodnjega dela prečnega prereza sta

$$I_{y1} = \frac{250 \cdot 25^3}{12} + A_{x1} z_{T1}^2 = 677\,692 \text{ cm}^4, \quad I_{y2} = \frac{40 \cdot 128^3}{12} - \frac{37 \cdot 120^3}{12} + A_{x2} z_{T2}^2 = 4\,899\,380 \text{ cm}^4.$$

Koeficiente P_1, P_2, P_3, G_1 in G_2 izračunamo po enačbah (5.71)

$$\begin{aligned} P_1 &= E_1 A_{x1} + E_2 A_{x2} = 2.9905 \cdot 10^7 \text{ kN}, \\ P_2 &= E_1 S_{y1} + E_2 S_{y2} = 8.67938 \cdot 10^8 \text{ kNcm}, \\ P_3 &= E_1 I_{y1} + E_2 I_{y2} = 1.04581 \cdot 10^{11} \text{ kNcm}^2, \\ G_1 &= E_1 a_1 A_{x1} = -3125 \text{ kN}, \\ G_2 &= E_1 a_1 S_{y1} = 23457.8 \text{ kNcm}. \end{aligned}$$

Za račun koeficientov K_1 do K_5 najprej izračunajmo produkt $P_2^2 - P_1 P_3$:

$$\begin{aligned} P_2^2 - P_1 P_3 &= -2.37418 \cdot 10^{18} \text{ (kNcm)}^2, \\ K_1 &= \frac{P_2 G_2 - P_3 G_1}{P_2^2 - P_1 P_3} = -1.4623 \cdot 10^{-4}, \\ K_2 &= \frac{P_2 G_1 - P_1 G_2}{P_2^2 - P_1 P_3} = 1.43789 \cdot 10^{-6} \text{ (cm)}^{-1}, \\ K_3 &= -\frac{P_3}{P_2^2 - P_1 P_3} = 4.40493 \cdot 10^{-8} \text{ (kN)}^{-1}, \\ K_4 &= \frac{P_2}{P_2^2 - P_1 P_3} = -3.65574 \cdot 10^{-10} \text{ (kNcm)}^{-1}, \\ K_5 &= -\frac{P_1}{P_2^2 - P_1 P_3} = 1.25959 \cdot 10^{-11} \text{ (kNcm}^2\text{)}^{-1}. \end{aligned}$$



Koeficienti a_{ij} in b_i so:

$$a_{11} = \int_L K_3 \bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1} dx = 4.40443 \cdot 10^{-8} \cdot 3000 \cdot 1 \cdot 1 = 0.000132148,$$

$$a_{12} = \int_L K_4 \bar{N}_{x1} \bar{M}_{y2} dx = -3.65574 \cdot 10^{-10} \cdot 3000 \cdot \left(-\frac{3000}{2}\right) \cdot 1 = 0.00164508 = a_{21},$$

$$a_{22} = \int_L K_5 \bar{M}_{y2} \bar{M}_{y2} dx = 1.25959 \cdot 10^{-11} \cdot 3000 \cdot \left(-\frac{3000}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3000) = 0.113363,$$

$$b_1 = \int_L K_1 \bar{N}_{x1} dx = -1.4623 \cdot 10^{-4} \cdot 3000 \cdot 1 = -0.438689,$$

$$b_2 = \int_L K_2 \bar{M}_{y2} dx = 1.43789 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3000}{2} \cdot (-3000) = -6.4705.$$

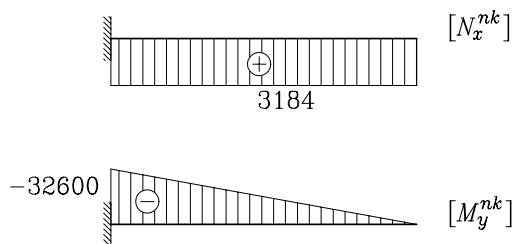
Enačbi za X_1 in X_2 zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 0.000132148 & 0.00164508 \\ 0.00164508 & 0.113363 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.438689 \\ -6.4705 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema enačb je

$$X_1 = 3184.4 \text{ kN}, \quad X_2 = 10.8669 \text{ kN}.$$

Diagrame notranjih sil na statično nedoločeni konstrukciji prikazujemo na sliki 5.251.



Slika 5.251: Notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji [kN,cm]

Račun napetosti pri $x = L/2$:

Upogibni moment na sredini nosilca je $M_y = -16300.3 \text{ kNcm}$, medtem ko je osna sila enaka vzdolž dolžine nosilca $N_x = 3184.4 \text{ kN}$. Vzdolžno normalno napetost σ_{xx} računamo po enačbah (5.88). Za prečni prerez $x = L/2$ za del \mathcal{A}_{x1} je

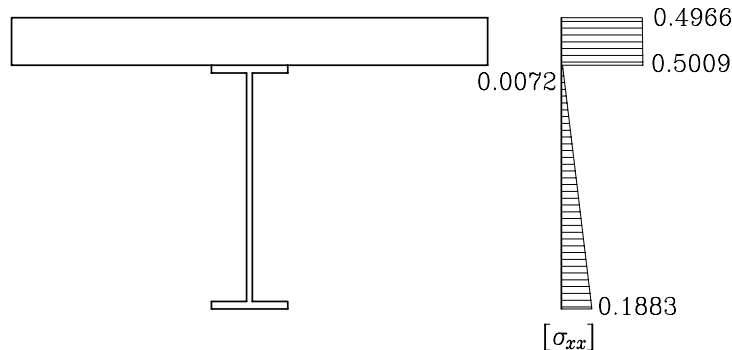
$$\sigma_{xx,1} = E_1 (K_1 + z K_2 + (K_3 + z K_4) N_x + (K_4 + z K_5) M_y) - E_1 \varepsilon_{TK1} = 0.5 + 0.000171 z,$$



za del \mathcal{A}_{x2} pa je

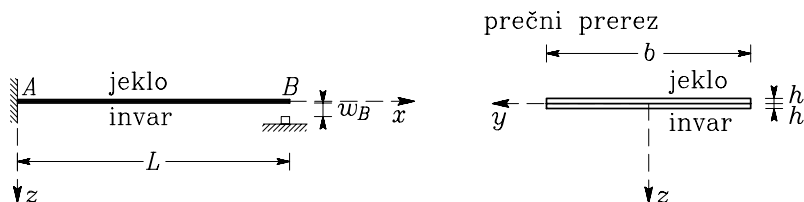
$$\sigma_{xx,2} = E_2 (K_1 + z K_2 + (K_3 + z K_4) N_x + (K_4 + z K_5) M_y] - E_2 \varepsilon_{TK2} = 0.001437 z.$$

Potek napetosti σ_{xx} v prečnem prerezu $x = L/2$ prikazujemo na sliki 5.252.



Slika 5.252: Potek normalnih napetosti v prečnem prerezu $x = L/2$ [MPa]

Primer 5.58 Temperaturno stikalo na sliki 5.253 sproži signal, če se sklene kontakt B. Določimo dolžino peresa L tako, da stikalo sproži signal, ko se zrak okolice stikala segreje za $\Delta T = 45^\circ\text{C}$! Dimenziji b in h prečnega prereza peresa sta $b = 1\text{ cm}$, $h = 0.025\text{ cm}$, razdalja $w_B = 0.2\text{ cm}$. Pero stikala je izdelano iz dveh posebnih zlitin: invar (zlitina železa 62% in nikla 36%) ter posebno jeklo (zlitina železa 63%, nikel 18%, krom 16% in mangan 2%). Invar ima posebno lastnost, da ima zelo majhen temperaturni razteznostni koeficient $\alpha_{Ti} = 1.3 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$, elastični modul invarja pa je $E_i = 15000\text{ kN/cm}^2$. Jeklo, uporabljeno v temperaturnem stikalu pa ima relativno velik temperaturni razteznostni koeficient $\alpha_{Tj} = 1.8 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, elastični modul pa je $E_j = 20000\text{ kN/cm}^2$.



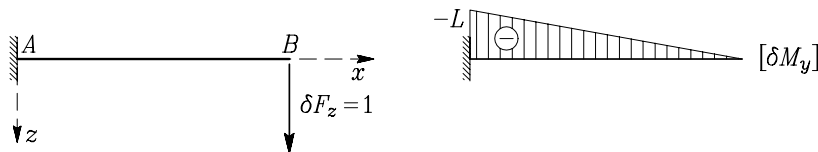
Slika 5.253: Temperaturno stikalo je izdelano iz jekla in invarja

To je statično določena naloga, ki jo tudi rešimo s pomočjo enačb, ki smo jih izpeljali za statično nedoločen nosilec sestavljen iz dveh materialov, na katerega deluje odsekoma linearna sprememba temperature. Nalogo rešimo z izrekom o virtualnih silah $\delta W_z^* = \delta W_n^*$. Izraz za δW_n^* smo zapisali z enačbo (5.85):

$$\delta W_n^* = \int_L [(K_1 + K_3 N_x + K_4 M_y) \delta N_x + (K_2 + K_4 N_x + K_5 M_y) \delta M_y] dx.$$



Ker želimo izraziti navpični pomik w_B prostega konca konzole, postavimo virtualno silo δF_z v točko B (slika 5.254).



Slika 5.254: Virtualno silo δF_z postavimo v točko B

Delo δW_z^* virtualne sile na resničnem pomiku w_B zapišemo z enačbo

$$\delta W_z^* = 1 \cdot w_B.$$

V izrazu za δW_n^* upoštevamo, da je zaradi virtualne sile δF_z od nič različen le $\delta M_y = -\delta F_z (L - x) = -\delta F_z (x - L)$ in da sta N_x in M_y zaradi zunanje obtežbe enaka nič. Tako po enačbi (5.87)?? dobimo

$$\delta W_n^* = \int_L K_2 \delta M_y dx = K_2 \int_L \delta M_y dx = K_2 (-L) \frac{L}{2} = -\frac{K_2 L^2}{2}.$$

Iz izreka o virtualnih silah $\delta W_z^* = \delta W_n^*$ tako sledi

$$w_B = -\frac{K_2 L^2}{2}. \quad (5.89)$$

Znotraj koeficienta K_2 nastopata porazdelitvi temperature $\Delta T_j = c_1 + d_1 z$ in $\Delta T_i = c_2 + d_2 z$. Ker je pero stikala zelo tanko, lahko predpostavimo, da se enakomerno segreje oziroma ohladi celotno pero. V primeru konstantne spremembe temperature po zgornjem in po spodnjem delu prečnega prereza sta d_1 in d_2 enaka nič, c_1 in c_2 pa sta enaka spremembi temperature ΔT okolice peresa. Izrazimo koeficienta K_1 in K_2 za obravnavani primer (enačba (5.76)):

$$K_1 = \frac{P_2 G_2 - P_3 G_1}{P_2^2 - P_1 P_3}, \quad K_2 = \frac{P_2 G_1 - P_1 G_2}{P_2^2 - P_1 P_3}.$$

Potrebujemo torej izraze za koeficiente P_1 , P_2 , P_3 , G_1 in G_2 (enačba (5.71))

$$\begin{aligned} P_1 &= E_j A_{xj} + E_i A_{xi}, \\ P_2 &= E_j S_{yj} + E_i S_{yi}, \\ P_3 &= E_j I_{yj} + E_i I_{yi}, \\ G_1 &= E_j \alpha_{Tj} c_1 A_{xj} + E_i \alpha_{Ti} c_2 A_{xi}, \\ G_2 &= E_j \alpha_{Tj} c_1 S_{yj} + E_i \alpha_{Ti} c_2 S_{yi}. \end{aligned} \quad (5.90)$$



Upoštevamo dimenzije za obravnavani primer in dobimo

$$\begin{aligned}
 A_{xj} &= A_{xi} = A_0 = b h = 0.025 \text{ cm}^2, \\
 -S_{yj} &= S_{yi} = S_0 = \frac{1}{2} b h^2 = 0.0003125 \text{ cm}^3, \\
 I_{yj} &= I_{yi} = I_0 = \frac{1}{3} b h^3 = 0.0000052083 \text{ cm}^4, \\
 P_1 &= E_j A_0 + E_i A_0 = A_0 (E_j + E_i) = 875 \text{ kN}, \\
 P_2 &= -E_j S_0 + E_i S_0 = S_0 (-E_j + E_i) = -1.5625 \text{ kNcm}, \\
 P_3 &= I_0 (E_j + E_i) = 0.182292 \text{ kNcm}^2, \\
 G_1 &= \Delta T A_0 (E_j \alpha_{Tj} + E_i \alpha_{Ti}) = 0.426937 \text{ kN}, \\
 G_2 &= \Delta T S_0 (-E_j \alpha_{Tj} + E_i \alpha_{Ti}) = -0.00478828 \text{ kNcm},
 \end{aligned}$$

Koeficienta K_1 in K_2 sta

$$K_1 = 0.0004479, \quad K_2 = -0.02243 \text{ (cm)}^{-1}.$$

Sedaj lahko iz izraza za pomik w_B (enačba (5.89)) izračunamo potrebno dolžino peresa L

$$L = \sqrt{-\frac{2w_b}{K_2}} = 4.22 \text{ cm}.$$

Določimo še diagram napetosti σ_{xx} po enačbi (5.88):

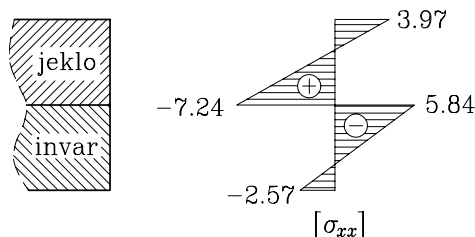
$$\sigma_{xx,j} = E_j (K_1 + z K_2) - E_j \alpha_{Tj} c_1, \quad \sigma_{xx,i} = E_i (K_1 + z K_2) - E_i \alpha_{Ti} c_c.$$

Normalna napetost σ_{xx} :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx,j}(z = -h) &= E_j (K_1 - h \cdot K_2) - E_j \alpha_{Tj} \Delta T = 3.97 \text{ kN/cm}^2, \\
 \sigma_{xx,j}(z = 0) &= E_j K_1 - E_j \alpha_{Tj} \Delta T = -7.24 \text{ kN/cm}^2, \\
 \sigma_{xx,i}(z = 0) &= E_i K_1 - E_i \alpha_{Ti} \Delta T = 5.84 \text{ kN/cm}^2, \\
 \sigma_{xx,i}(z = h) &= E_i (K_1 + h \cdot K_2) - E_i \alpha_{Ti} \Delta T = -2.57 \text{ kN/cm}^2.
 \end{aligned}$$

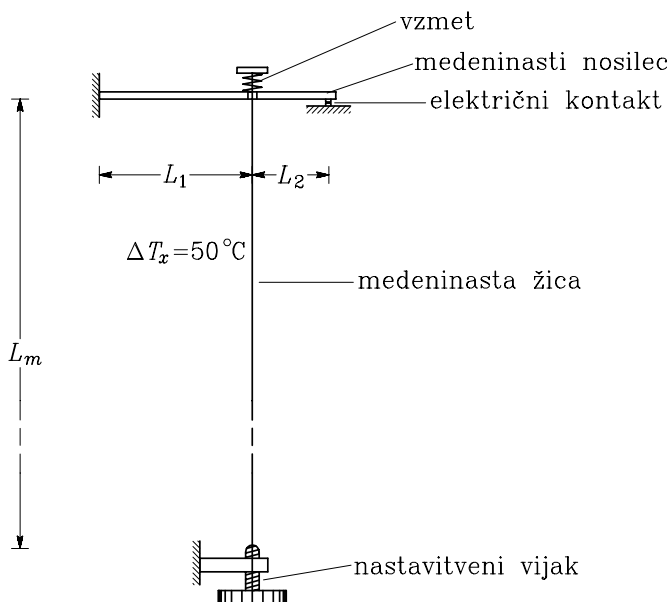
Na sliki 5.255 prikazujemo potek normalne napetosti σ_{xx} po prečnem prerezu peresa. Po dolžini peresa se σ_{xx} ne spreminja.





Slika 5.255: Potek normalne napetosti σ_{xx} po prečnem prerezu peresa [kN/cm²]

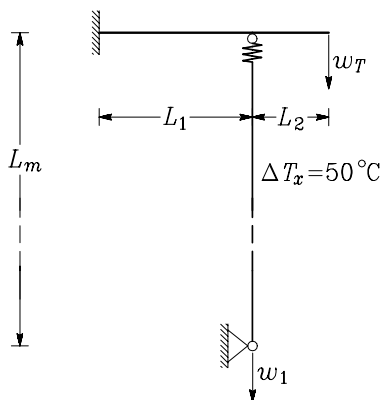
Primer 5.59 Požarno alarmna naprava na sliki 5.256 ima temperaturno občutljiv element iz medeninaste žice. Če žica ni napeta, je razmak električnih kontaktov 0.2 cm. Nosilec iz medenine ima $E_m I_y = 180000 \text{ Ncm}^2$. Togost vzmeti $k_v = 200 \text{ N/cm}$. Dolžina medeninaste žice je $L_m = 5 \text{ m}$, ploščina prečnega prereza $A_m = 0.07 \text{ cm}^2$, modul elastičnosti $E_m = 10^7 \text{ N/cm}^2$ in temperaturni razteznostni koeficient $\alpha_T = 2 \cdot 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$. Nastavitveni vijak ima 20 navojev na 2.5 cm. S pritegovanjem nastavitvenega vijaka moramo nastaviti napravo tako, da bo kontakt sklenjen in da se bo odprl pri spremembi temperature $\Delta T_x = 50^\circ\text{C}$. Koliko zasukov nastavitvenega vijaka moramo opraviti za nastavitev naprave? Razdalji L_1 in L_2 sta: $L_1 = 15 \text{ cm}$ in $L_2 = 7.5 \text{ cm}$.



Slika 5.256: Požarno alarmna naprava

Računski model prikazujemo na sliki 5.257.



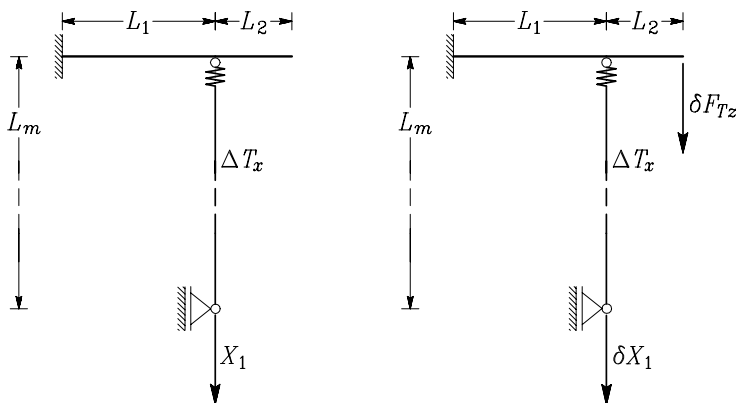


Slika 5.257: Računski model požarno alarmne naprave

Na konstrukcijo ne deluje nobena zunanja obtežba. Deformacije in notranje sile povzročijo sprememba temperature in predpisana pomik na mestu električnega kontakta in na mestu nastavitvenega vijaka. Določiti moramo tak pomik w_1 nastavitvenega vijaka, da bo pomik w_T na mestu električnega kontakta enak 0.2 cm. Stopnja statične nedoločenosti je

$$n = (3 + 2) + 2(2 - 1) - 3 \cdot 2 = 1.$$

Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da nepomično podporo ob nastavitvenem vijaku spremenimo v drsno podporo (slika 5.258).



Slika 5.258: Osnovno konstrukcijo obtežimo z nadomestno silo X_1 ter z virtualnima silama δX_1 in δF_{Tz}

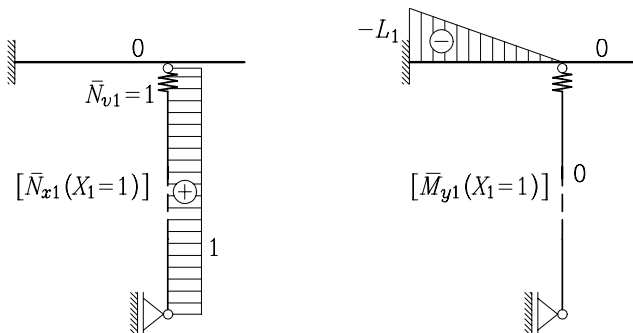
Silo v žici X_1 in pomik w_1 nastavitvenega vijaka izračunamo iz kinematične enačbe statično nedoločene konstrukcije in iz enačbe za pomik take konstrukcije

$$a_{11}X_1 + b_1 = w_1, \quad w_T = 0.2.$$



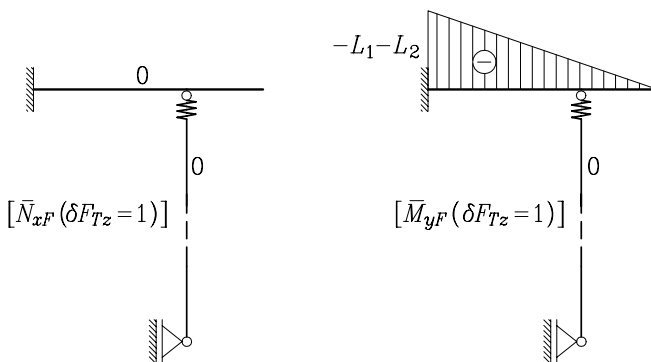
Za račun pomika w_T statično nedoločene konstrukcije moramo najprej izračunati notranje sile statično nedoločene konstrukcije. Zato najprej določimo koeficienta a_{11} in b_1 za račun sile X_1 .

Notranje sile v osnovni konstrukciji zaradi sile $X_1 = 1$ prikazujemo na sliki 5.259.



Slika 5.259: Oсна sila in upogibni moment zaradi sile $X_1 = 1$

Ker zunanjih sil ni, so N_{xQ} , M_{yQ} in N_{vQ} enaki nič. Za račun pomika w_T moramo osnovno konstrukcijo obtežiti z $\delta F_{Tz} = 1$. Osono silo in upogibni moment zaradi virtualne sile δF_{Tz} prikazujemo na sliki 5.260.



Slika 5.260: Osono sila in upogibni moment zaradi sile $\delta F_{Tz} = 1$

Osono sila v konzoli \bar{N}_{xF} in notranja sila v vzmeti \bar{N}_{vF} zaradi sile $\delta F_{Tz} = 1$ sta enaki nič. Koeficient a_{11} izračunamo po enačbi (5.53)

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \int_0^{L_m} \frac{\bar{N}_{x1} \bar{N}_{x1}}{E_m A_m} dx + \int_0^{L_1+L_2} \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{E_m I_y} dx + \frac{\bar{N}_{v1} \bar{N}_{v1}}{k_v} = \\
 &= \frac{L_m \cdot 1 \cdot 1}{E_m A_m} + \frac{1}{E_m I_y} \frac{L_1 L_1}{2} \frac{2}{3} L_1 + \frac{1 \cdot 1}{k_v} = \frac{L_m}{E_m A_m} + \frac{L_1^3}{3 E_m I_y} + \frac{1}{k_v} = 0.011964,
 \end{aligned}$$



koeficient b_1 pa po enačbi (5.54):

$$b_1 = \int_0^{L_m} \alpha_T \Delta T \bar{N}_{x1} dx = \alpha_T \Delta T_x L_m \cdot 1 = L_m \alpha_T \Delta T_x = 0.5.$$

Kinematični pogoj za račun X_1 je:

$$\left(\frac{L_m}{E_m A_m} + \frac{L_1^3}{3 E_m I_y} + \frac{1}{k_v} \right) X_1 + L_m \alpha_T \Delta T_x = w_1. \quad (5.91)$$

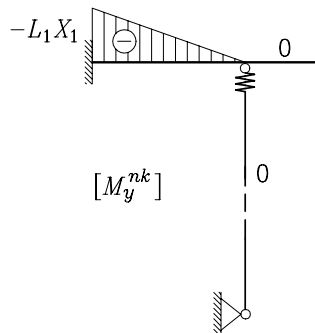
V enačbi (5.91) sta dve neznanki: sila X_1 in pomik w_1 . Ker v enačbi za pomik w_T

$$w_T = \int_0^{L_m} \frac{M_y^{nk} \bar{M}_{yF}}{E I_y} dx.$$

nastopa upogibni moment M_y^{nk} statično nedoločene konstrukcije (slika 5.261), le tega s pomočjo principa superpozicije izrazimo z neznano silo X_1

$$M_y^{nk} = M_{yQ} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} X_i = \bar{M}_{y1} X_1,$$

kjer smo upoštevali, da je $n = 1$ in $M_{yQ} = 0$.



Slika 5.261: Upogibni moment M_y^{nk} statično nedoločene konstrukcije

Z upoštevanjem diagramov \bar{M}_{yF} na sliki 5.260 in M_y^{nk} na sliki 5.261 zapišemo pomik w_T takole:

$$w_T = \frac{1}{E_m I_y} \frac{L_1 X_1 L_1}{2} \left(L_2 + \frac{2}{3} L_1 \right) = 0.2 \text{ cm}.$$

V zadnji enačbi je edina neznanka sila X_1 v žici. Velikost sile X_1 je

$$X_1 = \frac{2 E I_y w_T}{L_1^2 (L_2 + 2 L_1/3)} = \frac{2 \cdot 180000 \cdot 0.2}{15^2 \cdot (7.5 + 2 \cdot 15/3)} = 18.2857 \text{ N}$$



Iz enačbe (5.91) lahko sedaj izračunamo še velikost pomika w_1 na mestu nastavitvenega vijaka:

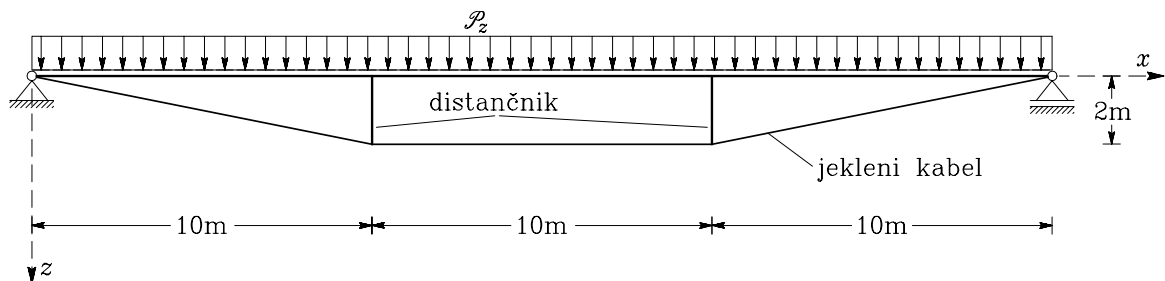
$$w_1 = \left(\frac{500}{10^7 \cdot 0.07} + \frac{15^3}{3 \cdot 180000} + \frac{1}{200} \right) \cdot 18.2857 + 500 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 0.7188 \text{ cm.}$$

Število potrebnih obratov n_n izračunamo iz enačbe:

$$n_n = \frac{20 \cdot 0.7188}{2.5} = 5.75 \text{ obratov.}$$

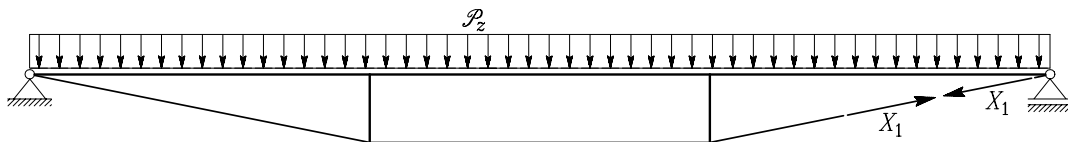
Požarno alarmno napravo nastavimo tako, da nastavitveni vijak zavrtimo za 5.75 obratov.

Primer 5.60 Jekleni kabel pri armiranobetonskem nosilcu na sliki 5.262 poteka izven betonskega prereza. Določimo silo v kablu zaradi enakomerne linijske obtežbe $\mathcal{P}_z = 35 \text{ kN/m}$ in zaradi prednapetja kabla! Kabel prednapnemo tako, da ga ob desni podpori izvlečemo za 6 cm. Pri računu upoštevajmo trenje med distančnikom ter kablom in predpostavimo, da jekleni kabel drsi po jekleni podlagi krožne oblike, ki je pritrjena na distančnik. Koeficient trenja μ za jeklo na jeklo je 0.15. Silo, s katero kabel deluje na distančnik, upoštevajmo na dva načina. Najprej upoštevajmo razmere, ki veljajo za primer, da je kabel tik pred zdrsom, nato pa še izračunajmo primer, ko trenje med kablom in distančnikom zanemarimo. Modul elastičnosti betona je $E_b = 35\,000\,000 \text{ kN/m}^2$, modul elastičnosti jekla $E_k = 200\,000\,000 \text{ kN/m}^2$, ploščina prečnega prereza nosilca $A_n = 1 \text{ m}^2$, vztrajnostni moment prečnega prereza nosilca $I_n = 0.3 \text{ m}^4$, ploščina prečnega prereza distančnika $A_d = 0.3 \text{ m}^2$, vztrajnostni moment prečnega prereza distančnika $I_d = 0.05 \text{ m}^4$, ploščina prečnega prereza kabla pa je $A_k = 0.005 \text{ m}^2$.



Slika 5.262: Geometrijski podatki o konstrukciji

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo prikazujemo na sliki 5.263.



Slika 5.263: Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da vrv prerežemo ob desni podpori



Silo v vrvi X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11} X_1 + b_1 = 0.06.$$

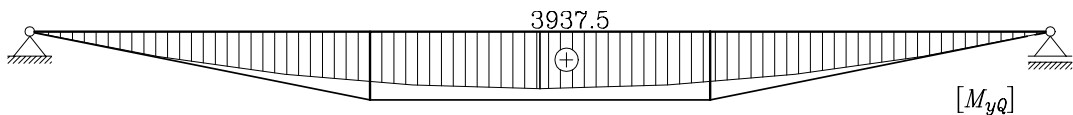
Za račun koeficientov a_{11} in b_1 potrebujemo potek osnih sil in upogibnih momentov v posameznih elementih konstrukcije zaradi zunanje obtežbe \mathcal{P}_z in zaradi sile $X_1 = 1$. Najprej izračunajmo osne sile N_{xQ} in upogibne momente M_{yQ} zaradi linijske obtežbe \mathcal{P}_z . Reakciji A_z in B_z sta

$$A_z = B_z = -\frac{30 \mathcal{P}_z}{2} = -\frac{30 \cdot 35}{2} = -525 \text{ kN},$$

upogibni moment M_{yQ} v nosilcu pa

$$M_{yQ} = -A_z x - \frac{35 x^2}{2} = 525 x - 17.5 x^2 \text{ kNm}.$$

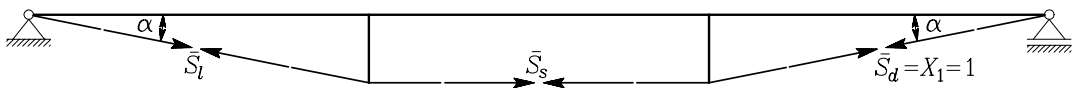
Osne sile N_{xQ} v vseh elementih ter upogibni moment v kablu in distančnikih so enaki nič. Diagram M_{yQ} prikazujemo na sliki 5.264.



Slika 5.264: Diagram upogibnega momenta M_{yQ}

Račun sile v kablu z upoštevanjem trenja

Ker kabel izvlečemo v desni podpori, je sila \bar{S}_s v kablu v srednjem polju manjša od sile $\bar{S}_d = X_1 = 1$ v desnem polju, sila \bar{S}_l v levem polju pa manjša od sile \bar{S}_s (slika 5.265).



Slika 5.265: Ker kabel vlečemo proti desni, je zaradi trenja velikost sile na levi strani distančnika manjša kot na desni strani

Če je $S_2 > S_1$, izrazimo velikost sile S_1 na levi strani distančnika z velikostjo sile S_2 na desni strani po enačbi

$$S_1 = S_2 e^{-\mu \alpha}.$$

Kot α izračunamo takole

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{10} = 0.2 \rightarrow \alpha = 0.1974 \text{ rad}.$$

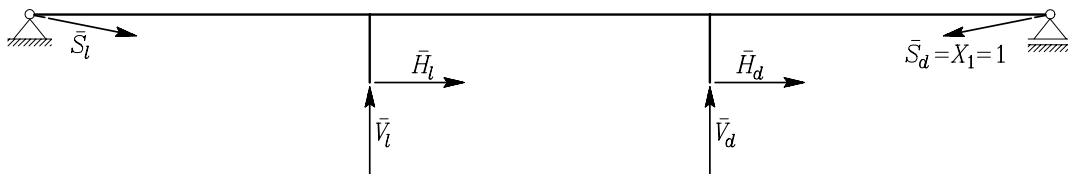
Sili \bar{S}_s in \bar{S}_l sta

$$\bar{S}_s = 1 e^{-0.15 \cdot 0.1974} = 0.9708, \quad \bar{S}_l = \bar{S}_s e^{-0.15 \cdot 0.1974} = 0.9425.$$



Na sliki 5.266 prikazujemo obtežbo na osnovni konstrukciji zaradi sile $X_1 = 1$. Obtežbo na distančnika smo nadomestili s silami \bar{V}_l , \bar{H}_l , \bar{V}_d in \bar{H}_d

$$\begin{aligned}\bar{V}_l &= \bar{S}_l \sin \alpha = 0.1848, & \bar{V}_d &= 1 \cdot \sin \alpha = 0.1961, \\ \bar{H}_l &= \bar{S}_s - \bar{S}_l \cos \alpha = 0.04663, & \bar{H}_d &= 1 \cdot \cos \alpha - \bar{S}_s = 0.009756.\end{aligned}$$



Slika 5.266: Obtežba, ki jo povzroči sila $X_1 = 1$

Osne sile v kablu so:

$$\bar{N}_{kl} = \bar{S}_l = 0.9425, \quad \bar{N}_{ks} = \bar{S}_s = 0.9708, \quad \bar{N}_{kd} = 1.$$

Oсна sila v distančnikih

$$\bar{N}_{dl} = -\bar{S}_l \sin \alpha = -0.1848, \quad \bar{N}_{dd} = -\sin \alpha = -0.1961.$$

Upogibni moment v distančnikih

$$\begin{aligned}\bar{M}_{dl} &= \bar{H}_l x, & \bar{M}_{dlm} &= \bar{M}_{dl}(x = 2) = 0.09325, \\ \bar{M}_{dd} &= \bar{H}_l x, & \bar{M}_{ddm} &= \bar{M}_{dd}(x = 2) = 0.01951.\end{aligned}$$

Oсна sila v nosilcu

$$\bar{N}_{nl} = -\bar{S}_l \cos \alpha = -0.9242, \quad \bar{N}_{ns} = -\bar{S}_l \cos \alpha - \bar{H}_l = -0.9708, \quad \bar{N}_{nd} = -\cos \alpha = -0.9806.$$

Upogibni moment v nosilcu

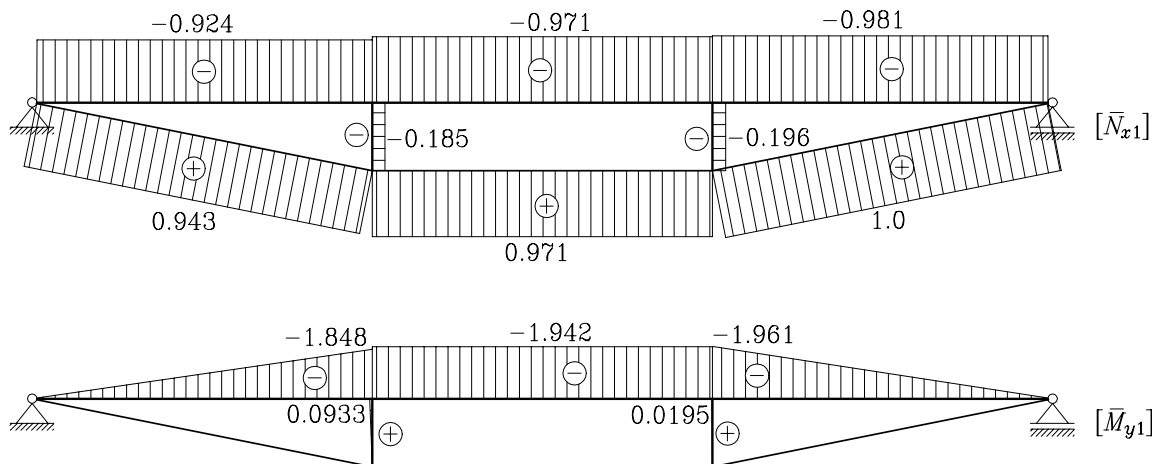
$$\bar{M}_{nl} = -(\bar{S}_l \sin \alpha) x, \quad \bar{M}_{ns} = -(\bar{S}_l \sin \alpha) x - 2 \bar{H}_l + \bar{V}_l (x - 10), \quad \bar{M}_{nd} = -1 \cdot \sin \alpha (30 - x).$$

Velikosti upogibnega momenta v nosilcu pri $x = 10$ m in $x = 20$ m

$$\bar{M}_{nlm} = \bar{M}_{nl}(x = 10) = -1.8484, \quad \bar{M}_{ns} = -1.9417, \quad \bar{M}_{ndm} = \bar{M}_{nd}(x = 20) = -1.9612.$$

Upogibni moment \bar{M}_{ns} v srednjem polju je konstanten. Na sliki 5.267 prikazujemo potek osne sile in upogibnega momenta na osnovni konstrukciji zaradi sile $X_1 = 1$.



Slika 5.267: Osnova sila in upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile $X_1 = 1$

Za račun koeficienta a_{11} potrebujemo dolžino kabla v levem in desnem polju $L_{kl} = L_{kd} = \sqrt{10^2 + 2^2} = 10.1980$ m. Koeficient a_{11} izračunamo po enačbi

$$\begin{aligned}
 a_{11} = & \frac{1}{E_k A_k} (\bar{N}_{kl}^2 L_{kl} + \bar{N}_{ks}^2 \cdot 10 + 1^2 L_{kd}) + \frac{1}{E_b A_d} (\bar{N}_{dl}^2 \cdot 2 + \bar{N}_{dd}^2 \cdot 2) + \\
 & + \frac{1}{E_b I_d} \left(\bar{M}_{dlm}^2 \frac{2}{2} \frac{2}{3} + \bar{M}_{ddm}^2 \frac{2}{2} \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{E_b A_n} (\bar{N}_{nl}^2 \cdot 10 + \bar{N}_{ns}^2 \cdot 10 + \bar{N}_{nd}^2 \cdot 10) + \\
 & + \frac{1}{E_b I_n} \left(\bar{M}_{nlm}^2 \frac{10}{2} \frac{2}{3} + \bar{M}_{ns}^2 10 + \bar{M}_{ndm}^2 \frac{10}{2} \frac{2}{3} \right) = 2.8682 \cdot 10^{-5} + 1.3834 \cdot 10^{-8} + \\
 & + 3.4579 \cdot 10^{-9} + 7.8805 \cdot 10^{-7} + 5.8961 \cdot 10^{-6} = 3.5384 \cdot 10^{-5},
 \end{aligned}$$

koeficient b_1 pa takole:

$$b_1 = \frac{1}{E_b I_n} \left(\int_0^{10} \bar{M}_{nl} M_{yQ} dx + \int_{10}^{20} \bar{M}_{ns} M_{yQ} dx + \int_{20}^{30} \bar{M}_{nd} M_{yQ} dx \right) = -0.011774.$$

Sila X_1 v kablu pri upoštevanju trenja je

$$X_1 = \frac{1}{a_{11}} (0.06 - b_1) = 2028.4 \text{ kN}.$$

Račun sile v kablu brez upoštevanja trenja

Če trenja ne upoštevamo, se velikost sile v kablu ne spreminja. Zato je

$$\bar{S}_l = \bar{S}_s = \bar{S}_d = 1.$$



Obtežbo na distančnika označimo s silami $\bar{V}_l, \bar{H}_l, \bar{V}_d$ in \bar{H}_d

$$\begin{aligned}\bar{V}_l &= \bar{S}_l \sin \alpha = 0.1961, & \bar{V}_d &= \sin \alpha = 0.1961, \\ \bar{H}_l &= \bar{S}_s - \bar{S}_l \cos \alpha = 0.01942, & \bar{H}_d &= \bar{S}_s - \cos \alpha = 0.01942.\end{aligned}$$

Osne sile v kablu so:

$$\bar{N}_{kl} = \bar{N}_{ks} = \bar{N}_{kd} = 1.$$

Osna sila v distančnikih

$$\bar{N}_{dl} = -0.1961, \quad \bar{N}_{dd} = -0.1961.$$

Upogibni moment v distančnikih

$$\begin{aligned}\bar{M}_{dl} &= -(\bar{S}_s - \bar{S}_l \cos \alpha) x, & \bar{M}_{dlm} &= \bar{M}_{dl}(x = 2) = -0.03884, \\ \bar{M}_{dd} &= -(\bar{S}_s - \cos \alpha) x, & \bar{M}_{ddm} &= \bar{M}_{dd}(x = 2) = -0.03884.\end{aligned}$$

Osna sila v nosilcu

$$\bar{N}_{nl} = -\bar{S}_l \cos \alpha = -0.9806, \quad \bar{N}_{ns} = -\bar{S}_l \cos \alpha - \bar{H}_l = -1.0000, \quad \bar{N}_{nd} = -\cos \alpha = -0.9806.$$

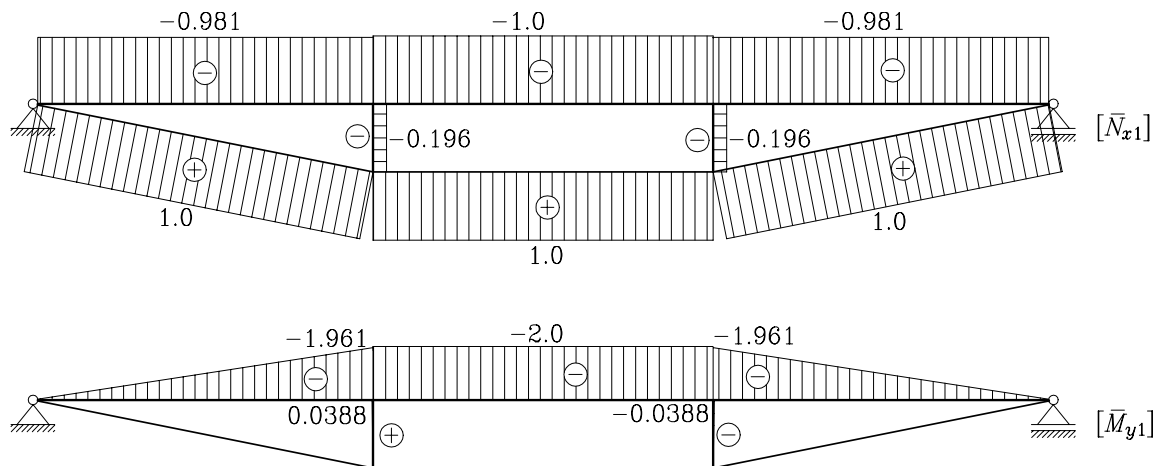
Upogibni moment v nosilcu

$$\bar{M}_{nl} = \bar{S}_l \sin \alpha x, \quad \bar{M}_{ns} = -\bar{S}_l \sin \alpha x - 2 \bar{H}_l + \bar{V}_l (x - 10), \quad \bar{M}_{nd} = -\sin \alpha (30 - x).$$

Velikosti upogibnega amomenta v nosilcu pri $x = 10$ m in $x = 20$ m.

$$\bar{M}_{nlm} = \bar{M}_{nl}(x = 10) = -1.9612, \quad \bar{M}_{ns} = -2.0000, \quad \bar{M}_{ndm} = \bar{M}_{nd}(x = 20) = -1.9612.$$

Upogibni moment \bar{M}_{ns} je konstanten. Na sliki 5.268 prikazujemo potek osne sile in upogibnega momenta na osnovni konstrukciji zaradi sile $X_1 = 1$.



Slika 5.268: Osna sila in upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile $X_1 = 1$