

# PREGLED PORAZDELITEV

Dejan Zupan

# Normalna porazdelitev

- **gostota:**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - m_X}{\sigma_X} \right)^2}$$

- **porazdelitvena funkcija:**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t - m_X}{\sigma_X} \right)^2} dt$$

- **lastnosti:**

- ◇ simetrična;
- ◇ linearna kombinacija normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk je normalna slučajna spremenljivka.

# Logaritemsko normalna porazdelitev

- **gostota:**

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma_{\ln Y}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \ln \tilde{m}_Y}{\sigma_{\ln Y}}\right)^2}$$

- **parametri:**

$$m_Y = \tilde{m}_Y e^{\frac{1}{2}\sigma_{\ln Y}^2}, \quad \sigma_Y^2 = m_Y^2 \left( e^{\sigma_{\ln Y}^2} - 1 \right)$$

- **lastnosti:**

- ◇  $\ln Y = X$ , kjer je  $X$  normalna slučajna spremenljivka s parametroma  $m_X = \ln \tilde{m}_Y$  in  $\sigma_X = \sigma_{\ln Y}$ ;
- ◇ produkt logaritemsko normalnih slučajnih spremenljivk je logaritemsko normalna slučajna spremenljivka:  $\tilde{m}_Y = \tilde{m}_{Y_1}\tilde{m}_{Y_2}$  in  $\sigma_{\ln Y}^2 = \sigma_{\ln Y_1}^2 + \sigma_{\ln Y_2}^2$ .

# Ekstremnih vrednosti tipa I, maksimumi

- začetna porazdelitev  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Y(y) = \exp[-\exp(-\lambda(y - u))]$$

- gostota:

$$f_Y(y) = \lambda \exp[-\lambda(y - u) - \exp(-\lambda(y - u))]$$

- parametri:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sigma_Y \sqrt{6}}, \quad u = m_Y - \frac{\gamma \sigma_Y \sqrt{6}}{\pi}$$

- lastnosti:

- ◇ opis največjih pretokov v časovnem obdobju;
- ◇ opis nekaterih obtežb na konstrukcije.

# Ekstremnih vrednosti tipa I, minimumi

- začetna porazdelitev  $F(x) = e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$
- porazdelitvena funkcija:

$$F_Z(z) = 1 - \exp[-\exp(\lambda(z - v))]$$

- gostota:

$$f_Z(z) = \lambda \exp(\lambda(z - v) - \exp(\lambda(z - v)))$$

- parametri:

$$\lambda = \frac{\pi}{\sigma_Z \sqrt{6}}, \quad v = m_Z + \frac{\gamma \sigma_Z \sqrt{6}}{\pi}.$$

# Ekstremnih vrednosti tipa II, maksimumi

- **začetna porazdelitev**  $F(x) = 1 - \beta \left(\frac{1}{x-\varepsilon}\right)^k, k \geq 2, x > \varepsilon$
- **porazdelitvena funkcija:**

$$F_Y(y) = \exp \left[ - \left( \frac{u - \varepsilon}{y - \varepsilon} \right)^k \right]$$

- **gostota:**

$$f_Y(y) = \frac{k}{u - \varepsilon} \left( \frac{u - \varepsilon}{y - \varepsilon} \right)^{k+1} \exp \left[ - \left( \frac{u - \varepsilon}{y - \varepsilon} \right)^k \right]$$

- **parametri:**

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = \left( \frac{\sigma_Y}{m_Y - \varepsilon} \right)^2 + 1, \quad u = \frac{m_Y - \varepsilon}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)} + \varepsilon$$

- **lastnosti:**

- ◇  $\varepsilon$  je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa spodno mejo.

# Ekstremnih vrednosti tipa II, minimumi

- **začetna porazdelitev**  $F(x) = \beta \left(\frac{1}{\omega-x}\right)^k$ ,  $k \geq 2$ ,  $x < \omega$
- **porazdelitvena funkcija:**

$$F_Z(z) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\omega - v}{\omega - z} \right)^k \right]$$

- **gostota:**

$$f_Z(z) = \frac{k}{\omega - v} \left( \frac{\omega - v}{\omega - z} \right)^{k+1} \exp \left[ - \left( \frac{\omega - v}{\omega - z} \right)^k \right]$$

- **parametri:**

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = \left( \frac{\sigma_Z}{\omega - m_Z} \right)^2 + 1, \quad v = \omega - \frac{\omega - m_Z}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$$

- **lastnosti:**

- ◇  $\omega$  je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa zgornjo mejo.

# Ekstremnih vrednosti tipa III, maksimumi

- **začetna porazdelitev**  $F(x) = 1 - c(\omega - x)^k$ ,  $k > 0$ ,  $x \leq \omega$
- **porazdelitvena funkcija:**

$$F_Y(y) = \exp \left[ - \left( \frac{\omega - y}{\omega - u} \right)^k \right]$$

- **gostota:**

$$f_Y(y) = \frac{k}{\omega - u} \left( \frac{\omega - y}{\omega - u} \right)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{\omega - y}{\omega - u} \right)^k \right]$$

- **parametri:**

$$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} = \left( \frac{\sigma_Y}{\omega - m_Y} \right)^2 + 1, \quad u = \omega - \frac{\omega - m_Y}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$$

- **lastnosti:**

- ◇  $\omega$  je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa zgornjo mejo.



# Ekstremnih vrednosti tipa III, minimumi

- **začetna porazdelitev**  $F(x) = c(x - \varepsilon)^k$ ,  $k > 0$ ,  $x \geq \varepsilon$
- **porazdelitvena funkcija:**

$$F_Z(z) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon} \right)^k \right]$$

- **gostota:**

$$f_Z(z) = \frac{k}{v - \varepsilon} \left( \frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon} \right)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{z - \varepsilon}{v - \varepsilon} \right)^k \right]$$

- **parametri:**

$$\frac{\Gamma \left( 1 + \frac{2}{k} \right)}{\Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{k} \right)} = \left( \frac{\sigma_Z}{m_Z - \varepsilon} \right)^2 + 1, \quad v = \frac{m_Z - \varepsilon}{\Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right)} + \varepsilon$$

- **lastnosti:**

- ◇  $\varepsilon$  je parameter, ki ga ocenimo iz narave problema, predstavlja pa spodno mejo.

# Porazdelitev Hi-kvadrat $\chi^2(n)$

- **gostota:**

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

- **Eulerjev integral  $\Gamma$ :**

$$\Gamma(a) = \int_0^1 u^{a-1} e^{-a} du$$

- **lastnosti:**

- ◇  $n$  je poljubno naravno število; rečemo mu **število prostostnih stopenj**;
- ◇ po porazdelitvi  $\chi^2$  se porazdeljuje **vsota kvadratov**  $n$  neodvisnih standardizirano normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk;
- ◇ če je  $X \sim \chi^2(n)$ , je za velike  $n$  porazdelitev  $Y = \sqrt{2X} - \sqrt{2n-1}$  približno standardizirano normalna.

# Studentova porazdelitev $t(n)$

- **gostota:**

$$f_T(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

- **Eulerjeva funkcija Beta:**

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$$

- **lastnosti:**

- ◇  $n$  je poljubno naravno število; rečemo mu število prostostnih stopenj;
- ◇ po Studentovi porazdelitvi se porazdeljuje povprečje vzorca normalno porazdeljene populacije, kadar je velikost vzorca majhna;
- ◇ če je  $X \sim N(0, 1)$  in  $Y \sim \chi^2(n)$ , je  $\frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}} \sim t(n)$
- ◇ ko gre  $n \rightarrow \infty$ , se Studentova porazdelitev približuje standardizirani normalni.

# Porazdelitev $F(m, n)$

- **gostota:**

$$f_Z(m, n) = \frac{\sqrt{m^m n^n}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{x^{m-2}}{(n+mx)^{m+n}}}, \quad x > 0$$

- **lastnosti:**

- ◇  $m$  in  $n$  sta poljubni naravni števili; obema rečemo število prostostnih stopenj;
- ◇ če je  $X \sim \chi^2(m)$  in  $Y \sim \chi^2(n)$ , je  $Z = \frac{nX}{mY} \sim F(m, n)$  in  $Z^{-1} \sim F(n, m)$ ;
- ◇ če je  $X \sim t(n)$ , je  $X^2 \sim F(1, n)$ .