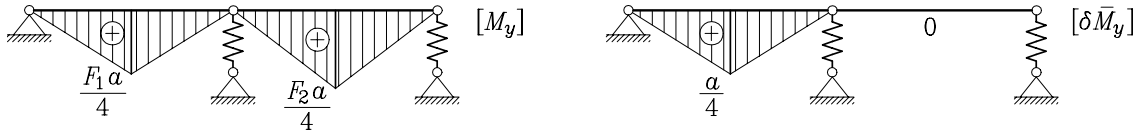


Določiti moramo upogibni moment v nosilcih ter sile v vzmeteh zaradi sil F_1 in F_2 ter zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$. Upogibna momenta M_y in $\delta \bar{M}_y$ prikazujemo na sliki 5.90.



Slika 5.90: Diagrama upogibnih momentov M_y in $\delta \bar{M}_y$

Osnovi sili v vzmeteh zaradi sil F_1 in F_2 sta $N_{v1} = -(F_1 + F_2)/2$ in $N_{v2} = -F_2/2$, zaradi virtualne sile $\delta F_z = 1$ pa je od nič različna le sila v prvi vzmeti $\delta \bar{N}_{v1} = -\delta F_z/2 = -1/2$. Delo δW_n^* je zato enako:

$$\delta W_n^* = 2 \frac{1}{E I_y} \frac{F_1 a}{4} \frac{a}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} + \left(\frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2} \right) \frac{1}{2} \frac{1}{k_{v1}}.$$

Upoštevamo izrek o virtualnih silah $\delta W_z^* = \delta W_n^*$ in dobimo

$$-\frac{1}{2} w_A + w_1 = \frac{F_1 a^3}{48} + \frac{F_1 + F_2}{4 k_{v1}}$$

oziroma

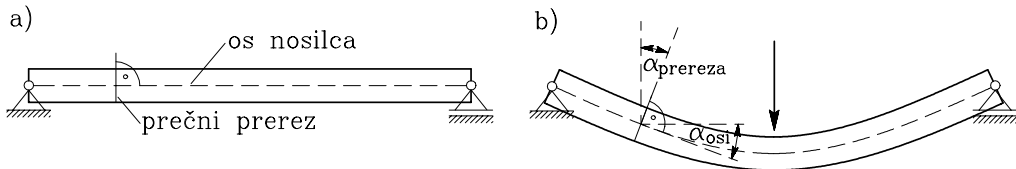
$$w_1 = \frac{w_A}{2} + \frac{F_1 a^3}{48} + \frac{F_1 + F_2}{4 k_{v1}}.$$

5.1.7 Vpliv strižnih napetosti zaradi prečnih sil na pomike linijskega nosilca

Če prečnih sil na deformiranje nosilca ne upoštevamo, ostane prečni prerez raven, pravi kot med osjo nosilca in prečnim prereзом se ohrani tudi po deformiranju ($\varepsilon_{xz} = 0$). To pomeni, da je zasuk α_{osi} osi nosilca enak zasuku α_{prereza} prečnega prereza

$$\alpha_{\text{prereza}} \equiv \alpha_{\text{osi}}.$$

Na sliki 5.91 prikazujemo lego nosilca pred in po deformiranju.

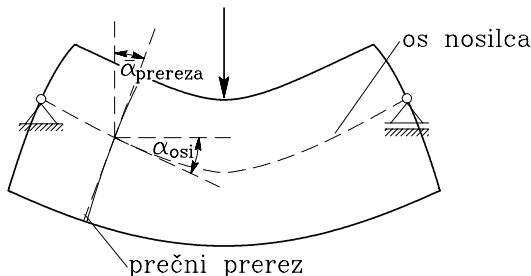


Slika 5.91: a) Os nosilca in prečni prerez pred obremenitvijo
b) Os nosilca in prečni prerez po obremenitvi

V primeru, da upoštevamo vpliv prečnih sil na deformiranje nosilca, se prečni prerez po obremenitvi deformira in ni več raven. To ugotovimo, če nosilec računsko obravnavamo kot dvodimenzionalno konstrukcijo in upoštevamo ravninsko napetostno stanje.[†] Spremeni pa se tudi pravi kot med osjo nosilca in

[†] M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, razdelek 4.3.5, 1998.

prečnim prerezom, ker je $\sigma_{xy} \neq 0$ in $\sigma_{xz} \neq 0$, je ($\varepsilon_{xy} \neq 0$ in $\varepsilon_{xz} \neq 0$). Na sliki 5.92 je prikazana lega nosilca po obremenitvi za primer, ko upoštevamo tudi vpliv strižnih napetosti na deformiranje.



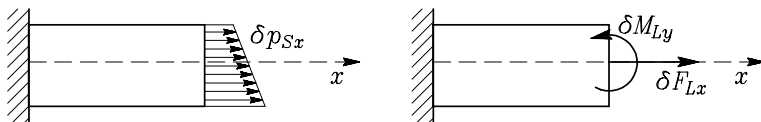
Slika 5.92: Os nosilca in prečni prerez po obremenitvi

Če nosilec računsko obravnavamo kot linijsko konstrukcijo, lahko določimo le **povprečni** zasuk $\bar{\alpha}_{\text{prereza}}$ prečnega prereza, ki se spreminja le v odvisnosti od koordinate x . Ker se pravi kot ne ohrani, je

$$\alpha_{\text{osi}} \neq \bar{\alpha}_{\text{prereza}}.$$

Pri računanju zasukov z izrekom o virtualnih silah dobimo zasuk prečnega prereza $\bar{\alpha}_{\text{prereza}}$ in ne zasuk osi nosilca α_{osi} . To je posledica definicije dela δW_z^* virtualne obtežbe na resničnih pomikih, ki je produkt **posplošene** virtualne sile in pripadajočega **posplošenega** pomika. Če na primer na krajni ($x = L$) prečni prerez nosilca deluje virtualna obtežba δp_{Sx} , jo lahko nadomestimo s silo δF_{Lx} in momentom δM_{Ly} (slika 5.93):

$$\delta F_{Lx} = \int_{\mathcal{A}_{Lx}} \delta p_{Sx} dA_x, \quad \delta M_{Ly} = \int_{\mathcal{A}_{Lx}} z \delta p_{Sx} dA_x.$$



Slika 5.93: Obtežba p_{Sx} pripada prečnemu prerezu \mathcal{A}_{Lx}

Ker predstavljata obtežbi δF_{Lx} in δM_{Ly} obtežbo prečnega prereza nosilca, k tem posplošenim silam pripadata posplošena pomika u_x in φ_z – to je pomik in zasuk prečnega prereza \mathcal{A}_{Lx} (glej razdelek 1.6). S φ_z označimo zasuk vlakna, ki je usmerjen v smeri z , okrog osi y . Delo δW_z^* virtualnih sil δF_{Lx} in δM_{Ly} na posplošenih pomikih u_x in φ_z je torej

$$\delta W_z^* = \delta F_{Lx} u_x + \delta M_{Ly} \varphi_z.$$

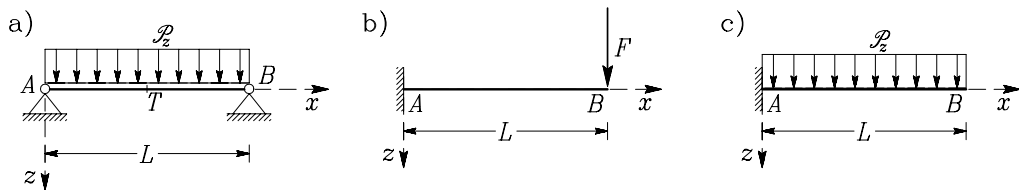
Sledi, da zasuk prečnega prereza linijskega elementa izračunamo po enačbi

$$\varphi_z = \delta \bar{W}_n^*. \quad (5.36)$$



Primer 5.25 Z upoštevanjem vpliva prečnih sil določimo pomike in zasuke za naslednje preproste primere:

- navpični pomik $w(L/2)$ točke $x = L/2$ in zasuk prečnega prereza $\varphi_z(0)$ ob podpori $x = 0$ na prostoležečem nosilcu, obteženem z enakomerno linijsko obtežbo (slika 5.94a),
- navpični pomik $w(L)$ in zasuk prereza $\varphi_z(L)$ na prostem koncu konzole, obtežene s točkovno silo (slika 5.94b),
- navpični pomik $w(L)$ in zasuk prereza $\varphi_z(L)$ na prostem koncu konzole, obtežene z enakomerno linijsko obtežbo (slika 5.94c).



Slika 5.94: a) Račun $w(L/2)$ in $\varphi_z(0)$ b) in c) Račun $w(L)$ in $\varphi_z(L)$

Nosilec je pravokotnega prečnega prereza širine b in višine h . Poissonov koeficient $\nu = 0.3$.

a) Navpični pomik $w(L/2)$ in zasuk prereza $\varphi_z(0)$ prostoležečega nosilca

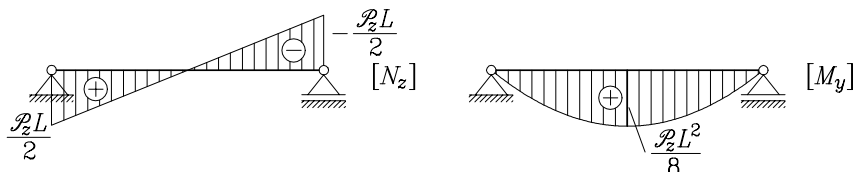
Pomik w_T izračunamo po enačbi:

$$w_T = \delta \bar{W}_n^* (\delta F_{Tz} = 1.0).$$

Delo $\delta \bar{W}_n^*$ virtualnih sil na resničnih deformacijah v linijskem nosilcu izračunamo z enačbo (5.33). Ker sta od nič različna le upogibni moment M_y in prečna sila N_z , računamo pomik w_T na prostem koncu konzole po enačbi

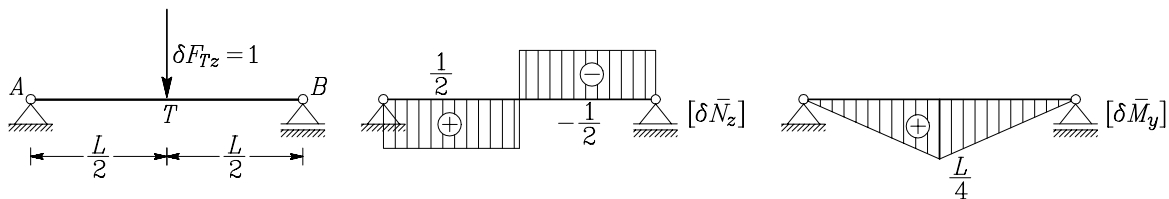
$$w_T = \int_0^L \left(\frac{\kappa_z N_z \delta \bar{N}_z}{G A_x} + \frac{M_y \delta \bar{M}_y}{E I_y} \right) dx.$$

Notranje sile zaradi obtežbe \mathcal{P}_z so prikazane na sliki 5.95.



Slika 5.95: Prečna sila in upogibni moment zaradi linijske obtežbe \mathcal{P}_z

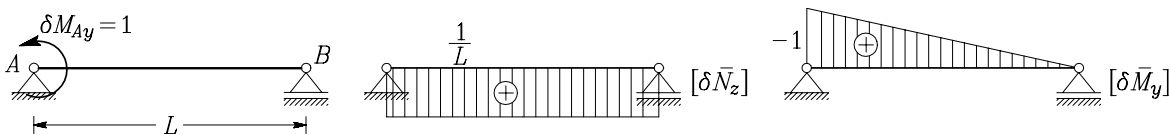
Notranje sile zaradi virtualne sile δF_{Tz} so prikazane na sliki 5.96.

Slika 5.96: Prečna sila in upogibni moment zaradi sile $\delta F_{Tz} = 1$

Navpični pomik w pri $x = L/2$ je (glej primer 5.5)

$$w(L/2) = \frac{1}{G A_z} \frac{\mathcal{P}_z L}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{E I_y} \frac{2}{3} \frac{\mathcal{P}_z L^2}{8} \frac{L}{2} \frac{5 L}{32} \frac{1}{2} = \frac{\mathcal{P}_z L^2}{8 k G A_x} + \frac{5 \mathcal{P}_z L^4}{384 E I_y}.$$

Notranje sile zaradi virtualne momenta δM_{Ty} so prikazane na sliki 5.97.

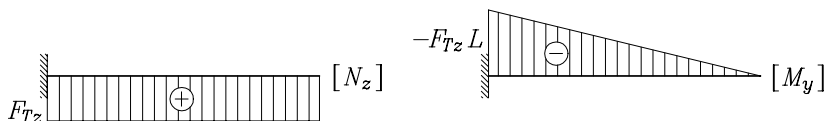
Slika 5.97: Prečna sila in upogibni moment zaradi momenta $\delta M_{Ty} = 1$

Zasuk prečnega prereza φ_z pri $x = 0$ je

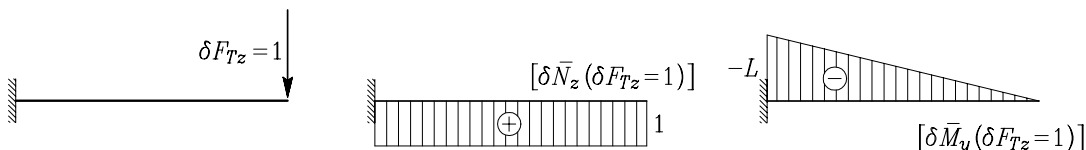
$$\varphi_z(0) = -\frac{1}{E I_y} \frac{\mathcal{P}_z L^2}{8} \frac{2}{3} L \frac{1}{2} = -\frac{\mathcal{P}_z L^3}{24 E I_y}.$$

b) Navpični pomik $w(L)$ in zasuk prereza $\varphi_z(L)$ prostega konca konzole, obtežene s silo F_{Tz}

Notranje sile zaradi sile F_{Tz} so prikazane na sliki 5.98.

Slika 5.98: Prečna sila in upogibni moment zaradi sile F_{Tz}

Notranje sile zaradi virtualne obtežbe δF_{Tz} so prikazane na sliki 5.99:

Slika 5.99: Prečna sila in upogibni moment zaradi sile $\delta F_{Tz} = 1$ 

Navpični pomik w_T pod silo F_{Tz} je

$$w_T = \frac{1}{E I_y} \frac{F_{Tz} L}{2} \frac{L}{3} L + \frac{\kappa_z}{G A_x} F_{Tz} L \cdot 1 = \frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} + \frac{\kappa_z F_{Tz} L}{G A_x} = \frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} \left(1 + \frac{3 \kappa_z E I_y}{L^2 G A_x} \right).$$

Če upoštevamo, da je

$$\kappa_z = 1.2, \quad \frac{E}{G} = 2(1 + \nu) = 2.6, \quad \frac{I_y}{A_x} = \frac{h^2}{12},$$

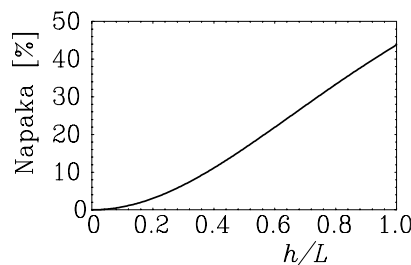
dobimo

$$w_T = \frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} \left(1 + 0.78 \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right).$$

V preglednici 5.2 in sliki 5.100 podajamo velikosti napake pri računu pomika w_T , če zanemarimo vpliv strižnih napetosti.

Tabela 5.2: Vpliv strižne napetosti na pomik

h/L	Pomik w_T	Napaka v %
0.1	$\frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} (1 + 0.0078)$	0.77
0.5	$\frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} (1 + 0.1950)$	16.32
1.0	$\frac{F_{Tz} L^3}{3 E I_y} (1 + 0.7800)$	43.82

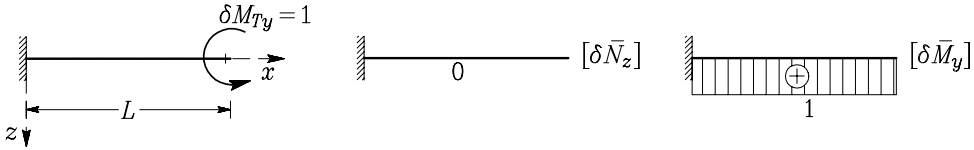


Slika 5.100: Vpliv strižne napetosti v odvisnosti od h/L

Iz prikazanih rezultatov sledi, da vpliva prečnih sil na pomike pri kratkih nosilcih ne smemo zanemariti. To seveda velja, če kratki nosilec obravnavamo kot linijski nosilec.

Za račun zasuka prereza $\varphi_z(L)$ potrebujemo notranje sile zaradi virtualnega momenta δM_{Ty} (slika 5.101)



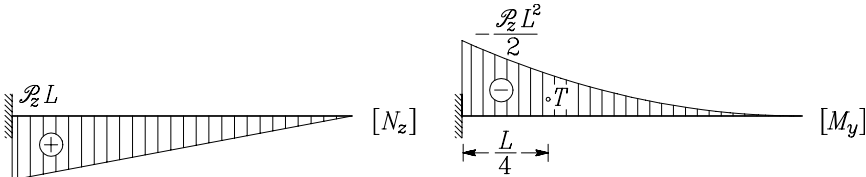
Slika 5.101: Prečna sila in upogibni moment zaradi momenta $\delta M_{Ty} = 1$

Zasuk prereza je

$$\varphi_z(L) = -\frac{1}{E I_y} F_{Tz} L \frac{L}{2} 1 = -\frac{F_{Tz} L^2}{2 E I_y}.$$

c) Navpični pomik $w(L)$ in zasuk prereza $\varphi_z(L)$ prostega konca konzole, obtežene z enakomerno linijsko obtežbo \mathcal{P}_z

Notranje sile zaradi obtežbe \mathcal{P}_z so prikazane na sliki 5.102.

Slika 5.102: Prečna sila in upogibni moment zaradi linijske obtežbe \mathcal{P}_z

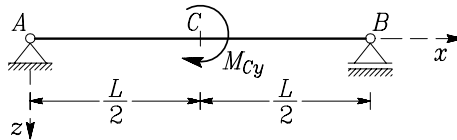
Notranje sile zaradi virtualne sile δF_{Tz} so prikazane na sliki 5.99. Navpični pomik w pri $x = L$ je

$$w(L) = \frac{1}{k G A_x} \mathcal{P}_z L \frac{L}{2} 1 + \frac{1}{E I_y} \frac{\mathcal{P}_z L^2}{2} \frac{L}{3} \frac{3}{4} = \frac{\mathcal{P}_z L^2}{2 k G A_x} + \frac{\mathcal{P}_z L^4}{8 E I_y}.$$

Notranje sile zaradi virtualne momenta δM_{Ty} so prikazane na sliki 5.101. Zasuk prečnega prereza φ_z pri $x = 0$ je

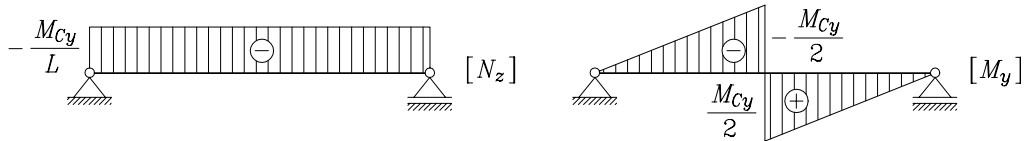
$$\varphi_z(L) = -\frac{1}{E I_y} \frac{\mathcal{P}_z L^2}{2} L \frac{1}{3} = -\frac{\mathcal{P}_z L^3}{6 E I_y}.$$

Primer 5.26 Z izrekom o virtualnih silah določimo zasuk ω_{Cy} prečnega prereza in navpični pomik w_C prostoležčega nosilca pri $x = L/2$ (slika 5.103)! Upoštevajmo tudi vpliv prečnih sil na pomike.

Slika 5.103: Prostoležči nosilec obtežen z momentom M_{Cy} 

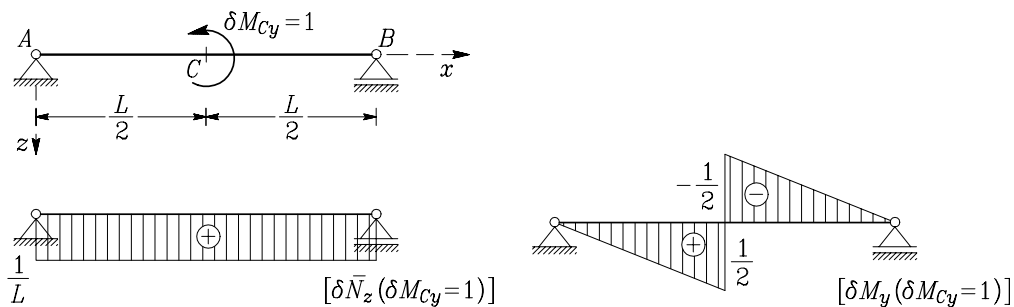
Izračunajmo najprej zasuk prereza pri $x = L/2$.

Notranje sile zaradi zunanje obtežbe prikazujemo na sliki 5.104.



Slika 5.104: Prečna sila in upogibni moment zaradi obtežbe z momentom M_{Cy}

Notranje sile zaradi virtualne obtežbe $\delta M_{Cy} = 1$ prikazujemo na sliki 5.105.



Slika 5.105: Prečna sila in upogibni moment zaradi momenta $\delta M_{Cy} = 1$

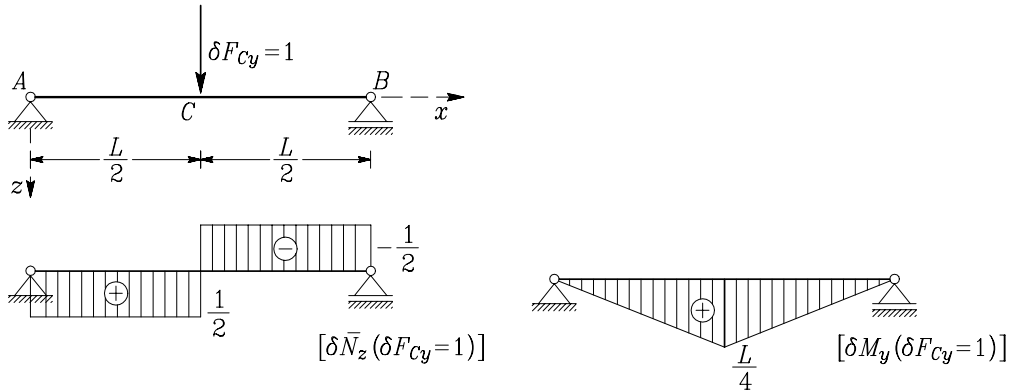
Zasuk prečnega prereza pri $x = L/2$ ob upoštevanju upogibnega momenta in prečne sile je:

$$\omega_{Cy}^P(x = L/2) = -\frac{1}{E I_y} \frac{M_{Cy}}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{\kappa_z}{G A_x} \frac{M_{Cy}}{L} \frac{L}{L} = -\underbrace{\frac{M_{Cy} L}{12 E I_y} - \frac{\kappa_z M_{Cy}}{G A_x L}}_{\alpha_{\text{prezeza}}}.$$

Sedaj določimo še navpični pomik pri $x = L/2$.

Notranje sile zaradi virtualne sile $\delta F_{Cz} = 1$ prikazujemo na sliki 5.106:



Slika 5.106: Prečna sila in upogibni moment zaradi momenta $\delta F_{Tz} = 1$

Zaradi simetrije diagramov $\delta \bar{M}_y$ in N_z ter antisimetrije diagramov M_y in $\delta \bar{N}_z$, je navpični pomik na sredini nosilca enak nič

$$w_C = 0.$$

5.1.8 Račun pomikov statično določenih linijskih konstrukcij z ukrivljeno osjo

V primeru, ko je razmerje krivinskega polmera R proti višini nosilca h za element z ukrivljeno osjo večje od 10 ($R/h > 10$), lahko uporabimo za račun vzdolžne normalne napetosti v takem elementu enačbo, ki velja za nosilec z ravno osjo [†]

$$\sigma_{tt} \approx \sigma_{xx} = \frac{M_y z}{I_y}.$$

Zato lahko računamo pomik oziroma zasuk posamezne točke takega elementa po enačbi (glej (5.20))

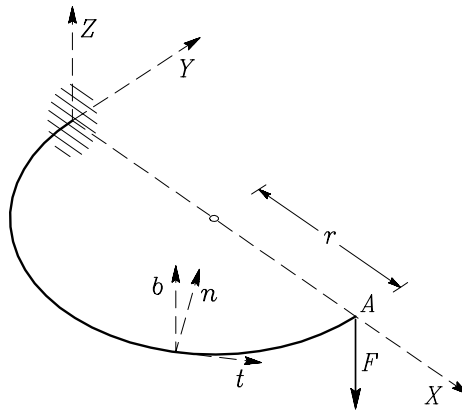
$$\left. \begin{matrix} u_{Ts} \\ \omega_{Ts} \end{matrix} \right\} = \delta \bar{W}_n^* = \int_{\mathcal{L}} \left(\left(\frac{N_t}{E A_t} + \alpha_T \Delta T_t \right) \delta \bar{N}_t + \frac{N_n \delta \bar{N}_n}{G A_n} + \frac{N_b \delta \bar{N}_b}{G A_b} + \frac{M_t \delta \bar{M}_t}{G I_t} + \right. \\ \left. + \left(\frac{M_n}{E I_n} + \alpha_T \Delta T_b \right) \delta \bar{M}_n + \left(\frac{M_b}{E I_b} - \alpha_T \Delta T_n \right) \delta \bar{M}_b \right) ds. \quad (5.37)$$

Z \mathcal{L} označimo srednjo črto elementa z ukrivljeno osjo, z ds pa diferencialni del dolžine srednje črte. Za opis notranjih sil v prerezu nosilca uporabimo naravni koordinatni sistem, ki ga določajo bazni vektorji \vec{e}_t , \vec{e}_n in \vec{e}_b [‡]. Os t na ukrivljenem nosilcu ustreza osi x na ravnem nosilcu, osi n in b pa ustrezata lokalnima osema y in z .

Primer 5.27 Za konstrukcijo na sliki 5.107 določimo navpični pomik točke A ! Predpostavimo, da v elementih konstrukcije nastopa enakomerna torzija. Material in prečni prerez se ne spreminjata, zato so E , G , I_t in I_n konstante. Torzijski vztrajnostni moment označimo z I_t , upogibnega glede na vodoravno os n pa z I_n . Vpliva prečnih sil ne upoštevamo.

[†] M. Stanek, Trdnost – Izvlečki iz teorije in rešene naloge, FAGG, Univerza Edvarda Kardelja, Ljubljana, 1989.

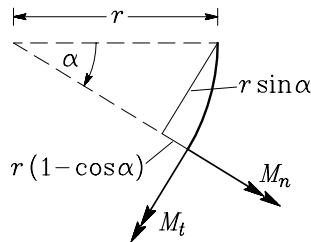
[‡] M. Stanek, G. Turk, Statika II, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 1996).



Slika 5.107: Os nosilca opisuje polkrožnica

Od nič sta različna torzijski moment M_t in upogibni moment M_n , ki ju s silo F_Z in kotom α izrazimo takole (slika 5.108):

$$M_t = -F_Z r (1 - \cos \alpha), \quad M_n = F_Z r \sin \alpha.$$

Slika 5.108: Z M_t označimo torzijski, z M_n pa upogibni moment

Če namesto sile F_z v točko A postavimo virtualno silo $\delta F_z = 1$, dobimo:

$$\delta \bar{M}_t = -r (1 - \cos \alpha), \quad \delta \bar{M}_n = r \sin \alpha.$$

Pomik w_A izračunamo po enačbi

$$w_A = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{M_t \delta \bar{M}_t}{G I_t} + \frac{M_n \delta \bar{M}_n}{E I_n} \right) ds.$$



Ker je $ds = r d\alpha$, sledi

$$\begin{aligned} w_A &= \int_0^\pi \left(\frac{F_Z r^2 (1 - \cos \alpha)^2}{G I_t} + \frac{F_Z r^2 \sin^2 \alpha}{E I_n} \right) r d\alpha = \\ &= \frac{F_Z r^3}{G I_t} \int_0^\pi (1 - 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha) d\alpha + \frac{F_Z r^3}{E I_n} \int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

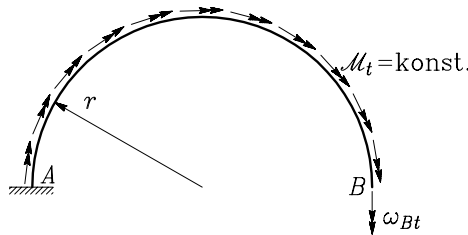
Upoštevamo, da je

$$\int \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi + C, \quad \int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + C, \quad \int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} + C$$

in dobimo

$$w_A = \frac{F_Z r^3}{G I_t} \left(\alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \Big|_0^\pi + \frac{F_Z r^3}{E I_n} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \Big|_0^\pi = \frac{F_Z r^3 \pi}{2} \left(\frac{3}{G I_t} + \frac{1}{E I_n} \right).$$

Primer 5.28 Določimo zasuk ω_{Bt} točke B na konstrukciji na sliki 5.109!



Slika 5.109: Nosilec obtežimo s konstantno linijsko momentno obtežbo \mathcal{M}_t

Na majhen del osi nosilca ds deluje moment $dM = \mathcal{M}_t ds = \mathcal{M}_t r d\alpha$, ki ga lahko razstavimo na $dM_x = \mathcal{M}_t r d\alpha \sin \alpha$ in $dM_y = \mathcal{M}_t r d\alpha \cos \alpha$ vzdolž smeri x in y (slika 5.110a). Vpetostna momenta M_{Ax} in M_{Ay} izračunamo iz ravnotežnih enačb (slika 5.110b)

$$M_{Ax} + \int_0^\pi \mathcal{M}_t r \sin \alpha d\alpha = 0, \quad M_{Ay} + \int_0^\pi \mathcal{M}_t r \cos \alpha d\alpha = 0.$$

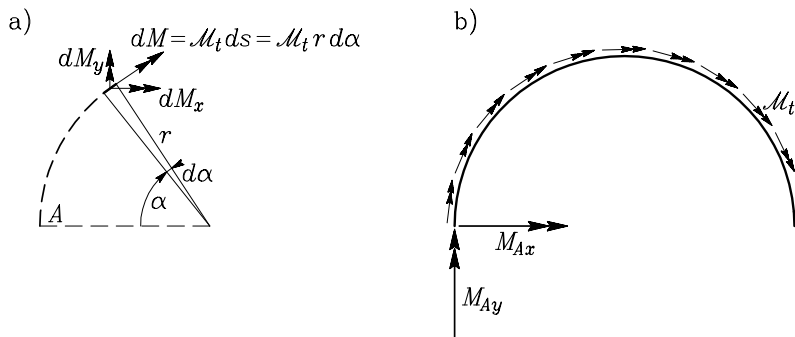
Z integriranjem zadnje enačbe dobimo

$$M_{Ax} + \mathcal{M}_t r (-\cos \alpha) \Big|_0^\pi = 0 \quad \rightarrow \quad M_{Ax} = -2 \mathcal{M}_t r$$

in

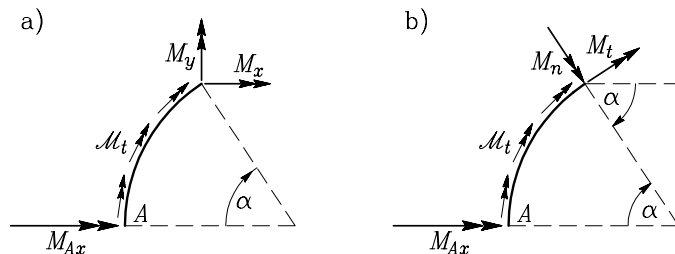
$$M_{Ay} + \mathcal{M}_t r (\sin \alpha) \Big|_0^\pi = 0 \quad \rightarrow \quad M_{Ay} = 0.$$





Slika 5.110: a) Obtežbo \mathcal{M}_t na dolžini ds nadomestimo z momentom $dM = \mathcal{M}_t ds$
 b) Od reakcij je od nič različen le M_{Ax}

Notranje sile pri poljubnem kotu α izračunamo najprej glede na osi x in y – momenta M_x in M_y (slika 5.111a), nato pa glede na osi t in n – momenta M_t in M_n (slika 5.111b).



Slika 5.111: a) Notranja momenta glede na osi x in y b) Notranja momenta glede na osi t in n

Ravnotežna pogoja $\sum x = 0$ in $\sum y = 0$:

$$M_x - 2 \mathcal{M}_t r + \int_0^\alpha \mathcal{M}_t r \sin \alpha d\alpha = 0, \quad M_y + \int_0^\alpha \mathcal{M}_t r \cos \alpha d\alpha = 0.$$

Integriramo in dobimo

$$M_x = 2 \mathcal{M}_t r - \mathcal{M}_t r (-\cos \alpha) \Big|_0^\alpha = \mathcal{M}_t r (1 + \cos \alpha), \quad M_y = -\mathcal{M}_t r (\sin \alpha) \Big|_0^\alpha = -\mathcal{M}_t r \sin \alpha.$$

Momenta M_x in M_y projiciramo na osi t in n ter dobimo torzijski moment M_t in upogibni moment M_n (slika 5.111b)

$$M_t = M_x \sin \alpha + M_y \cos \alpha, \quad M_n = M_x \cos \alpha - M_y \sin \alpha$$

oziroma

$$M_t = \mathcal{M}_t r (1 + \cos \alpha) \sin \alpha - \mathcal{M}_t r \sin \alpha \cos \alpha = \mathcal{M}_t r \sin \alpha$$

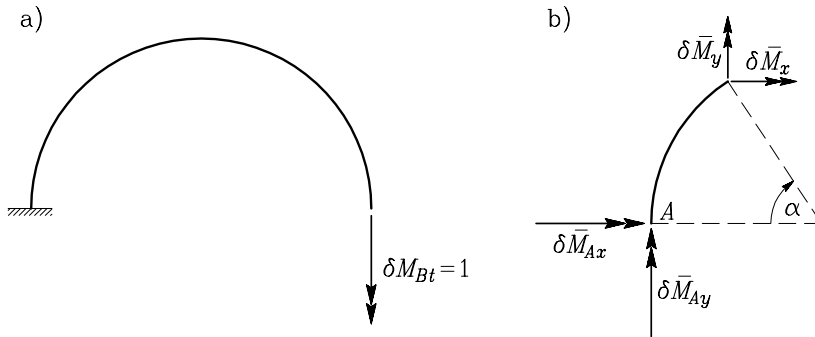
$$M_n = \mathcal{M}_t r (1 + \cos \alpha) \cos \alpha + \mathcal{M}_t r \sin \alpha \sin \alpha = \mathcal{M}_t r (1 + \cos \alpha).$$

Ker sta od nič različna le torzijski moment M_t in upogibni moment M_n , izračunamo zasuk ω_{Bt} po enačbi

$$\omega_{Bt} = \int_0^{\pi r} \left(\frac{M_t \delta \bar{M}_t}{G I_t} + \frac{M_n \delta \bar{M}_n}{E I_n} \right) ds.$$

Določiti moramo izraza za momenta $\delta \bar{M}_t$ in $\delta \bar{M}_n$ zaradi virtualnega momenta $\delta M_{Bt} = 1$ (slika 5.112). Iz ravnotežnih pogojev izračunamo

$$\delta \bar{M}_{Ax} = 0, \quad \delta \bar{M}_{Ay} = 1, \quad \delta \bar{M}_x = 0, \quad \delta \bar{M}_y = -1.$$



Slika 5.112: a) Virtualni moment $\delta M_{Bt} = 1$ postavimo v točko B

b) Momenta $\delta \bar{M}_x$ in $\delta \bar{M}_y$ izračunamo iz ravnotežnih pogojev za del konstrukcije

Momenta $\delta \bar{M}_x$ in $\delta \bar{M}_y$ projiciramo na osi t in n ter dobimo

$$\delta \bar{M}_t = -\cos \alpha, \quad \delta \bar{M}_n = \sin \alpha.$$

Sedaj lahko zasuk ω_{Bt} izračunamo po naslednji enačbi

$$\omega_{Bt} = -\frac{1}{G I_t} \int_0^{\pi} \mathcal{M}_t r \sin \alpha \cos \alpha r d\alpha + \frac{1}{E I_n} \int_0^{\pi} \mathcal{M}_t r (1 + \cos \alpha) \sin \alpha r d\alpha$$

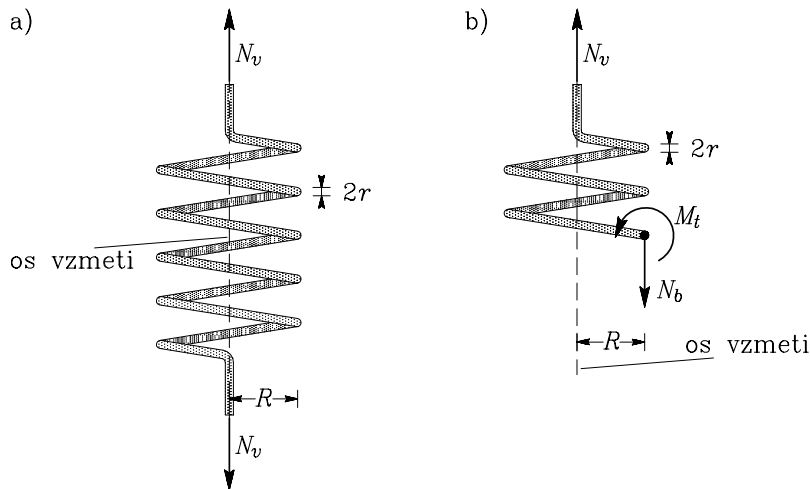
in dobimo

$$\omega_{Bt} = \frac{2 \mathcal{M}_t r^2}{E I_n}.$$

V tem primeru je očitno, da na zasuk ω_{Bt} v točki B vpliva le upogibanje nosilca, torzijsko deformiranje pa na ta zasuk ne vpliva.

Primer 5.29 Določimo največjo strižno napetost τ_{\max} in raztezek Δl gosto navite vzmeti, ki je v krajiščih obtežena z enako velikima in nasproti usmerjenima silama F , ki delujeta v osi vzmeti (slika 5.113a). Vzmet je narejena iz jeklene žice s prečnim prerezom krožne oblike.



Slika 5.113: Vzmet je v krajiščih obtežen s silama F

Ker je vzmet gosto navita lahko predpostavimo, da navoji vzmeti ležijo v ravnini, ki je pravokotna na os vzmeti. V tem primeru je prečni prerez A_t žice vzmeti navpičen (slika 5.113b). Ravnotežna pogoja glede na težišče prečnega prereza žice sta:

$$\sum X = 0 : N_b = F, \quad \sum M_t^T = 0 : M_t = F R. \quad (5.38)$$

Z R označimo razdaljo od osi vzmeti, do težišča prečnega prereza žice vzmeti, polmer žice pa označimo z r . Upoštevajmo, da je $R \gg r$. Sila N_b je rezultanta strižnih napetosti v smeri osi X v prečnem prerezu A_t , moment M_t pa predstavlja torzijski moment v žici.

Največjo napetost $\tau_{\max}(N_b)$ zaradi prečne sile v okroglem prerezu izračunamo po enačbi (1.194)

$$\tau_{\max}(N_b) = \frac{4}{3} \frac{F}{A_t}. \quad (5.39)$$

Največjo strižno napetost v nosilcu s prečnim prerezom v obliki kroga s polmerom r , ki je obtežen s konstantnim torzijskim momentom M_t , izračunamo po enačbi (2.120)

$$\tau_{\max}(M_t) = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{r^3}, \quad (5.40)$$

pri čemer smo upoštevali enačbo za ravni nosilec. To je približna ocena, ki je upravičena, saj velja, da je $R \gg r$. Enačba (5.40) ustreza enakomerni torziji (izbočitev prečnih prerezov ni nikjer preprečena). Največjo strižno napetost v prečnem prerezu A_t dobimo, če enačbi (5.39) in (5.40) seštejemo

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F}{\pi r^2} + \frac{2}{\pi} \frac{F R}{r^3} = \frac{2}{\pi} \frac{F R}{r^3} \left(\frac{r}{2R} + 1 \right). \quad (5.41)$$

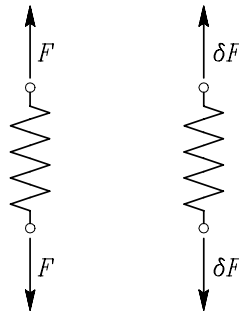


Ker je $r \ll R$ je $r/(2R) \ll 1$ in lahko vpliv zaradi prečne sile N_b v primerjavi s vplivom zaradi torzijskega momenta M_t zanemarimo. Zato računamo največjo strižno napetost v žici vzmeti po enačbi

$$\tau_{\max} = \frac{2FR}{\pi r^3}. \quad (5.42)$$

Raztezek Δl vzmeti izračunamo z izrekom o virtualnih silah. Če vzmet v krajiščih obežimo z enako velikima in nasproti usmerjenima virtualnima silama $\delta F = 1$ (slika 5.114), zapišemo izrek o virtualnih silah takole:

$$\Delta l = (u_s - u_z) = \int_0^{n2\pi R} \left(\frac{N_b \delta \bar{N}_b}{G A_b} + \frac{M_t \delta \bar{M}_t}{G I_t} \right) ds. \quad (5.43)$$



Slika 5.114: Vzmet je obežena s silama F in z virtualnima silama $\delta F = 1$

Upoštevamo, da so M_t , δM_t , N_b in δN_b konstantni vzdolž žice in da sta $A_b = A_t/\kappa_b = \pi r^2/\kappa_b$ in $I_t = \pi r^4/2$

$$\Delta l = \int_0^{n2\pi R} \left(\frac{F \cdot 1}{G A_s} + \frac{F R \cdot R}{G I_t} \right) ds = \frac{F n 2\pi R}{G A_b} + \frac{F R^3 n 2\pi}{G I_t} = \frac{F n R}{G r^2} \left(2\kappa_b + \frac{4R^2}{r^2} \right).$$

Strižni oblikovni koeficient za prerez okrogle oblike je $\kappa_b = 10/9$. Ker je $R \gg r^2$, je tudi $4R^2/r^2 \gg 2\kappa_b = 20/9$, zato lahko tudi pri računu razteзка vzmeti upoštevamo le vpliv torzijskega momenta.

5.2 Notranje sile in pomiki statično nedoločenih linijskih konstrukcij z metodo sil

Vzemimo, da je n -krat statično nedoločena linijska konstrukcija, sestavljena iz linijskih nosilcev ter linijskih in torzijskih vzmeti, obežena z zunanjo obežbo Q in izpostavljena linearni spremembi temperature $\Delta T = \Delta T_x + \Delta T_y y + \Delta T_z z$. Določiti želimo **notranje sile** in pomik u_{Ts} izbrane točke T na vzdolžni osi linijskega nosilca v smeri enotskega vektorja \vec{e}_S oziroma zasuk ω_{Ts} okrog osi, ki je podana z enotnim vektorjem \vec{e}_s .



Nalogo rešimo z uporabo izreka o virtualnih silah po naslednjih korakih:

1. Ugotovimo stopnjo statične nedoločenosti n . Za sistem K togih teles v prostoru je n enak:[†]

$$n = \sum_{\text{vse podpore}} n_{\text{osp}} + \sum_{\text{vse vezi}} n_{\text{opsv}} - 6K, \quad (5.44)$$

za sistem K togih teles v ravnini pa:

$$n = \sum_{\text{vse podpore}} n_{\text{osp}} + \sum_{\text{vse vezi}} n_{\text{opsv}} - 3K. \quad (5.45)$$

Z n_{osp} in n_{opsv} označimo število odvzetih prostostnih stopenj podpore in vezi.

Podpore in vezi omejujejo prosto premikanje sistema teles in zmanjšujejo število prostostnih stopenj. V podporah predpišemo vrednosti ene ali več kinematičnih količin. Najpogostejše je **podpora nepodajna**, pri kateri je pomik u_P enak nič

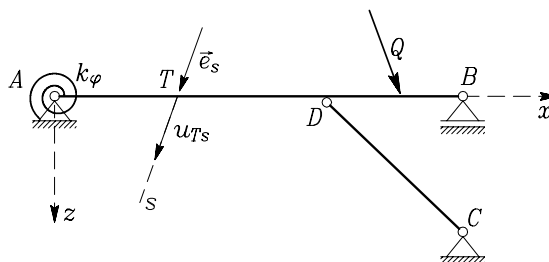
$$u_P = 0.$$

V primeru **podajne podpore** ločimo podporo, pri kateri je pomik predpisan

$$u_P = C \neq 0$$

in podporo, pri kateri je pomik podpore odvisen od velikosti reakcije R

$$u_P = \frac{R}{k}.$$



Slika 5.115: Stopnja statične nedoločenosti $n = 2$

[†] M. Stanek, G. Turk, Statika I, 1996,

M. Stanek, G. Turk, Analiza kinematičnih enačb sistema togih teles, Kuhljevi dnevi '96, Gozd Martuljk, 19.-20.9.1996, Zbornik del, str. 305-312, 1996.

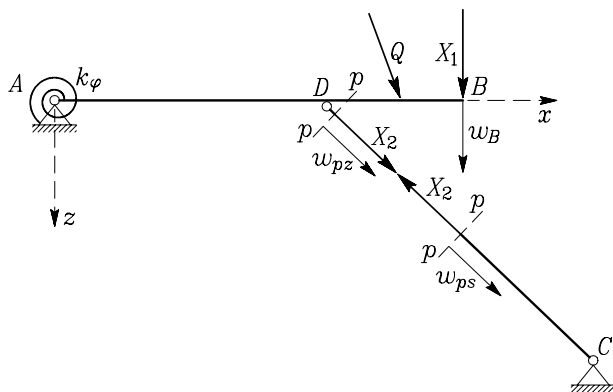
Taka podpora je **elastična podpora**, k je togost elastične podpore. Glede števila prostostnih stopenj sta nepodajna (toga) in podajna podpora enakovredni. Za podporo A na sliki 5.115 upoštevamo, da sistemu odvzame tri prostostne stopnje

$$u_{Ax} = u_{Az} = 0, \quad \omega_{Ay} = \frac{M_A}{k_\varphi}.$$

Podobno velja tudi za prostostne stopnje, ki jih sistemu odvzamejo vezi. Konstrukcija na sliki 5.115 je dvakrat statično nedoločena:

$$n = (3 + 2 + 1) + 2(2 - 1) - 3 \cdot 2 = 2.$$

2. Tvorimo statično določeno **osnovno konstrukcijo** tako, da v statično nedoločeno konstrukcijo uvedemo n dodatnih **sprostitev** oziroma **prostostnih stopenj**. Uvedba dodatnih prostostnih stopenj pomeni, da na izbranih mestih **odstranimo podpore** oziroma **sprostim vezi**. Vpliv odstranjenih podpor oziroma vezi moramo **nadomestiti s statično enakovrednimi nadomestnimi silami** X_i ($i = 1, \dots, n$), katerih vrednosti še ne poznamo. Sile X_i ($i = 1, \dots, n$) so **zunanje** sile na statično določeni osnovni konstrukciji. Za konstrukcijo s slike 5.115 lahko izberemo na primer za X_1 navpično reakcijo v podpori B , za X_2 pa osno silo v palici CD (slika 5.116).



Slika 5.116: Na mestih uvedenih sprostitev uvedemo nadomestne sile X_i ($i = 1, \dots, n$)

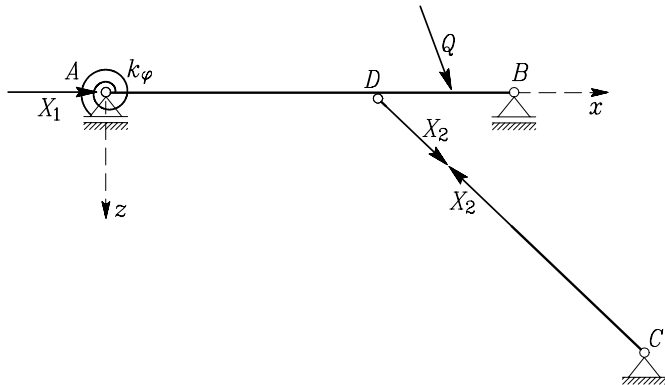
Pri uvajanju dodatnih prostostnih stopenj imamo mnogo možnosti. Dodatne prostostne stopnje moramo uvesti tako, da je determinanta sistema ravnotežnih enačb za osnovno konstrukcijo različna od nič. To pomeni, da mora biti osnovna konstrukcija taka, da pri poljubni obtežbi miruje.

V prikazanem primeru smo z zunanjo silo X_1 nadomestili reakcijo v smeri uvedene sprostitve v podpori B , z zunanjo silo X_2 pa notranjo osno silo v prečnem prerezu $p - p$.

Na sliki 5.117 je prikazan primer osnovne konstrukcije, ki se lahko premika. Za tako konstrukcijo ima sistem ravnotežnih enačb determinanto enako nič in zato reakcij in sil v vezi ne moremo



enolično izračunati. Zato taka osnovna konstrukcija ni pravilno izbrana in onemogoča nadaljnje določanje notranjih sil in pomikov.



Slika 5.117: Primer osnovne konstrukcije, ki pri poljubni obtežbi ne miruje

V nadaljevanju bomo nadomestnim zunanjim silam X_i ($i = 1, \dots, n$) v sproščenih prerezih pripisali njihov fizikalni pomen **reakcij** oziroma **notranjih sil**.

Če upoštevamo zakon superpozicije, notranje sile N_x , N_y in N_z ter momente M_x , M_y in M_z v linijskih elementih osnovne konstrukcije, obtežene s silami X_i ($i = 1, \dots, n$) in zunanjo obtežbo Q , zapišemo takole:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} X_i + N_{xQ} \equiv N_x^{nk}, \\
 N_y &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{yi} X_i + N_{yQ} \equiv N_y^{nk}, \\
 N_z &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{zi} X_i + N_{zQ} \equiv N_z^{nk}, \\
 M_x &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{xi} X_i + M_{xQ} \equiv M_x^{nk}, \\
 M_y &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} X_i + M_{yQ} \equiv M_y^{nk}, \\
 M_z &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{zi} X_i + M_{zQ} \equiv M_z^{nk}.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Sile X_i ($i = 1, \dots, n$) izračunamo iz pogojev, da so pomiki na mestu odstranjenih podpor predpisani in da so medsebojni pomiki oziroma zasuki na mestih odstranjenih (sproščenih) vezi, enaki nič. Zato se **statično določena osnovna konstrukcija**, ko jo obtežimo z silami X_i ($i = 1, \dots, n$)



in zunanjo obtežbo Q , deformira enako kot z zunanjo obtežbo obremenjena statično nedoločena konstrukcija, enake so tudi notranje sile. Z oznako nk v enačbah (5.46) smo torej poudarili, da notranje sile N_x, N_y, N_z, M_x, M_y in M_z ustrezajo statično nedoločeni konstrukciji, čeprav funkcije $\bar{N}_{xi}, \bar{N}_{yi}, \bar{N}_{zi}, \bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{zi}$ ter $N_{xQ}, N_{yQ}, N_{zQ}, M_{xQ}, M_{yQ}$ in M_{zQ} računamo na statično določeni osnovni konstrukciji. Prečka na funkcijah $\bar{N}_{xi}, \bar{N}_{yi}, \bar{N}_{zi}, \bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{zi}$ poudarja, da so to notranje sile zaradi enotske sile $\delta X_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$).

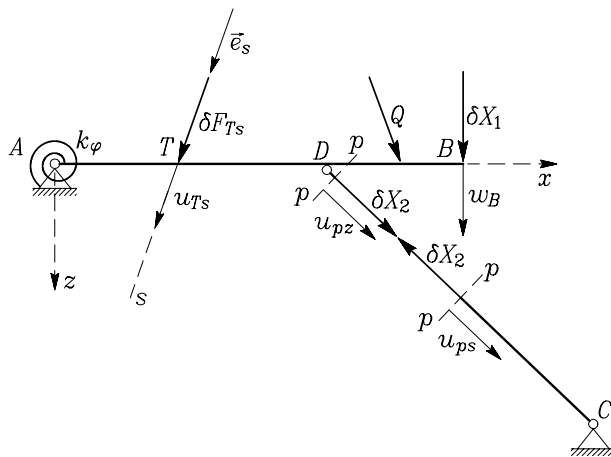
Tudi osno silo v linijski vzmeti r razdelimo na osno silo zaradi sil X_i ($i = 1, \dots, n$) in na osno silo zaradi zunanje obtežbe Q

$$N_v^{(r)} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_{vi}^{(r)} X_i + N_{vQ}^{(r)} \equiv N_v^{(r)nk}.$$

Na enak način zapišemo še torzijski moment v torzijski vzmeti q

$$M_v^{(q)} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{vi}^{(q)} X_i + M_{vQ}^{(q)} \equiv M_v^{(q)nk}.$$

item[3.] Osnovno konstrukcijo obtežimo z virtualnimi silami δX_i ($i = 1, \dots, n$) v točkah, kjer smo vpeljali dodatne prostostne stopnje in sicer v smereh iskanih nadomestnih sil X_i ($i = 1, \dots, n$). Osnovno konstrukcijo obtežimo še z virtualno silo $\delta F_{Ts} = 1$, če računamo pomik u_{Ts} oziroma z virtualnim momentom $\delta M_{Ts} = 1$, če računamo zasuk ω_{Ts} . Sila δF_{Ts} učinkuje na mestu iskanega pomika u_{Ts} , moment δM_{Ts} pa na mestu in okrog smeri iskanega zasuka ω_{Ts} . Na sliki 5.118 so prikazane virtualne sile $\delta X_1, \delta X_2$ in δF_{Ts} za obravnavani primer.



Slika 5.118: Virtualne sile δX_i na osnovni konstrukciji imajo isto prijemališče in enako smer kot nadomestne sile X_i , virtualna sila δF_{Ts} pa ima isto lego in smer kot iskani pomik u_{Ts}



Notranje sile v linijskih elementih zaradi virtualne obtežbe razdelimo na notranje sile zaradi virtualnih sil δX_i ($i = 1, \dots, n$) in na notranje sile zaradi virtualne sile δF_{Ts} :

$$\begin{aligned}
 \delta N_x &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} \delta X_i + \bar{N}_{xF} \delta F_{Ts}, \\
 \delta N_y &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{yi} \delta X_i + \bar{N}_{yF} \delta F_{Ts}, \\
 \delta N_z &= \sum_{i=1}^n \bar{N}_{zi} \delta X_i + \bar{N}_{zF} \delta F_{Ts}, \\
 \delta M_x &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{xi} \delta X_i + \bar{M}_{xF} \delta F_{Ts}, \\
 \delta M_y &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} \delta X_i + \bar{M}_{yF} \delta F_{Ts}, \\
 \delta M_z &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_{zi} \delta X_i + \bar{M}_{zF} \delta F_{Ts}.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Z \bar{N}_{xF} , \bar{N}_{yF} , \bar{N}_{zF} , \bar{M}_{xF} , \bar{M}_{yF} in \bar{M}_{zF} označimo notranje sile v osnovni statično določeni konstrukciji zaradi obtežbe $\delta F_{Ts} = 1$.

Zapišimo še osno silo v osni vzmeti r v odvisnosti od virtualnih sil δX_i ($i = 1, \dots, n$) in sile δF_{Ts}

$$\delta N_v^{(r)} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_{vi}^{(r)} \delta X_i + \bar{N}_{vF}^{(r)} \delta F_{Ts}. \tag{5.48}$$

Na enak način zapišemo še torzijski moment v torzijski vzmeti q :

$$\delta M_v^{(q)} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{vi}^{(q)} \delta X_i + \bar{M}_{vF}^{(q)} \delta F_{Ts}. \tag{5.49}$$

4. Delo W_z^* virtualnih sil na resničnih pomikih zapišemo takole:

$$\delta W_z^* = \sum_{i=1}^n \delta X_i u_i + \delta F_{Ts} u_{Ts}. \tag{5.50}$$

Z u_i označimo pomik na mestu odstranjene podpore ter medsebojni pomik oziroma medsebojni zasuk na mestu odstranjene vezi. V obravnavanem primeru (slika 5.118) je delo W_z^* enako

$$\delta W_z^* = \delta X_1 w_B + \delta X_2 (u_{pz} - u_{ps}) + \delta F_{Ts} u_{Ts}.$$

Oznaka u_{pz} pomeni pomik na zgornji strani prereza $p - p$, oznaka u_{ps} pa pomik na spodnji strani prereza $p - p$.



5. Delo δW_n^* virtualnih napetosti na resničnih deformacijah za celotno konstrukcijo zapišemo z enačbo (5.33)

$$\begin{aligned} \delta W_n^* = \sum_{\text{el}} \int_0^{L_i} & \left[\frac{N_x \delta N_x}{E A_x} + \frac{N_y \delta N_y}{G A_y^s} + \frac{N_z \delta N_z}{G A_z^s} + \frac{M_x \delta M_x}{G I_x} + \frac{M_y \delta M_y}{E I_y} + \frac{M_z \delta M_z}{E I_z} + \right. \\ & \left. + \alpha_T (\Delta T_x \delta N_x + \Delta T_z \delta M_y - \Delta T_y \delta M_z) \right] dx + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{N_v^{(r)} \delta N_v^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{M_v^{(q)} \delta M_v^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

6. Če v enačbi (5.51) upoštevamo enačbe (5.46) do (5.50) in zapišemo izrek o virtualnih silah

$$\delta W_n^* - \delta W_z^* = 0, \quad (5.52)$$

dobimo zvezo med pomiki točk, v katerih deluje virtualna obtežba in med notranjimi silami v elementih konstrukcije. Najprej zapišimo izraz za delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah:

$$\begin{aligned} \delta W_n^* = \sum_{\text{el}} \int_0^L & \left(\frac{1}{E A_x} \left(N_{xQ} + \sum_{j=1}^n \bar{N}_{xj} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} \delta X_i + \bar{N}_{xF} \delta F_{Ts} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{G A_y^s} \left(N_{yQ} + \sum_{j=1}^n \bar{N}_{yj} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{N}_{yi} \delta X_i + \bar{N}_{yF} \delta F_{Ts} \right) + \\ & + \frac{1}{G A_z^s} \left(N_{zQ} + \sum_{j=1}^n \bar{N}_{zj} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{N}_{zi} \delta X_i + \bar{N}_{zF} \delta F_{Ts} \right) + \\ & + \frac{1}{G I_x} \left(M_{xQ} + \sum_{j=1}^n \bar{M}_{xj} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{M}_{xi} \delta X_i + \bar{M}_{xF} \delta F_{Ts} \right) + \\ & + \frac{1}{E I_y} \left(M_{yQ} + \sum_{j=1}^n \bar{M}_{yj} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} \delta X_i + \bar{M}_{yF} \delta F_{Ts} \right) + \\ & + \frac{1}{E I_z} \left(M_{zQ} + \sum_{j=1}^n \bar{M}_{zj} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{M}_{zi} \delta X_i + \bar{M}_{zF} \delta F_{Ts} \right) + \\ & + \alpha_T \Delta T_x \left(\sum_{i=1}^n \bar{N}_{xi} \delta X_i + \bar{N}_{xF} \delta F_{Ts} \right) + \\ & + \alpha_T \Delta T_z \left(\sum_{i=1}^n \bar{M}_{yi} \delta X_i + \bar{M}_{yF} \delta F_{Ts} \right) - \\ & \left. - \alpha_T \Delta T_y \left(\sum_{i=1}^n \bar{M}_{zi} \delta X_i + \bar{M}_{zF} \delta F_{Ts} \right) \right) dx + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{1}{k_v^{(r)}} \left(N_{vQ}^{(r)} + \sum_{j=1}^n \bar{N}_{vj}^{(r)} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{N}_{vi}^{(r)} \delta X_i + \bar{N}_{vF}^{(r)} \delta F_{Ts} \right) + \\
& + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{1}{k_\varphi^{(q)}} \left(M_{vQ}^{(q)} + \sum_{j=1}^n \bar{M}_{vj}^{(q)} X_j \right) \left(\sum_{i=1}^n \bar{M}_{vi}^{(q)} \delta X_i + \bar{M}_{vF}^{(q)} \delta F_{Ts} \right).
\end{aligned}$$

Zadnjo enačbo preoblikujemo tako, da rešimo oklepaje, nato združimo vse člene, ki pripadajo produktu $\delta X_i X_j$, člene, ki pripadajo δX_i , ter člene, ki pripadajo virtualni sili δF_{Ts} .

Če $\sum_{i=1}^n \delta X_i$ ($i = 1, \dots, n$) izpostavimo, dobimo:

$$\begin{aligned}
\delta W_n^* = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta X_i X_j \left(\sum_{\text{el}} \int_0^L \left(\frac{\bar{N}_{xi} \bar{N}_{xj}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yi} \bar{N}_{yj}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zi} \bar{N}_{zj}}{G A_z^s} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\bar{M}_{xi} \bar{M}_{xj}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zi} \bar{M}_{zj}}{E I_z} \right) dx + \right. \\
& \left. + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vi}^{(r)} \bar{N}_{vj}^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vi}^{(q)} \bar{M}_{vj}^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}} \right) + \\
& + \sum_{i=1}^n \delta X_i \left(\sum_{\text{el}} \int_0^L \left[\frac{\bar{N}_{xi} N_{xQ}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yi} N_{yQ}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zi} N_{zQ}}{G A_z^s} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\bar{M}_{xi} M_{xQ}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yi} M_{yQ}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zi} M_{zQ}}{E I_z} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_T (\Delta T_x \bar{N}_{xi} + \Delta T_z \bar{M}_{yi} - \Delta T_y \bar{M}_{zi}) \right] dx + \right. \\
& \left. + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vi}^{(r)} N_{vQ}^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vi}^{(q)} M_{vQ}^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}} \right) + \\
& + \delta F_{Ts} \left(\sum_{\text{el}} \int_0^L \left[\frac{\bar{N}_{xF} N_x^{nk}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yF} N_y^{nk}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zF} N_z^{nk}}{G A_z^s} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\bar{M}_{xF} M_x^{nk}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yF} M_y^{nk}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zF} M_z^{nk}}{E I_z} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha_T (\Delta T_x \bar{N}_{xF} - \Delta T_y \bar{M}_{zF} + \Delta T_z \bar{M}_{yF}) \right] dx + \right. \\
& \left. + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vF}^{(r)} N_v^{(r)nk}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vF}^{(q)} M_v^{(q)nk}}{k_\varphi^{(q)}} \right).
\end{aligned}$$



Vpeljimo oznake a_{ij} , ki predstavljajo člene ob produktu $\delta X_i X_j$

$$a_{ij} = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left(\frac{\bar{N}_{xi} \bar{N}_{xj}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yi} \bar{N}_{yj}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zi} \bar{N}_{zj}}{G A_z^s} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{M}_{xi} \bar{M}_{xj}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zi} \bar{M}_{zj}}{E I_z} \right) dx + \\ + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vi}^{(r)} \bar{N}_{vj}^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vi}^{(q)} \bar{M}_{vj}^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5.53)$$

Vidimo lahko, da je $a_{ij} = a_{ji}$ in da je $a_{ii} > 0$. Člene, ki pripadajo virtualni sili δX_i , označimo z b_i

$$b_i = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left[\frac{\bar{N}_{xi} N_{xQ}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yi} N_{yQ}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zi} N_{zQ}}{G A_z^s} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{M}_{xi} M_{xQ}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yi} M_{yQ}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zi} M_{zQ}}{E I_z} + \right. \\ \left. + \alpha_T (\Delta T_x \bar{N}_{xi} - \Delta T_y \bar{M}_{zi} + \Delta T_z \bar{M}_{yi}) \right] dx + \\ + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vi}^{(r)} N_{vQ}^{(r)}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vi}^{(q)} M_{vQ}^{(q)}}{k_\varphi^{(q)}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.54)$$

Člen, ki pripada virtualni sili δF_{Ts} , označimo s c_F

$$c_F = \sum_{\text{el}} \int_0^L \left[\frac{\bar{N}_{xF} N_x^{nk}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yF} N_y^{nk}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zF} N_z^{nk}}{G A_z^s} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{M}_{xF} M_x^{nk}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yF} M_y^{nk}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zF} M_z^{nk}}{E I_z} + \right. \\ \left. + \alpha_T (\Delta T_x \bar{N}_{xF} - \Delta T_y \bar{M}_{zF} + \Delta T_z \bar{M}_{yF}) \right] dx + \\ + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vF}^{(r)} N_v^{(r)nk}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vF}^{(q)} M_v^{(q)nk}}{k_\varphi^{(q)}}. \quad (5.55)$$

Delo virtualnih napetosti na resničnih deformacijah lahko v skrčeni obliki zapišemo z naslednjim izrazom:

$$\delta W_n^* = \sum_{i=1}^n \delta X_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + b_i \right) + \delta F_{T_s} c_F. \quad (5.56)$$

Če (5.56) in (5.50) vstavimo v (5.52), dobimo

$$\sum_{i=1}^n \delta X_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + b_i - u_i \right) + \delta F_{T_s} (c_F - u_{T_s}) = 0. \quad (5.57)$$

Ker so virtualne sile δX_i ($i = 1, \dots, n$) ter δF_{T_s} linearno neodvisne in poljubne, je enačba (5.57) izpolnjena le, če je

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + b_i = u_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.58)$$

in

$$u_{T_s} = c_F. \quad (5.59)$$

Če namesto točkovne sile δF_{T_s} v točko T postavimo moment δM_{T_s} , dobimo namesto enačbe (5.59) za račun pomika izraz za račun zasuka delca v točki T okrog osi v smeri \vec{e}_s

$$\omega_{T_s} = c_M. \quad (5.60)$$

S c_M označimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} c_M = \omega_{T_s} = \sum_{\text{el}} \int_0^L & \left[\frac{\bar{N}_{xM} N_x^{nk}}{E A_x} + \frac{\bar{N}_{yM} N_y^{nk}}{G A_y^s} + \frac{\bar{N}_{zM} N_z^{nk}}{G A_z^s} + \right. \\ & + \frac{\bar{M}_{xM} M_x^{nk}}{G I_x} + \frac{\bar{M}_{yM} M_y^{nk}}{E I_y} + \frac{\bar{M}_{zM} M_z^{nk}}{E I_z} + \\ & \left. + \alpha_T (\Delta T_x \bar{N}_{xM} + \Delta T_y \bar{M}_{zM} + \Delta T_z \bar{M}_{yM}) \right] dx + \\ & + \sum_{r=1}^{n_v} \frac{\bar{N}_{vM}^{(r)} N_v^{(r)nk}}{k_v^{(r)}} + \sum_{q=1}^{m_v} \frac{\bar{M}_{vM}^{(q)} M_v^{(q)nk}}{k_\varphi^{(q)}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Z \bar{N}_{xM} , \bar{N}_{yM} , \bar{N}_{zM} , \bar{M}_{xM} , \bar{M}_{yM} in \bar{M}_{zM} označimo notranje sile na osnovni konstrukciji zaradi točkovnega momenta $\delta M_{T_s} = 1$.

Enačbe (5.58) predstavljajo **kinematične pogoje** v točkah, kjer smo uvedli sprostitve. Ker so neznanke v teh enačbah sile, imenujemo prikazani postopek reševanja statično nedoločenih konstrukcij **metoda sil**. Za obravnavani primer zapišemo kinematične pogoje (5.58) takole

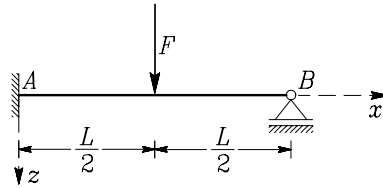
$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 &= w_B = 0, \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 &= u_{pz} - u_{ps} = 0. \end{aligned}$$

V nadaljevanju v prikazanih primerih vpliva prečnih sil na pomike ne upoštevamo!



5.2.1 Primeri

Primer 5.30 Izračunajmo reakcije in notranje sile za nosilec na sliki 5.119!

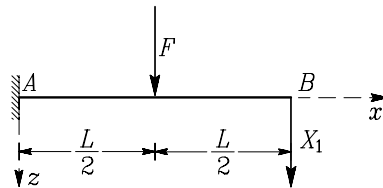


Slika 5.119: Enkrat statično nedoločena konstrukcija

Konstrukcija je enkrat statično nedoločena

$$n = (3 + 1) - 3 \cdot 1 = 1.$$

Osnovno konstrukcijo lahko izberemo tako, da odstranimo desno podporo in njen vpliv nadomestimo s silo X_1 (sliki 5.120).

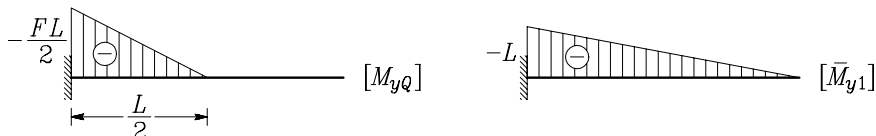


Slika 5.120: Osnovna konstrukcija

Silo X_1 izračunamo iz kinematičnega pogoja

$$a_{11}X_1 + b_1 = 0,$$

ki predpisuje, da je navpični pomik točke B enak nič. Za račun koeficientov a_{11} in b_1 potrebujemo potek notranjih sil na osnovni konstrukciji zaradi zunanje obtežbe F in zaradi sile $X_1 = 1$. Na sliki 5.121 prikazujemo potek upogibnega momenta zaradi sile F in sile $X_1 = 1$.



Slika 5.121: Upogibni moment zaradi sile F in sile $X_1 = 1$

Pri računanju koeficientov a_{ij} in b_i bomo integrale produktov dveh funkcij določali tako, kot smo pokazali s primeri 5.4 do 5.7. Koeficient a_{11} izračunamo z enačbo (5.53), v kateri upoštevamo le vpliv



upogibnega momenta M_y

$$a_{11} = \int_0^L \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1}}{E I_y} dx = \frac{1}{E I_y} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{2}{3} L = \frac{L^3}{3 E I_y},$$

koeficient b_1 pa z enačbo (5.54)

$$b_1 = \int_0^L \frac{\bar{M}_{y1} M_{yQ}}{E I_y} dx = \frac{1}{E I_y} \underbrace{F \frac{L}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2}}_{\text{plosčcina } M_{yF}} \underbrace{\left(\frac{L}{2} + \frac{2}{3} \frac{L}{2} \right)}_{\text{vrednost } \bar{M}_{y1} \text{ v težišču } M_{yF}} = \frac{5 F L^3}{48 E I_y}.$$

Sila X_1 je

$$X_1 = -\frac{b_1}{a_{11}} = -\frac{5 F}{16}.$$

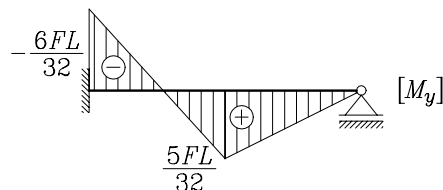
Potek upogibnega momenta M_y na statično nedoločeni konstrukciji lahko izračunamo tako, da upoštevamo princip superpozicije. To pomeni, da seštejemo moment M_{yQ} zaradi sile F in moment M_{y1} zaradi sile X_1 . Ker sta oba diagrama linearna, je tudi skupni potek momentov linearen. Zato izračunamo le vrednosti pri $x = 0$, $x = L/2$ in $x = L$

$$M_y(x=0) = -F \frac{L}{2} - L X_1 = -F \frac{L}{2} + L \frac{5 F}{16} = -\frac{6 F L}{32},$$

$$M_y(x=L/2) = 0 - \frac{L}{2} X_1 = \frac{5 F L}{16} \frac{L}{2} = \frac{5 F L}{32},$$

$$M_y(x=L) = 0.$$

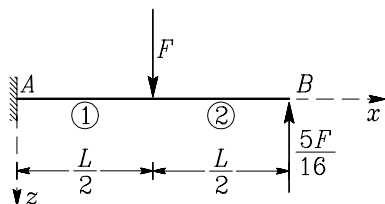
Diagram upogibnega momenta M_y na statično nedoločeni konstrukciji prikazujemo na sliki 5.122.



Slika 5.122: Upogibni moment za statično nedoločeno konstrukcijo

Prečno silo N_z za statično nedoločeno konstrukcijo izračunamo tako, da osnovno konstrukcijo obtežimo s silama F in $X_1 = -5 F/16$ (slika 5.123).

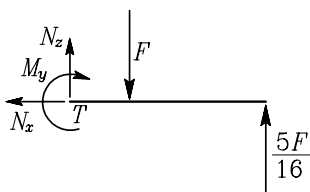




Slika 5.123: Prečne sile računamo na osnovni konstrukciji

Prečno silo v polju 1 lahko izračunamo tako, da obravnavamo desni del konstrukcije (slika 5.124)

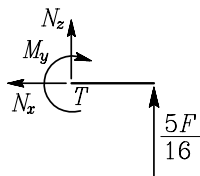
$$N_z = F - \frac{5F}{16} = \frac{11F}{16}.$$



Slika 5.124: Pri konzoli običajno izberemo del konstrukcije ob prostem robu

Prečno silo v polju 2 lahko izračunamo, če zapišemo ravnotežno enačbo za del konstrukcije na sliki 5.125:

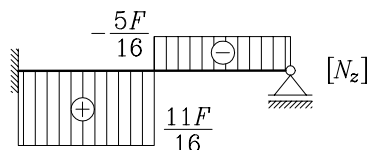
$$N_z = -\frac{5F}{16}.$$



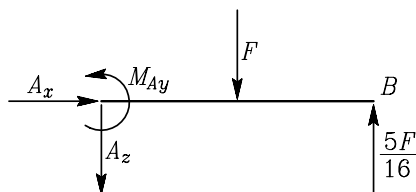
Slika 5.125: Tudi za polje 2 smo izbrali desni del konstrukcije

Diagram prečne sile N_z na statično nedoločeni konstrukciji je prikazan na sliki 5.126.



Slika 5.126: Prečna sila N_z na statično nedoločeni konstrukciji

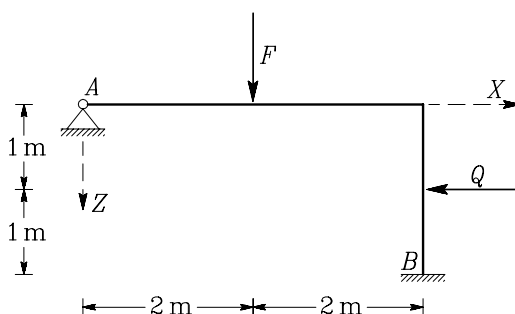
Iz slik 5.124 in 5.125 lahko določimo tudi osno silo N_x , ki je v tem primeru enaka nič in upogibne momente, ki smo jih že izračunali z uporabo metode superpozicije. Račun reakcij opravimo na osnovni konstrukciji, na katero delujeta zunanja sila F in sila X_1 (slika 5.127).

Slika 5.127: Reakcije predpostavimo v pozitivni smeri osi koordinatnega sistema x, y, z

Določimo jih iz ravnotežnih enačb:

$$\begin{aligned}\sum x = 0 &\rightarrow A_x = 0, \\ \sum z = 0 &\rightarrow A_z = -\frac{11F}{16}, \\ \sum M_y^A = 0 &\rightarrow M_{Ay} = \frac{3FL}{16}.\end{aligned}$$

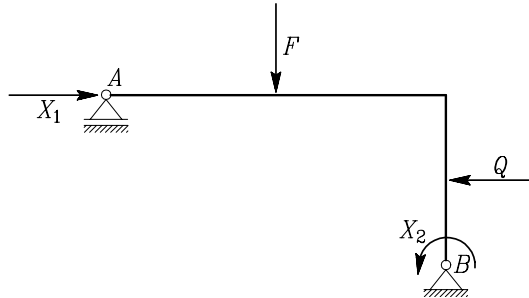
Primer 5.31 Za konstrukcijo na sliki 5.128 določimo reakcije in notranje sile! Nalogo rešujemo z izrekom o virtualnih silah. Upogibna togost je vzdolž osi nosilca konstantna $E I_y = \text{konst.}$, velikosti sil sta $F = 40 \text{ kN}$ in $Q = 100 \text{ kN}$.



Slika 5.128: Geometrija in obtežba

Stopnja statične nedoločenosti je $n = 3 + 2 - 3 = 2$.

Osnovno konstrukcijo tvorimo tako, da v podpori A sprostimo vodoravni pomik, v podpori B pa zasuk (slika 5.129).



Slika 5.129: Osnovna konstrukcija

Kinematična pogoja za vodoravni pomik podpore A in zasuk v podpori B :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 = 0,$$

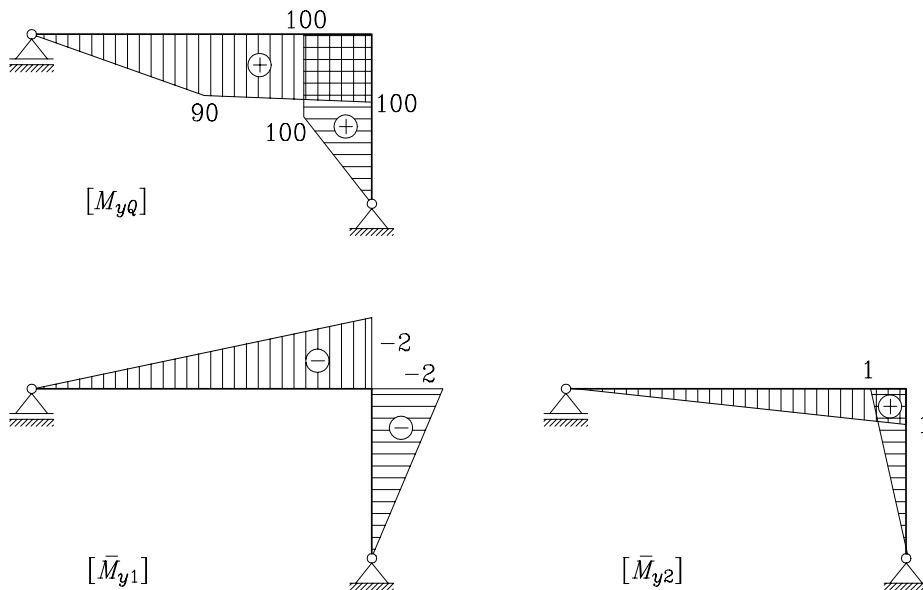
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_2 = 0.$$

Za določitev koeficientov a_{ij} in b_i potrebujemo potek notranjih sil na osnovni statično določeni konstrukciji in to za zunanji sili P in Q , za obtežbo s silo $X_1 = 1$ in za obtežbo s silo $X_2 = 1$. Pri reševanju te naloge vpliv osnih sil na pomike in s tem na delo virtualnih sil zanemarimo. Reakcije osnovne konstrukcije zaradi zunanje obtežbe ter zaradi enotskih sil X_1 in X_2 so:

$$\begin{aligned} A_z(F, Q) &= -45 \text{ kN}, & B_x(F, Q) &= 100 \text{ kN}, & B_z(F, Q) &= 5 \text{ kN}, \\ \bar{A}_z(X_1 = 1) &= 0.5, & \bar{B}_x(X_1 = 1) &= -1, & \bar{B}_z(X_1 = 1) &= -0.5, \\ \bar{A}_z(X_2 = 1) &= -0.25, & \bar{B}_x(X_2 = 1) &= 0, & \bar{B}_z(X_2 = 1) &= 0.25. \end{aligned}$$

Diagrame upogibnih momentov prikazujemo na sliki 5.130.





Slika 5.130: Upogibni momenti

Koeficiente a_{ij} in b_i določimo z naslednjimi izrazi:

$$E I_y a_{11} = \frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 8,$$

$$E I_y a_{22} = \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{10}{3} \cong 3.33,$$

$$E I_y a_{12} = -\frac{2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 1 = -\frac{14}{3} \cong -4.67,$$

$$a_{21} = a_{12},$$

$$E I_y b_1 = -\left(\frac{90 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{100 \cdot 2}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 1\right) + \frac{90 \cdot 2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) + \right. \\ \left. + 100 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+3}{2}\right) + \frac{100 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = -530,$$

$$E I_y b_2 = \frac{90 \cdot 2 \cdot 0}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{100 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{90 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \\ + 100 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{100 \cdot 1}{2} \cdot 1 = \frac{970}{3} \cong 323.33.$$

Kinematična pogoja predstavljata sistem dveh linearnih enačb, kjer sta neznanki sili X_1 in X_2 :

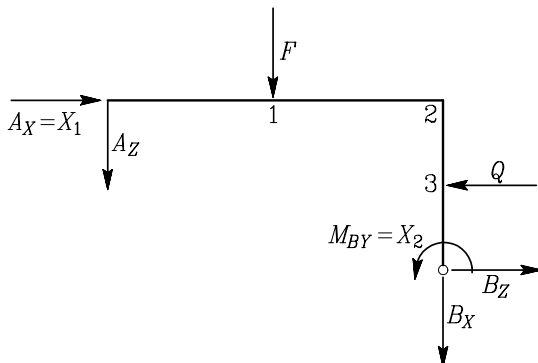
$$\begin{bmatrix} 8.00 & -4.67 \\ -4.67 & 3.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 530.0 \\ -323.3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev tega sistema je $X_1 = 52.73 \text{ kN}$ in $X_2 = -23.18 \text{ kNm}$.



Račun reakcij:

Pozitivne smeri reakcij so prikazane na sliki 5.131.



Slika 5.131: Reakcije računamo na statično določeni konstrukciji

Reakcije lahko določimo na dva načina:

- A) Rešimo ravnotežne enačbe na osnovni konstrukciji. Pri tem upoštevamo zunanjo obtežbo in neznane sile X_i ($i = 1, 2, \dots, n$).
- B) Reakcije določimo s seštevanjem že prej izračunanih reakcij zaradi zunanje obtežbe in neznanih sil X_i .

Tako dobimo

$$\begin{aligned}
 A_z &= A_z(F, Q) + A_z(X_1) + A_z(X_2) = A_z(F, Q) + \bar{A}_z(X_1 = 1) X_1 + \bar{A}_z(X_2 = 1) X_2 = \\
 &= -45 + 0.5 \cdot 52.73 - 0.25 \cdot (-23.18) = -12.84 \text{ kN}, \\
 B_z &= 5 - 0.5 \cdot 52.73 + 0.25 \cdot (-23.18) = -27.16 \text{ kN}, \\
 B_x &= 100 - 1 \cdot 52.73 = 47.27 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

Reakciji A_x in M_{By} sta enaki iskanim količinam X_1 in X_2

$$A_x = X_1 = 52.73 \text{ kN}, \quad M_{By} = X_2 = -23.18 \text{ kNm}.$$

Račun upogibnih momentov:

Tudi upogibne momente lahko določimo s seštevanjem upogibnih momentov zaradi sil P , Q , X_1 in X_2 . Ker so posamezni diagrami odsekoma linearni, določimo vrednosti upogibnih momentov le v točkah A, B, 1, 2 in 3 (slika 5.131)

$$\begin{aligned}
 A: \quad M_y &= 0 \text{ kNm}, \\
 B: \quad M_y &= 1 \cdot (-23.18) = -23.18 \text{ kNm}, \\
 1: \quad M_y &= 90 - 1 \cdot 52.73 + 0.5 \cdot (-23.18) = 25.68 \text{ kNm}, \\
 2: \quad M_y &= 100 - 2 \cdot 52.73 + 1 \cdot (-23.18) = -28.64 \text{ kNm}, \\
 3: \quad M_y &= 100 - 1 \cdot 52.73 + 1 \cdot (-23.18) = 24.09 \text{ kNm}.
 \end{aligned}$$

