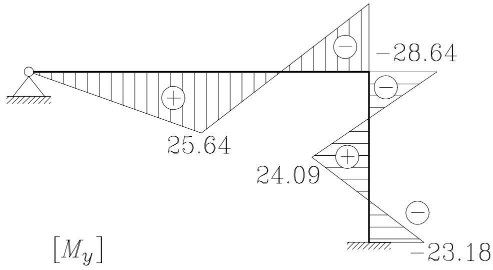
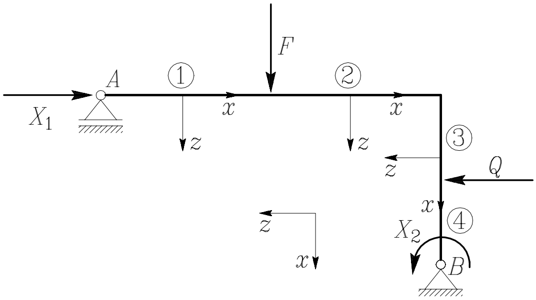
Upogibne momente za statično nedoločeno konstrukcijo prikazujemo na sliki 5.132.



Slika 5.132: Upogibni momenti na statično nedoločeni konstrukciji

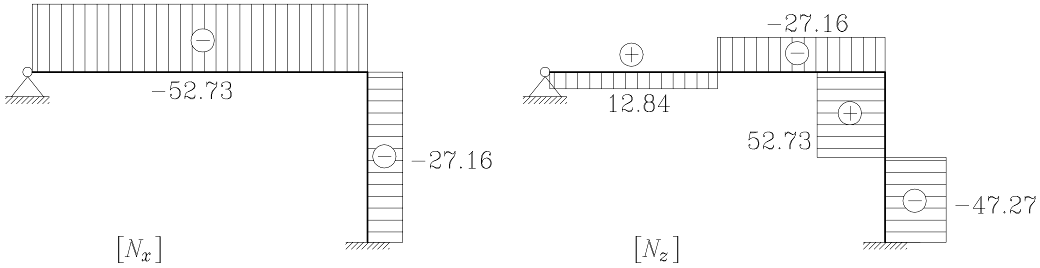
Račun osnih in prečnih sil

Osne in prečne sile na statično nedoločeni konstrukciji izračunamo tako, da obravnavamo osnovno konstrukcijo, sili X_1 in X_2 pa upoštevamo kot zunanjo obtežbo. Da lahko določimo potek osnih in prečnih sil na konstrukciji, moramo elemente konstrukcije razdeliti na polja



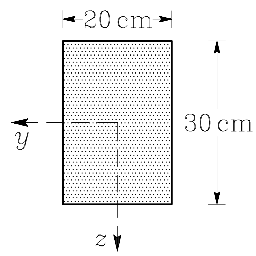
Slika 5.133: Polja za račun notranjih sil

Diagrama osnih in prečnih sil prikazujemo na sliki 5.134.



Slika 5.134: Diagram osnih in prečnih sil na statično nedoločeni konstrukciji

Primer 5.32 *Ugotovimo velikost napake, ki jo naredimo pri nalogi 5.31, ker ne upoštevamo vpliva osnih sil na pomike. Prečni prerez elementov je pravokotne oblike z dimenzijami, podanimi na sliki 5.135.*

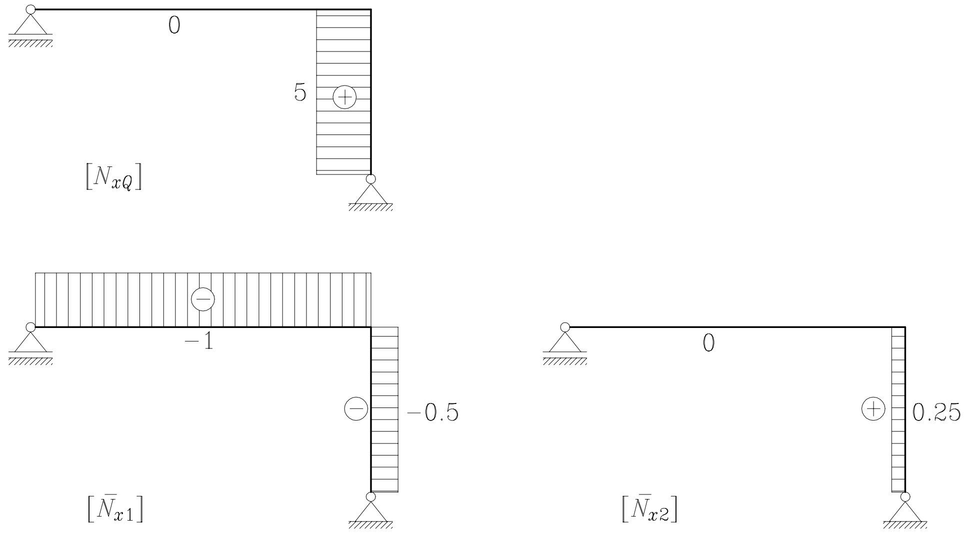


Slika 5.135: Prečni prerez elementov konstrukcije

Razmerje vztrajnostnega momenta I_y in prečnega prereza A_x je

$$\frac{I_y}{A_x} = \frac{20 \cdot 30^3}{12 \cdot 20 \cdot 30} = 75 \ \text{cm}^2 = 0.0075 \ \text{m}^2.$$

Diagrame osnih sil zaradi sil F, Q, $X_1 = 1$ in $X_2 = 1$ podajamo na sliki 5.136.



Slika 5.136: Diagrami osnih sil

Koeficienti a_{ij} in b_i zaradi vpliva osnih sil:

$$
\begin{aligned}
a_{11}(N_x) &= \frac{1}{E\,A_x}\left(\frac{1}{2}^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 4\right) = \frac{4.5}{E\,A_x},\\
a_{22}(N_x) &= \frac{1}{E\,A_x}\frac{1}{4}^2 \cdot 2 = \frac{0.125}{E\,A_x},\\
a_{12}(N_x) &= -\frac{1}{E\,A_x}\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{0.25}{E\,A_x},\\
b_1(N_x) &= -\frac{1}{E\,A_x}5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{E\,A_x},\\
b_2(N_x) &= \frac{1}{E\,A_x}5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{2.5}{E\,A_x}.
\end{aligned}
$$

Koeficienti a_{ij} in b_i ob upoštevanju upogibnih momentov in osnih sil so

$$
\begin{aligned}
E\,I_y\,a_{11} &= 8 + 4.5\frac{I_y}{A_x} = 8.03375,\\
E\,I_y\,a_{22} &= \frac{10}{3} + 0.125\frac{I_y}{A_x} = 3.33427,\\
E\,I_y\,a_{12} &= -\frac{14}{3} - 0.25\frac{I_y}{A_x} = -4.66854,\\
E\,I_y\,b_1 &= -530 - 0.25\frac{I_y}{A_x} = -530.001875,\\
E\,I_y\,b_2 &= \frac{970}{3} + 2.5\frac{I_y}{A_x} = 323.352083.
\end{aligned}
$$

Kinematična pogoja sta

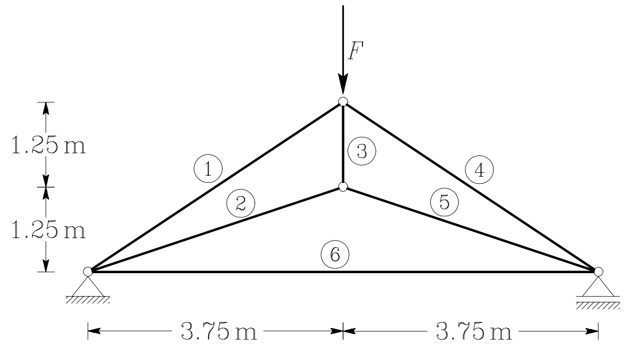
$$
\begin{bmatrix} 8.03375 & -4.66854 \\ -4.66854 & 3.33427 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 530.001875 \\ -323.352083 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev sistema enačb je

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.606\,\mathrm{kN} \\ -24.721\,\mathrm{kNm} \end{bmatrix}.
$$

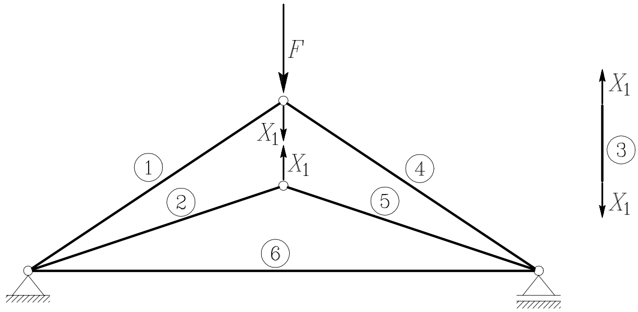
S primerjavo rezultatov naloge 1 in naloge 2, ugotovimo, da je velikost napake zaradi zanemaritve vpliva osnih sil enaka 2.2 % za silo X_1 in 6.2 % za silo X_2.

Primer 5.33 *Izračunajmo osne sile v palicah na sliki 5.137 prikazanega paličja. Elastični modul E in ploščina prečnega prereza A_x sta za vse palice enaka. Paličje je obteženo z eno samo silo $F = 10\,\mathrm{kN}$.*



Slika 5.137: Statično nedoločeno paličje

Paličje je enkrat statično nedoločeno ($n = 6 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$). Na sliki 5.138 prikazujemo osnovno konstrukcijo, ki je izbrana tako, da prerežemo palico 3.



Slika 5.138: Osnovna konstrukcija

Neznano silo dobimo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}\, X_1 + b_1 = 0.$$

Koeficienta a_{11} in b_1 določimo po enačbah

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{6} \int_0^{L_i} \frac{\bar{N}_{xi}\, \bar{N}_{xi}}{E_i\, A_{xi}} dx = \sum_{i=1}^{6} \frac{\bar{N}_{xi}\, \bar{N}_{xi}\, L_i}{E_i\, A_{xi}}, \quad b_1 = \sum_{i=1}^{6} \int_0^{L_i} \frac{\bar{N}_{xi}\, N_{xQi}}{E_i\, A_{xi}} dx = \sum_{i=1}^{6} \frac{\bar{N}_{xi}\, N_{xQi}\, L_i}{E_i\, A_{xi}},$$

pri čemer smo upoštevali, da se osne sile in prečni prerez vzdolž osi palice ne spreminjata. Če imajo vse palice enak prerez in so iz enakega materiala, se izraza za a_{11} in b_1 še nekoliko poenostavita

$$a_{11} = \frac{1}{E\, A_x} \sum_{i=1}^{6} \bar{N}_{xi}^2\, L_i, \quad b_1 = \frac{1}{E\, A_x} \sum_{i=1}^{6} \bar{N}_{xi}\, N_{xQi}\, L_i.$$

Vrednosti $E\, A_x\, a_{11}$ in $E\, A_x\, b_1$ izračunamo v preglednici 5.3.

Tabela 5.3: Račun koeficientov a_{11} in b_1

Palica i	L_i	N_{xQi}	$\bar{N}_{x1i}$	$\bar{N}_{x1i}^2\, L_i$	$\bar{N}_{x1i}\, N_{xQi}\, L_i$
1	4.507	−9.014	−0.9014	3.662	36.619
2	3.953	0.0	1.581	9.880	0.0
3	1.250	0.0	1.000	1.250	0.0
4	4.507	−9.014	−0.9014	3.662	36.619
5	3.953	0.0	1.581	9.880	0.0
6	7.500	7.50	−0.750	4.219	−42.180
				$EA_x a_{11} = 32.557$	$EA_x b_1 = 31.05$

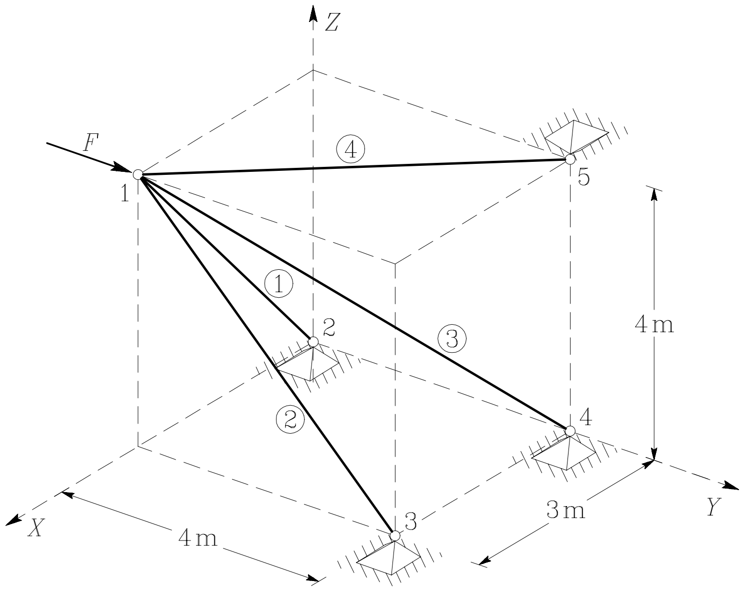
Neznana sila X_1 je:

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{31.05}{32.55} = -0.9537 \text{ kN}.$$

Sile v palicah izračunamo z upoštevanjem principa superpozicije: $N_{xi} = N_{xQi} + N_{x1i}\, X_1$:

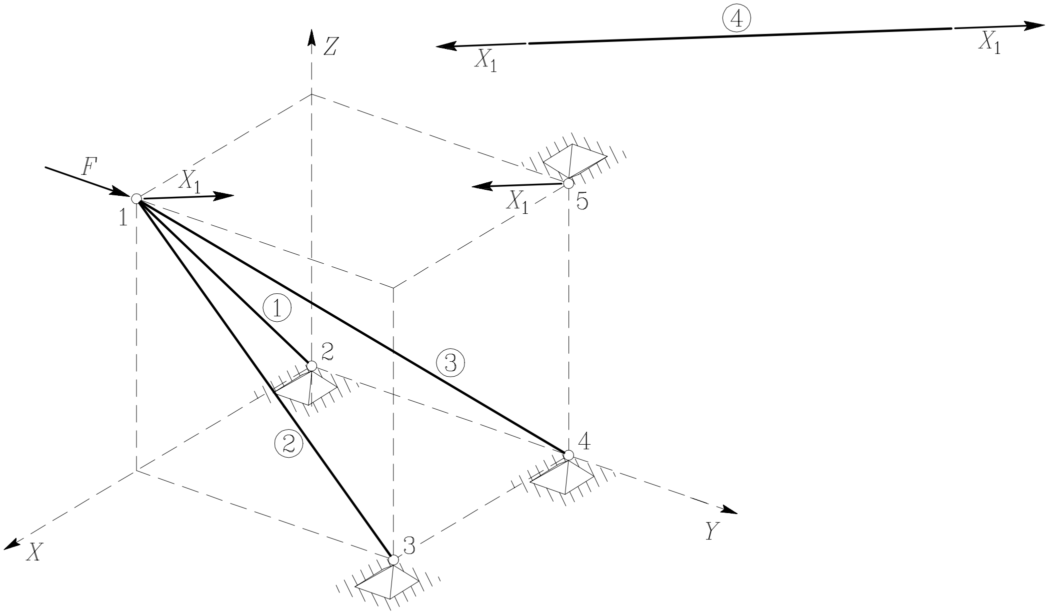
$$\begin{aligned}
N_{x1} &= -9.014 - 0.9014 \cdot (-0.9537) = -8.154 \text{ kN},\\
N_{x2} &= 0.0 + 1.581 \cdot (-0.9537) = -1.508 \text{ kN},\\
N_{x3} &= 0.0 + 1.0 \cdot (-0.9537) = -0.954 \text{ kN},\\
N_{x4} &= -9.014 - 0.9014 \cdot (-0.9537) = -8.154 \text{ kN},\\
N_{x5} &= 0.0 + 1.581 \cdot (-0.9537) = -1.508 \text{ kN},\\
N_{x6} &= 7.5 - 0.75 \cdot (-0.9537) = 8.215 \text{ kN}.
\end{aligned}$$

Primer 5.34 *Za paličje na sliki 5.139 določimo sile v palicah! Palice imajo enako ploščino prečnega prereza in so narejene iz materiala z enakim modulom elastičnosti E. Sila F, s katero je paličje obteženo, deluje v smeri osi y in ima velikost $F = 1$ kN. Koordinate vozlišč so: $T_1(3,0,4)$, $T_2(0,0,0)$, $T_3(3,4,0)$, $T_4(0,4,0)$ in $T_5(0,4,4)$.*



Slika 5.139: Prostorsko paličje je obteženo s silo v smeri osi Y globalnega koordinatnega sistema

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena ($n = 4 - 3$). Osnovno konstrukcijo, ki jo tvorimo tako, da prerežemo palico 4, prikazujemo na sliki 5.140.



Slika 5.140: Osnovna konstrukcija

Silo $X_1 \equiv N_4$ v palici 4 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}\, X_1 + b_1 = 0.$$

Podobno kot pri prejšnji nalogi koeficienta a_{11} in b_1 izračunamo po enačbah

$$a_{11} = \frac{1}{E\,A_x} \sum_{i=1}^{4} \bar{N}_{xi}^2\, L_i, \quad b_1 = \frac{1}{E\,A_x} \sum_{i=1}^{4} \bar{N}_{xi}\, N_{xQi}\, L_i.$$

V preglednici 5.4 izračunamo vrednosti $E\,A_x\,a_{11}$ in $E\,A_x\,b_1$.

Tabela 5.4: Račun koeficientov a_{11} in b_1

Palica i	L_i	N_{xQi}	$\bar{N}_{x1i}$	$\bar{N}_{x1i}^2\, L_i$	$\bar{N}_{x1i}\, N_{xQi}\, L_i$
1	5	$5/4$	1	5	$25/4$
2	$4\sqrt{2}$	0	$4\sqrt{2}/5$	$128\sqrt{2}/25$	0
3	$\sqrt{41}$	$-\sqrt{41}/4$	$-2\sqrt{41}/5$	$164\sqrt{41}/25$	$4\sqrt{41}/10$
4	5	0	1	5	0
				$EA_x a_{11} = 59.2453$	$EA_x b_1 = 32.5028$

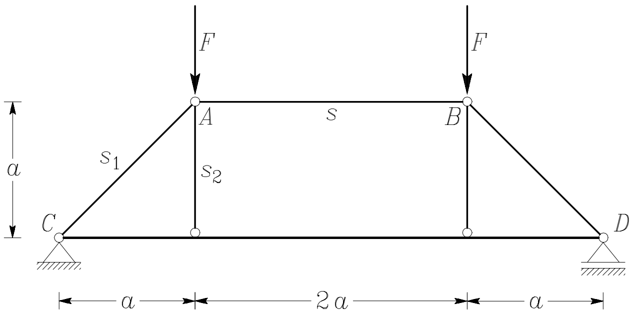
Sila X_1 je

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = -0.54861 \text{ kN}.$$

Osne sile v statično nedoločenem paličju izračunamo tako, da na osnovni konstrukciji seštejemo vpliv zunanje obtežbe in sile X_1

$$\begin{aligned}
N_{x1} &= 1.25 + 1 \cdot (-0.54861) = 0.70139 \text{ kN},\\
N_{x2} &= \frac{4\sqrt{2}}{5} \cdot (-0.54861) = -0.62069 \text{ kN},\\
N_{x3} &= -\frac{\sqrt{41}}{4} - \frac{2\sqrt{41}}{5} \cdot (-0.54861) = -0.19564 \text{ kN},\\
N_{x4} &= -0.54861 \text{ kN}.
\end{aligned}$$

Primer 5.35 *Trapezno vešalo na sliki 5.141 je obteženo z dvema silama velikosti F. Določimo silo S v razpori AB. Velikost sile F je $100\,\mathrm{kN}$, razdalja a je $2\,\mathrm{m}$, ploščine prečnih prerezov so: $A_{s1} = 196\,\mathrm{cm}^2$, $A_{s2} = 144\,\mathrm{cm}^2$, $A_s = 64\,\mathrm{cm}^2$ in $A_n = 240\,\mathrm{cm}^2$. Vztrajnostni moment I_n nosilca je $8000\,\mathrm{cm}^4$. Pri računu upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na deformacije.*

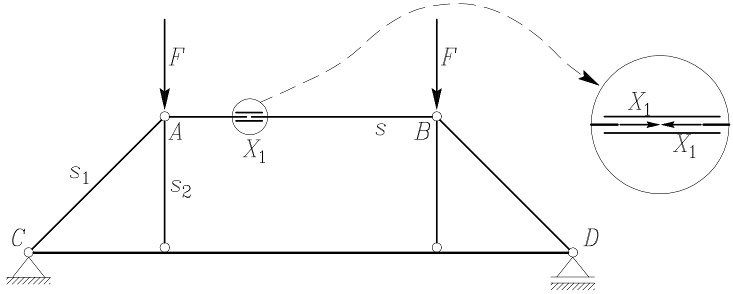


Slika 5.141: Geometrija in obtežba trapeznega vešala

Stopnjo statične nedoločenosti izračunamo z naslednjim izrazom

$$n = 2 + 1 + 2(2 - 1) \cdot 4 + 2(3 - 1) \cdot 2 - 6 \cdot 3 = 1,$$

torej je konstrukcija enkrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo (slika 5.142) izberemo tako, da sprostimo vzdolžni pomik nekje v razpori AB. Neznana sila X_1 je sila v razpori.

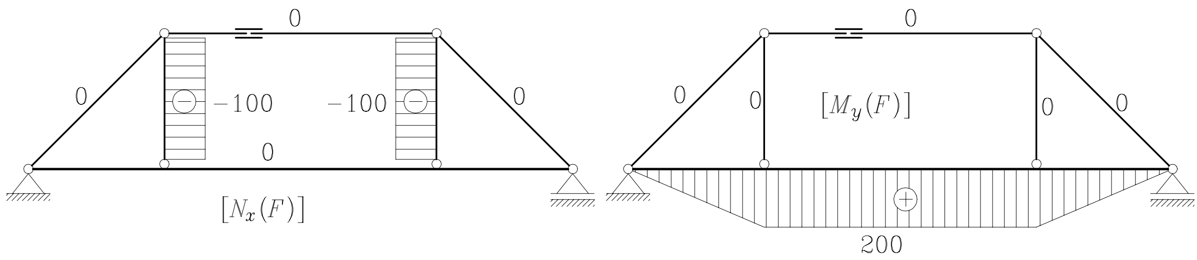


Slika 5.142: Za neznano silo X_1 izberemo silo v razpori

Neznano silo X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

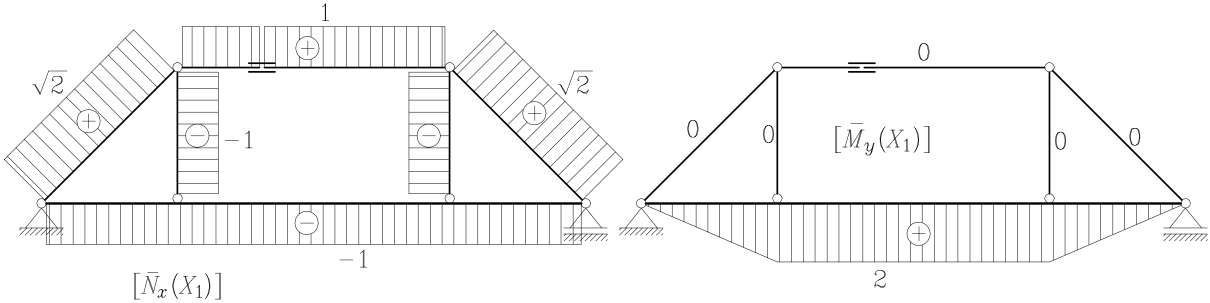
$$a_{11}\, X_1 + b_1 = 0.$$

Na sliki 5.143 prikazujemo diagram osnih sil in diagram upogibnih momentov na osnovni konstrukciji zaradi sil F.



Slika 5.143: Diagram osnih sil in momentov zaradi zunanje obtežbe

Na sliki 5.144 prikazujemo diagram osnih sil in diagram upogibnih momentov na osnovni konstrukciji zaradi sil $X_1 = 1$.



Slika 5.144: Diagram osnih sil in momentov zaradi sile $X_1 = 1$

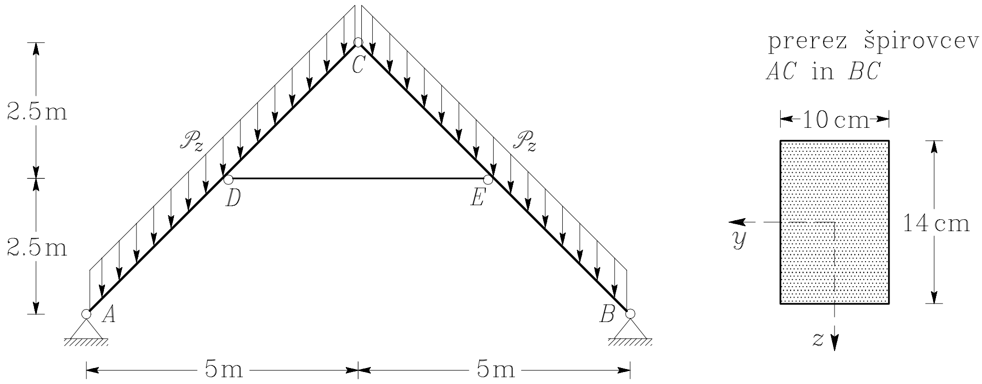
Koeficienta a_{11} in b_1 izračunamo z naslednjima izrazoma:

$$E\,a_{11} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^2\cdot\sqrt{2}}{0.0196}\cdot 2 + \frac{2\cdot 1\cdot 1}{0.0144}\cdot 2 + \frac{4\cdot 1\cdot 1}{0.0064} + \frac{8\cdot 1\cdot 1}{0.024} +$$
$$+\frac{1}{0.00008}\left(\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 2\right) = 1813.34 + 266666.67 = 268480.00,$$
$$E\,b_1 = \frac{2\cdot 100\cdot 1}{0.0144}\cdot 2 + \frac{1}{0.00008}\left(\frac{2\cdot 200}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 200\cdot 2\right)$$
$$= 27777.78 + 26666666.67 = 26694444.44.$$

Sila X_1 je enaka sili v razpori S

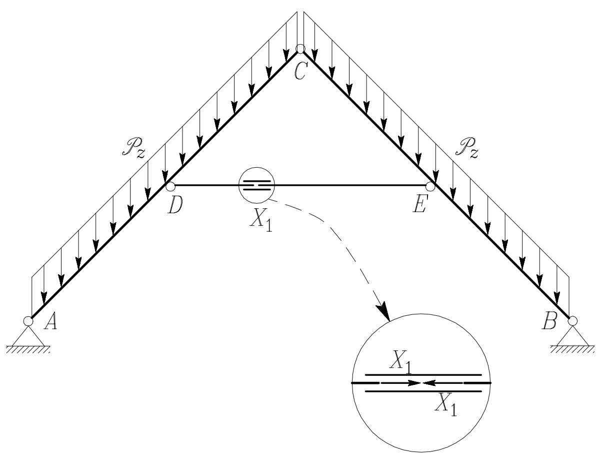
$$X_1 \equiv S = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{26694444.44}{268480} = -99.43\ \mathrm{kN}.$$

Primer 5.36 *Določimo diagram upogibnih momentov za trikotno vešalo na sliki 5.145! Velikost konstantne linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ na enoto dolžine špirovca je $0.8\ \mathrm{kN/m}$. Vpliva osnih sil na deformiranje ne upoštevamo.*



Slika 5.145: Trikotno vešalo je obteženo s konstantno linijsko obtežbo

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena. Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da sprostimo vzdolžni pomik v škarjah DE (slika 5.146).

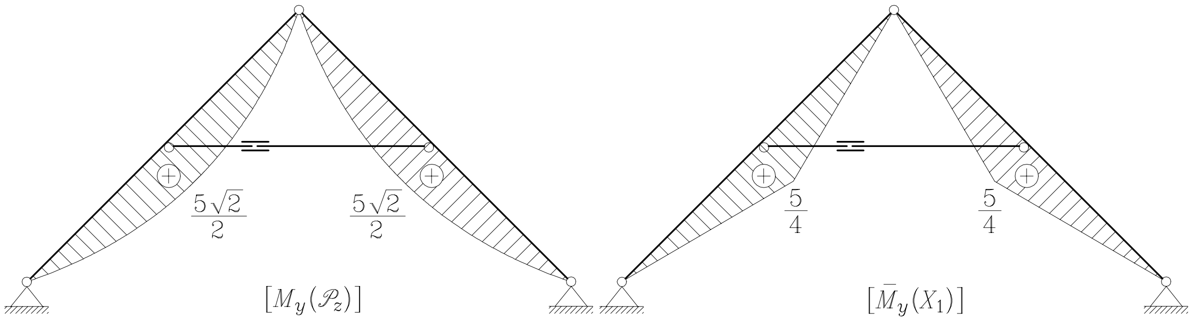


Slika 5.146: Neznana sila X_1 je sila v škarjah DE

Neznano silo X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}\,X_1 + b_1 = 0.$$

Na sliki 5.147 prikazujemo diagrama upogibnih momentov na osnovni konstrukciji zaradi linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ in zaradi sile $X_1 = 1$.



Slika 5.147: Diagram upogibnih momentov zaradi linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ in zaradi sile $X_1 = 1$

Koeficienta a_{11} določimo na osnovi diagrama $\bar{M}_{y1}$ (slika 5.147)

$$a_{11} = \frac{1}{E\,I_y}\frac{5}{4}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot 4 = \frac{125\sqrt{2}}{24\,E\,I_y} \cong \frac{7.366}{E\,I_y}.$$

Za račun koeficienta b_1 potrebujemo lego težišč polovice kvadratne parabole $x_T = 5\,a/8$ (glej preglednico 1.1) ter velikost $\bar{M}_{y1}$ pri x_T:

$$x_T = \frac{5\,a}{8} = \frac{5\cdot 5\sqrt{2}}{8\cdot 2} = \frac{25\sqrt{2}}{16} \cong 2.210\ \text{m}, \quad \bar{M}_{y1}(x_T) = \frac{25\sqrt{2}\cdot 5\cdot 2}{16\cdot 4\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{25}{32} \cong 0.781\ \text{kNm?}.$$

Tako izračunamo še b_1:

$$b_1 = \frac{1}{E\,I_y}\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{25}{32}\cdot 4 = \frac{525}{24\,E\,I_y} \cong \frac{26.04}{E\,I_y}.$$

Sila v škarjah DE je enaka

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{225.24}{24\cdot 125\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \cong -3.536\,\text{kN}.$$

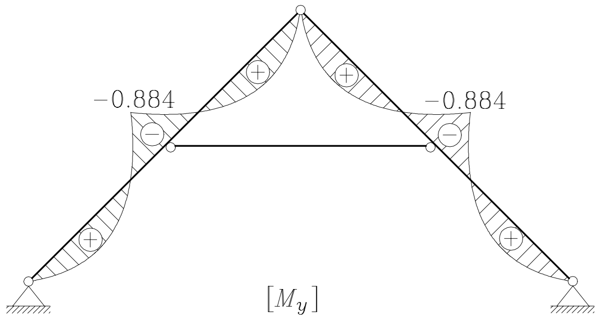
Za račun diagrama upogibnih momentov na statično nedoločeni konstrukciji upoštevamo princip superpozicije – seštejemo momente od zunanje obtežbe $\mathscr{P}_z$ in od sile X_1. Upogibni moment M_{Dy} in M_{Ey} izračunamo takole:

$$M_{Dy} = M_{Ey} = 3.536 + 1.25\cdot(-3.536) = -0.884\ \text{kNm}.$$

Če upoštevamo, da je moment $\bar{M}_{y1}$ na četrini in na treh četrtinah špirovca enak 0.625, moment zaradi $\mathscr{P}_z$ pa 2.652 kNm, dobimo še M_y v teh točkah:

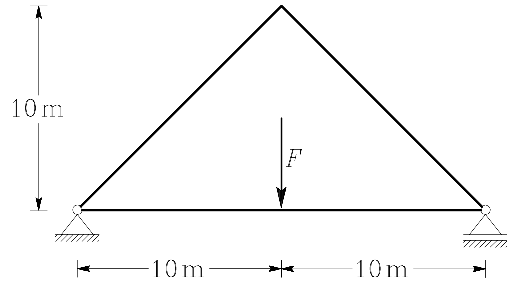
$$M_y = 2.652 + 0.625\cdot(-3.536) = 0.442\ \text{kNm}.$$

Diagram upogibnih momentov statično nedoločene konstrukcije prikazujemo na sliki 5.148.



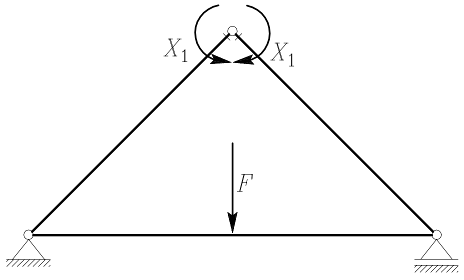
Slika 5.148: Diagram upogibnih momentov statično nedoločenega trikotnega vešala

Primer 5.37 *Izračunajmo notranje sile v konstrukciji na sliki 5.149! Upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na pomike. Sila F je enaka* 10 kN.



Slika 5.149: Enktrat statično nedoločena konstrukcija

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena ($n = 2 + 1 + 2(2 - 1) \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 1$). Izberemo osnovno konstrukcijo tako, da sprostimo medsebojna zasuka na vrhu konstrukcije (slika 5.150).



Slika 5.150: Osnovna konstrukcija

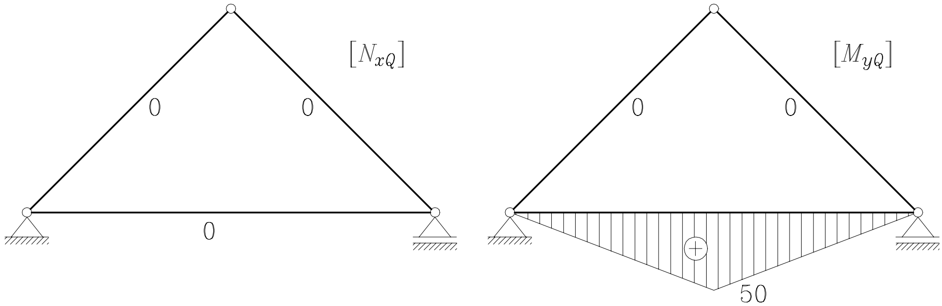
Neznano silo X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}\, X_1 + b_1 = 0.$$

Koeficienta a_{11} in b_1 določimo po enačbah

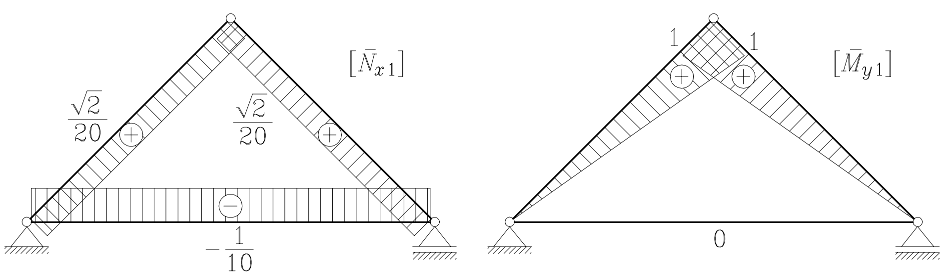
$$a_{11} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left(\frac{\bar{N}_{x1}\, \bar{N}_{x1}}{E\, A_x} + \frac{\bar{M}_{y1}\, \bar{M}_{y1}}{E\, I_y} \right) dx, \quad b_1 = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left(\frac{\bar{N}_{x1}\, N_{xQ}}{E\, A_x} + \frac{\bar{M}_{yi}\, M_{yQ}}{E\, I_y} \right) dx.$$

Na sliki 5.151 prikazujemo notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi sile F. Prečnih sil ne upoštevamo, osne sile so enake nič.



Slika 5.151: Notranje sile zaradi sile F na osnovni konstrukciji

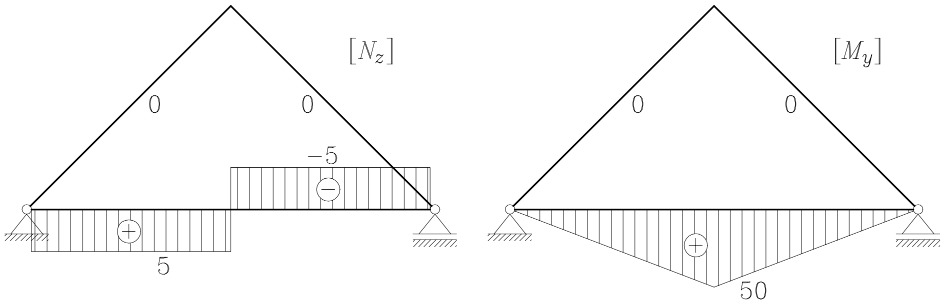
Na sliki 5.152 prikazujemo notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi momenta $X_1 = 1$.



Slika 5.152: Osna sila in upogibni moment zaradi momenta $X_1 = 1$ na osnovni konstrukciji

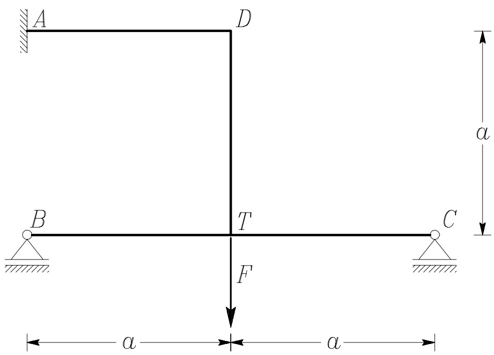
Iz diagramov na slikah 5.151 in 5.152 sledi, da je koeficient a_{11} različen od nič, b_1 pa enak nič. To pomeni, da je moment X_1 enak nič. Diagrame notranjih sil na statično nedoločeni konstrukciji prikazujemo na sliki 5.153.

Ker so po linearni teoriji elastičnosti vzdolžni in prečni pomiki v nosilcu med seboj neodvisni, povzroči navpična sila na vodoravni element le navpične pomike. Razdalja med podporama A in B se ne spremeni in so zato notranje sile v zgornjem nosilcu enake nič.



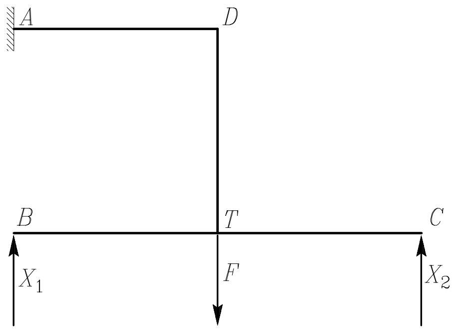
Slika 5.153: Od nič sta različna le prečna sila in upogibni moment v vodoravnem nosilcu

Primer 5.38 *Za konstrukcijo na sliki 5.154 določimo navpični pomik točke T! Togost elementov konstrukcije je za vse elemente enaka $EI_y =$ konst. Konstrukcija je obtežena le s točkovno silo F v točki T.*



Slika 5.154: Geometrija in obtežba

Stopnja statične nedoločenosti je $n = 2$ $(n = 3 + 1 + 1 - 3 \cdot 2)$. Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da odstranimo podpori B in C (slika 5.155).



Slika 5.155: Osnovna konstrukcija

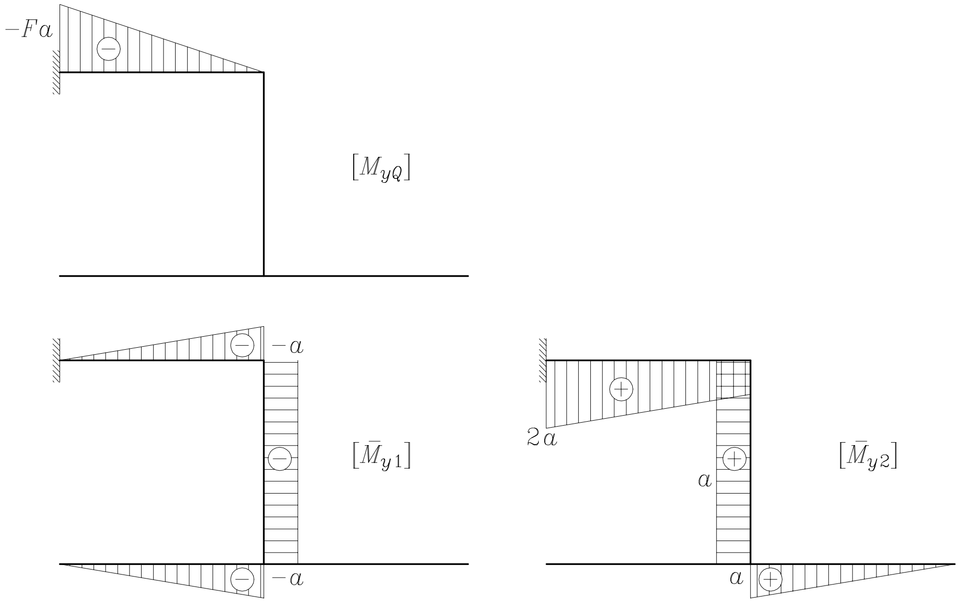
Kinematična pogoja sta:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Pri računu pomika točke T zanemarimo vpliv osnih sil, zato ta pomik določimo po enačbi

$$w_T = \sum_{el} \int_0^L \frac{M_y^{nk}\, \bar{M}_{yF}}{EI_y} dx.$$

Diagrami upogibnega momenta zaradi zunanje obtežbe in zaradi sil $X_1 = 1$ in $X_2 = 1$ so prikazani na sliki 5.156.



Slika 5.156: Upogibni moment zaradi sile F ter sil X_1 in X_2

Koeficiente a_{ij} in b_i določimo iz diagramov na 5.156:

$$E\, I_y\, a_{11} = \frac{a\, a}{2}\frac{2}{3}\, a \cdot 2 + a^3 = \frac{5}{3}a^3,$$
$$E\, I_y\, a_{22} = \frac{a\, a}{2}\frac{2}{3}a + a^3 + \frac{a\, a}{2}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}2\, a\right) + \frac{2\, a\, a}{2}\left(\frac{2}{3}2\, a + \frac{a}{3}\right) = \frac{11\, a^3}{3},$$
$$E\, I_y\, a_{12} = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}2\, a\right) - a^3 = -\frac{5}{3}a^3,$$

$$E\,I_y\,b_1 = \frac{F\,a\,a}{2}\frac{a}{3} = \frac{F\,a^3}{6},$$
$$E\,I_y\,b_2 = \frac{F\,a^2}{2}\left(\frac{a}{3}+\frac{2}{3}2\,a\right) = -\frac{5\,F\,a^3}{6}.$$

Rešitev sistema kinematičnih enačb

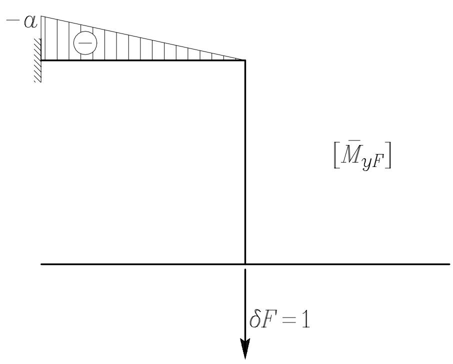
$$\begin{bmatrix} \frac{5\,a^3}{3} & -\frac{5\,a^3}{3} \\ -\frac{5\,a^3}{3} & \frac{11\,a^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{F\,a^3}{6} \\ \frac{5\,F\,a^3}{6} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 5\,F \end{bmatrix}$$

je

$$X_1 = \frac{7\,F}{30}, \qquad X_2 = \frac{F}{3}.$$

Določitev pomika w_T

Osnovno konstrukcijo obtežimo z virtualno silo $\delta F = 1$ na mestu in v smeri iskanega pomika. Upogibni moment na osnovni konstrukciji zaradi sile $\delta F = 1$ prikazujemo na sliki 5.157.



Slika 5.157: Upogibni moment zaradi sile $\delta F = 1.0$

Upoštevamo, da je

$$M_y^{nk} = M_{yQ} + X_1\,\bar{M}_{y1} + X_2\,\bar{M}_{y2}$$

in da je $\bar{M}_{yF}$ različen od nič le v zgornjem vodoravnem elementu

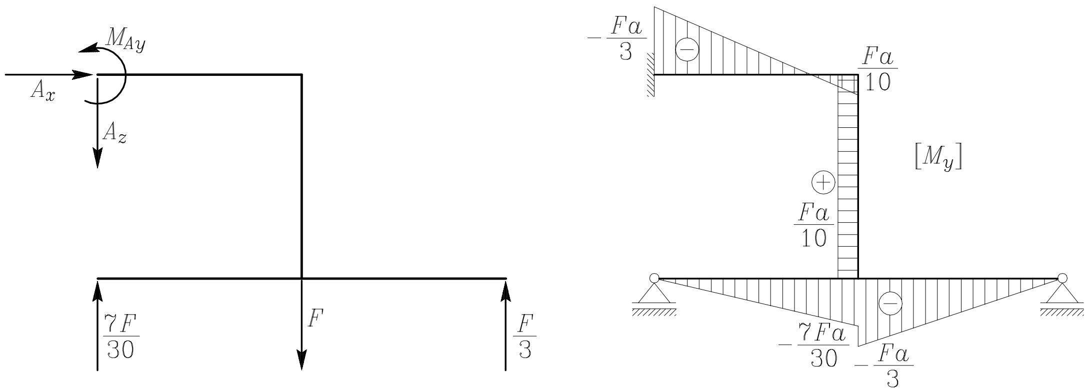
$$w_T = \int_0^a \frac{M_{yQ}\,\bar{M}_{yF}}{E\,I_y}\,dx + X_1 \int_0^a \frac{\bar{M}_{y1}\,\bar{M}_{yF}}{E\,I_y}\,dx X_2 \int_0^a \frac{\bar{M}_{y2}\,\bar{M}_{yF}}{E\,I_y}\,dx.$$

Te integrale izračunamo na osnovi diagramov na slikah 5.156 in 5.157

$$w_T = \frac{1}{E\,I_y}\left[\frac{F\,a\,a}{2}\frac{2}{3}a + X_1\frac{a\,a}{2}\frac{1}{3}a - X_2\frac{a\,a}{2}\left(\frac{2}{3}\,2a+\frac{1}{3}a\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{E\,I_y}\left(\frac{F\,a^3}{3} + \frac{7\,F}{30}\frac{a^3}{6} - \frac{F}{3}\frac{5\,a^3}{6}\right) = \frac{17\,F\,a^3}{180\,E\,I_y}.$$

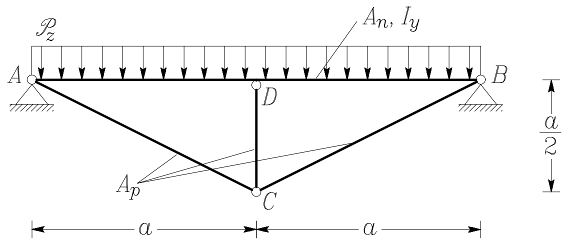
Na koncu izračunamo še reakcije in prikažemo potek momentov v statično nedoločeni konstrukciji (slika 5.158). Pri določitvi reakcij in upogibnih momentov upoštevamo princip superpozicije

$$A_x = 0,$$
$$A_z = -F + \frac{7\,F}{30} + \frac{F}{3} = -\frac{13\,F}{30},$$
$$M_{Ay} = F\,a - 2\,a\frac{F}{3} = \frac{F\,a}{3}.$$



Slika 5.158: Reakcije in upogibni moment na statično nedoločeni konstrukciji

Primer 5.39 *Izračunajmo notranje sile ter navpični pomik točke C za konstrukcijo na sliki 5.159! Velikost linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ je 0.088 MN/m, razdalja a je 4 m, modul elastičnosti materiala E je* 200000 MPa, *vztrajnostni moment I_y nosilca je* $0.000533\ \mathrm{m}^4$, *ploščina prečnega prereza A_n je* $0.05\ \mathrm{m}^2$, *ploščina A_p prečnega prereza palic pa je* $0.005559\ \mathrm{m}^2$.

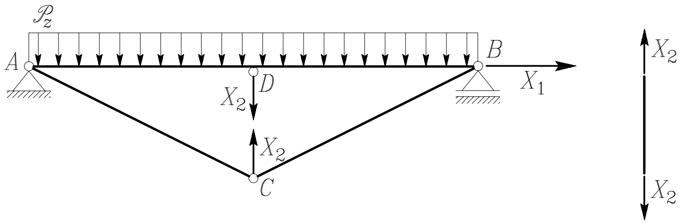


Slika 5.159: Konstrukcija je sestavljena iz nosilca in treh palic

Konstrukcija je dvakrat statično nedoločena. Stopnjo statične nedoločenosti izračunamo po enačbi

$$n = (2+2) + 2\,(3-1) + 2\,(2-1)\cdot 3 - 3\cdot 4 = 2.$$

Osnovno konstrukcijo lahko izberemo tako, da sprostimo vodoravni pomik v podpori B in iz konstrukcije izrežemo navpišno palico (slika 5.160).

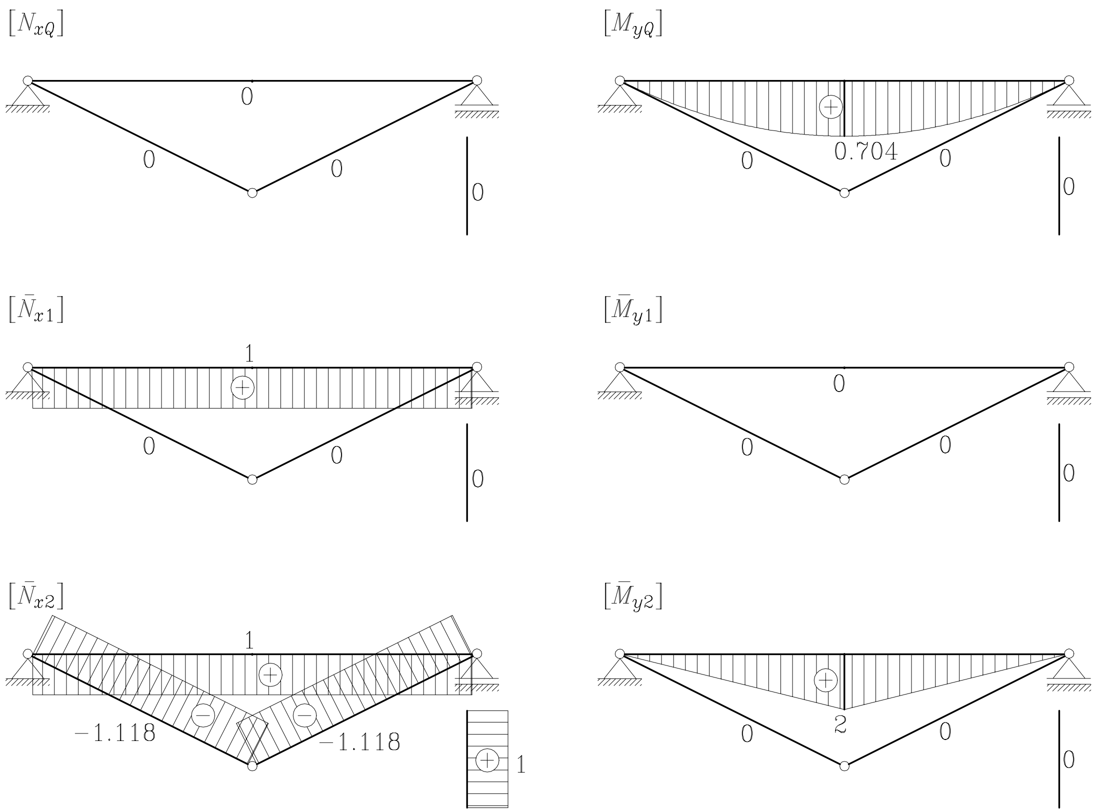


Slika 5.160: Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da dobimo statično določeno konstrukcijo

Neznani sili X_1 in X_2 izračunamo iz kinematičnih pogojev

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Na sliki 5.161 prikazujemo osno silo in upogibni moment zaradi linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ ter zaradi sil $X_1 = 1$ in $X_2 = 1$.



Slika 5.161: Notranje sile na osnovni konstrukciji

Koeficienti a_{11}, a_{12}, A_{22}, b_1 in b_2:

$$E\,a_{11} = \frac{1}{A_n}\,8\cdot 1\cdot 1 = \frac{8}{0.05} = 160,$$
$$E\,a_{12} = \frac{1}{0.05}\,8\cdot 1\cdot 1 = 160 = E\,a_{21},$$
$$E\,a_{22} = \frac{1}{0.05}\,8\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{5.559\cdot 10^{-3}}\,(1.118^2\cdot 4.472\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1) + \frac{1}{5.33\cdot 10^{-4}}\,\frac{2\cdot 4}{2}\cdot\frac{2}{3}2\cdot 2 = $$
$$= 22543.5,$$
$$E\,b_1 = 0,$$
$$E\,b_2 = \frac{1}{I_y}\cdot 0.704\cdot 4\cdot\frac{2}{3}1.25\cdot 2 = 8805.5.$$

Upoštevali smo, da je $l_p = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 4.472$ m, in da je moment na sredini nosilca zaradi enakomerne linijske obtežbe enak $\mathscr{P}_z\,(2\,a)^2/8 = 0.704$ MNm. Izračunali smo še M_{y2} pod težiščem $x = 5\cdot 4/8 = 2.5$ polovice kvadratne parabole: $M_{y2} = 2\cdot 2.5/4 = 1.25$. Rešitev sistema enačb

$$160\,X_1 + 160\,X_2 = 0,$$
$$160\,X_1 + 22543.5\,X_2 + 8805.5 = 0$$

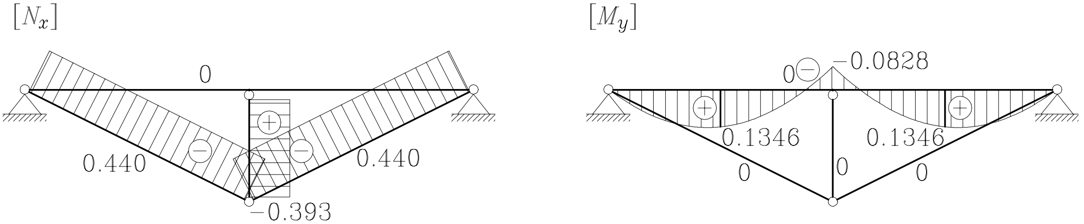
je

$$X_1 = 0.3934\ \text{MN}, \qquad X_2 = -0.3934\ \text{MN}.$$

Diagrami notranjih sil

Z upoštevanjem principa superpozicije lahko določimo diagrama osne sile in upogibnega momenta (slika 5.162). Vrednost upogibnega momenta v nosilcu izračunajmo pri $x = 2$ m, $x = 4$ m in $x = 6$ m:

$$M_y(2) = M_y(6) = 0.528 - 0.3934\cdot 1 = 0.1346\ \text{MNm},$$
$$M_y(4) = M_{yC} = 0.704 - 0.3934\cdot 2 = -0.0828\ \text{MNm}.$$

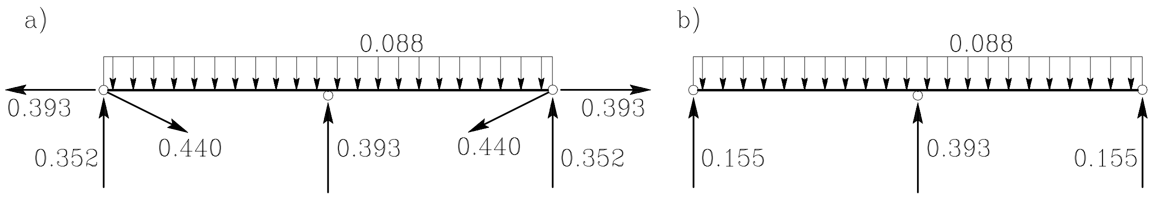


Slika 5.162: Diagrama osne sile in upogibnega momenta na statično nedoločeni konstrukciji

Za račun prečnih sil v nosilcu izračunamo reakcije statično nedoločene konstrukcije tako, da na osnovno konstrukcijo postavimo razen podane linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ še sili X_1 in X_2. Reakcije izračunamo iz ravnotežnih pogojev in dobimo

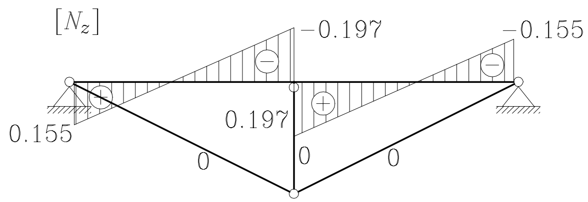
$$A_x = -0.3934 \text{ MN}, \quad A_z = -0.352 \text{ MN}, \quad B_z = -0.352 \text{ MN}.$$

Sile, ki delujejo na nosilec, prikazujemo na sliki 5.163a. Podobno prikazujemo tudi na sliki 5.163b, s tem, da na obeh krajnih podporah narišemo rezultanto vseh treh sil, ki na ti vozlišči delujejo.



Slika 5.163: Sile, ki delujejo na nosilec

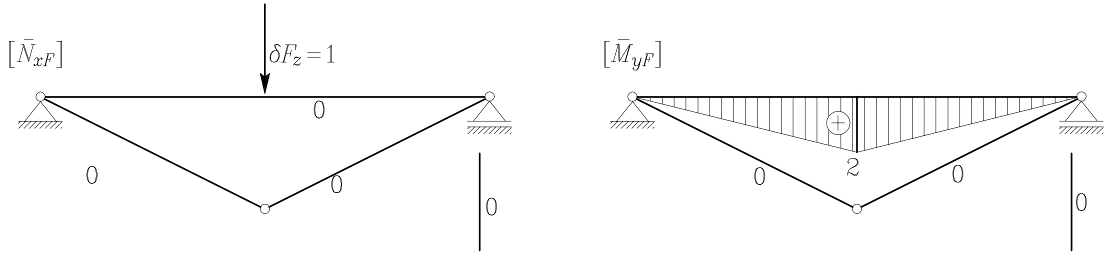
Potek prečne sile v vodoravnem nosilcu prikazujemo na sliki 5.164a.



Slika 5.164: Diagram prečne sile

Račun pomika točke C

Na sliki 5.165 prikazujemo notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$.



Slika 5.165: Diagrama osne sile in upogibnega momenta zaradi sile $\delta F_z = 1$

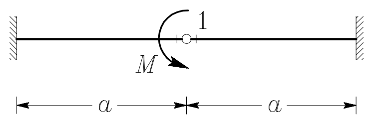
Pomik w_C izračunamo po enačbi, saj so osne sile enake nič, vpliv prečnih sil pa zanemarimo

$$w_C = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{yF}\, M_y^{nk}}{E\, I_y}\, dx.$$

Upoštevamo sliko 5.162 in sliko 5.165 ter dobimo:

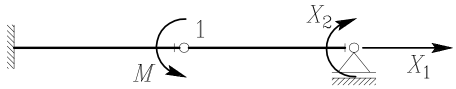
$$w_C = \frac{2}{E\,I_y}\left(0.704 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}1.25 + \frac{4 \cdot 2\,X_2}{2} \cdot \frac{2}{3}\,2\right) = 0.00466 \text{ m.}$$

Primer 5.40 *Določimo reakcije, diagrame notranjih sil za konstrukcijo na sliki 5.166 in zasuk osi nosilca v točki* 1 *tik desno od členka! Razdalja* a *je enaka* 100 cm*, elastični modul* E *ter ploščina* A_x *in vztrajnostni moment* I_y *prečnega prereza so konstantne. Upoštevajmo tudi vpliv osnih sil na pomike, vpliv prečnih sil pa zanemarimo.*



Slika 5.166: Moment deluje na element tik levo od členka

Konstrukcija je dvakrat statično nedoločena $n = 3 + 3 + 2(2 - 1) - 2 \cdot 3 = 2$. Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da v desni podpori sprostimo vodoravni pomik in zasuk (slika 5.167).

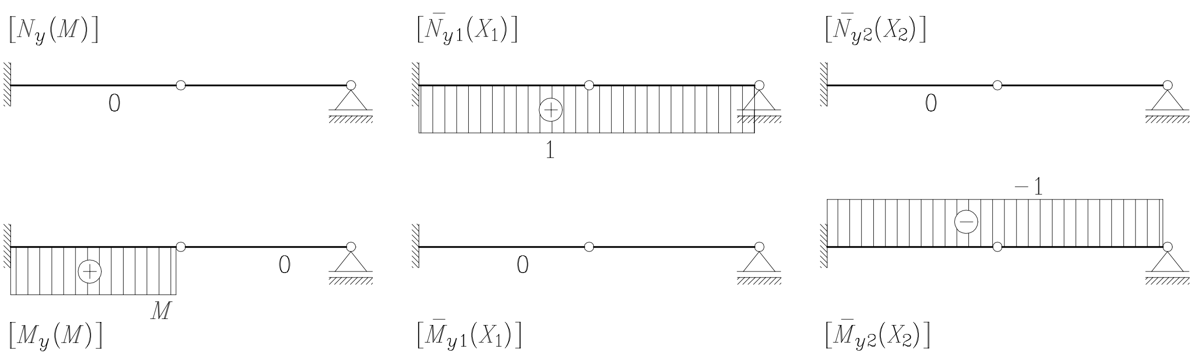


Slika 5.167: Osnovno konstrukcijo izberemo tako, da v desni podpori dovolimo dve prostostni stopnji gibanja

Neznani sili X_1 in X_2 izračunamo iz kinematičnih pogojev

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Na sliki 5.168 prikazujemo notranje sile zaradi momenta M, zaradi sile $X_1 = 1$ in momenta $X_2 = 1$.



Slika 5.168: Notranje sile na osnovni konstrukciji

Koeficiente a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1 in b_2 izračunamo na osnovi diagramov s slike 5.168

$$a_{11} = \frac{1}{E\,A_x}\,2\,a \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2\,a}{E\,A_x}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E\,I_y}\,\frac{a}{2}\,\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2\,a}{3\,E\,I_y}, \qquad a_{12} = 0.$$

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = \frac{1}{E\,I_y}\,M\,a \cdot \frac{1}{2} = \frac{M\,a}{2\,E\,I_y}.$$

Koeficiente vstavimo v kinematični enačbi

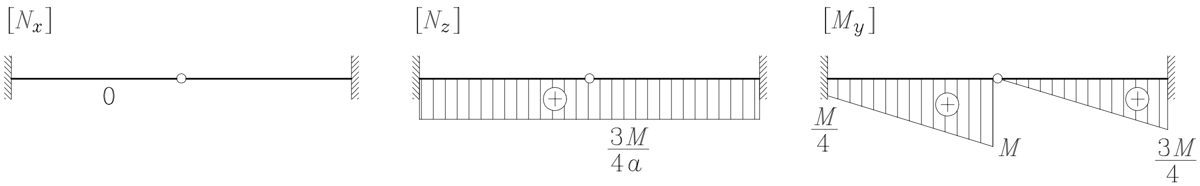
$$\begin{bmatrix} \frac{2\,a}{E\,A_x} & 0 \\ 0 & \frac{2\,a}{3\,E\,I_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{M\,a}{2\,E\,I_y} \end{bmatrix}$$

in ju rešimo. Tako dobimo

$$X_1 = 0, \quad X_2 = -\frac{3\,M}{4}.$$

Če vpliva osnih sil ne upoštevamo, sile X_1 ne moremo izračunati, ker je prva izmed kinematičnih enačb identično izpolnjena ($a_{11} = a_{12} = b_1 = 0$). Reakcije in notranje sile izračunamo z upoštevanjem principa superpozicije (slika 5.169)

$$A_x = 0, \quad A_z = -\frac{3\,M}{4\,a}, \quad M_A = -\frac{M}{4}, \quad B_z = \frac{3\,M}{4\,a}.$$

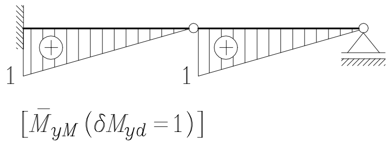


Slika 5.169: Reakcije in notranje sile na statično nedoločeni konstrukciji

Pri določanju zasuka ω_{1d} upoštevamo, da so osne sile na statično nedoločeni konstrukciji enake nič ($N_x^{nk} = 0$). Zanemarimo tudi vpliv prečnih sil. Zasuk statično nedoločene konstrukcije računamo po enačbi

$$\omega_{1d} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{yM}\,M_y^{nk}}{E\,I_y}\,dx.$$

Potrebujemo notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi virtualnega momenta $\delta M_{yd} = 1$, ki deluje na element tik desno od členka. Diagram upogibnih momentov prikazujemo na sliki 5.170.

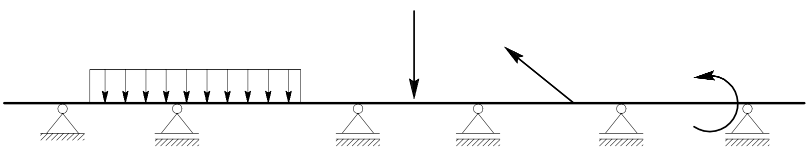


Slika 5.170: Diagram upogibnega momenta zaradi virtualnega momenta $\delta M_{yd} = 1$

Zasuk ω_{1d} je enak:

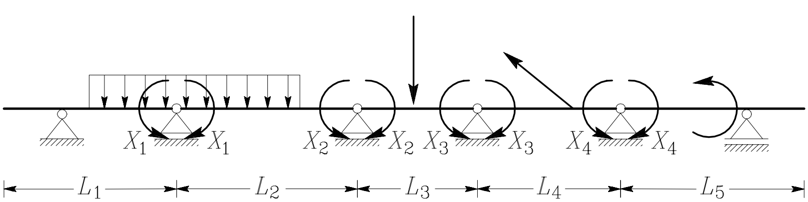
$$\omega_{1d} = \frac{1}{E\,I_y}\left(\frac{3\,M}{4}\frac{a}{2}\frac{1}{3} + \frac{M}{4}a\frac{1}{2} + \frac{3\,M}{4}\frac{a}{2}\frac{1}{3}\right) = \frac{3\,M\,a}{8\,E\,I_y}.$$

Primer 5.41 *Določimo kinematične pogoje za kontinuirni nosilec, podprt s šestimi podporami (slika 5.171). Modul elastičnosti E in prečni prerez se vzdolž osi nosilca ne spreminjata.*



Slika 5.171: Na kontiunirni nosilec deluje poljubna obtežba

Primer na sliki 5.171 je štirikrat statično nedoločena konstrukcija ($n = 4$). Osnovno konstrukcijo lahko izberemo tako, da na mestu vmesnih podpor v nosilec vstavimo členke, ki dovolijo medsebojni zasuk okrog osi y (slika 5.172).



Slika 5.172: Osnovna konstrukcija in neznani momenti X_i, $(i = 1, \ldots, n)$

Kinematični pogoj za vozlišče i zapišemo z enačbo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,X_j + b_i = \Delta\omega_i = 0.$$

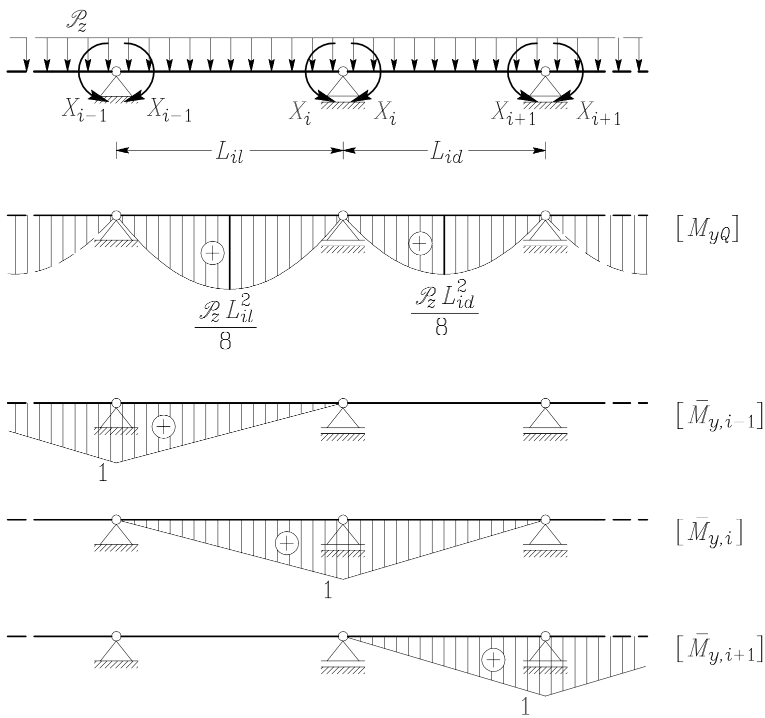
Ob tako izbrani osnovni konstrukciji vplivajo na medsebojni zasuk v točki i le momenti X_{i-1}, X_i in X_{i+1} ter zunanja obtežba v poljih levo in desno od podpore i. Zato za podporo i velja:

$$i: \quad a_{i,i-1}\,X_{i-1} + a_{ii}\,X_i + a_{i,i+1}\,X_{i+1} + b_i(L_{i-1}, L_i) = 0.$$

V matrični obliki lahko kinematične pogoje zapišemo takole:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & & & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & 0 \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Zadnja enačba je trimomentna ali Clapeyronova enačba. Zapišimo trimomentno enačbo za primer, ko na celotno dolžino nosilca deluje konstantna linijska obtežba $\mathscr{P}_z$ (slika 5.173).



Slika 5.173: Na medsebojni zasuk v i vpliva le obtežba v poljih levo in desno od te točke

Koeficiente $a_{i,i-1}$, $a_{i,i}$, $a_{i,i+1}$ in b_i izračunamo iz enačb:

$$a_{ij} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{yi}\,\bar{M}_{yj}}{E\,I_y}\,dx, \quad b_i = \sum_{\text{el}} \int_0^L \frac{\bar{M}_{yi}\,M_{yQ}}{E\,I_y}\,dx.$$

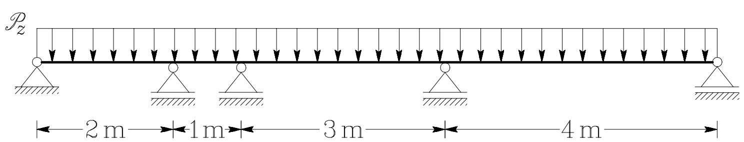
Tako dobimo:

$$
\begin{aligned}
E\,I_y\,b_i &= \frac{\mathscr{P}_z\,L_{il}^2}{8}\,\frac{2}{3}\,L_{il}\,\frac{1}{2} + \frac{\mathscr{P}_z\,L_{id}^2}{8}\,\frac{2}{3}\,L_{id}\,\frac{1}{2} = \frac{\mathscr{P}_z}{24}\,(L_{il}^3 + L_{id}^3),\\
E\,I_y\,a_{i,i-1} &= 1\cdot L_{il}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{L_{il}}{6},\\
E\,I_y\,a_{i,i} &= L_{il}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} + L_{id}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,(L_{il} + L_{id}),\\
E\,I_y\,a_{i,i+1} &= 1\cdot L_{id}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = \frac{L_{id}}{6},
\end{aligned}
$$

Koeficiente vstavimo v trimomentno enačbo in dobimo kinematični pogoj za točko i:

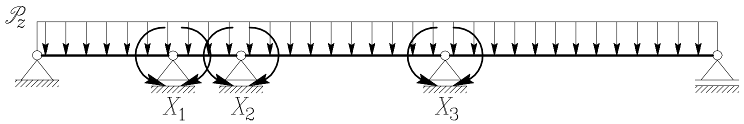
$$4\,L_{il}\,X_{il} + 8\,(L_{i-1} + L_i)\,X_i + 4\,L_{id}\,X_{i+1} = -\mathscr{P}_z\,(L_{il}^3 + L_{id}^3).$$

Primer 5.42 *Določimo reakcije ter potek notranjih sil za neprekinjeni nosilec na sliki 5.174! Velikost linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ je* $40\ \mathrm{kN/m}$.



Slika 5.174: Nosilec poteka preko štirih polj in je obtežen s konstantno linijsko obtežbo

Konstrukcija je trikrat statično nedoločena. Na sliki 5.175 prikazujemo osnovno konstrukcijo.



Slika 5.175: Osnovna konstrukcija kontinuirnega nosilca preko štirih polj

Kinematične enačbe za vmesne podpore zapišemo takole:

$$
\begin{aligned}
&8\,(2+1)\cdot X_1 + 4\cdot 1\cdot X_2 = -40\,(2^3 + 1^3),\\
&4\cdot 1\cdot X_1 + 8\,(1+3)\cdot X_2 + 4\cdot 3\cdot X_3 = -40\,(1^3 + 3^3),\\
&4\cdot 3\cdot X_2 + 8\,(3+4)\cdot X_3 = -40\,(3^3 + 4^3).
\end{aligned}
$$

Enačbe delimo s štiri in zapišemo v matrični obliki:

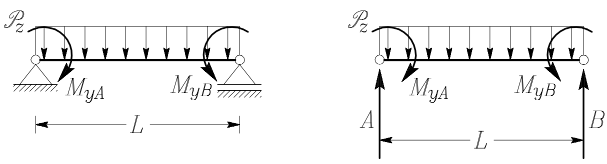
$$
\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0\\ 1 & 8 & 3\\ 0 & 3 & 14 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -90\\ -280\\ -910 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev tega sistema enačb je:

$$X_1 = -13.38 \ \text{kNm}, \quad X_2 = -9.74 \ \text{kNm}, \quad X_3 = -62.91 \ \text{kNm}.$$

Vsako polje osnovne konstrukcije lahko obravnavamo kot prostoležeči nosilec, obtežen s konstantno obtežbo $\mathscr{P}_z$ v polju in točkovnima momentoma M_{yA} in M_{yB} v krajiščih (slika 5.176). Reakciji A in B izračunamo po ravnotežnih enačbah:

$$A = \frac{\mathscr{P}_z L}{2} + \frac{M_{yB} - M_{yA}}{L}, \quad B = \frac{\mathscr{P}_z L}{2} + \frac{M_{yA} - M_{yB}}{L}.$$



Slika 5.176: Obtežba in reakcije enega nosileca

Reakcije R_1 do R_3 izračunamo tako, da seštejemo reakciji za dve sosednji polji

$$R_0 = A_1 = \frac{40 \cdot 2}{2} + \frac{-13.4}{2} = 33.31 \ \text{kN},$$
$$R_1 = B_1 + A_2 = \frac{40 \cdot 2}{2} + \frac{13.4}{2} + \frac{40 \cdot 1}{2} + \frac{-9.7 + 13.4}{1} = 70.33 \ \text{kN},$$
$$R_2 = B_2 + A_3 = \frac{40 \cdot 1}{2} + \frac{-13.4 + 9.7}{1} + \frac{40 \cdot 3}{2} + \frac{-62.5 + 9.7}{3} = 58.63 \ \text{kN},$$
$$R_3 = B_3 + A_4 = \frac{40 \cdot 3}{2} + \frac{-9.7 + 62.5}{3} + \frac{40 \cdot 4}{2} + \frac{62.5}{4} = 173.46 \ \text{kN},$$
$$R_4 = B_4 = \frac{40 \cdot 4}{2} + \frac{-62.5}{4} = 64.27 \ \text{kN}.$$

Prečne sile izračunamo tako, da kontinuirni nosilec prerežemo tik desno in tik levo ob podpori in zapišemo ravnotežni pogoj za navpično smer. Na ta način zapišemo:

$$N_{z0} = R_0 = 33.31 \ \text{kN},$$
$$N_{z1}^l = R_0 - \mathscr{P}_z L_1 = 33.3 - 40 \cdot 2 = -46.69 \ \text{kN},$$
$$N_{z1}^d = N_{z1}^l + R_1 = -46.7 + 70.4 = -23.64 \ \text{kN},$$
$$N_{z2}^l = N_{z1}^d - \mathscr{P}_z L_2 = 23.7 - 40 \cdot 1 = -16.36 \ \text{kN},$$
$$N_{z2}^d = N_{z2}^l + R_2 = -16.3 + 58.7 = 42.27 \ \text{kN},$$
$$N_{z3}^l = N_{z2}^d - \mathscr{P}_z L_3 = 42.4 - 40 \cdot 3 = -77.73 \ \text{kN},$$
$$N_{z3}^d = N_{z3}^l + R_3 = -77.6 + 173.2 = 95.73 \ \text{kN},$$
$$N_{z4}^l = -R_4 = N_{z3}^d - \mathscr{P}_z L_4 = 95.6 - 40 \cdot 4 = -64.27 \ \text{kN}.$$

Največje upogibne momente zaradi linijske obtežbe $\mathscr{P}_z$ pri $L_i/2$ izračunamo po enačbi $\mathscr{P}_z\, L_i^2/8$:

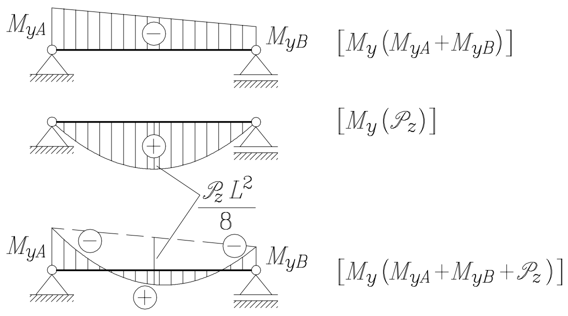
$$0 \le x \le 2 \quad M_{yQ} = \frac{40 \cdot 2^2}{8} = 20 \;\text{kNm},$$
$$2 \le x \le 3 \quad M_{yQ} = \frac{40 \cdot 1^2}{8} = 5 \;\text{kNm},$$
$$3 \le x \le 6 \quad M_{yQ} = \frac{40 \cdot 3^2}{8} = 45 \;\text{kNm},$$
$$6 \le x \le 10 \quad M_{yQ} = \frac{40 \cdot 4^2}{8} = 80 \;\text{kNm}.$$

Pri risanju diagramov upogibnega momenta upoštevamo princip superpozicije tako, da združimo moment zaradi momentov v krajiščih nosilca ter moment zaradi linijske obtežbe (slika 5.177). Na ta način izračunamo tudi vrednosti upogibnega momenta na sredini vsakega nosilca

$$M_y(L/2) = \frac{M_{yA} + M_{yB}}{2} + M_{yQ}.$$

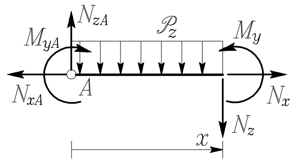
Upogibni momenti na sredini vseh štirih polj so:

$$0 \le x \le 2 \quad M_y(L/2) = -\frac{13.4}{2} + 20 = 13.31 \;\text{kNm},$$
$$2 \le x \le 3 \quad M_y(L/2) = -\frac{13.4 + 9.7}{2} + 5 = -6.56 \;\text{kNm},$$
$$3 \le x \le 6 \quad M_y(L/2) = -\frac{9.7 + 62.5}{2} + 45 = 8.68 \;\text{kNm},$$
$$6 \le x \le 10 \quad M_y(L/2) = -\frac{62.5}{2} + 80 = 48.54 \;\text{kNm}.$$



Slika 5.177: Določanje vrednosti upogibnega momenta zaradi obtežbe $\mathscr{P}_z$ in momentov na obeh podporah

Izračunajmo še mesto in velikost ekstremne vrednosti upogibnega momenta za vsak nosilec. Prostoležeči nosilec prerežemo nekje v polju in na prerezu predpostavimo notranje sile (slika 5.178).



Slika 5.178: Računski model za račun prečne sile N_z in upogibnega momenta M_y

Prečna sila in upogibni moment na poljubnem mestu nosilca sta:

$$N_z = N_{zA} - \mathscr{P}_z\, x, \quad M_y = N_{zA}\, x + M_{yA} - \frac{\mathscr{P}_z\, x^2}{2}.$$

Ker v tem primeru nimamo porazdeljene momentne obtežbe, ima upogibni moment ekstremno vrednost, kjer je prečna sila enaka nič. Lega ekstremne vrednosti upogibnega momenta je torej določena z

$$N_z = 0 \quad \rightarrow \quad x_e = \frac{N_{zA}}{\mathscr{P}_z},$$

ekstremna vrednost upogibnega momenta pa z

$$M_{ye} = N_{zA}\, x_e + M_{yA} - \frac{\mathscr{P}_z\, x_e^2}{2}.$$

Sedaj izračunajmo še lego in velikost ekstremne vrednosti upogibnega momenta za vsako polje, kjer x_e predstavlja razdaljo od lege ekstremnega momenta, do najbližje podpore na levi:

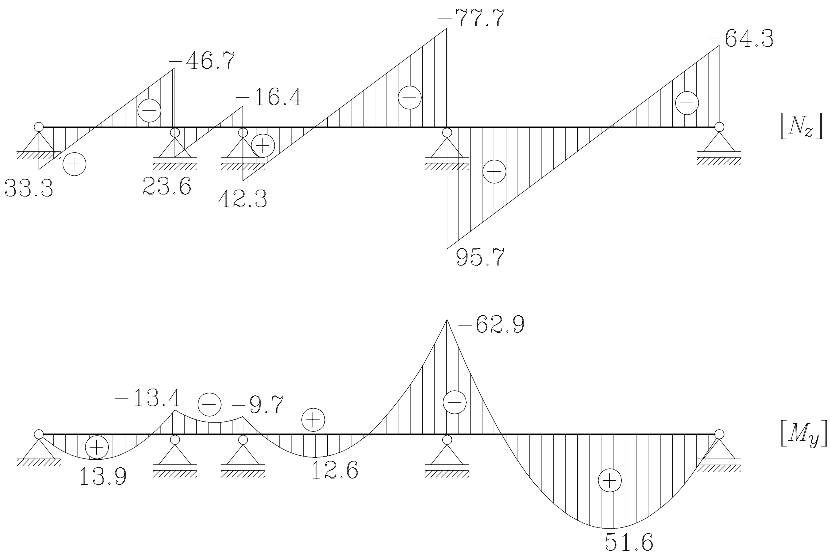
$$0 \le x \le 2 \quad x_e = \frac{33.31}{40} = 0.833 \text{ m}, \quad M_{ye} = 33.31 \cdot 0.833 - \frac{40 \cdot 0.833^2}{2} = 13.87 \text{ kNm},$$

$$2 \le x \le 3 \quad x_e = \frac{23.64}{40} = 0.591 \text{ m}, \quad M_{ye} = 23.64 \cdot 0.591 - 13.31 - \frac{40 \cdot 0.591^2}{2} = -6.39 \text{ kNm},$$

$$3 \le x \le 6 \quad x_e = \frac{42.27}{40} = 1.056 \text{ m}, \quad M_{ye} = 42.27 \cdot 1.056 - 9.74 - \frac{40 \cdot 1.056^2}{2} = 12.60 \text{ kNm},$$

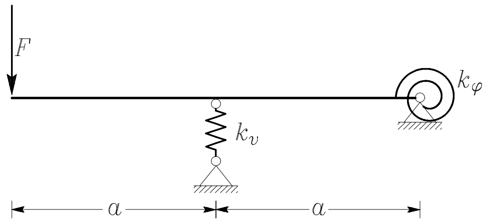
$$x_e = \frac{95.73}{40} = 2.393 \text{ m}, \quad M_{ye} = 95.73 \cdot 2.393 - 62.91 - \frac{40 \cdot 2.393^2}{2} = 51.64 \text{ kNm}.$$

Na sliki 5.179 prikazujemo diagram prečne sile in upogibnega momenta na statično nedoločenem kontinuirnem nosilcu.



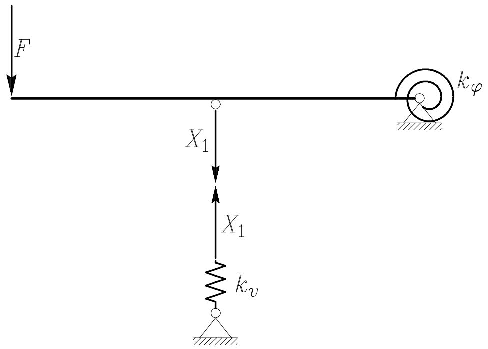
Slika 5.179: Diagram prečne sile in upogibnega momenta za kontinuirni nosilec

Primer 5.43 *Določimo silo in moment v vzmeteh ter diagram upogibnega momenta za konstrukcijo na sliki 5.180! Vzmet je linearno elastična, lastnosti materiala nosilca in njegov prečni prerez se vzdolž osi nosilca ne spreminjata. Togost linijske vzmeti je* k_v*, togost spiralne vzmeti* k_φ*, togost nosilca pa je* $E\,I_y$.



Slika 5.180: Nosilec je podprt z dvema linearno elastičnima vzmetema

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena ($n = 3 + 1 - 3 = 1$).Osnovno konstrukcijo, ki jo izberemo tako, da sprostimo pomik na mestu vzmeti, prikazujemo na sliki 5.181.



Slika 5.181: Za neznano silo izberemo silo v vzmeti

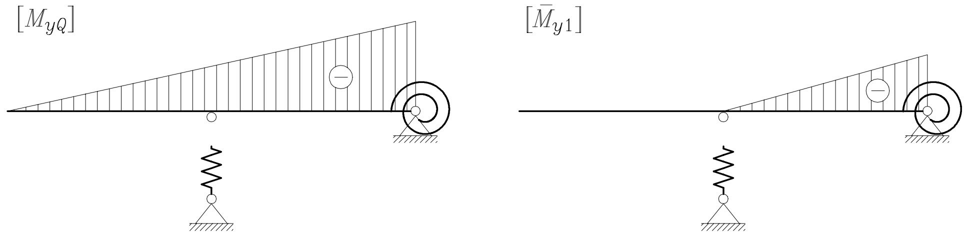
Neznano silo X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}\, X_1 + b_1 = 0.$$

Enačbi za koeficienta a_{11} in b_1 sta

$$a_{11} = \int_0^L \frac{\bar{M}_{y1}\, \bar{M}_{y1}}{E\, I_y}\, dx + \frac{\bar{N}_v\, \bar{N}_v}{k_v} + \frac{\bar{M}_v\, \bar{M}_v}{k_\varphi}, \quad b_1 = \int_0^L \frac{\bar{M}_{y1}\, M_{yQ}}{E\, I_y}\, dx + \frac{\bar{N}_v\, N_{vQ}}{k_v} + \frac{\bar{M}_v\, M_{vQ}}{k_\varphi}.$$

Na sliki 5.182 prikazujemo diagrama upogibnega momenta na osnovni konstrukciji zaradi sile F in zaradi sile $X_1 = 1$.



Slika 5.182: Diagrama M_{yQ} in $\bar{M}_{y1}$ na osnovni konstrukciji

Notranji sili v vzmeteh zaradi sile F in zaradi sile $X_1 = 1$ sta

$$N_{vQ} = 0, \quad M_{vQ} = -2\, a\, F, \quad \bar{N}_{v1} = 1, \quad \bar{M}_{v1} = -a.$$

Koeficienta a_{11} in b_1 sta:

$$a_{11} = \frac{1}{E\, I_y}\, \frac{a \cdot a}{2}\, \frac{2}{3} a + \frac{1}{k_v} + \frac{a^2}{k_\varphi} = \frac{a^3}{3\, E\, I_y} + \frac{1}{k_v} + \frac{a^2}{k_\varphi}$$

in

$$b_1 = \frac{1}{E\, I_y}\, \frac{a \cdot a}{2} \left(F\, a + \frac{2}{3} F\, a \right) + \frac{2\, a^2\, F}{k_\varphi} = \frac{5\, F\, a^3}{6\, E\, I_y} + \frac{2\, F\, a^2}{k_\varphi}.$$