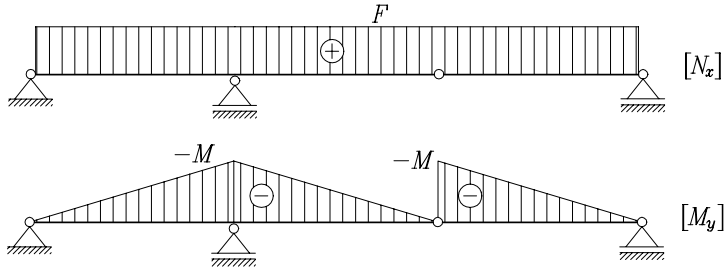
Za račun napetosti σ_{xx} potrebujemo potek osne sile N_x ter upogibnih momentov M_y in M_z. Diagrama za N_x in M_y prikazujemo na sliki 1.54. Velikost upogibnega momenta M_z je enaka nič.



Slika 1.54: Osna sila N_x in upogibni moment M_y

Izračunati moramo še ploščino A_x prečnega prereza ter njegove težiščne vztrajnostne momente I_y, I_z in I_{yz}. Prerez $\mathscr{A}_x$ razdelimo na dva dela (slika 1.53) in dobimo ploščino

$$A_x = 10 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 44 \ \text{cm}^2,$$

koordinati težišča

$$y_T = z_T = 3.72727 \ \text{cm}$$

in vztrajnostne momente

$$I_y = I_z = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 3.273^2 \cdot 2 \cdot 10 + \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 2.727^2 \cdot 2 \cdot 12 = 567.394 \ \text{cm}^4,$$
$$I_{yz} = -(2 \cdot 10 \cdot 3.273 \cdot 2.727 + 2 \cdot 12 \cdot 2.727 \cdot 2.273) = -327.273 \ \text{cm}^4.$$

Upogibni moment M_z je enak nič, zato je

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\,(I_z\, z + I_{yz}\, y)$$

in dobimo

$$\sigma_{xx} = \frac{100}{44} - \frac{10000}{567.394^2 - 327.273^2}\,(567.394\, z - 327.273\, y) = 2.27273 + 15.2341\, y - 26.4115\, z.$$

Ker se vzdolž osi nosilca moment spreminja linearno, sta prereza, v katerih nastanejo ekstramne vrednosti napetosti določena z $x = a$ in $x = 2\,a$. Ker je v obeh prerezih M_y enak, moramo določiti še točki, v katerih je normalna napetost največja oziroma najmanjša. Ekstremne vrednosti v prečnem prerezu poligonalne oblike (določen z ravnimi robovi) nastanejo v vogalih takega prečnega prereza. Zato je najenostavneje, če izračunamo normalno napetost v vseh vogalih prečnega prereza in vidimo, kje je največja tlačna oziroma največja natezna napetost.

Druga možnost za ugotavljanje največje natezne napetosti:

Vzamemo največji negativen $z = -8.273$ cm in pripadajoči čimvečji $y = -1.72727$ cm (točka A na sliki 1.55)

$$\sigma_{xx} = 2.273 - 10000\,(0.002641 \cdot (-8.273) - 0.001523 \cdot (-1.727)) = 194.46 \ \mathrm{kN/cm^2}$$

in največji pozitiven $y = 8.273$ cm ter pripadajoči čimmanjši $z = 1.727$ cm (točka B)

$$\sigma_{xx} = 2.273 - 10000\,(0.002641 \cdot 1.727 - 0.001523 \cdot 8.273) = -189.909 \ \mathrm{kN/cm^2}.$$

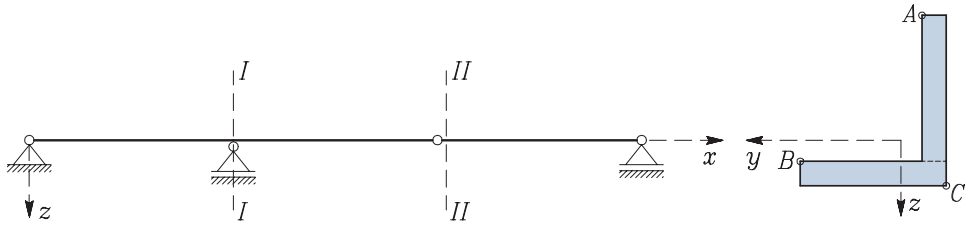
Za ugotavljanje največje tlačne napetosti vzamemo največji pozitivni $z = 3.727$ cm in pripadajoči čimmanjši $y = -3.727$ cm (točka C)

$$\sigma_{xx} = 2.273 - 10000\,(0.002641 \cdot 3.727 - 0.001523 \cdot (-3.727)) = -152.95 \ \mathrm{kN/cm^2}$$

in največji negativen $y = -3.727$ cm ter pripadajoči čimvečji $z = 3.727$ cm kar je zopet točka C

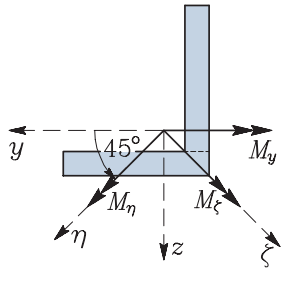
$$\sigma_{xx} = -152.92 \ \mathrm{kN/cm^2}.$$

Rezultat je prikazan na sliki 1.55.



Slika 1.55: Mesto največje natezne in največje tlačne napetosti

Primer lahko obravnavamo tudi glede na glavni vztrajnostni osi η_g in ζ_g. Kot α_g je zaradi simetrije prečnega prereza okoli osi ζ enak $45°$ (slika 1.56).



Slika 1.56: Glavni vztrajnostni osi η_g in ζ_g

Vzdolžna normalna napetost izračunamo po enačbi (1.89)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_\eta}{I_\eta}\,\zeta - \frac{M_\zeta}{I_\zeta}\,\eta.$$

Glavna vztrajnostna momenta sta

$$I_\eta = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\,\alpha_g + I_{yz}\sin 2\,\alpha_g = 240.121\ \text{cm}^4,$$
$$I_\zeta = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\,\alpha_g - I_{yz}\sin 2\,\alpha_g = 894.667\ \text{cm}^4,$$

upogibna momenta M_η in M_ζ pa

$$M_\eta = -\frac{M\sqrt{2}}{2} = -7071.07\ \text{kNm}, \quad M_\zeta = \frac{M\sqrt{2}}{2} = 7071.07\ \text{kNm}.$$

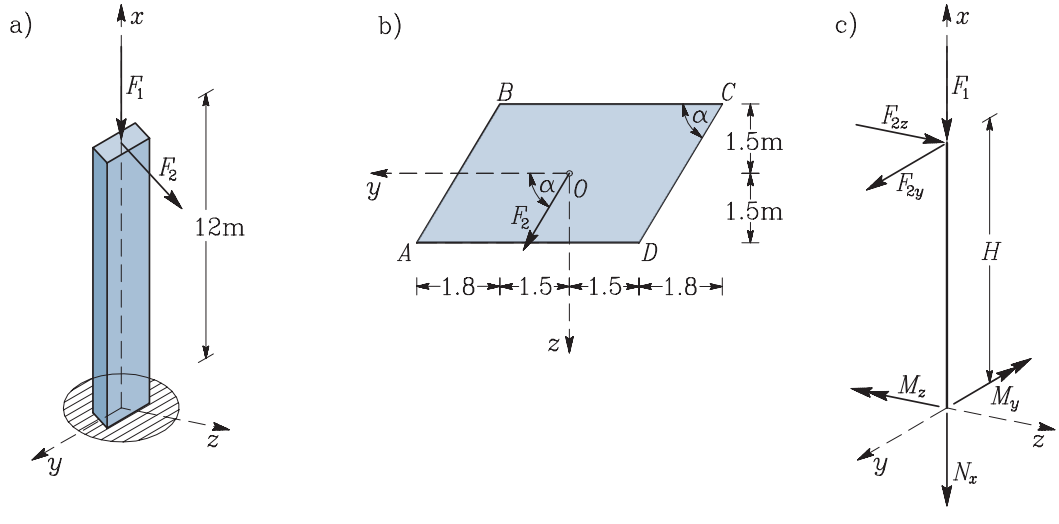
Tako dobimo

$$\sigma_{xx} = 2.27273 - 7.90358\,\eta - 29.4479\,\zeta.$$

Račun koordinat vozlišč:

$$\begin{array}{llllll}
A: & y = -1.72727, & z = -8.27273, & \eta = -7.07107, & \zeta = -4.62834 & \rightarrow \quad \sigma_{xx} = 194.454, \\
B: & y = 8.27273, & z = 1.72727, & \eta = 7.07107, & \zeta = 4.62834 & \rightarrow \quad \sigma_{xx} = -189.909, \\
C: & y = -3.72727, & z = 3.72727, & \eta = 0.0, & \zeta = 5.27116 & \rightarrow \quad \sigma_{xx} = -152.952.
\end{array}$$

Primer 1.16 *Kamniti steber poševnega mostu je v težišču zgornjega prečnega prereza obtežen z navpično silo $F_1 = 1100$ kN in z vodoravno silo $F_2 = 200$ kN, ki je vzporedna stranicam AB in CD (slika 1.57). Višina stebra je $H = 12$ m, specifična teža materiala stebra je $\gamma_k = 22$ kN/m^3. Določimo normalne napetosti v prerezu ob vpetju v točkah A, B, C in D!*



Slika 1.57: Geometrija konstrukcije in obtežba

Notranje sile v prerezu $x = 0$ izračunamo iz ravnotežnih pogojev za sile na sliki 1.57. Upoštevamo, da je $\mathrm{tg}\alpha = 3/1.8$ oziroma $\alpha = 59.04°$ in izračunamo komponenti F_{2y} in F_{2z}

$$F_{2y} = 200\,\cos 59.04° = 102.90\,\mathrm{kN}, \quad F_{2z} = 200\,\sin 59.04° = 171.50\,\mathrm{kN}.$$

Notranje sile N_x, M_y in M_z so

$$\begin{aligned} N_x &= -1100 - 14.4 \cdot 12 \cdot 22 = -4901.6\,\mathrm{kN}, \\ M_y &= -F_{2z}\,H = -171.5 \cdot 12 = -2058.0\,\mathrm{kNm}, \\ M_z &= F_{2y}\,H = 102.9 \cdot 12 = 1234.8\,\mathrm{kNm}. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je ploščina A_x prečnega prereza enaka $A_x = 4.8 \cdot 3 = 14.4\ \mathrm{m}^2$. Za račun normalne napetosti σ_{xx} (enačba (1.88))

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z\,I_y - M_y\,I_{yz}}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,y - \frac{M_z\,I_{yz} - M_y\,I_z}{I_y\,I_z - I_{yz}^2}\,z.$$

potrebujemo še vztrajnostne momente I_y, I_z in I_{yz}:

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{3^4}{12} + \left(\frac{1.8 \cdot 3}{2}\frac{3^2}{18} + (1.5-1)^2\frac{1.8 \cdot 3}{2}\right) \cdot 2 = 10.800\ \mathrm{m}^4, \\ I_z &= \frac{3^4}{12} + \left(\frac{1.8 \cdot 3}{2}\frac{1.8^2}{18} + (1.5+\frac{1.8}{3})^2\frac{1.8 \cdot 3}{2}\right) \cdot 2 = 31.536\ \mathrm{m}^4, \\ I_{yz} &= \left(-\frac{1}{18}\left(\frac{1.8 \cdot 3}{2}\right)^2 - 2.1 \cdot 0.5\frac{1.8 \cdot 3}{2}\right) \cdot 2 = -6.48\ \mathrm{m}^4. \end{aligned}$$

Izračunajmo še

$$I_y\,I_z - I_{yz}^2 = 298.60\ \mathrm{m}^8.$$

Normalna napetost σ_{xx} je

$$\sigma_{xx} = -340.39 - 190.55\,z.$$

Napetosti v vogalnih točkah prečnega prereza $x = 0$ so:

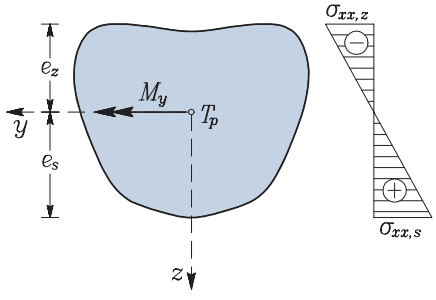
$$\begin{aligned} \sigma_{xx,A} &= -340.39 - 190.55 \cdot 1.5 = -626.22\ \mathrm{kN/m}^2, \\ \sigma_{xx,B} &= -340.39 - 190.55 \cdot (-1.5) = -54.56\ \mathrm{kN/m}^2, \\ \sigma_{xx,C} &= -340.39 - 190.55 \cdot (-1.5) = -54.56\ \mathrm{kN/m}^2, \\ \sigma_{xx,D} &= -340.39 - 190.55 \cdot 1.5 = -626.22\ \mathrm{kN/m}^2. \end{aligned}$$

Primer 1.17 *Določimo ekstremne vrednosti normalne napetosti σ_{xx}, če sta y in z glavni težiščni vztrajnostni osi prečnega prereza in sta $N_x = 0$ in $M_z = 0$!*

Če sta N_x in M_z enaka nič, iz (1.89) dobimo

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y}\, z.$$

Ekstremni vrednosti normalne napetosti σ_{xx} sta v točkah, ki sta najbolj oddaljenih od osi y (slika 1.58).



Slika 1.58: Diagram normalne napetosti, če sta N_x in M_z enaka nič

Zapišemo ju z enačbama:

$$\sigma_{xx,s} = \frac{M_y}{I_y}\, e_s, \qquad \sigma_{xx,z} = -\frac{M_y}{I_y}\, e_z.$$

Geometrijski karakteristiki

$$W_{y,s} = \frac{I_y}{e_s}, \qquad W_{y,z} = \frac{I_y}{e_z}$$

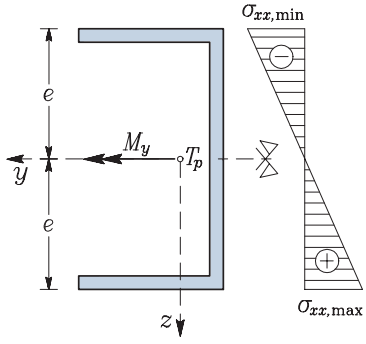
imenujemo **odpornostna momenta prečnega prereza** in imata dimenzijo m^3. Ekstremni vrednosti normalne napetosti σ_{xx} izrazimo z odpornostnima momentoma takole:

$$\sigma_{xx,s} = \frac{M_y}{W_{y,s}}, \qquad \sigma_{xx,z} = -\frac{M_y}{W_{y,z}}.$$

Za prerez, ki je **simetričen** glede na os y, je $e_s = e_z \equiv e$ in zato $W_{y,s} = W_{y,z} \equiv W_y$. Ekstremni napetosti sta v tem primeru po absolutni vrednosti enaki

$$\sigma_{xx,\mathrm{ekst}} = \pm\frac{|M_y|}{W_y}.$$

Grafični prikaz napetosti σ_{xx} za prečni prerez, ki je simetričen glede na os y in obremenjen z upogibnim momentom M_y prikazujemo na sliki 1.59.



Slika 1.59: Os y je simetrijska os prečnega prereza

V primeru **dvojno simetričnega prečnega prereza**, ki je obremenjen z N_x, M_y in M_z, dobimo na podoben način naslednji izraz za ekstremni vrednosti normalne napetosti σ_{xx} :

$$\sigma_{xx,\text{ekst}} = \frac{N_x}{A_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

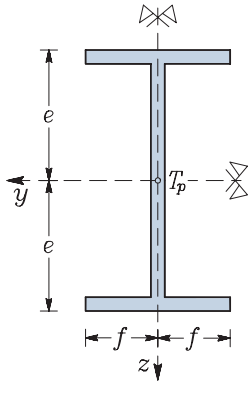
oziroma

$$\sigma_{xx,\max} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}, \quad \sigma_{xx,\min} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{|M_y|}{W_y} - \frac{|M_z|}{W_z}, \tag{1.141}$$

kjer je

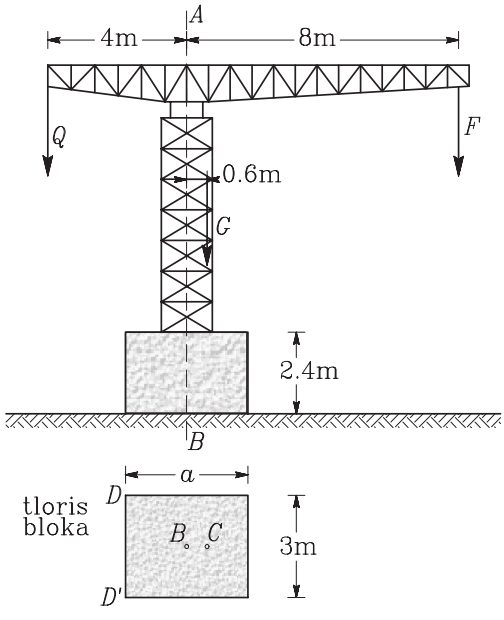
$$W_z = \frac{I_z}{f}.$$

Pri tem je f največja koordinata v smeri osi y (slika 1.60), e pa največja koordinata v smeri z.



Slika 1.60: Prečni prerez ima dve simetrijski osi

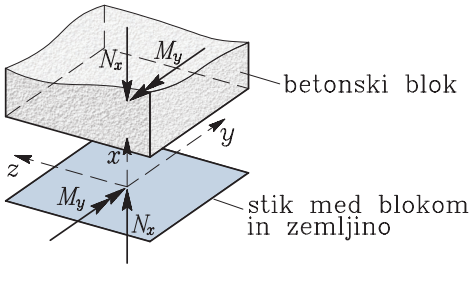
Primer 1.18 *Dvigalo je pritrjeno na betonski blok. Os dvigala AB poteka skozi težišče T osnovne ploskve bloka. Lastna teža dvigala $G = 180$ kN učinkuje v točki C na razdalji 0.6 m od osi AB (slika 1.61). Določimo dimenzijo a temelja tako, da pri podani obtežbi $F = 80$ kN in teži protiuteži $Q = 50$ kN na celotnem stiku med zemljino in betonskim blokom nastopijo le tlačne napetosti, razen na robu DD', kjer je napetost enaka nič! Specifična teža betona je $\gamma_b = 24$ kN/m^3. Določimo tudi največjo tlačno napetost v stiku med zemljino in betonskim blokom.*



Slika 1.61: Dimenzije konstrukcije in lege prijemališč sil G, F in Q

Izbira koordinatnega sistema

Ker nas zanimajo napetosti v zemljini, postavimo v ploskev, kjer blok pritiska na zemljino, desnosučni koordinatni sistem x, y, z. V pozitivni smeri osi x označimo notranjo silo N_x, v pozitivni smeri osi y pa notranji moment M_y (sliki 1.62).



Slika 1.62: Koordinatni sistem x, y, z na katerega računamo silo N_x in moment M_y

Iz ravnotežnih pogojev za konstrukcijo sledi:

$$N_x + F + G + Q + \gamma_b\, a\, 3.0 \cdot 2.4 = 0, \quad M_y + 4\,Q - 8\,F - 0.6\,G = 0.$$

V zadnja izraza vstavimo vrednosti in dobimo

$$N_x = -310 - 172.8\,a, \quad M_y = 548\ \text{kNm}.$$

Ekstremni napetosti v zemljini izračunamo po enačbi (1.141)

$$\sigma_{xx,\text{ekst}} = \frac{N_x}{A_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y}.$$

Ploščina osnovne ploskve temelja je $A_x = 3\,a$, odpornosti moment pa $W_y = 2\,I_y/a = a^2/2$. Sledi

$$\sigma_{xx,\text{ekst}} = -\frac{310 + 172.8\,a}{3a} \pm \frac{548 \cdot 2}{a^2}. \tag{1.142}$$

Za račun napetosti σ_{xx} na robu DD', ki je enaka nič, moramo izbrati pozitivni predznak

$$\sigma_{xx} = -\frac{310 + 172.8\,a}{3a} + \frac{548 \cdot 2}{a^2} = 0.$$

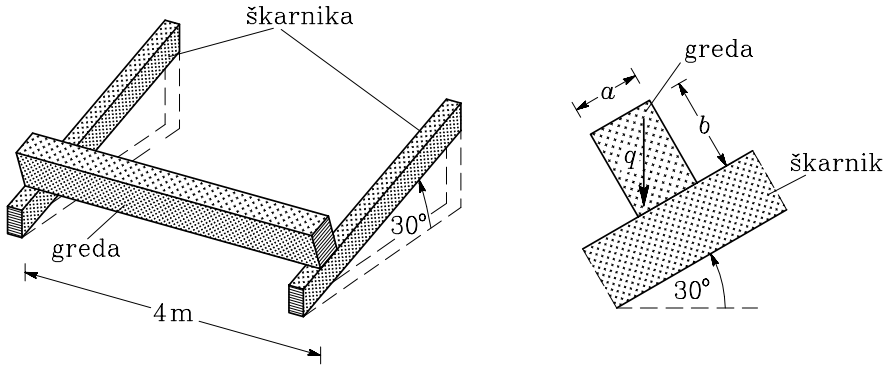
Enačbo množimo z $-3\,a^2$

$$172.8\,a^2 + 310\,a - 3288 = 0$$

in rešimo. Tako dobimo $a_1 = 3.56$ m in $a_2 = -5.35$ m. Fizikalni pomen ima le pozitivna vrednost. Zato je potrebna širina a temelja enaka $a = a_1 = 3.56$ m. Največjo tlačno napetost v zemljini izračunamo iz (1.142), če vstavimo izračunano vrednost za a ter upoštevamo predznak minus:

$$\sigma_{xx,\min} = -\frac{310 + 172.8 \cdot 3.56}{3 \cdot 3.56} - \frac{548 \cdot 2}{3.56^2} = -173.31\ \text{kN/m}^2.$$

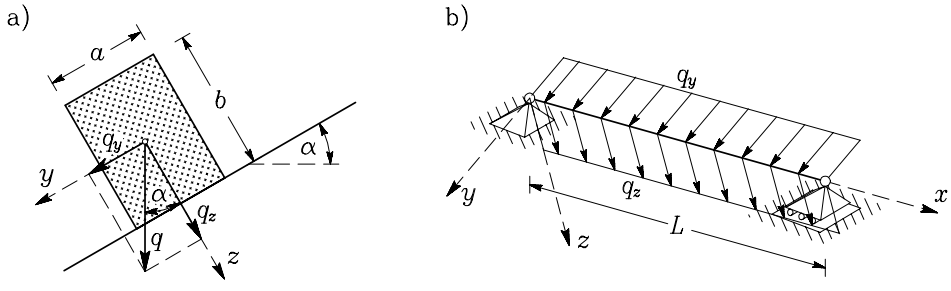
Primer 1.19 *Določimo dimenziji a in b grede med dvema škarnikoma ob pogoju, da največja normalna napetost ne bo presegla vrednosti 1 kN/cm^2! Določimo tudi lego nevtralne osi in velikost ter smer največjega pomika! Greda je podprta tako, da je njen statični model prostoležeči nosilec dolžine 4 m (slika 1.63). Velikost obtežbe je $q = 2.5$ kN/m, modul elastičnosti grede je $E = 1000$ kN/cm^2, dopustna napetost lesa je $\sigma_{xx,\text{dop}} = 1.0$ kN/cm^2, dolžina grede je $L = 4$ m, razmerje prečnih dimenzij grede je $a/b = 5/7$, naklonski kot strešine pa je $\alpha = 30°$.*



Slika 1.63: Gredo pravokotnega prečnega prereza podpirata škarnika

Dimenzijo nosilca določimo iz pogoja $\sigma_{xx,\max} \leq \sigma_{xx,\mathrm{dop}}$. Obtežbo nosilca razstavimo v smereh glavnih vztrajnostnih osi (slika 1.64a)

$$q_y = q \sin\alpha, \qquad q_z = q \cos\alpha.$$



Slika 1.64: Obtežbo razstavimo v smereh glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereza

Ekstremna vrednost momentov nastopi pri $x = L/2 = 2$ m (glej sliko 1.64b):

$$M_y(x = L/2) = \frac{q_z\, L^2}{8} = \frac{q\, L^2}{8} \cos\alpha = 4.33\ \mathrm{kNm},$$

$$M_z(x = L/2) = -\frac{q_y\, L^2}{8} = -\frac{q\, L^2}{8} \sin\alpha = -2.50\ \mathrm{kNm}.$$

Ker je osna sila N_x nič, določamo največjo normalno napetost $\sigma_{xx,\max}$ z enačbo (1.141)

$$\sigma_{xx,\max} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}.$$

Odpornostna momenta pravokotnega prereza

$$W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{a\, b^2}{6}, \qquad W_z = \frac{I_z}{a/2} = \frac{b\, a^2}{6}$$

pri danem razmerju a/b lahko odpornostna momenta W_y in W_z izrazimo z višino nosilca b

$$W_y = \frac{5}{7}\, b\, \frac{b^2}{6} = \frac{5\, b^3}{42}, \qquad W_z = \frac{b}{6}\frac{25}{49}\, b^2 = \frac{25}{294}\, b^3.$$

Največja vrednost napetosti σ_{xx} mora biti manjša od $\sigma_{xx,\mathrm{dop}}$

$$\sigma_{xx,\mathrm{max}} = \frac{433 \cdot 42}{5\, b^3} + \frac{250 \cdot 294}{25\, b^3} \leq 1.0$$

in zato

$$b \geq 18.74\,\mathrm{cm}.$$

Širina nosilca je

$$a = \frac{5}{7}\, 18.74 = 13.39\,\mathrm{cm}.$$

Na osnovi teh vrednosti izberemo dimenziji grede

$$a = 14\,\mathrm{cm}, \qquad b = 20\,\mathrm{cm}.$$

Za tako izbrani dimenziji sta odpornostna momenta $W_{y,\mathrm{dej}}$ in $W_{z,\mathrm{dej}}$ enaka

$$W_{y,\mathrm{dej}} = \frac{14 \cdot 20^2}{6} = 933.33\,\mathrm{cm}^3, \qquad W_{z,\mathrm{dej}} = \frac{20 \cdot 14^2}{6} = 653.33\,\mathrm{cm}^3,$$

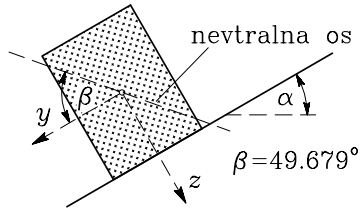
ekstremni vrednosti normalne napetosti σ_{xx} pa sta

$$\sigma_{xx,\mathrm{max}}^{\mathrm{dej}} = \frac{433}{933.33} + \frac{250}{653.33} = 0.847\,\mathrm{kN/cm}^2 < \sigma_{xx,\mathrm{dop}},$$
$$\sigma_{xx,\mathrm{min}}^{\mathrm{dej}} = -\frac{433}{933.33} - \frac{250}{653.33} = -0.847\,\mathrm{kN/cm}^2 < \sigma_{xx,\mathrm{dop}}.$$

Lego nevtralne osi pri $x = L/2$ določimo z enačbo

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y}\, z - \frac{M_z}{I_z}\, y = \frac{q\, L^2}{8} \cos\alpha\, \frac{z}{I_y} + \frac{q\, L^2}{8} \sin\alpha\, \frac{y}{I_z} = 0. \tag{1.143}$$

Kot β je kot med osjo y in nevtralno osjo. Izračunamo ga iz enačbe (1.143) (slika 1.65)



Slika 1.65: Lega nevtralne osi

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{z}{y} = -\frac{I_y}{I_z}\mathrm{tg}\alpha = -\frac{a\,b^3}{12}\frac{12}{b\,a^3}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{20^2\sqrt{3}}{3\cdot 14^2} = -1.178 \quad \rightarrow \quad \beta = -49.679^\circ.$$

Zaradi simetrije konstrukcije in obtežbe nastopi največji pomik na sredini nosilca. Pomika v smereh osi y in z označimo z u_y in u_z. Pri $x = L/2$ sta pomika enaka (glej preglednico 1.5)

$$u_y = \frac{5}{384}\frac{q_y\,L^4}{E\,I_z}, \qquad u_z = \frac{5}{384}\frac{q_z\,L^4}{E\,I_y}.$$

Vztrajnostna momenta I_y in I_z sta

$$I_y = \frac{14\cdot 20^3}{12} = 9333.33\ \mathrm{cm}^4, \qquad I_z = \frac{20\cdot 14^3}{12} = 4573.33\ \mathrm{cm}^4,$$

pomika u_y in u_z pa

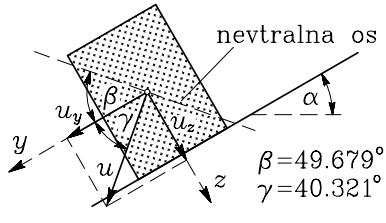
$$u_y = \frac{5\cdot 0.025\cdot \sin 30^\circ\cdot 256\cdot 10^8}{384\cdot 10^3\cdot 4573.33} = 0.91108\ \mathrm{cm},$$
$$u_z = \frac{5\cdot 0.025\cdot \cos 30^\circ\cdot 256\cdot 10^8}{384\cdot 10^3\cdot 9333.33} = 0.77324\ \mathrm{cm}.$$

Velikost pomika izračunamo po Pitagorovem izreku

$$u = \sqrt{0.91108^2 + 0.77324^2} = 1.195\ \mathrm{cm}.$$

Smer pomika je (slika 1.66)

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{u_z}{u_y} = \frac{0.77324}{0.91108} = 0.84870 \quad \rightarrow \quad \gamma = 40.321^\circ.$$

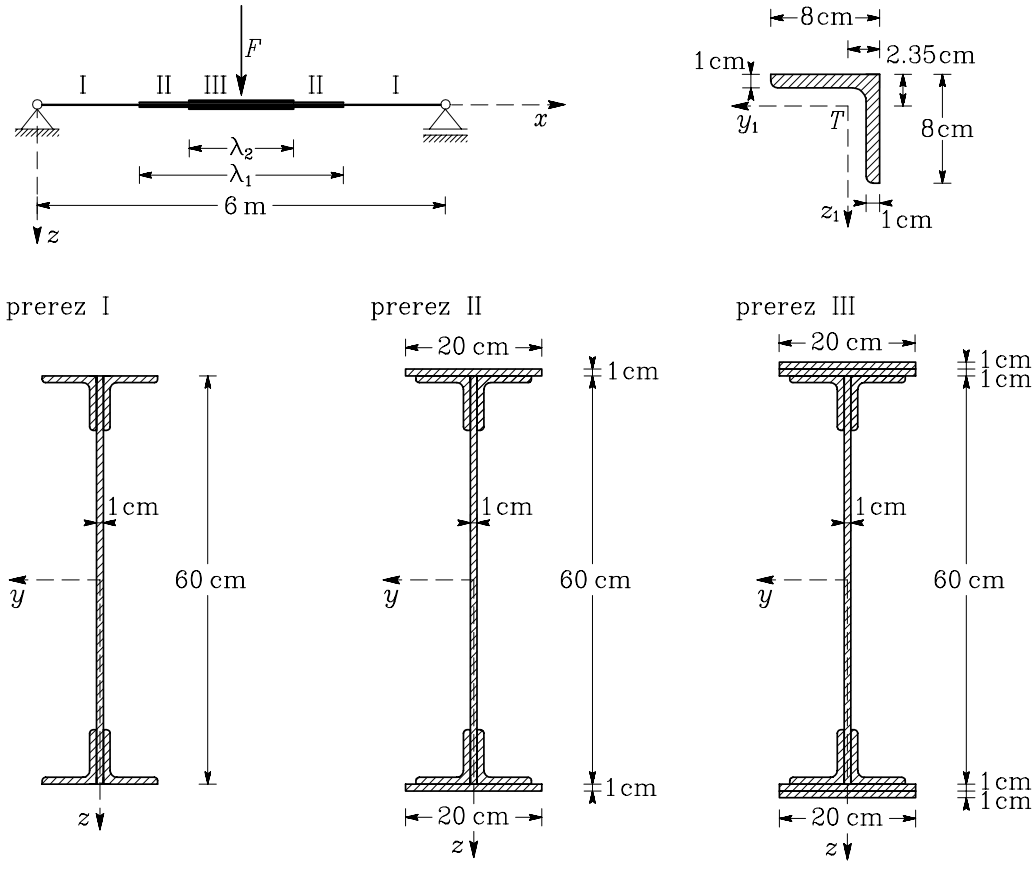


Slika 1.66: Smer pomika u

Nosilec se premakne v smeri, ki je pravokotna na nevtralno os

$$|\beta| + \gamma = 49.679 + 40.321 = 90^\circ.$$

Primer 1.20 *Prečni prerez prostoležečega nosilca dolžine $L = 6$ m se spreminja v odvisnosti od x (slika 1.67). Določimo velikost sile F ter dolžini λ_1 in λ_2 tako, da normalna napetost σ_{xx} nikjer v nosilcu ne bo večja od 10 kN/cm^2! Ploščina prečnega prereza enega kotnika je $A_{x\,\mathrm{k}} = 15.1$ cm^2, težiščna vztrajnostna momenta sta $I_{y\,\mathrm{k}} = I_{z\,\mathrm{k}} = 88.4$ cm^4, razdalja do težišča pa $y_{T\,\mathrm{k}} = z_{T\,\mathrm{k}} = 2.35$ cm.*



Slika 1.67: Podatki o geometriji in obtežbi

Čeprav smo enačbe za upogib z osno silo izpeljali za primer nosilca s konstantnim prečnim prerezom, uporabimo pri računu napetosti enake enačbe tudi v primeru, če se prečni prerez spreminja. Pri računanju normalne napetosti σ_{xx} v prečnem prerezu upoštevamo geometrijske karakteristike prereza, ki ga obravnavamo (glej razdelek 1.2.5).

V nosilcu je od nič različen le upogibni moment M_y, N_x in M_z pa sta enaka nič. Za račun normalne napetosti σ_{xx}

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y}\, z$$

potrebjemo vztrajnostni moment prečnega prereza I_y. Ker je nosilec sestavljen iz treh različnih delov, izračunamo tri vztrajnostne momente I_{y1}, I_{y2} in I_{y3} za tri prečne prereze I, II in III. Vztrajnostni moment prečnega prereza I je:

$$I_{y\,I} = \frac{1 \cdot 60^3}{12} + 4\left(88.4 + (30 - 2.35)^2 \cdot 15.1\right) = 64530.76 \ \mathrm{cm}^4.$$

Vztrajnostni moment prečnega prereza II je:

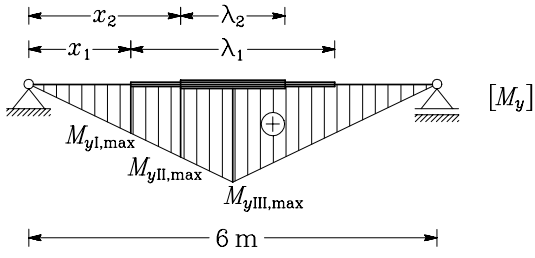
$$I_{y\,II} = I_{y\,I} + 2\left(\frac{20\cdot 1^3}{12} + 30.5^2\cdot 20\right) = 101744.09\ \text{cm}^4.$$

Vztrajnostni moment prečnega prereza III je:

$$I_{y\,III} = I_{y\,II} + 2\left(\frac{20\cdot 1^3}{12} + 31.5^2\cdot 20\right) = 141437.43\ \text{cm}^4.$$

Največjo normalno napetost v območju III izračunamo po enačbi (slika 1.68)

$$\sigma_{xx,\text{III max}} = \frac{M_{y,\text{III max}}}{I_{y3}}\, z_{\text{III max}}.$$



Slika 1.68: Največji momenti M_y v posameznih območjih nosilca z različnimi prerezi

Ker je $M_{y,\text{III max}} = F\,L/4$ in $z_{\text{III max}} = 32$ cm, sledi

$$\sigma_{xx,\text{III max}} = \frac{F\,600}{4\cdot 141437.43}\,32 = 10 \quad\rightarrow\quad F = \frac{10\cdot 4\cdot 141437.43}{600\cdot 32} = 294.66\ \text{kN}.$$

Največja normalna napetost v območju II

$$\sigma_{xx,\text{II max}} = \frac{M_{y,\text{II max}}}{I_{y\,\text{II}}}\, z_{\text{II max}}.$$

Ker je $M_{y,\text{II max}} = F\,x_2/2$ in $z_{\text{II max}} = 31$ cm, sledi

$$\sigma_{xx,\text{II max}} = \frac{F\,x_2}{2\cdot 101744.09}\,31 = 10 \quad\rightarrow\quad x_2 = \frac{10\cdot 2\cdot 101744.09}{31\,F} = 222.77\ \text{cm}.$$

Razdalja λ_2 je

$$\lambda_2 = 600 - 2\,x_2 = 154.46\ \text{cm}.$$

Največja normalna napetost v območju I

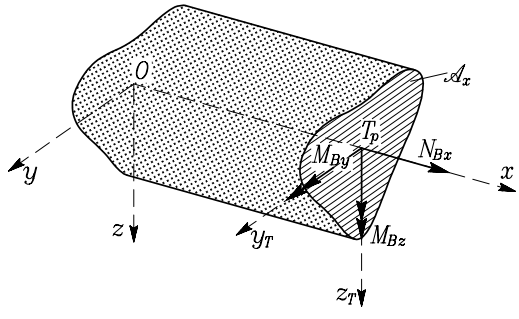
$$\sigma_{xx,\text{I max}} = \frac{M_{y,\text{I max}}}{I_{y\,\text{I}}}\, z_{\text{I max}}.$$

Ker je $M_{y,\mathrm{I\,max}} = F\,x_1/2$ in $z_{\mathrm{I\,max}} = 30$ cm, sledi

$$\sigma_{xx,\mathrm{I\,max}} = \frac{F\,x_1}{2\cdot 64530.76}\,30 = 10 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{10\cdot 2\cdot 64530.76}{30\,F} = 146.00\ \mathrm{cm}.$$

Razdalja λ_1 je $\lambda_1 = 600 - 2\,x_1 = 308.00\ \mathrm{cm}$.

Primer 1.21 *Določimo normalne napetosti σ_{xx} v prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$, na katerega delujejo tlačna sila N_{Bx} ter momenta M_{By} in M_{Bz} (slika 1.69).*



Slika 1.69: Notranje sile N_{Bx}, M_{By} in M_{Bz} določajo obtežbo prečnega prereza $\mathscr{A}_x$

Predpostavimo, da potekata osi y in z skozi težišče T prečnega prereza $\mathscr{A}_x$. Obravnavajmo primer, ko lahko material prevzame le tlačne napetosti. Predpostavimo še, da sta vzdolžna deformacije ε_{xx} in vzdolžna napetost σ_{xx} linearni funkciji koordinat y in z. Z $\mathscr{A}_x$ označimo del prereza $\mathscr{A}_x$, na katerega deluje tlačna napetost σ_{xx}.

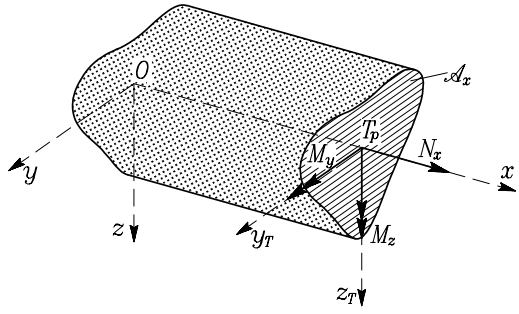
Za ravni linijski nosilec iz **homogenega, izotropnega in linearno elastičnega materiala** izrazimo notranjo silo N_x ter upogibna momenta M_y in M_z (slika 1.70) z vzdolžno normalno napetostjo σ_{xx} po enačbah (1.9) in (1.10)

$$N_x = \int_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\,dA_x, \qquad M_y = \int_{\mathscr{A}_x} z\,\sigma_{xx}\,dA_x, \qquad M_z = -\int_{\mathscr{A}_x} y\,\sigma_{xx}\,dA_x. \tag{1.144}$$

Zaradi Navierove hipoteze in linearne elastičnosti materiala predpostavimo, da se vzdolžna normalna napetost σ_{xx} linearno spreminja po prečnem prerezu

$$\sigma_{xx} = a + b\,y + c\,z, \tag{1.145}$$

kjer so a, b in c neznani parametri, ki določajo linearno funkcijo $\sigma_{xx}(y,z)$. V primeru, da prečni prerez



Slika 1.70: V prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$ nastopijo osna sila N_x ter upogibna momenta M_y in M_z

prevzame tudi natezne napetosti, zapišemo enačbe (1.144) takole:

$$
\begin{aligned}
N_x &= a \int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x + b \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, dA_x + c \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, dA_x, \\
M_y &= a \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, dA_x + b \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, z\, dA_x + c \int\limits_{\mathscr{A}_x} z^2\, dA_x, \\
M_z &= -a \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, dA_x - b \int\limits_{\mathscr{A}_x} y^2\, dA_x - c \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, z\, dA_x.
\end{aligned}
\tag{1.146}
$$

Upoštevamo oznake za geometrijske karakteristike prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ (glej enačbe (1.94))

$$
\begin{aligned}
A_x &= \int\limits_{\mathscr{A}_x} dA_x, \quad S_z = \int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, dA_x, \quad S_y = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\, dA_x, \\
I_z &= \int\limits_{\mathscr{A}_x} y^2\, dA_x, \quad I_y = \int\limits_{\mathscr{A}_x} z^2\, dA_x, \quad I_{yz} = -\int\limits_{\mathscr{A}_x} y\, z\, dA_x
\end{aligned}
\tag{1.147}
$$

in enačbe (1.146) zapišemo v obliki sistema treh linearnih enačb za parametre a, b in c linearne enačbe (1.145)

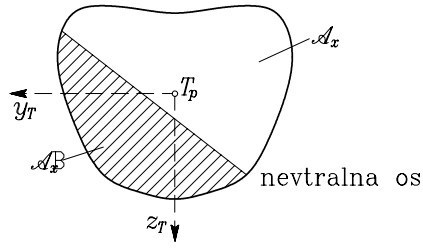
$$
\begin{aligned}
N_x &= a\, A_x + b\, S_z + c\, S_y, \\
M_y &= a\, S_y - b\, I_{yz} + c\, I_y, \\
M_z &= -a\, S_z - b\, I_z + c\, I_{yz}.
\end{aligned}
\tag{1.148}
$$

Iz enačb (1.148) izrazimo konstante a, b in c ter jih vstavimo v (1.145). S tem dobimo enačbo za vzdolžno normalno napetost, ki smo jo že izpeljali v (1.88)

$$
\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z\, I_y - M_y\, I_{yz}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\, y + \frac{M_y\, I_z - M_z\, I_{yz}}{I_y\, I_z - I_{yz}^2}\, z. \tag{1.149}
$$

Če prerez **ne prevzame nateznih napetosti**, integriramo izraze (1.146) le po tlačno obteženem delu $\mathscr{A}_x$ prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ (slika 1.71). Predpostavimo, da so napetosti po delu $\mathscr{A}_x$ linearne

$$\sigma_{xx} = a + b\,y + c\,z. \tag{1.150}$$



Slika 1.71: Na območju $\mathscr{A}_x$ predpostavimo linearen potek napetosti σ_{xx}, na preostalem delu prereza $\mathscr{A}_x$ pa je napetost σ_{xx} enaka nič

Notranje sile N_x, M_y in M_z zapišemo v tem primeru takole (glej (1.148)):

$$\begin{aligned} N_x &= a\,A'_x + b\,S'_z + c\,S'_y, \\ M_y &= a\,S'_y - b\,I'_{yz} + c\,I'_y, \\ M_z &= -a\,S'_z - b\,I'_z + c\,I'_{yz}. \end{aligned} \tag{1.151}$$

Enačbe (1.151) rešimo, če poiščemo take parametre a, b in c, ki določajo linearno funkcijo $\sigma_{xx}(y,z)$, da so pripadajoče notranje sile N_x, M_y in M_z enake obtežbi N_{Bx}, M_{By}, M_{Bz} prečnega prereza:

$$\left\{\begin{matrix} N_{Bx} \\ M_{By} \\ M_{Bz} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix}\right\} \quad \text{oziroma} \quad \left\{\begin{matrix} f_1(a,b,c) \\ f_2(a,b,c) \\ f_3(a,b,c) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} N_{Bx} \\ M_{By} \\ M_{Bz} \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} N_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}. \tag{1.152}$$

Če (1.151) vstavimo v (1.152), dobimo

$$\begin{aligned} f_1(a,b,c) &= N_{Bx} - a\,A'_x(a,b,c) - b\,S'_z(a,b,c) - c\,S'_y(a,b,c) = 0, \\ f_2(a,b,c) &= M_{By} - a\,S'_y(a,b,c) + b\,I'_{yz}(a,b,c) - c\,I'_y(a,b,c) = 0, \\ f_3(a,b,c) &= M_{Bz} + a\,S'_z(a,b,c) + b\,I'_z(a,b,c) - c\,I'_{yz}(a,b,c) = 0. \end{aligned} \tag{1.153}$$

Tlačeni del prereza $\mathscr{A}_x$ je določen s koeficienti a, b in c. Zato so geometrijske karakteristike S'_y, S'_z, I'_y, I'_z in I'_{yz} tlačenega dela prereza $\mathscr{A}_x$ glede na težišče T celotnega prečnega prereza $\mathscr{A}_x$ odvisne od koeficientov a, b in c. Enačbe (1.153) določajo sistem nelinearnih enačb za neznane a, b in c. Rešimo ga z iteracijsko metodo. Funkcije f_1, f_2 in f_3 razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog začetnega približka $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ in $c^{(0)}$, ki ga določimo tako, da predpostavimo linearen potek napetosti in upoštevamo, da prerez prevzame tudi natezne napetosti (enačbe (1.148)). Pri razvoju funkcij f_1, f_2 in f_3 v Taylorjevo

vrsto moramo upoštevati, da je meja območja $\mathscr{A}_x$ odvisna od neznank a, b in c. Če v Taylorjevi vrsti upoštevamo le prve odvode, dobimo

$$\begin{aligned} & f_1(a_0+\Delta a, b_0+\Delta b, c_0+\Delta c) = N_{Bx} - (a\,A'_x + b\,S'_z + c\,S'_y)^{(0)} - \\ & - \left(A'_x + a\,\frac{\partial A'_x}{\partial a} + b\,\frac{\partial S'_z}{\partial a} + c\,\frac{\partial S'_y}{\partial a}\right)^{(0)} \Delta a - \left(a\,\frac{\partial A'_x}{\partial b} + S'_z + b\,\frac{\partial S'_z}{\partial b} + c\,\frac{\partial S'_y}{\partial b}\right)^{(0)} \Delta b - \\ & - \left(a\,\frac{\partial A'_x}{\partial c} + b\,\frac{\partial S'_z}{\partial c} + S'_y + c\,\frac{\partial S'_y}{\partial c}\right)^{(0)} \Delta c = 0, \end{aligned} \tag{1.154}$$

$$\begin{aligned} & f_2(a_0+\Delta a, b_0+\Delta b, c_0+\Delta c) = M_{By} - (a\,S'_y - b\,I'_{yz} + c\,I'_y)^{(0)} - \\ & - \left(S'_y + a\,\frac{\partial S'_y}{\partial a} - b\,\frac{\partial I'_{yz}}{\partial a} + c\,\frac{\partial I'_y}{\partial a}\right)^{(0)} \Delta a - \left(a\,\frac{\partial S'_y}{\partial b} - I'_{yz} - b\,\frac{\partial I'_{yz}}{\partial b} + c\,\frac{\partial I'_y}{\partial b}\right)^{(0)} \Delta b - \\ & - \left(a\,\frac{\partial S'_y}{\partial c} - b\,\frac{\partial I'_{yz}}{\partial c} + I'_y + c\,\frac{\partial I'_y}{\partial c}\right)^{(0)} \Delta c = 0, \end{aligned} \tag{1.155}$$

$$\begin{aligned} & f_3(a_0+\Delta a, b_0+\Delta b, c_0+\Delta c) = M_{Bz} - (-a\,S'_z - b\,I'_z + c\,I'_{yz})^{(0)} - \\ & - \left(-S'_z - a\,\frac{\partial S'_z}{\partial a} - b\,\frac{\partial I'_z}{\partial a} + c\,\frac{\partial I'_{yz}}{\partial a}\right)^{(0)} \Delta a - \left(-a\,\frac{\partial S'_z}{\partial b} - I'_z - b\,\frac{\partial I'_z}{\partial b} + c\,\frac{\partial I'_{yz}}{\partial b}\right)^{(0)} \Delta b - \\ & - \left(-a\,\frac{\partial S'_z}{\partial c} - b\,\frac{\partial I'_z}{\partial c} + I'_{yz} + c\,\frac{\partial I'_{yz}}{\partial c}\right)^{(0)} \Delta c = 0. \end{aligned} \tag{1.156}$$

Če v enačbah (1.154) do (1.156) zanemarimo odvode geometrijskih karakteristik, dobimo sistem linearnih enačb za Δa, Δb in Δc

$$\begin{bmatrix} A'_x & S'_z & S'_y \\ S'_y & -I'_{yz} & I'_y \\ -S'_z & -I'_z & I'_{yz} \end{bmatrix}^{(0)} \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{Bmatrix}^{(0)} = \begin{Bmatrix} N_{Bx} - (a\,A'_x + b\,S'_z + c\,S'_y) \\ M_{By} - (a\,S'_y - b\,I'_{yz} + c\,I'_{yt}) \\ M_{Bz} - (-a\,S'_z - b\,I'_z + c\,I'_{yz}) \end{Bmatrix}^{(0)} . \tag{1.157}$$

Iz enačbe (1.157) izračunamo popravke $\Delta a^{(0)}$, $\Delta b^{(0)}$ in $\Delta c^{(0)}$ koeficientov a, b in c. Nove vrednosti koeficientov $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ in $c^{(1)}$ izračunamo z naslednjimi enačbami:

$$a^{(1)} = a^{(0)} + \Delta a^{(0)}, \quad b^{(1)} = b^{(0)} + \Delta b^{(0)}, \quad c^{(1)} = c^{(0)} + \Delta c^{(0)}. \tag{1.158}$$

Sedaj enačbo (1.157) ponovno uporabimo s popravljenimi vrednostmi $a^{(1)}$, $b^{(1)}$ in $c^{(1)}$. V i-ti iteraciji enačba (1.157) izgleda takole:

$$\begin{bmatrix} A'_x & S'_z & S'_y \\ S'_y & -I'_{yz} & I'_y \\ -S'_z & -I'_z & I'_{yz} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{Bmatrix}^{(i)} = \begin{Bmatrix} N_{Bx} - (a\,A'_x + b\,S'_z + c\,S'_y) \\ M_{By} - (a\,S'_y - b\,I'_{yz} + c\,I'_{yt}) \\ M_{Bz} - (-a\,S'_z - b\,I'_z + c\,I'_{yz}) \end{Bmatrix}^{(i)} . \tag{1.159}$$

vrednosti koeficientov $a^{(i)}$, $b^{(i)}$ in $c^{(i)}$ pa določimo z enačbo, podobno enačbi (1.158)

$$a^{(i+1)} = a^{(i)} + \Delta a^{(i)}, \qquad b^{(i+1)} = b^{(i)} + \Delta b^{(i)}, \qquad c^{(i+1)} = c^{(i)} + \Delta c^{(i)}.$$

Približke a, b in c popravljamo tako dolgo, da je

$$\frac{\|\Delta S\|}{\|F_B\|} \leq \delta.$$

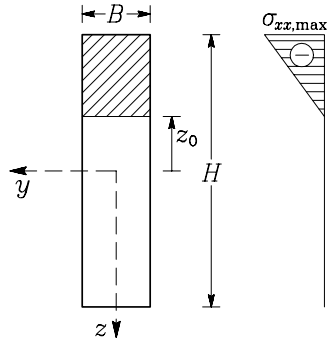
Z $\|\Delta S\|$ in $\|F_B\|$ sta označeni normi vektorjev

$$\{\Delta S\} = \left\{ \begin{array}{l} N_{Bx} - (a\,A'_x + b\,S'_z + c\,S'_y) \\ M_{By} - (a\,S'_y - b\,I'_{yz} + c\,I'_y) \\ M_{Bz} - (-a\,S'_z - b\,I'_z + c\,I'_{yz}) \end{array} \right\}, \qquad \{F_B\} = \left\{ \begin{array}{l} N_{Bx} \\ M_{By} \\ M_{Bz} \end{array} \right\},$$

z δ pa zahtevana natančnost. Na desni strani enačbe (1.157) nastopajo točni izrazi za N_x, M_y in M_z. Če imamo točne vrednosti za a, b in c, je desna stran sistema enačb enaka nič in so zato tudi popravki Δa, Δb in Δc enaki nič. Z iteracijami lahko zaključimo. Zato sledi, da so v primeru, če postopek konvergira, torej da gredo Δa, Δb in Δc proti nič, rešitve a, b in c točne rešitve problema, ne glede na to, kako smo določili matriko v enačbi (1.157). Ta matrika vpliva le na hitrost konvergence. Če je matrika v enačbi (1.157) sestavljena iz odvodov $\partial f_i/\partial j$ $(i = 1, 2, 3,\ \ j = a, b, c)$, iteracijski postopek predstavlja Newtonovo metodo iskanja rešitve sistema nelinearnih enačb, konvergenca pa je v bližini rešitve kvadratična. Ker smo pri določanju odvodov nekatere člene zanemarili, lahko pričakujemo nekoliko slabšo konvergenco. To pomeni, da je za zahtevano natančnost potrebnih več iteracij, kot v primeru Newtonove metode.

Ko koeficiente a, b in c določimo, izračunamo normalno napetost σ_{xx} po enačbi (1.150).

Primer 1.22 *Določimo lego nevtralne osi in največjo tlačno napetost v prerezu pravokotne oblike širine $B = 50$ cm in višine $H = 200$ cm, ki je obremenjen z osno silo $N_{xB} = -100$ kN in upogibnim momentom $M_{yB} = 8000$ kNcm. V tem primeru lahko lego nevtralne osi določimo analitično. Z z_0 označimo lego nevtralne osi (slika 1.72).*



Slika 1.72: Prečni prerez in diagram napetosti σ_{xx}

Napetost σ_{xx} je v tem primeru le funkcija koordinate z

$$\sigma_{xx} = a + c\,z, \qquad z < z_0. \tag{1.160}$$

Diagram vzdolžnih normalnih napetosti σ_{xx} prikazujemo na sliki 1.72. Izrazimo osno silo N_x in upogibni moment M_y z vzdolžnimi normalnimi napetostmi

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int\limits_{\mathscr{A}_x} \sigma_{xx}\, dA_x = \frac{1}{2}\,\sigma_{xx,\max}\, B\left(z_0 + \frac{H}{2}\right), \\
M_y &= \int\limits_{\mathscr{A}_x} z\,\sigma_{xx}\, dA_x = \frac{1}{2}\,\sigma_{xx,\max}\, B\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)\left(-\frac{H}{2} + \frac{1}{3}\left(z_0 + \frac{H}{2}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{1.161}
$$

Dobili smo sistem dveh enačb za dve neznani količini $\sigma_{xx,\max}$ in z_0. Če drugo izmed enačb (1.161) delimo s prvo, dobimo enačbo, iz katere izračunamo lego nevtralne osi z_0

$$
\frac{M_y}{N_x} = -\frac{H}{3} + \frac{z_0}{3} \quad \rightarrow \quad z_0 = 3\,\frac{M_y}{N_x} + H = 3\,\frac{8000}{-100} + 200 = -40\ \text{cm}.
$$

Sedaj lahko iz prve izmed enačb (1.161) določimo največjo tlačno napetost

$$
\sigma_{xx,\max} = \frac{2\,N_x}{B\,(z_0 + H/2)} = -\frac{2\cdot 100}{50\,(-40+100)} = -0.06667\ \text{kN/cm}^2.
$$

Isto nalogo lahko rešimo tudi z iteracijskim postopkom, ki smo ga opisali v primeru 1.18. V preglednici 1.8 prikazujemo rezultate iteracij.

Tabela 1.8: Iteracije za $N_x = -100$ kN, $M_y = 8000$ kNcm in $M_z = 0$ kNcm

Iter.	A_x	a	b	c	$\sigma_{xx,\max}$
0	10000.000	−0.01000000	0.0	0.00024000	−0.03400000
1	7083.333	−0.00160228	0.0	0.00042910	−0.04451211
2	5186.703	0.01369846	0.0	0.00068515	−0.05481701
3	4000.338	0.03124419	0.0	0.00093742	−0.06249789
4	3333.502	0.04199787	0.0	0.00107997	−0.06599939
5	3055.605	0.04435748	0.0	0.00111002	−0.06664459
6	3001.953	0.04444433	0.0	0.00111111	−0.06666664
7	3000.003	0.04444444	0.0	0.00111111	−0.06666667
8	3000.000	0.04444444	0.0	0.00111111	−0.06666667

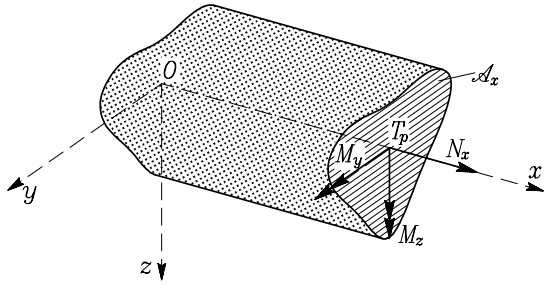
V primeru dvojne ekscentričnosti, ko sta od nič različna oba upogibna momenta M_y in M_z, do rešitve ne moremo priti analitično, ampak le z opisanim iteracijskim postopkom. V preglednici 1.9 prikazujemo rezultate iteracij za primer, ko je $N_x = 100$ kN, $M_y = 6000$ kNcm in $M_z = 1500$ kNcm.

Tabela 1.9: Iteracije za $N_x = -100$ kN, $M_y = 6000$ kNcm in $M_z = 1500$ kNcm

Iter.	A_x	a	b	c	$\sigma_{xx,\max}$
0	10000.000	−0.01000000	−0.00072000	0.00018000	−0.04600000
1	7391.975	−0.00165304	−0.00129824	0.00032456	−0.06656480
2	5251.417	0.01023426	−0.00184847	0.00046212	−0.08218913
3	3953.984	0.01990931	−0.00222030	0.00055507	−0.09110556
4	3367.422	0.02318193	−0.00233513	0.00058378	−0.09357473
5	3211.618	0.02343612	−0.00234370	0.00058593	−0.09374908
6	3200.063	0.02343750	−0.00234375	0.00058594	−0.09375000
7	3200.000	0.02343750	−0.00234375	0.00058594	−0.09375000

Jedro prečnega prereza

Vzemimo, da v prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$ delujejo notranja sila N_x in upogibna momenta M_y in M_z (slika 1.73).



Slika 1.73: Notranje sile v prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$

Če sta y in z glavni vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza, določimo normalne napetosti σ_{xx} z enačbo (1.89)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y}\, z - \frac{M_z}{I_z}\, y. \tag{1.162}$$

Notranje sile nadomestimo s statično ekvivalentno silo N s prijemališčem (y_N, z_N), dobimo (slika 1.74)

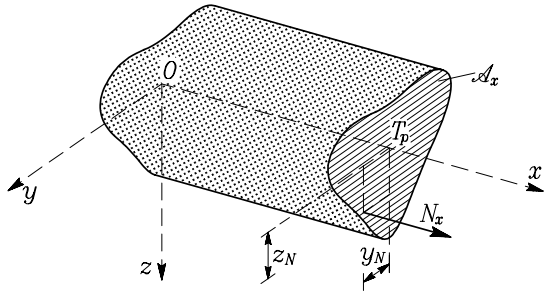
$$N_x = N, \quad M_y = N\, z_N, \quad M_z = -N\, y_N. \tag{1.163}$$

Enačbe (1.163) vstavimo v (1.162)

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A_x} + \frac{N\, z_N}{I_y}\, z + \frac{N\, y_N}{I_z}\, y$$

in upoštevamo definicijo vztrajnostnih polmerov i_y in i_z

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A_x}, \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A_x}.$$



Slika 1.74: Statično enakovredna sila N ima prijemališče v (y_N, z_N)

Enačbo (1.162) lahko sedaj zapišemo takole

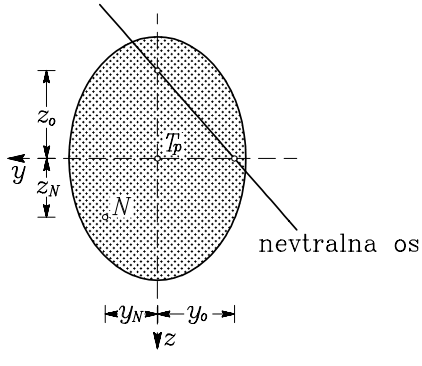
$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A_x}\left(1 + \frac{y_N}{i_z^2}\,y + \frac{z_N}{i_y^2}\,z\right).$$

Nevtralna os v prečnem prerezu $\mathscr{A}_x$ je premica, vzdolž katere so normalne napetosti enake nič. Ker je $N/A_x \neq 0$, je enačba nevtralne osi

$$\boxed{\frac{y_N}{i_z^2}\,y + \frac{z_N}{i_y^2}\,z + 1 = 0.} \tag{1.164}$$

Presečišče nevtralne osi z osema y in z določata enačbi (slika 1.75)

$$\boxed{y_o = -\frac{i_z^2}{y_N}, \qquad z_o = -\frac{i_y^2}{z_N}.} \tag{1.165}$$



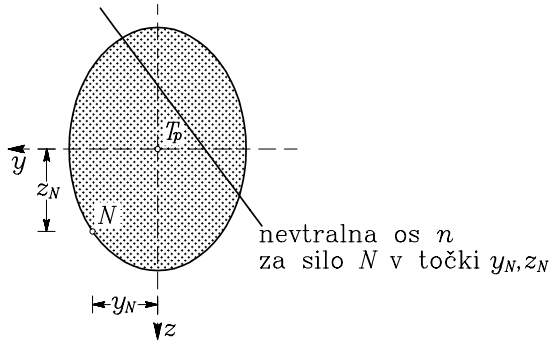
Slika 1.75: Presečišči nevtralne osi z osema y in z določata koordinati y_o in z_o

Definicija jedra prereza

Vsakemu prijemališču (y_N, z_N) osne sile N v splošnem ustreza različna lega nevtralne osi. Iz enačb za odseka y_o in z_o, ki določata lego nevtralne osi, sledi, da se s približevanjem prijemališča sile N k težišču T prečnega prereza nevtralna os oddaljuje od težišča. Iz tega lahko sklepamo, da obstoji okrog težišča prereza področje prijemališč sile N, za katere ustrezne nevtralne osi ležijo izven prereza ali se ga kvečjemu dotikajo. To področje imenujemo **jedro prereza**. Napetosti σ_{xx} zaradi sil N s prijemališčem v jedru prereza, imajo po celotnem prečnem prerezu enak predznak.

Določanje jedra prereza

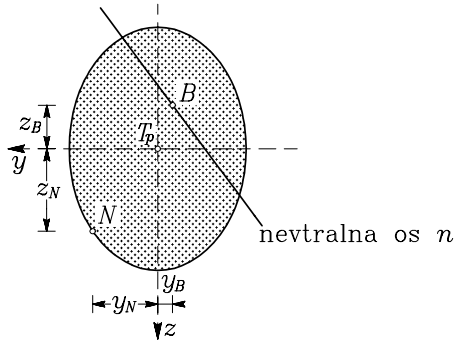
Vzemimo, da učinkuje sila N na robu prečnega prereza (slika 1.76).



Slika 1.76: Nevtralna os n za silo N v točki (y_N, z_N)

Enačba pripadajoče nevtralne osi n je

$$\frac{y_N}{i_z^2}\, y + \frac{z_N}{i_y^2}\, z + 1 = 0.$$



Slika 1.77: Točka B leži na nevtralni osi n

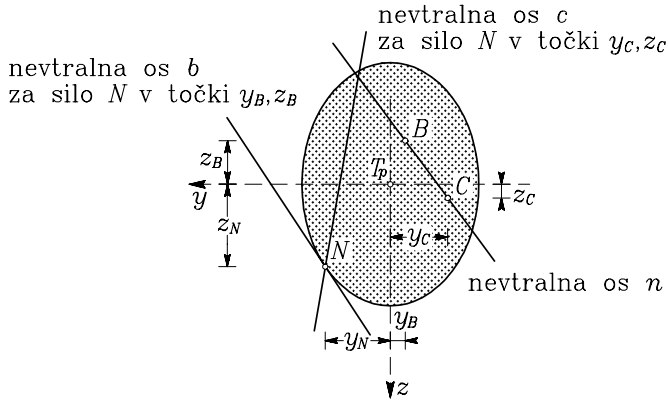
Vzemimo sedaj na tej nevtralni osi točko B s koordinatama y_B in z_B. Koordinati y_B in z_B ustrezata enačbi nevtralne osi n (slika 1.77)

$$\frac{y_N}{i_z^2}\, y_B + \frac{z_N}{i_y^2}\, z_B + 1 = 0.$$

Zapišimo sedaj enačbo nevtralne osi, ki ustreza sili N s prijemališčem v točki B

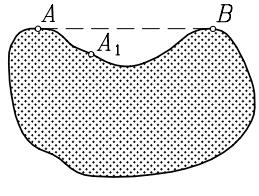
$$\frac{y_B}{i_z^2}\, y + \frac{z_B}{i_y^2}\, z + 1 = 0.$$

S primerjavo zadnjih dveh enačb ugotovimo, da poteka nevtralna os zaradi sile N s prijemališčem v točki B skozi točko (y_N, z_N). Vse nevtralne osi, ki ustrezajo prijemališčem sile N na nevtralni osi n, potekajo skozi točko (y_N, z_N). Le ena izmed teh nevtralnih osi je tangenta na rob prečnega prereza. Vzemimo, da je to nevtralna os, ki ustreza prijemališču sile v točki B (slika 1.78). Iz definicije jedra prereza sledi, da leži točka B na robu jedra prereza.



Slika 1.78: Če je b tangenta na rob prereza, je B točka na robu jedra prereza

Tako lahko ugotovimo, da določajo mejo jedra prereza nevtralne osi, katerih prijemališča sil ležijo v tistih točkah na robu prečnega prereza, skozi katere lahko narišemo takšno tangento na rob prereza, ki prereza ne seka (slika 1.79).

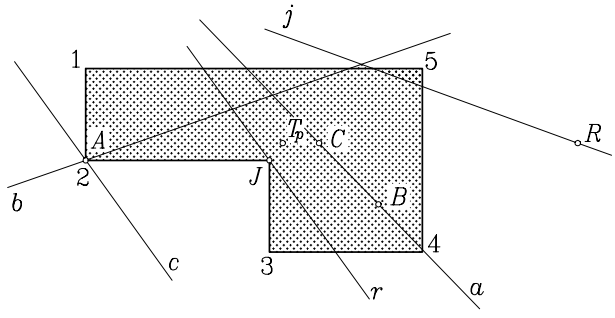


Slika 1.79: Prijemališča sil postavljamo le vzdolž takih tangent na rob prereza, ki prereza ne sekajo

Skozi točko A_1 ne moremo narisati tangente, ki prereza ne seka. Točko meje jedra prereza zato določajo nevtralne osi, katerih prijemališča ležijo na označeni daljici med točkama A in B.

Prerezi poligonalne oblike

Za prerez poligonalne oblike določajo mejo jedra prereza nevtralne osi, ki ustrezajo prijemališčem sile N v takih vozliščih prereza, skozi katera lahko narišemo premico, ki prereza ne seka (slika 1.80).



Slika 1.80: Jedro prereza določajo nevtralne osi, ki ustrezajo prijemališčem sile N v točkah 1 do 5

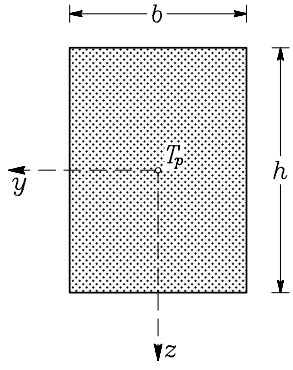
Točk na ravnih odsekih 12, 23, 34, ... ni treba upoštevati, ker pripadajoče nevtralne osi določajo isto točko jedra prereza (glej pravokotni prečni prerez v primeru 1.20).

Če ima sila N prijemališče v točki J (slika 1.80), dobimo nevtralno os j. Ko postavimo prijemališče sile N v poljubno točko na osi j, na primer v točko R, poteka nevtralna os r skozi točko J. Ker vse premice, ki potekajo skozi točko J sekajo prečni prerez, nobena točka na premici j **ne določa** roba jedra prečnega prereza. Prijemališču 2 ustreza nevtralna os a. Izberimo si dve točki na premici a in jih označimo z B in C. Tema dvema točkama ustrezata dve nevtralni osi b in c, ki obe potekata skozi točko 2. Vidimo, da nevtralna os b seka prerez, nevtralna os c pa ne. Tako ugotovimo, da točka B **ne določa** meje jedra prereza, medtem ko točka C **leži** na meji jedra prereza. Sklepamo lahko, da del nevtralne osi a določa del roba jedra prereza.

Pri poligonalni obliki prečnega prereza ima tudi jedro prereza poligonalno obliko. Jedro prereza ima toliko vozlišč, kot je število vozlišč prečnega prereza, skozi katera lahko narišemo premico, ki prereza ne seka.

Primer 1.23 *Določimo jedro prereza za prikazane oblike prečnih prerezov!*

A) Pravokotnik (slika 1.81).



Slika 1.81: Prečni prerez pravokotne oblike

Presečišča nevtralne osi s koordinatnima osema določimo z enačbama

$$y_o = -\frac{i_z^2}{y_N}, \qquad z_o = -\frac{i_y^2}{z_N}.$$

Vztrajnostna polmera sta

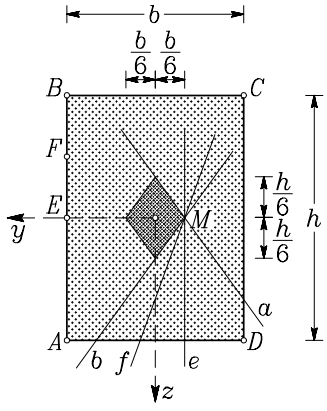
$$i_y^2 = \frac{b\,h^3}{12}\frac{1}{b\,h} = \frac{h^2}{12}, \qquad i_z^2 = \frac{h\,b^3}{12}\frac{1}{b\,h} = \frac{b^2}{12}.$$

V preglednici 1.10 prikazujemo izračun presečišč nevtralnih osi, ki določajo jedro prereza, s koordinatnima osema y in z. Na sliki 1.82 pa prikazujemo jedro prereza, ki ima za pravokotnik obliko romba.

Tabela 1.10: Presečišča nevtralnih osi z osema y in z

Prijemališče sile	Koordinate prijemališča sile	Odseka y_o in z_o
A	$y_N = b/2, \quad z_N = h/2$	$y_o = -b/6, \quad z_o = -h/6$
B	$y_N = b/2, \quad z_N = -h/2$	$y_o = -b/6, \quad z_o = h/6$
C	$y_N = -b/2, \quad z_N = -h/2$	$y_o = b/6, \quad z_o = h/6$
D	$y_N = -b/2, \quad z_N = h/2$	$y_o = b/6, \quad z_o = -h/6$
E	$y_N = b/2, \quad z_N = 0$	$y_o = -b/6, \quad z_o = \infty$
F	$y_N = b/2, \quad z_N = -h/4$	$y_o = -b/6, \quad z_o = h/3$

Vidimo, da nevtralne osi, ki ustrezajo silam N v prijemališčih na daljici AB, določajo isto točko (točka M) jedra prereza.



Slika 1.82: Jedro pravokotnega prečnega prereza

B) Krog (slika 1.83).

Presečišča nevtralne osi s koordinatnima osema določimo z enačbama

$$y_o = -\frac{i_z^2}{y_N}, \quad z_o = -\frac{i_y^2}{z_N}, \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A_x} = \frac{\pi\, R^4}{4\,\pi\, R^2} = \frac{R^2}{4} \equiv i_z^2.$$

Za točko A na robu prečnega prereza je

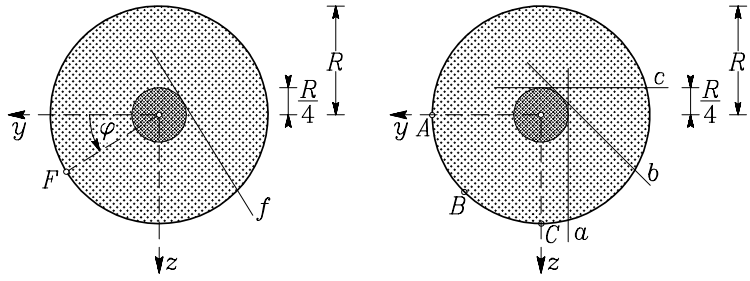
$$y_N = R\cos\varphi, \quad z_N = R\sin\varphi \quad \rightarrow \quad y_o = -\frac{R}{4\cos\varphi}, \quad z_o = -\frac{R}{4\sin\varphi}.$$

V preglednici 1.11 prikazujemo izračun presečišč nevtralnih osi, ki določajo jedro prereza, s koordinatnima osema y in z za tri različne velikosti kota φ.

Tabela 1.11: Odseka y_o in z_o

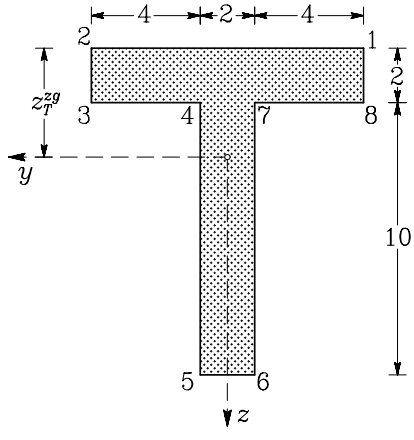
Prijemališče sile	Velikost kota φ	Odseka y_o in z_o
A	0	$y_o = -\frac{R}{4}, \quad z_o = \pm\infty$
B	$\frac{\pi}{4}$	$y_o = -\frac{R\sqrt{2}}{4}, \quad z_o = -\frac{R\sqrt{2}}{4}$
C	$\frac{\pi}{2}$	$y_o = \pm\infty, \quad z_o = -\frac{R}{4}$

Neskončno nevtralnih osi, ki ustrezajo prijemališčem na robu prereza, določajo jedro prereza okrogle oblike (slika 1.83).



Slika 1.83: Prečni prerez krožne oblike in jedro tega prereza

C) T prerez (slika 1.84).



Slika 1.84: Prečni prerez oblike črke T

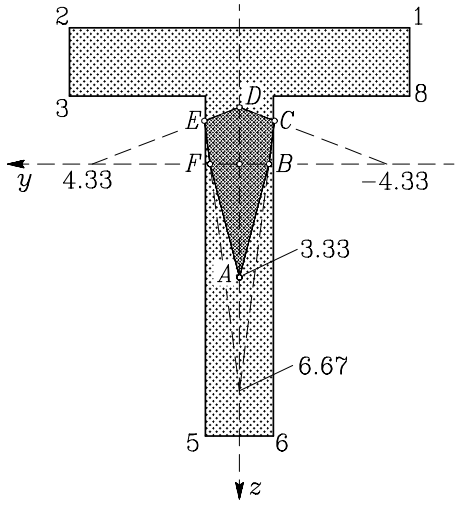
Geometrijske karakteristike:

$$
\begin{aligned}
A_x &= 40\ \mathrm{cm}^2,\\
z_T^{zg} &= 4\ \mathrm{cm},\\
I_y &= 533.33\ \mathrm{cm}^4,\\
I_z &= 173.33\ \mathrm{cm}^4,\\
i_y^2 &= I_y/A_x = 13.33\ \mathrm{cm}^2,\\
i_z^2 &= I_z/A_x = 4.33\ \mathrm{cm}^2.
\end{aligned}
\tag{1.166}
$$

Presečišča nevtralnih osi z glavnima vztrajnostnima osema skozi težišče prečnega prereza prikažimo v preglednici 1.12, obliko jedra prereza (šestkotnik) pa na sliki 1.85.

Tabela 1.12: Presečišča premic, ki določajo jedro prereza, z osema y in z

Točka robu prereza	y_N	z_N	$y_o = -i_z^2/y_N$	$z_o = -i_y^2/z_N$
1	-5	-4	0.867	3.333
2	5	-4	-0.867	3.333
3	5	-2	-0.867	6.667
5	1	8	-4.333	-1.667
6	-1	8	4.333	-1.667
8	-5	-2	0.867	6.667



Slika 1.85: Jedro prereza za T prerez

RAČUN KOORDINAT TOČK ROBA JEDRA PREREZA

Koordinate točk na robu jedra prečnega prereza določimo z enačbami za koordinati presečišča dveh premic. Enačbi premic nevtralnih osi a in b zapišemo takole:

$$\text{premica } a: \quad \frac{y_{Na}}{i_z^2}\, y + \frac{z_{Na}}{i_y^2}\, z + 1 = 0,$$

$$\text{premica } b: \quad \frac{y_{Nb}}{i_z^2}\, y + \frac{z_{Nb}}{i_y^2}\, z + 1 = 0.$$

Z y_{Na} in z_{Na} označimo koordinati prijemališča sile N za premico a. Koordinati presečišča premic a in b označimo z y_P in z_P ter izračunamo z enačbama:

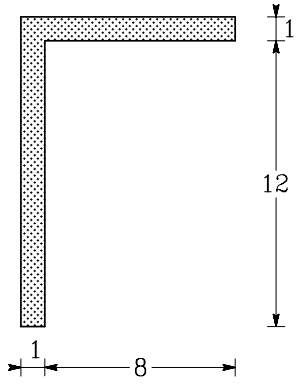
$$\boxed{y_P = \frac{(z_{Na} - z_{Nb})\, i_z^2}{y_{Na}\, z_{Nb} - z_{Na}\, y_{Nb}}, \qquad z_P = \frac{(y_{Nb} - y_{Na})\, i_y^2}{y_{Na}\, z_{Nb} - z_{Na}\, y_{Nb}}.}$$

V preglednici 1.13 prikazujemo račun koordinat točk na robu jedra prereza za prečni prerez oblike črke T.

Tabela 1.13: Račun koordinat točk, ki določajo jedro prereza

Prijemališče sile N	y_{Na} y_{Nb}	z_{Na} z_{Nb}	$z_{Na} - z_{Nb}$ $y_{Nb} - y_{Na}$	$y_{Na}\, z_{Nb} - z_{Na}\, y_{Nb}$	y_P z_P	Točka jedra
1 2	-5 5	-4 -4	0 10	40	0.00 3.33	A
2 3	5 5	-4 -2	-2 0	10	-0.87 0.00	B
3 5	5 1	-2 8	-10 -4	42	-1.03 -1.27	C
5 6	1 -1	8 8	0 -2	16	0.00 -1.67	D
6 8	-1 -5	8 -2	10 -4	42	1.03 -1.27	E
8 1	-5 -5	-2 -4	2 0	10	0.87 0.00	F

Primer 1.24 *Določimo koordinate točk na robu jedra prereza, prikazanem na sliki 1.86.*



Slika 1.86: Geometrijski podatki prerez

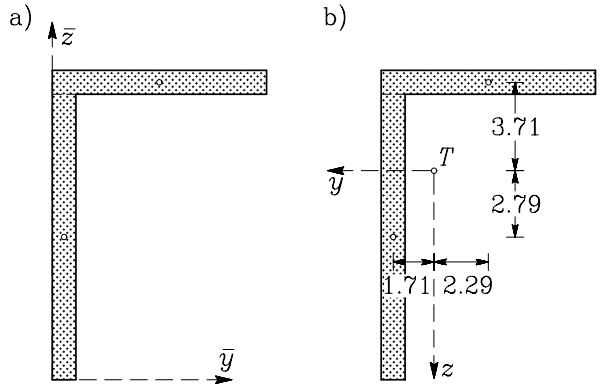
Koordinati težišča in vztrajnostne momente izračunamo glede na koordinatna sistema $\bar{y}, \bar{z}$ in y, z (slika 1.87).

Koordinati težišča sta

$$\bar{y}_T = 2.21 \text{ cm}, \quad \bar{z}_T = 8.79 \text{ cm}.$$

Geometrijske karakteristike so

$$A_x = 21 \text{ cm}, \quad I_y^T = 362.04 \text{ cm}^4, \quad I_z^T = 144.04 \text{ cm}^4, \quad I_{yz}^T = -133.71 \text{ cm}^4.$$



Slika 1.87: a) Račun težišča b) Račun vztrajnostnih momentov

Smer glavnih vztrajnostnih osi je

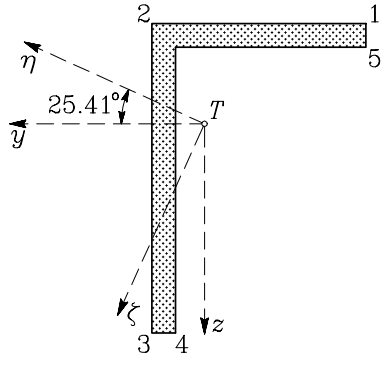
$$\mathrm{tg}2\,\alpha = \frac{2\cdot(-133.71)}{362.04-144.04} = -1.23, \quad 2\,\alpha = -50.81^\circ, \quad \alpha = -25.41^\circ.$$

Velikosti glavnih vztrajnostnih momentov sta

$$I_1 = 425.55\ \mathrm{cm}^4, \qquad I_2 = 80.52\ \mathrm{cm}^4.$$

Smer osi η določa kot $\alpha = -25.41^\circ$

$$I_\eta(\alpha = -25.41^\circ) = 425.55\ \mathrm{cm}^4.$$



Slika 1.88: Koordinatni osi y, z in glavni osi η, ζ

Račun koordinat konveksnih točk v koordinatnem sistemu η, ζ (slika 1.88).

Koordinati η in ζ izračunamo po enačbah

$$\eta = y\cos\alpha + z\sin\alpha, \qquad \zeta = z\cos\alpha - y\sin\alpha.$$