RAVNOTEŽNI POGOJI
ZA SILE NA TOGEM TELESU

Marjan Stanek, Goran Turk

Pogoje, ki jih mora izpolnjevati sistem sil na togem telesu, da telo miruje ali se giblje premočrtno z enakomerno hitrostjo, imenujemo **ravnotežni pogoji**. Pri izpeljavi ravnotežnih pogojev moramo upoštevati enačbe, s katerimi opišemo mirovanje oziroma gibanje togega telesa.

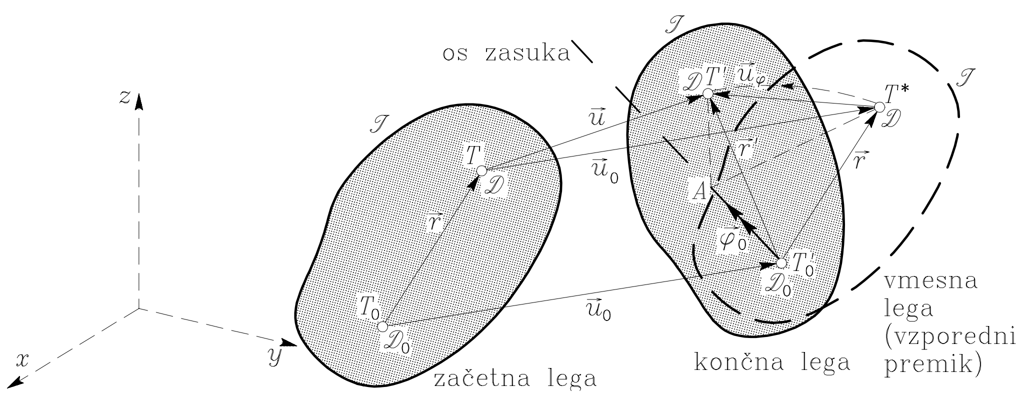
1 Pomiki in zasuki togega telesa

Enačbe za opis pomikov in zasukov togega telesa izpeljemo za tri primere: 1) velikosti pomikov in zasukov ne omejimo; 2) upoštevamo, da so zasuki majhni; 3) upoštevamo, da so pomiki in zasuki majhni.

1.1 Enačbe za opis pomikov in zasukov togega telesa

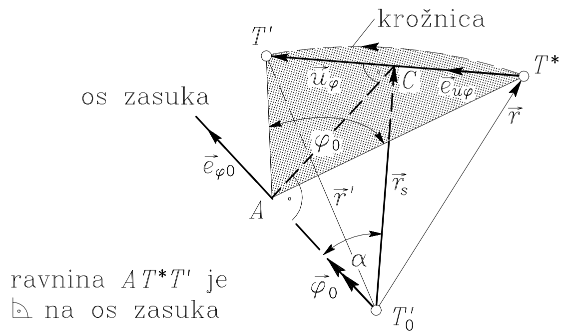
Poljuben pomik $\vec{u}$ delca $\mathscr{D}$ v točki T togega telesa $\mathscr{T}$ lahko opišemo z vzporednim premikom telesa $\mathscr{T}$, opisanim s pomikom $\vec{u}_0$ delca $\mathscr{D}_0$ v točki T_0, in s pomikom $\vec{u}_\varphi$ zaradi zasuka telese $\mathscr{T}$ okrog delca $\mathscr{D}_0$ (slika 1.1)

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_\varphi. \tag{1.1}$$



SLIKA 1.1 Pomik $\vec{u}$ poljubnega delca $\mathscr{D}$ v točki T togega telesa je določen s pomikom $\vec{u}_0$ delca $\mathscr{D}_0$ in zasukom $\vec{\varphi}_0$ telesa delca $\mathscr{T}$ okrog delca $\mathscr{D}_0$ v točki T_0.

Vektor $\vec{r}$ je vektor od točke T_0 do točke T. Vzemimo, da pomik $\vec{u}_0$ in zasuk $\vec{\varphi}_0$ poznamo. Telo najprej vzporedno premaknemo v vmesno lego tako, da točki T_0 in T preideta v T_0' in T^*, nato pa zavrtimo okrog delca $\mathscr{D}_0$ za kot $\vec{\varphi}_0$ (slika 1.1). Ker so legi točk T_0' in T^* ter vektor zasuka $\vec{\varphi}_0$ znani, lahko skozi točko T^* narišemo ravnino AT^*T', ki je pravokotna na vektor zasuka $\vec{\varphi}_0$. Pri zasuku telesa za $\vec{\varphi}_0$ potuje delec $\mathscr{D}$ iz točke T^* v točko T' po krožnici, ki leži v ravnini AT^*T' (slika 1.2).



Slika 1.2 Pomik točke T^* v točko T' zaradi zasuka telesa

S φ_0 je označena absolutna vrednost zasuka $|\vec{\varphi}_0|$. Če z $\vec{e}_{u\varphi}$ označimo enotski vektor v smeri pomika $\vec{u}_\varphi$, potem je:

$$\vec{u}_\varphi = |\vec{u}_\varphi|\,\vec{e}_{u\varphi} = 2\,\overline{CT'}\,\vec{e}_{u\varphi}. \tag{1.2}$$

Iz slike 1.2 sledi:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{\overline{CT'}}{\overline{AC}}, \quad \overline{AC} = r_s\,\sin\alpha, \quad r_s = |\vec{r}_s|, \quad \vec{e}_{u\varphi} = \frac{\vec{\varphi}_0\times\vec{r}_s}{|\vec{\varphi}_0\times\vec{r}_s|} = \frac{\vec{\varphi}_0\times\vec{r}_s}{\varphi_0\,r_s\,\sin\alpha}, \quad \vec{r}_s = \frac{1}{2}\,(\vec{r}+\vec{r}\,'). \tag{1.3}$$

Enačbe (1.3) vstavimo v (1.2) in dobimo:

$$\vec{u}_\varphi = 2\,\overline{AC}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,\vec{e}_{u\varphi} = 2\,\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,r_s\,\sin\alpha\,\vec{e}_{u\varphi} = \frac{2}{\varphi_0}\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,\vec{\varphi}_0\times\vec{r}_s = \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,\frac{\vec{\varphi}_0}{\varphi_0}\times(\vec{r}+\vec{r}\,'). \tag{1.4}$$

Pomik $\vec{u}$ dobimo, če (1.4) vstavimo v (1.1):

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}_0 + \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,\frac{\vec{\varphi}_0}{\varphi_0}\times(\vec{r}+\vec{r}\,') = \vec{u}_0 + \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,\vec{e}_{\varphi 0}\times(\vec{r}+\vec{r}\,').} \tag{1.5}$$

Z $\vec{e}_{\varphi 0} = \vec{\varphi}_0/\varphi_0$ smo označili enotski vektor v smeri zasuka $\vec{\varphi}_0$. Če upoštevamo, da je $\vec{r}\,' = \vec{r}+\vec{u}_\varphi$ (slika 1.2), zapišemo (1.5) tudi takole:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\,\vec{e}_{\varphi 0}\times(2\,\vec{r}+\vec{u}_\varphi). \tag{1.6}$$

Pri togem telesu se poljubna delca $\mathscr{D}_1$ in $\mathscr{D}_2$ zavrtita okrog osi zasuka za enak kot $\vec{\varphi}$. Zato je zasuk $\vec{\varphi}$ telesa $\mathscr{T}$ okrog delca $\mathscr{D}$ v točki T enak zasuku $\vec{\varphi}_0$ telesa $\mathscr{T}$ okrog delca $\mathscr{D}_0$ v toči T_0

$$\boxed{\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0.} \tag{1.7}$$

Ker z enačbami (1.5) in (1.7) opišemo pomike in zasuke togega telesa, predstavljata ti enačbi **kinematična pogoja** za pomike in zasuke togega telesa.

1.2 Pomiki togega telesa ob predpostavki malih zasukov

V primeru majhnih zasukov je $|\vec{\varphi}_0| \ll 1$ in sledi ($\vec{\varphi}_0 \to d\vec{\varphi}_0$)

$$\operatorname{tg}\frac{d\varphi_0}{2} \approx \frac{d\varphi_0}{2}, \quad \vec{r}_s \approx \vec{r}\,' \approx \vec{r}. \tag{1.8}$$

Enačba (1.5) dobi v tem primeru tako obliko

$$\vec{u}^{\,*} = \vec{u}_0 + \frac{d\varphi_0}{2}\,\frac{d\vec{\varphi}_0}{d\varphi_0} \times 2\,\vec{r} = \vec{u}_0 + d\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}. \tag{1.9}$$

Z zvezdico pri pomiku smo poudarili, da enačba ustreza primeru, ko je zasuk $d\vec{\varphi}_0$ okoli točke $\mathscr{D}_0$ majhen. Pomik $\vec{u}^{\,*}$ delca $\mathscr{D}$ in zasuk $d\vec{\varphi}$ okoli delca $\mathscr{D}$ v točki T izrazimo s pomikom $\vec{u}_0$ in zasukom $d\vec{\varphi}_0$ takole

$$\boxed{\vec{u}^{\,*} = \vec{u}_0 + d\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}, \qquad d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_0.} \tag{1.10}$$

1.3 Pomiki togega telesa ob predpostavki malih pomikov in zasukov

V primeru majhnih pomikov in majhnih zasukov pišemo enačbi (1.10) takole

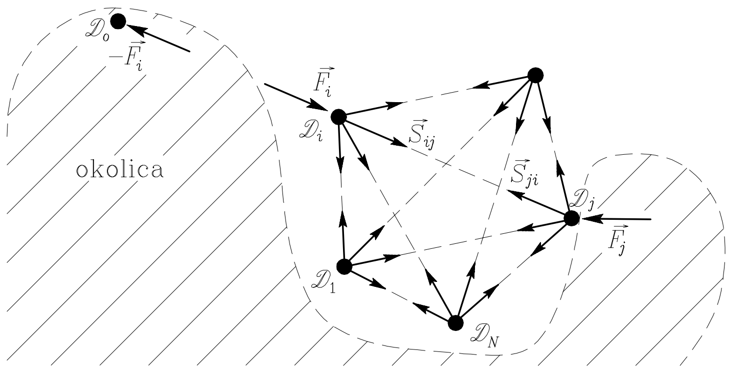
$$\boxed{d\vec{u} = d\vec{u}_0 + d\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}, \qquad d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_0.} \tag{1.11}$$

2 Ravnotežni pogoji

Najprej izpeljemo ravnotežne pogoje za sile na sistemu delcev, nato pa še ravnotežne pogoje za sile na sistemu delcev s togimi vezmi in na togem telesu.

2.1 Ravnotežni pogoji za sile na sistemu delcev

Obravnavamo sistem N delcev $\mathscr{D}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ z masami m_i $(i = 1, \ldots, N)$. Sile, ki delujejo na posamezne delce sistema delimo na zunanje sile $\vec{F}_i$ in notranje sile $\vec{S}_{ij}$. Zunanjo silo $\vec{F}_i$, ki deluje na delec $\mathscr{D}_i$, povzročajo delci, ki niso del obravnavanega sistema N delcev. Notranje sile $\vec{S}_{ij}$ so sile, s katerimi posamezni delci obravnavanega sistema delcev delujejo med seboj. Z $\vec{S}_{ij}$ označimo silo, s katero delec $\mathscr{D}_j$ deluje na delec $\mathscr{D}_i$ (slika 1.3).



SLIKA 1.3 Na sistem delcev delujejo zunanje sile $\vec{F}_i$ in pari notranjih sil $\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$.

Po 3. Newtonovem zakonu dva delca delujeta med seboj s silama, ki imata enako velikost, ležita na isti smernici in sta nasprotno usmerjeni:

$$\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}, \qquad \vec{S}_{ii} = \vec{0}. \tag{1.12}$$

Vsota vseh notranjih sil sistema delcev je zato enaka nič

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij} = \vec{0}. \tag{1.13}$$

Diferencialno enačbo gibanja delca $\mathscr{D}_i$ določa 2. Newtonov zakon

$$m_i\,\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij}. \tag{1.14}$$

Pri tem je $\vec{a}_i \equiv \partial^2 \vec{r}_i / \partial t^2$ vektor pospeška delca $\mathscr{D}_i$, $\vec{r}_i$ pa njegov krajevni vektor. Enačbe gibanja posameznih delcev zapišemo takole:

$$\begin{aligned}
m_1\,\vec{a}_1 &= \vec{F}_1 + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{1j}, \\
m_2\,\vec{a}_2 &= \vec{F}_2 + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{2j}, \\
&\vdots \\
m_N\,\vec{a}_N &= \vec{F}_N + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{Nj}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Delec $\mathscr{D}_i$ miruje ali se giblje premočrtno z enakomerno hitrostjo, če je njegov pospešek enak nič. Takrat rečemo, da so sile, ki na delec delujejo, v **ravnotežju**. Iz (1.15) sledi, da so sile na sistemu delcev v ravnotežju, če so izpolnjene enačbe:

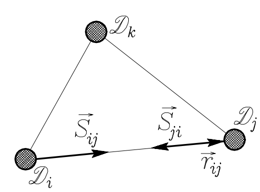
$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{1j} &= \vec{0}, \\
\vec{F}_2 + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{2j} &= \vec{0}, \\
&\vdots \\
\vec{F}_N + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{Nj} &= \vec{0}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Enačbe (1.16) so **ravnotežni pogoji** za sile na sistemu delcev.

2.2 Ravnotežni pogoji za sile na sistemu delcev s togimi vezmi

Pri sistemu delcev s togimi vezmi se razdalja med poljubnima delcema $\mathscr{D}_i$ in $\mathscr{D}_j$ ne spreminja (slika 1.4)

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_i| = |\vec{r}_{ij}| = \text{konst.}$$



SLIKA 1.4 Sistem delcev s togimi vezmi.

Pomiki in zasuki delcev takega sistema ustrezajo pomikom togega telesa. Če sistemu delcev s togimi vezmi v nekem trenutku t vsilimo **poljubne** diferencialne pomike, se delec $\mathscr{D}_1$ premakne za $d\vec{u}_1$, delec $\mathscr{D}_2$ za $d\vec{u}_2$ itd. Če enačbo gibanja delca $\mathscr{D}_1$ skalarno pomnožimo s pomikom $d\vec{u}_1$, enačbo gibanja delca $\mathscr{D}_2$ s pomikom $d\vec{u}_2$ itd., zapišemo enačbe gibanja posameznih delcev takole (glej enačbe (1.15)):

$$\begin{aligned}
(\vec{F}_1 - m_1\,\vec{a}_1 + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{1j}) \cdot d\vec{u}_1 &= 0, \\
(\vec{F}_2 - m_2\,\vec{a}_2 + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{2j}) \cdot d\vec{u}_2 &= 0, \\
&\vdots \\
(\vec{F}_N - m_N\,\vec{a}_N + \sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{Nj}) \cdot d\vec{u}_N &= 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Enačbe (1.17) seštejemo in dobimo

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i) \cdot d\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij} \cdot d\vec{u}_i = 0. \tag{1.18}$$

V vsoti $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{S}_{ij} \cdot d\vec{u}_i$ v enačbi (1.18) nastopajo pari (slika 1.4)

$$\vec{S}_{ij} \cdot d\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot d\vec{u}_j. \tag{1.19}$$

Ker pomiki sistema delcev s togimi vezmi ustrezajo pomikom togega telesa, lahko uporabimo enačbi (1.11)

$$d\vec{u}_j = d\vec{u}_0 + d\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}_{0j}, \quad d\vec{\varphi}_j = d\vec{\varphi}_0. \tag{1.20}$$

Z $d\vec{u}_j$ označimo pomik delca $\mathscr{D}_j$, z $d\vec{u}_0$ pomik delca $\mathscr{D}_0$, z $d\vec{\varphi}_0$ zasuk sistema delcev okrog delca $\mathscr{D}_0$, z $\vec{r}_{0j}$ pa vektor od delca $\mathscr{D}_0$ do delca $\mathscr{D}_j$. Če (1.20) upoštevamo v (1.19), sledi

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{ij} \cdot d\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot d\vec{u}_j &= \vec{S}_{ij} \cdot d\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot d\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot (d\vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{ij}) = \\
&= (\vec{S}_{ij} + \vec{S}_{ji}) \cdot d\vec{u}_i + d\vec{\varphi}_i \cdot (\vec{r}_{ij} \times \vec{S}_{ji}).
\end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}$ (enačba (1.12)) in da je $\vec{S}_{ji}$ vzporeden $\vec{r}_{ij}$ (slika 1.4), sledi

$$\vec{S}_{ij} \cdot d\vec{u}_i + \vec{S}_{ji} \cdot d\vec{u}_j = 0 \tag{1.21}$$

oziroma

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i)\cdot d\vec{u}_i = 0. \tag{1.22}$$

Če so pospeški vseh delcev enaki nič, potem delci obravnavanega sistema delcev s togimi vezmi mirujejo ali pa se gibljejo premočrtno z enakomerno hitrostjo. V tem primeru iz (1.22) sledi

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot d\vec{u}_i = 0. \tag{1.23}$$

Enačba (1.23) zagotavlja mirovanje sistema delcev s togimi vezmi in zato predstavlja **ravnotežne pogoje** za sile, ki na sistem delcev s togimi vezmi delujejo.

Če v enačbi (1.23) pomike $d\vec{u}_i$ izrazimo z enačbo (1.20), dobimo

$$dW = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot(d\vec{u}_0 + d\vec{\varphi}_0\times\vec{r}_{0i}) = d\vec{u}_0\cdot(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i) + d\vec{\varphi}_0\cdot(\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{0i}\times\vec{F}_i) = 0. \tag{1.24}$$

Uporabimo oznaki za rezultanto sil $\vec{R}$ in rezultanto momentov $\vec{M}_R^O$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i, \qquad \vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{0i}\times\vec{F}_i$$

in dobimo pogoj za ravnotežje v obliki:

$$dW = d\vec{u}_0\cdot\vec{R} + d\vec{\varphi}_0\cdot\vec{M}_R^O = 0. \tag{1.25}$$

Če podpore nadomestimo z reakcijami, obravnavamo nepodprti sistem delcev. V tem primeru sta pomik $d\vec{u}_0$ in zasuk $d\vec{\varphi}_0$ med seboj **neodvisna** vektorja. Ker smo sistemu delcev vsilili poljubne pomike, lahko pomik $d\vec{u}_0$ in zasuk $d\vec{\varphi}_0$ izbiramo poljubno.

1. Če izberemo, da je pomik $d\vec{u}_0$ različen od nič, $d\vec{\varphi}_0$ pa je nič, dobimo iz enačbe (1.25)

$$d\vec{u}_0\cdot\vec{R} = 0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \vec{0}.} \tag{1.26}$$

2. Če izberemo, da je zasuk $d\vec{\varphi}_0$ različen od nič, $d\vec{u}_0$ pa je nič, dobimo iz enačbe (1.25)

$$d\vec{\varphi}_0\cdot\vec{M}_R^O = 0 \quad\rightarrow\quad \boxed{\vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_{0i}\times\vec{F}_i = \vec{0}.} \tag{1.27}$$

Enačbi (1.26) in (1.27) predstavljata **potrebne in zadostne pogoje za ravnotežje sil na sistemu delcev s togimi vezmi**.

Da sta enačbi (1.26) in (1.27) zadostna pogoja za mirovanje sistema delcev s togimi vezmi pokažemo tako, da ju vstavimo v (1.25) in ugotovimo, da je enačbi zadoščeno za poljubna $d\vec{u}_0$ in $d\vec{\varphi}_0$. Da sta enačbi potrebna pogoja razložimo takole: če kateri izmed pogojev (1.26) in (1.27) ni izpolnjen, enačba (1.25) ni izpolnjena in sile na sistemu delcev s togimi vezmi niso v ravnotežju. Potrebni sta torej obe enačbi (1.26) in (1.27).

2.3 Ravnotežni pogoji za sile na togem telesu

Če so delci v sistemu delcev s togimi vezmi zvezno razporejeni, določajo računski model za togo telo. Enačbi za ravnotežje sil na togem telesu dobimo, če v (1.26) in (1.27) namesto po vseh N delcih, seštevamo le po delcih, v katerih sile $\vec{F}_i$ delujejo na togo telo. Če je takih sil s, dobimo

$$\boxed{\vec{R} = \sum_{i=1}^{s} \vec{F}_i = \vec{0}, \qquad \vec{M}_R^O = \sum_{i=1}^{s} \vec{r}_{0i} \times \vec{F}_i = \vec{0}.} \tag{1.28}$$

Krajevni vektorji $\vec{r}_{0i}$ potekajo od poljubno izbrane točke, do prijemališč sil $\vec{F}_i$. Enačbi predstavljata **potrebne in zadostne pogoje za ravnotežje sil na togem telesu**. To sta osnovni enačbi statike togega telesa. Ti enačbi določata osnovno obliko ravnotežnih pogojev. Ravnotežnih pogojev za sile, ki delujejo na togo telo je šest, ker ima nopodprto togo telo šest prostostnih stopenj gibanja.