

Tabela 1.14: Koordinate konveksnih točk v smeri  $\eta$  in  $\zeta$  in odseki  $\eta_o$  in  $\zeta_o$ 

Točka na vogalu	$y$	$z$	$\eta$	$\zeta$	$\eta_o$	$\zeta_o$
1	-6.79	-4.21	-4.32	-6.72	0.89	3.02
2	2.21	-4.21	3.81	-2.86	-1.01	7.09
3	2.21	8.79	-1.77	8.89	2.17	-2.28
4	1.21	8.79	-2.67	8.46	1.43	-2.40
5	-6.79	-3.21	-4.75	-5.81	0.81	3.48

Koordinate mejnih točk jedra prereza izračunamo po enačbah

$$\eta_P = \frac{(\zeta_{Na} - \zeta_{Nb}) i_\zeta^2}{\eta_{Na} \zeta_{Nb} - \zeta_{Na} \eta_{Nb}}, \quad \zeta_P = \frac{(\eta_{Nb} - \eta_{Na}) i_\eta^2}{\eta_{Na} \zeta_{Nb} - \zeta_{Na} \eta_{Nb}},$$

$$i_\eta^2 = \frac{I_\eta}{A_x} = \frac{425.55}{21} = 20.26 \text{ cm}^2, \quad i_\zeta^2 = \frac{I_\zeta}{A_x} = \frac{80.53}{21} = 3.83 \text{ cm}^2,$$

zapišemo v preglednici 1.15 in prikazujemo na sliki 1.89.

Tabela 1.15: Račun koordinat točk, ki določajo jedro prereza

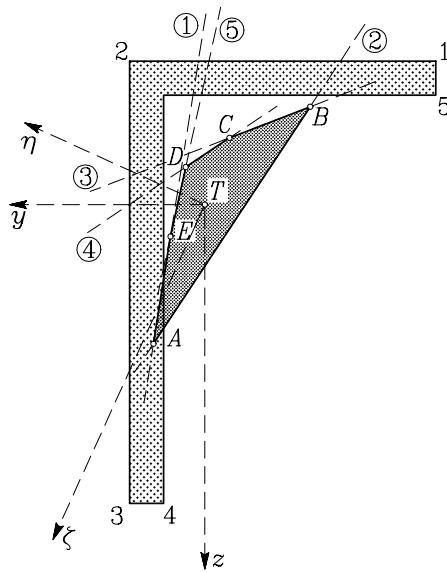
Prijemališče sile $N$	$\eta_{Na}$ $\eta_{Nb}$	$\zeta_{Na}$ $\zeta_{Nb}$	$\zeta_{Na} - \zeta_{Nb}$ $\eta_{Nb} - \eta_{Na}$	$\eta_{Na} \zeta_{Nb} - \zeta_{Na} \eta_{Nb}$	$\eta_P$ $\zeta_P$	Točka jedra
1	-4.32	-6.72	-3.86	37.93	-0.39	A
2	3.81	-2.86	8.13		4.34	
2	3.81	-2.86	-11.74	28.79	-1.56	B
3	-1.77	8.89	-5.58		-3.93	
3	-1.77	8.89	0.43	8.79	0.19	C
4	-2.67	8.46	-0.90		-2.08	
4	-2.67	8.46	14.27	55.71	0.98	D
5	-4.75	-5.81	-2.08		-0.76	
5	-4.75	-5.81	0.90	6.79	0.51	E
1	-4.32	-6.72	0.43		1.28	

Primer izračunajmo še za osi  $y, z$ , ki **nista glavni vztrajnostni osi**. Normalno napetost  $\sigma_{xx}$  izračunamo z enačbo (1.88)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y.$$

Enačba nevtralne osi je

$$\sigma_{xx} = 0 = \frac{N_x}{A_x} - \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y.$$



Slika 1.89: Jedro prereza kotnega prečnega prereza

Upoštevamo označke

$$N_x = N, \quad M_y = N z_N, \quad M_z = -N y_N$$

in dobimo

$$\frac{N}{A_x} \left( 1 + \frac{y_N I_{yz} + z_N I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} A_x z + \frac{y_N I_y + z_N I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} A_x y \right) = 0. \quad (1.167)$$

Odseka  $y_o$  in  $z_o$  sta:

$$y_o = -\frac{1}{A_x} \left( \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{y_N I_y + z_N I_{yz}} \right), \quad z_o = -\frac{1}{A_x} \left( \frac{I_y I_z - I_{yz}^2}{y_N I_{yz} + z_N I_z} \right).$$

Enačbo (1.167) zapišimo za primera, da je sila  $N$  v točki s koordinatama  $y_{Na}, z_{Na}$  in v točki  $y_{Nb}, z_{Nb}$ . S tem dobimo enačbi za premici  $a$  in  $b$ :

$$\text{premica } a : \quad A_1 y + A_2 z + 1 = 0,$$

$$\text{premica } b : \quad B_1 y + B_2 z + 1 = 0.$$

Konstante  $A_1, A_2, B_1$  in  $B_2$  so

$$A_1 = \frac{y_{Na} I_y + z_{Na} I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} A_x, \quad A_2 = \frac{y_{Na} I_{yz} + z_{Na} I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} A_x,$$

$$B_1 = \frac{y_{Nb} I_y + z_{Nb} I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} A_x, \quad B_2 = \frac{y_{Nb} I_{yz} + z_{Nb} I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} A_x.$$

Koordinati presečišča premic  $a$  in  $b$  izračunamo z enačbama:

$$y_p = \frac{A_2 - B_2}{A_1 B_1 - A_2 B_1}, \quad z_p = \frac{B_1 - A_1}{A_1 B_1 - A_2 B_1}.$$

Tabela 1.16: Presečišča premic, ki določajo jedro prereza, z osema  $y$  in  $z$

Točka robu prereza	$y_N$	$z_N$	$y_o = -i_z^2/y_N$	$z_o = -i_y^2/z_N$
1	-6.79	-4.21	0.86	-5.43
2	2.21	-4.21	-1.20	1.81
3	2.21	8.79	4.37	-1.68
4	1.21	8.79	2.22	-1.48
5	-6.79	-3.21	0.81	-3.67

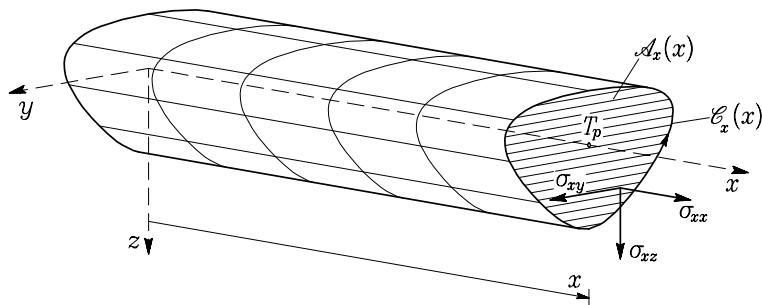
V preglednici 1.17 zapišemo račun koordinat točk na robu jedra prereza za prečni prerez oblike črke T.

Tabela 1.17: Račun koordinat točk, ki določajo jedro prereza

Prijemališče sile $N$	$y_{Na}$ $y_{Nb}$	$z_{Na}$ $z_{Nb}$	$A_1$ $B_1$	$A_2$ $B_2$	$y_P$ $z_P$	Točka jedra
1	-6.79	-4.21	-1.160	0.184	1.51	$A$
2	2.21	-4.21	0.837	-0.554	4.09	
2	2.21	-4.21	0.837	-0.554	-3.10	$B$
3	2.21	8.79	-0.229	0.594	-2.88	
3	2.21	8.79	-0.229	0.594	-0.72	$C$
4	1.21	8.79	-0.451	0.676	-1.96	
4	1.21	8.79	-0.451	0.676	0.56	$D$
5	-6.79	-3.21	-1.242	0.272	-1.10	
5	-6.79	-3.21	-1.242	0.272	1.01	$E$
1	-6.79	-4.21	-1.160	0.184	0.94	

### 1.3 Strižni in prečni normalni napetosti v nosilcu s konstantnim prečnim prerezom

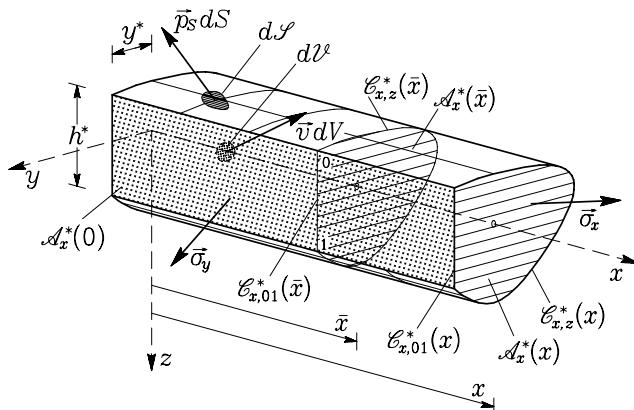
Pri upogibu ravnega nosilca s konstantnim prečnim prerezom  $\mathcal{A}_x$  upoštevamo razen vzdolžne normalne napetosti  $\sigma_{xx}$  tudi strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  (slika 1.90).



Slika 1.90: V nosilcu upoštevamo vzdolžno normalno napetost  $\sigma_{xx}$  ter strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$

Pri izpeljavi enačb za račun pomikov  $u$ ,  $v$  in  $w$  (enačbe (1.80) in (1.87)) ter enačbe za vzdolžno normalno napetost  $\sigma_{xx}$  (enačba (1.88)) v nosilcu z ravno osjo smo predpostavili, da sta od nič različni le vzdolžna normalna deformacija  $\varepsilon_{xx}$  in le vzdolžna normalna napetost  $\sigma_{xx}$ . Eناčbe za  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yy}$  in  $\sigma_{zz}$  izpeljemo iz ravnotežnih enačb za ustrezni del nosilca.

Vzemimo del nosilca od  $\bar{x} = 0$  do  $\bar{x} = x$  ter ga odrežimo pri  $y = y^* = \text{konst}$  (slika 1.91).



Slika 1.91: Obravnavamo del nosilca dolžine  $x$  z delnim prečnim prerezom  $\mathcal{A}_x^*$

Zapišimo ravnotežno enačbo za ta nosilec:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}_x^*(0)} \vec{p}_S(0, y, z) dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x(x, y, z) dA_x + \\ & + \int_0^x \left( \int_{\mathcal{C}_{x,z}^*(\bar{x})} \vec{p}_S(\bar{x}, c) dc + \int_{\mathcal{A}_x^*(\bar{x})} \vec{v}(\bar{x}, y, z) dA_x + \int_{\mathcal{C}_{x,01}^*(\bar{x})} \vec{\sigma}_y(\bar{x}, y^*, z) dc \right) d\bar{x} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.168)$$

S  $c$  označimo krivuljsko koordinato, ki določa točke mejne črte dela prečnega prereza  $\mathcal{A}_x^*$ . Del v oglatem oklepaju označimo z  $\vec{\mathcal{F}}^*(x)$  in predstavlja nadomestno linijsko obtežbo zaradi zunanje obtežbe  $\vec{p}_S$  na mejni črti  $\mathcal{C}_{x,z}^*$  ter zunanje obtežbe  $\vec{v}$  na delu prereza  $\mathcal{A}_x^*$  in zaradi napetosti  $\vec{\sigma}_y$  vzdolž meje  $\mathcal{C}_{x,01}^*$

$$\vec{\mathcal{F}}^*(x) = \int_{\mathcal{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S dc + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{v} dA_x + \int_{\mathcal{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_y dc = \vec{\mathcal{P}}^*(x) + \int_{\mathcal{C}_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_y dc. \quad (1.169)$$

S  $\vec{\mathcal{P}}^*(x)$  označimo zunanjo linijsko obtežbo za del prereza  $\mathcal{A}_x^*$

$$\vec{\mathcal{P}}^*(x) = \int_{\mathcal{C}_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S dc + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{v} dA_x. \quad (1.170)$$

Enačbo (1.168) krajše zapišemo takole:

$$\int_{\mathcal{A}_x^*(0)} \vec{p}_S dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x dA_x + \int_0^x \vec{\mathcal{F}}^*(\bar{x}) d\bar{x} = \vec{0}. \quad (1.171)$$

$\mathcal{A}_x^*(x)$  ne predstavlja funkcijске zveze temveč le označuje za kateri prečni rez gre. Ker v nadaljevanju obravnavamo le prečni rez pri  $x$  in sta njegova oblika in velikost neodvisni od  $x$ , integracijsko območje krajše zapišemo z  $\mathcal{A}_x^*$ ,  $\mathcal{C}_{x,01}^*$  in  $\mathcal{C}_{x,z}^*$ . Enačba (1.171) predstavlja ravnotežno enačbo za del nosilca. Če želimo določiti napetosti v odvisnosti od  $x$ , moramo enačbo (1.171) odvajati. Tedaj dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*} \vec{\sigma}_x dA_x + \vec{\mathcal{F}}^* = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*} \vec{\sigma}_x dA_x + \vec{\mathcal{P}}^* + \int_{\mathcal{C}_{x,01}^*} \vec{\sigma}_y dc = \vec{0} \quad (1.172)$$

oziroma

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*} \vec{\sigma}_x dA_x + \vec{\mathcal{P}}^* + \int_0^{h^*} \vec{\sigma}_y dc = \vec{0}. \quad (1.173)$$

Predpostavimo tudi, da se  $\vec{\sigma}_y$  vzdolž meje  $\mathcal{C}_{x,01}^*$  ne spreminja. Ker je  $\mathcal{A}_x^*$  konstanten, odvod integrala določimo tako, da odvajamo integrand (glej Bronstein ... str 341)

$$\int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} dA_x + \vec{\mathcal{P}}^* + \vec{\sigma}_y h^* = \vec{0}. \quad (1.174)$$

Iz enačbe (1.174) izrazimo  $\vec{\sigma}_y$

$$\vec{\sigma}_y = -\frac{1}{h^*} \left( \vec{\mathcal{P}}^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} dA_x \right). \quad (1.175)$$

Po množenju (1.175) z enotskim vektorjem  $\vec{e}_x$ , dobimo izraz za strižno napetost  $\sigma_{yx}$

$$\boxed{\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = -\frac{1}{h^*} \left( \mathcal{P}_x^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA_x \right)}, \quad (1.176)$$

po množenju (1.175) z enotskim vektorjem  $\vec{e}_y$  pa izraz za prečno normalno napetost  $\sigma_{yy}$

$$\boxed{\sigma_{yy} = -\frac{1}{h^*} \left( \mathcal{P}_y^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dA_x \right)}. \quad (1.177)$$

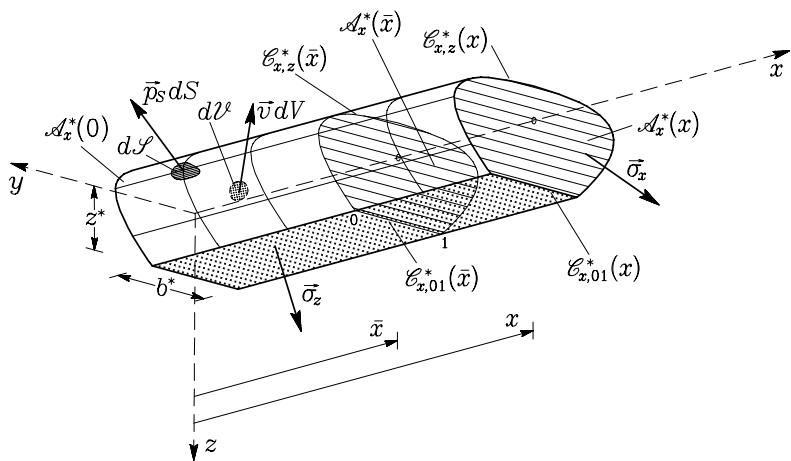
Pri izpeljavi enačb (1.176) in (1.177) smo predpostavili, da sta strižna napetost  $\sigma_{xy}$  ter prečna normalna napetost  $\sigma_{yy}$  vzdolž črte, ki je vzporedna osi  $z$ , konstantni (glej enačbi (1.173) in (1.174)).

### Izpeljava enačb za račun strižne napetosti $\sigma_{xz}$ in prečne normalne napetosti $\sigma_{zz}$

Vzemimo del nosilca od  $\bar{x} = 0$  do  $\bar{x} = x$  ter ga odrežimo pri  $z = z^* = \text{konst}$  (slika 1.92).

Zapišimo ravnotežno enačbo za ta nosilec:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}_x^*(0)} \vec{p}_S(0, y, z) dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x(x, y, z) dA_x + \\ & + \int_0^x \left( \int_{\mathcal{C}_{x,z}^*(\bar{x})} \vec{p}_S(\bar{x}, c) dc + \int_{\mathcal{A}_x^*(\bar{x})} \vec{v}(\bar{x}, y, z) dA_x + \int_{\mathcal{C}_{x,01}^*(\bar{x})} \vec{\sigma}_z(\bar{x}, y, z^*) dc \right) d\bar{x} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (1.178)$$



Slika 1.92: Obravnavamo del nosilca dolžine  $x$  z delnim prečnim prerezom  $\mathcal{A}_x^*$

Del v oglatem oklepaju označimo z  $\vec{\mathcal{F}}^*(x)$  in predstavlja nadomestno linijsko obtežbo zaradi zunanje obtežbe na mejni črti  $C_{x,z}^*$  ter na delu prerezova  $\mathcal{A}_x^*$  in zaradi napetosti  $\vec{\sigma}_z$  vzdolž meje  $C_{x,01}^*$ ,

$$\vec{\mathcal{F}}^*(x) = \int_{C_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S \, dc + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{v} \, dA_x + \int_{C_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_z \, dc = \vec{\mathcal{P}}^*(x) + \int_{C_{x,01}^*(x)} \vec{\sigma}_z \, dc. \quad (1.179)$$

S  $\vec{\mathcal{P}}^*(x)$  označimo zunanjou linijsko obtežbo za del prerezova  $\mathcal{A}_x^*$

$$\vec{\mathcal{P}}^*(x) = \int_{C_{x,z}^*(x)} \vec{p}_S \, dc + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{v} \, dA_x. \quad (1.180)$$

Enačbo (1.178) krajše zapišemo takole:

$$\int_{\mathcal{A}_x^*(0)} \vec{p}_S \, dA_x + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \vec{\sigma}_x \, dA_x + \int_0^x \vec{\mathcal{F}}^*(\bar{x}) \, d\bar{x} = \vec{0}. \quad (1.181)$$

Z odvajanjem ravnotežne enačbe (1.181) po  $x$  dobimo (namesto  $\mathcal{A}_x^*(x)$  pišemo  $\mathcal{A}_x^*$ )

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*} \vec{\sigma}_x \, dA_x + \vec{\mathcal{F}}^* = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*} \vec{\sigma}_x \, dA_x + \vec{\mathcal{P}}^* + \int_{C_{x,01}^*} \vec{\sigma}_z \, dc = \vec{0} \quad (1.182)$$

ozziroma

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{A}_x^*} \vec{\sigma}_x \, dA_x + \vec{\mathcal{P}}^* + \int_0^{b^*} \vec{\sigma}_z \, dc = \vec{0}. \quad (1.183)$$

Upoštevamo, da je  $\mathcal{A}_x^*$  konstanten ter predpostavimo, da se  $\vec{\sigma}_z$  vzdolž  $\mathcal{C}_{x,01}^*$  ne spreminja

$$\int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} dA_x + \vec{\mathcal{P}}^* + \vec{\sigma}_z b^* = \vec{0}. \quad (1.184)$$

Iz enačbe (1.184) izrazimo  $\vec{\sigma}_z$

$$\vec{\sigma}_z = -\frac{1}{b^*} \left( \vec{\mathcal{P}}^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} dA_x \right). \quad (1.185)$$

Po množenju (1.185) z enotskim vektorjem  $\vec{e}_x$ , dobimo izraz za strižno napetost  $\sigma_{zx}$

$$\boxed{\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = -\frac{1}{b^*} \left( \mathcal{P}_x^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA_x \right)}, \quad (1.186)$$

po množenju (1.185) z enotskim vektorjem  $\vec{e}_z$  pa izraz za prečno normalno napetost  $\sigma_{zz}$

$$\boxed{\sigma_{zz} = -\frac{1}{b^*} \left( \mathcal{P}_z^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dA_x \right)}. \quad (1.187)$$

Pri izpeljavi enačb (1.186) in (1.187) smo predpostavili, da sta strižna napetost  $\sigma_{xz}$  ter prečna normalna napetost  $\sigma_{zz}$  vzdolž črte, ki je vzporedna osi  $y$ , konstantni (glej enačbi (1.183) in (1.184)).

V izrazih za strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  nastopa integral na delu  $\mathcal{A}_x^*$  odvoda vzdolžne normalne napetosti  $\sigma_{xx}$  po  $x$ . Če vzamemo, da sta osi  $y$  in  $z$  glavni **vztrajnostni osi v težišču prečnega prereza**  $\mathcal{A}_x$ , je napetost  $\sigma_{xx}$  povezana z osno silo  $N_x$  in upogibnima momentoma  $M_y$  in  $M_z$  po enačbi (1.89)

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y. \quad (1.188)$$

Integral odvoda normalne napetosti  $\sigma_{xx}$  je

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA_x &= \int_{\mathcal{A}_x^*} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{N_x}{A_x} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \right) dA_x = \\ &= \int_{\mathcal{A}_x^*} \left( \frac{1}{A_x} \frac{dN_x}{dx} + \frac{1}{I_y} \frac{dM_y}{dx} z - \frac{1}{I_z} \frac{dM_z}{dx} y \right) dA_x = \\ &= -\frac{A_x^*}{A_x} \mathcal{P}_x + \frac{N_z - \mathcal{M}_y}{I_y} S_y^* + \frac{N_y + \mathcal{M}_z}{I_z} S_z^*. \end{aligned} \quad (1.189)$$

Uporabili smo oznake

$$A_x^* = \int_{\mathcal{A}_x^*} dA_x, \quad S_y^* = \int_{\mathcal{A}_x^*} z dA_x, \quad S_z^* = \int_{\mathcal{A}_x^*} y dA_x, \quad (1.190)$$

ter upoštevali ravnotežne enačbe za ravni linijski nosilec (enačbe (1.30) in (1.31))

$$\frac{dN_x}{dx} = -\mathcal{P}_x, \quad \frac{dM_y}{dx} = N_z - \mathcal{M}_y, \quad \frac{dM_z}{dx} = -N_y - \mathcal{M}_z. \quad (1.191)$$

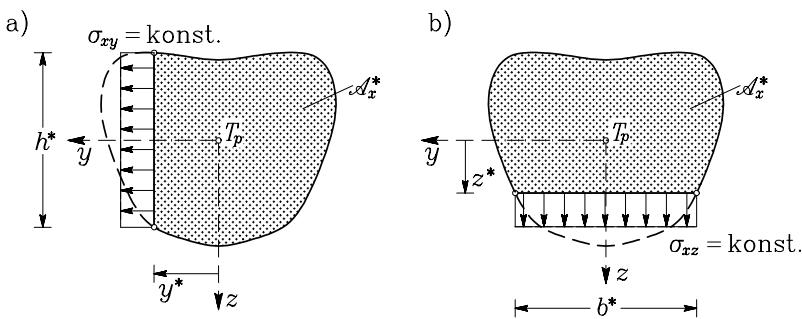
Enačbo (1.189) vstavimo v enačbo (1.176) in dobimo izraz za strižno napetost  $\sigma_{xy}$

$$\boxed{\sigma_{xy} = -\frac{1}{h^*} \left( \mathcal{P}_x^* - \frac{A_x^*}{A_x} \mathcal{P}_x + \frac{S_y^*}{I_y} (N_z - \mathcal{M}_y) + \frac{S_z^*}{I_z} (N_y + \mathcal{M}_z) \right)}. \quad (1.192)$$

Če (1.189) vstavimo v enačbo (1.186), dobimo izraz za strižno napetost  $\sigma_{xz}$

$$\boxed{\sigma_{xz} = -\frac{1}{b^*} \left( \mathcal{P}_x^* - \frac{A_x^*}{A_x} \mathcal{P}_x + \frac{S_y^*}{I_y} (N_z - \mathcal{M}_y) + \frac{S_z^*}{I_z} (N_y + \mathcal{M}_z) \right)}. \quad (1.193)$$

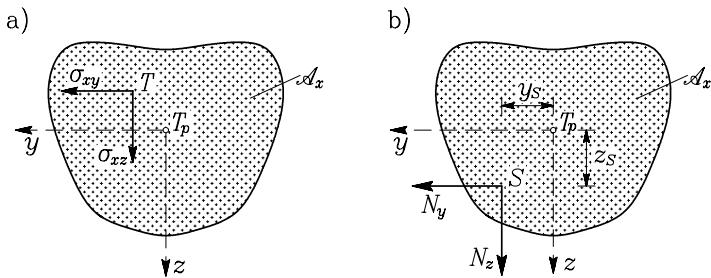
Pri izpeljavi enačbe (1.192) predpostavimo, da je strižna napetost  $\sigma_{xy}$  vzdolž črte, ki je vzporedna **glavnim vztrajnostnim osim**  $z$ , konstantna (slika 1.93a). Pri izpeljavi enačbe (1.193) privzamemo, da se strižna napetost  $\sigma_{xz}$  vzdolž črte, ki je vzporedna **glavnim vztrajnostnim osim**  $y$ , ne spreminja (slika 1.93b).



Slika 1.93: a) Del prereza  $\mathcal{A}_x^*$  za račun napetosti  $\sigma_{xy}$       b) Del prereza  $\mathcal{A}_x^*$  za račun napetosti  $\sigma_{xz}$

Velikosti prečnih normalnih napetosti  $\sigma_{yy}$  in  $\sigma_{zz}$  so pri nosilcih majhne v primerjavi z velikostmi napetosti  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  in jih zato običajno ne računamo (glej primer 1.31).

V primeru upogiba z osno silo se nosilec ne zasuče okrog vzdolžne osi  $x$ . Točko  $S$ , skozi katero morata poteчатi smernici rezultant strižnih napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  (prečnih sil  $N_y$  in  $N_z$ ) v prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x$ , da se prerez ne zasuče, imenujemo **strižno središče** (slika 1.94).



Slika 1.94: a) Strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  v prečnem prerezu  $\mathcal{A}_x$   
b) Prečni sili  $N_y$  in  $N_z$  v strižnem središču prečnega prerezova  $\mathcal{A}_x$

Če prečni sili  $N_y$  in  $N_z$  potekata skozi strižno središče  $S$ , je torzijski moment  $M_{xS}$  na točko  $S$  enak nič

$$M_{xS} = 0,$$

na težišče  $T_p$  prečnega prerezova pa je enak (slika 1.94b)

$$\int_{\mathcal{A}_x} (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA_x = y_S N_z - z_S N_y.$$

V primeru, da ima prečni prerez simetrijsko os, leži strižno središče  $S$  na tej osi.<sup>†</sup> Enačbe za račun strižnega središča podajamo v razdelku 2.6.

### 1.3.1 Primeri

**Primer 1.25** Določimo strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  zaradi prečne sile  $N_z$  za prečni prerez pravokotne oblike s širino  $b$  in višino  $h$  ter za prečni prerez krožne oblike! Iz enačb (1.192) in (1.193) za  $\mathcal{P}_x^* = 0$ ,  $\mathcal{P}_x = 0$ ,  $\mathcal{M}_y = 0$ ,  $N_y = 0$  in  $\mathcal{M}_z = 0$  sledi

$$\sigma_{xy}(y^*) = -\frac{N_z S_y^*(y^*)}{h^*(y^*) I_y}, \quad \sigma_{xz}(z^*) = -\frac{N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y}.$$

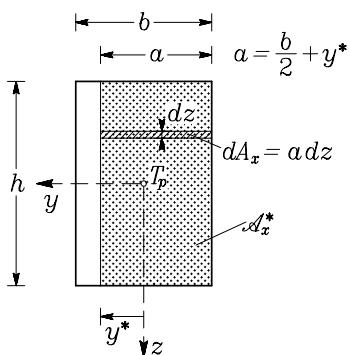
Za določitev  $\sigma_{xy}$  tako potrebujemo le  $S_y^*(y^*)$ .

#### Prečni prerez pravokotne oblike

Pri računu statičnega momenta  $S_y^*$  dela prečnega prerezova  $\mathcal{A}_x^*$  dvojni integral (enačba (1.190)) prevedemo na enojnega, če upoštevamo, da je  $dA_x = a dz$  (slika 1.95).

$$S_y^*(y^*) = \int_{\mathcal{A}_x^*} z dA_x = \int_{-h/2}^{h/2} z \left( \frac{b}{2} + y^* \right) dz = \left( \frac{b}{2} + y^* \right) \frac{z^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2} + y^* \right) \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = 0.$$

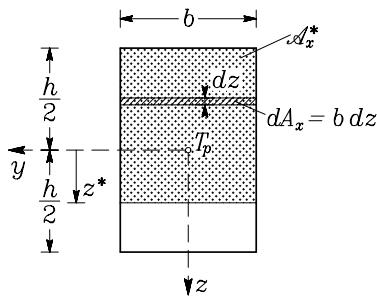
<sup>†</sup> I.S. Sokolnikoff, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1956.

Slika 1.95: Del prerezova  $A_x^*$  za račun statičnega momenta  $S_y^*(y^*)$ 

Sledi, da je strižna napetost  $\sigma_{xy}$  povsod v prerezu enaka nič

$$\sigma_{xy} = 0.$$

Velja splošno pravilo, da je  $\sigma_{xy}$  zaradi prečne sile  $N_z$  enaka nič, če ima prerez dve pravokotni osi simetrije. Takim prerezom pravimo, da so dvojnosimetrični. Račun napetosti  $\sigma_{xz}$  dobimo z enačbo (1.193). V njej upoštevamo, da je  $\mathcal{P}_x^* = \mathcal{P}_x = \mathcal{M}_y = N_y = 0$ . Za določitev  $\sigma_{xz}$  tako potrebujemo le  $S_y^*(z^*)$ . Pri računu statičnega momenta dela prečnega prerezova  $A_x^*$  dvojni integral prevedemo na enojnega, če upoštevamo, da je  $dA_x = b dz$  (glej sliko 1.96).

Slika 1.96: Del prerezova  $A_x^*$  za račun statičnega momenta  $S_y^*(z^*)$ 

$$S_y^*(z^*) = \int_{A_x^*} z dA_x = \int_{-h/2}^{z^*} z b dz = \frac{b}{2} z^2 \Big|_{-h/2}^{z^*} = \frac{b}{2} \left( z^{*2} - \frac{h^2}{4} \right).$$

Če upoštevamo, da je

$$b^*(z) \equiv b, \quad I_y = \frac{b h^3}{12},$$

sledi, da je strižna napetost  $\sigma_{xz}$  enaka

$$\sigma_{xz}(z^*) = -\frac{6 N_z}{b h^3} \left( z^{*2} - \frac{h^2}{4} \right).$$

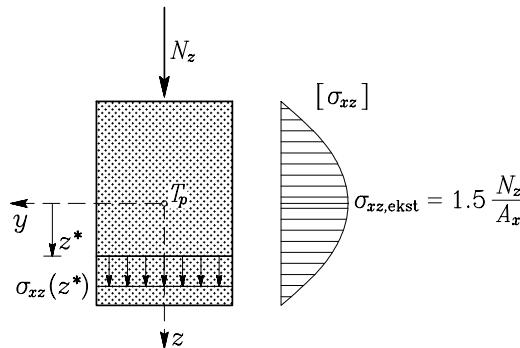
Strižna napetost  $\sigma_{xz}$  je kvadratna funkcija koordinate  $z$ . Lego ekstremne vrednosti strižne napetosti  $\sigma_{xz}$  dobimo iz pogoja za ekstrem funkcije

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz^*} = -\frac{6 N_z}{b h^3} 2 z_{\text{ekst}}^* = 0 \quad \rightarrow \quad z_{\text{ekst}}^* = 0.$$

Velikost ekstremne vrednosti napetosti  $\sigma_{xz}$  je

$$\sigma_{xz}(z_{\text{ekst}}^*) = \frac{3 N_z}{2 b h} = 1.5 \frac{N_z}{A_x}.$$

Spreminjanje strižne napetosti  $\sigma_{xz}$  po višini prečnega prereza prikazujemo na sliki 1.97.



Slika 1.97: Spreminjanje strižne napetosti  $\sigma_{xz}$  po prečnem prerezu nosilca

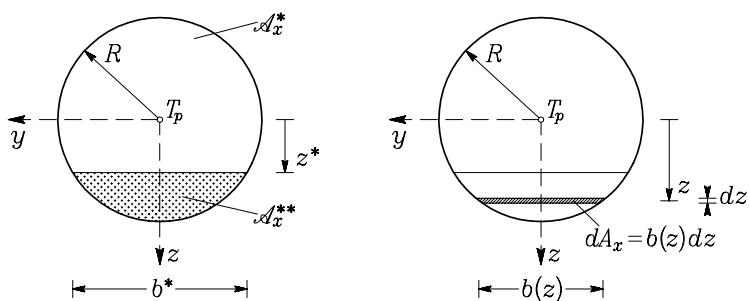
### Prečni rez krožne oblike s polmerom $R$

Na sliki 1.98 označimo del prečnega prereza krožne oblike s pozitivno zunanjim normalo  $z$  z  $\mathcal{A}_x^*$ , z negativno zunanjim normalo  $z$  pa z  $\mathcal{A}_x^{**}$ .

Ker je  $S_y^*(y) = 0$ , je strižna napetost  $\sigma_{xy}$  enaka nič. Za račun strižne napetosti  $\sigma_{xz}$  potrebujemo

$$I_y = \frac{\pi R^4}{4}, \quad R^2 = \left( \frac{b(z)}{2} \right)^2 + z^2, \quad b(z) = \sqrt{R^2 - z^2},$$

$$S_y^{**} = \int_{z^*}^R z b(z) dz = \int_{z^*}^R 2 z \sqrt{R^2 - z^2} dz.$$

Slika 1.98: Strižno napetost  $\sigma_{xz}$  določamo pri  $z = z_r$ 

Vpeljemo novo spremenljivko  $u = \sqrt{R^2 - z^2}$  in dobimo

$$du = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2}} (-2z) dz = -\frac{z}{u} dz.$$

Določimo še  $u$  pri  $z^*$  in  $R$ :

$$z = z^* \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{R^2 - (z^*)^2}, \quad z = R \quad \rightarrow \quad u = 0.$$

Statični moment  $S_y^{**}$  je

$$S_y^{**}(z^*) = \int_{\sqrt{R^2 - (z^*)^2}}^0 2z u \left( -\frac{u du}{z} \right) = -2 \frac{u^3}{3} \Big|_{\sqrt{R^2 - (z^*)^2}}^0 = \frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - (z^*)^2)^3}.$$

Strižna napetost  $\sigma_{xz}$  je

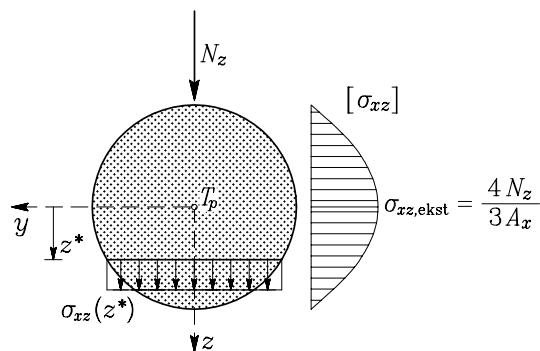
$$\sigma_{xz}(z^*) = \frac{N_z 2 \sqrt{(R^2 - (z^*)^2)^3} 4}{3 \cdot 2 \sqrt{R^2 - (z^*)^2} \pi R^4} = \frac{4}{3} \frac{N_z}{\pi R^4} (R^2 - (z^*)^2).$$

Napetost  $\sigma_{xz}$  ima ekstremno vrednost pri  $z = 0$

$$\sigma_{xz,ekst} = \frac{4 N_z}{3 \pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{N_z}{A_x}.$$

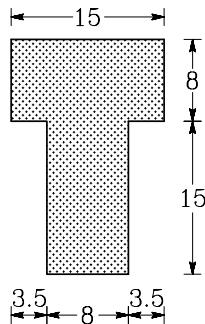
(1.194)

Na sliki 1.99 prikazujemo potek strižne napetosti  $\sigma_{xz}(N_z)$  za prečni prerez krožne oblike.



Slika 1.99: Strižna napetost  $\sigma_{xz}$  za prečni prerez krožne oblike

**Primer 1.26** Določimo diagram strižnih napetosti zaradi prečne sile  $N_z = 10 \text{ kN}$  za na sliki prikazani prerez oblike črke  $T$  (slika 1.100)!



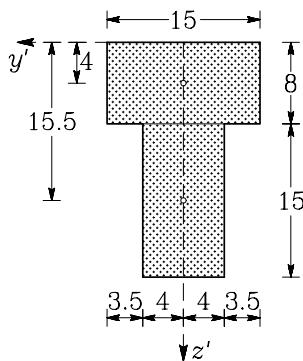
Slika 1.100: Prečni prerez v obliki črke  $T$

Enačbi za račun napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  dobimo iz (1.192) in (1.193)

$$\sigma_{xy}(N_z) = -\frac{N_z S_y^*(y^*)}{h^*(y^*) I_y}, \quad \sigma_{xz}(N_z) = -\frac{N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y}.$$

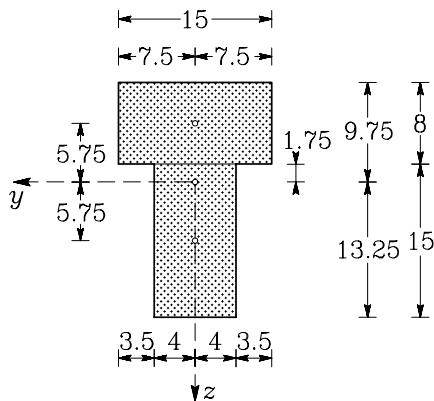
Koordinatni osi  $y$  in  $z$  morata potekati skozi težišče prečnega prereza. Ker njegove lege še ne poznamo, za njegov račun izberemo tak koordinatni sistem, v katerem račun poteka dovolj preprosto. Uporabimo koordinatni sistem  $y', z'$ , kot kaže slika 1.101. Zaradi simetrije prereza težišče leži na osi  $z'$  oziroma  $y'_T = 0$ .

$$y'_T = 0, \quad z'_T = \frac{15 \cdot 8 \cdot 4 + 15 \cdot 8 \cdot 15.5}{2 \cdot 15 \cdot 8} = 9.75 \text{ cm}.$$

Slika 1.101: Koordinati težišča računamo v koordinatnem sistemu  $y', z'$ 

Vztrajnostni moment  $I_y$  glede na glavno vztrajnostno os  $y$  v težišču prereza (slika 1.102)

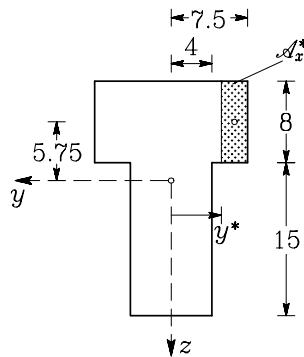
$$I_y = \frac{15 \cdot 8^3}{12} + 5.75^2 \cdot 8 \cdot 15 + \frac{8 \cdot 15^3}{12} + 5.75^2 \cdot 8 \cdot 15 = 10825 \text{ cm}^4.$$



Slika 1.102: Koordinate težišč posameznih likov za račun vztrajnostnega momenta

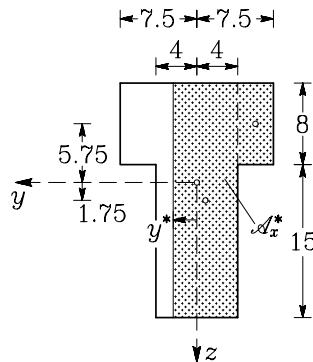
Črte vzdolž katerih računamo  $\sigma_{xy}$  so navpične. Oblika dela prečnega prereza se nevezno spremeni pri  $y = -4$  in pri  $y = 4$ . Zato za račun statičnega momenta  $S_y^*(y)$  za del prereza  $\mathcal{A}_x^*$  ločimo tri integracijska območja. Delni rez  $\mathcal{A}_x^*$  za območje  $-7.5 \leq y^* \leq -4.0$  je prikazan na sliki 1.103

$$S_y^*(y^*) = \int_{-7.5}^{y^*} -5.75 \cdot 8 dy = -8 \cdot 5.75 y^* \Big|_{-7.5}^{y^*} = -46(y^* + 7.5) = -345 - 46y^* [\text{cm}^3].$$

Slika 1.103: Integracijsko območje  $-7.5 \leq y^* \leq -4.0$ 

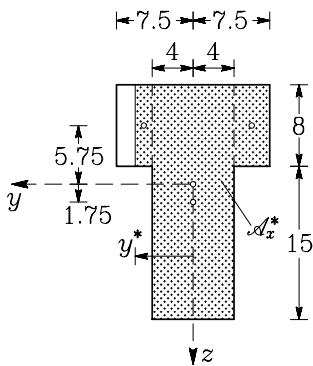
Delni prerez  $\mathcal{A}_x^*$  za območje  $-4.0 \leq y^* \leq 4.0$  je prikazan na sliki 1.104

$$S_y^*(y^*) = \int_{-7.5}^{-4} -5.75 \cdot 8 \, dy + \int_{-4}^{y^*} 1.75 \cdot 23 \, dy = -46(-4 + 7.5) + 40.25(y^* + 4) = 40.25y^* \text{ [cm}^3\text{]}.$$

Slika 1.104: Integracijsko območje  $-4.0 \leq y^* \leq 4.0$ 

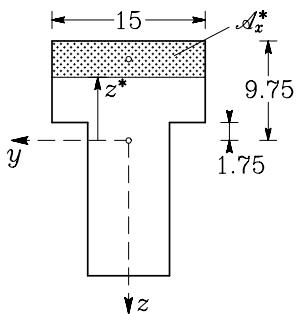
Delni prerez  $\mathcal{A}_x^*$  za območje  $4.0 \leq y^* \leq 7.5$  je prikazan na sliki 1.105

$$\begin{aligned} S_y^*(y^*) &= \int_{-7.5}^{-4} -5.75 \cdot 8 \, dy + \int_{-4}^4 1.75 \cdot 23 \, dy + \int_4^{y^*} -5.75 \cdot 8 \, dy = \\ &= -161 + 40.25 \cdot 8 - 46(y^* - 4) = 345 - 46y^* \text{ [cm}^3\text{]}. \end{aligned}$$

Slika 1.105: Integracijsko območje  $4.0 \leq y^* \leq 7.5$ 

Za račun statičnega momenta  $S_y^*(z^*)$  za del prereza  $\mathcal{A}_x^*$  ločimo dve integracijski območji, saj se pri vodoravnih črtah, vzdolž katerih računamo napetost  $\sigma_{xz}$ , delni prerez nezvezno spremeni le pri  $z = -1.75$ . Delni prerez  $\mathcal{A}_x^*$  za območje  $-9.75 \leq z^* \leq -1.75$  je prikazan na sliki 1.106

$$S_y^*(z^*) = \int_{-9.75}^{z^*} z \cdot 15 dz = 7.5 z^2 \Big|_{-9.75}^{z^*} = 7.5 ((z^*)^2 - 9.75^2) = 7.5 (z^*)^2 - 712.97 \text{ [cm}^3\text{]}.$$

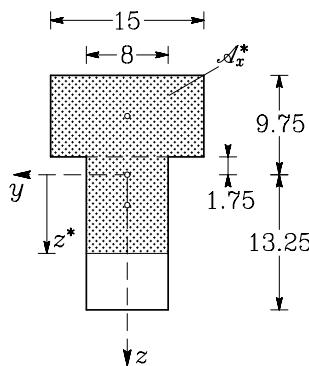
Slika 1.106: Integracijsko območje  $-9.75 \leq z^* \leq -1.75$ 

Delni prerez  $\mathcal{A}_x^*$  za območje  $-1.75 \leq z^* \leq 13.25$  je prikazan na sliki 1.107

$$S_y^*(z^*) = \int_{-9.75}^{-1.75} z \cdot 15 dz + \int_{-1.75}^{z^*} z \cdot 8 dz = 7.5 (1.75^2 - 9.75^2) + 4 ((z^*)^2 - 1.75^2) = 4 (z^*)^2 - 702.25 \text{ [cm}^3\text{]}. \quad (1.195)$$

Strižno napetost  $\sigma_{xz}$  izračunamo po enačbi

$$\sigma_{xz}(z^*) = -\frac{N_z}{b^*(z^*) I_y} (4 (z^*)^2 - 702.25).$$

Slika 1.107: Integracijsko območje  $-1.75 \leq z^* \leq 13.25$ 

Ekstremno vrednost strižne napetosti  $\sigma_{xz}$  izračunamo z odvajanjem  $d\sigma_{xz}/dz^* = 0$ :

$$-1.75 \leq z^* \leq 13.25 : \quad \frac{d\sigma_{xz}}{dz^*} = \frac{N_z}{8 I_y} 8 z^* = 0 \quad \rightarrow \quad z_{ekst}^* = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xz,ekst} = 81.7 \text{ N/cm}^2.$$

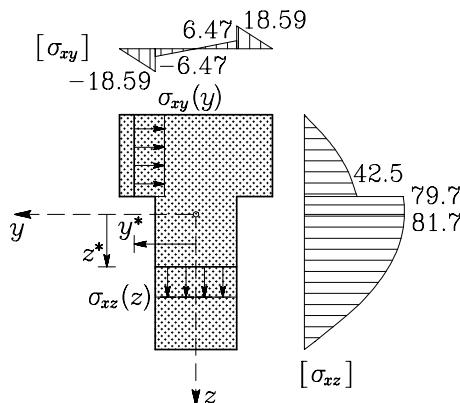
Velikosti strižnih napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  podajamo v preglednicah 1.18 in 1.19, grafični prikaz pa na sliki 1.108. Vidimo, da se  $\sigma_{xy}$  v odvisnosti od  $y$  spreminja odsekoma linearno in je na mestih, kjer se prerez nezvezno spremeni, nezvezna. Napetost  $\sigma_{xz}$  se spreminja po kvadratni paraboli v odvisnosti od  $z$ . Pri  $z = -1.75$ , kjer se širina prereza nezvezno spremeni, je tudi  $\sigma_{xz}$  nezvezna. Največja vrednost  $\sigma_{xz} = 81.7 \text{ N/cm}^2$  je pri  $z = 0$ .

Tabela 1.18: Strižna napetost  $\sigma_{xy}(y)$ 

$y^* [\text{cm}]$	$h^* [\text{cm}]$	$\sigma_{xy} [\text{N/cm}^2]$
-7.5	8	0
-4.0	8	18.59
-4.0	23	6.47
0	23	0
4.0	23	-6.47
4.0	8	-18.59
7.5	8	0

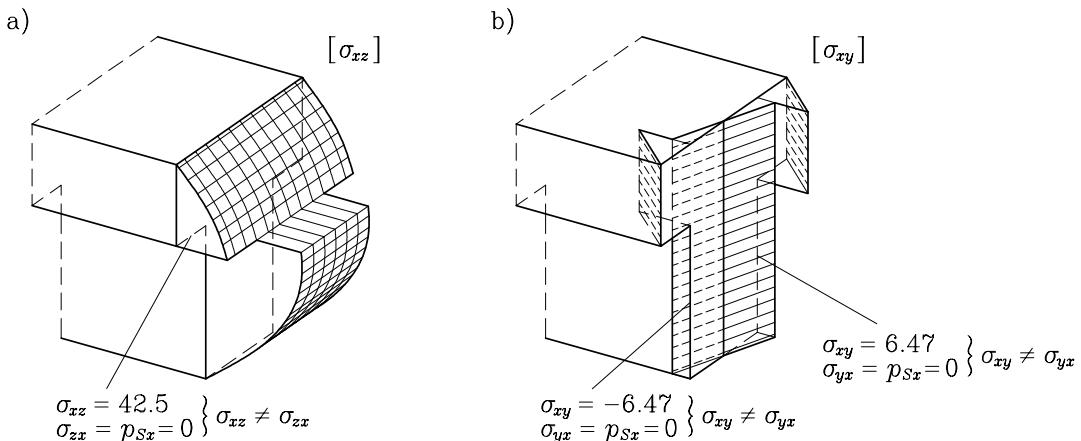
Tabela 1.19: Strižna napetost  $\sigma_{xz}(z)$ 

$z^* [cm]$	$b^* [cm]$	$\sigma_{xz} [N/cm^2]$
-9.75	15	0
-1.75	15	42.5
-1.75	8	79.7
0	8	81.7
13.25	8	0

Slika 1.108: Potek strižnih napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$ 

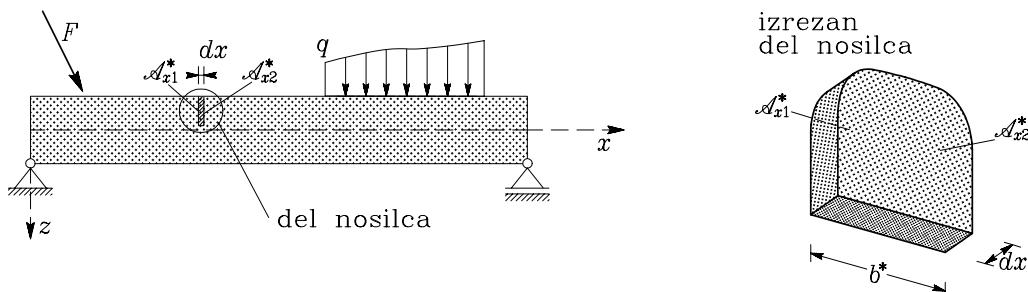
Posledica predpostavke, da se strižni napetosti  $\sigma_{xy}$  in  $\sigma_{xz}$  ne spremunjata vzdolž  $y$  oziroma  $z$  osi je, da niso izpolnjeni robni pogoji (slika 1.109).

Na sliki 1.109a vidimo, da je napetost  $\sigma_{xz}$  vzdolž vodoravnega roba  $z = -1.75$  različna od nič, čeprav je ta rob neobremenjen in iz ravnotežne enačbe na robu sledi, da je  $\sigma_{xz} = 0$ . Podobno iz slike 1.109b sledi, da je  $\sigma_{xy}$  vzdolž navpičnih robov različna od nič, čeprav ta robova nista strižno obremenjena in iz robnih pogojev sledi, da je  $\sigma_{xy} = 0$ . Kljub tej pomanjkljivosti sta podani enačbi dovolj natančni za oceno strižnih napetosti v linijskih konstrukcijah in se v praksi redno uporabljajo.



Slika 1.109: Zaradi privzetih predpostavk robni pogoji niso izpolnjeni

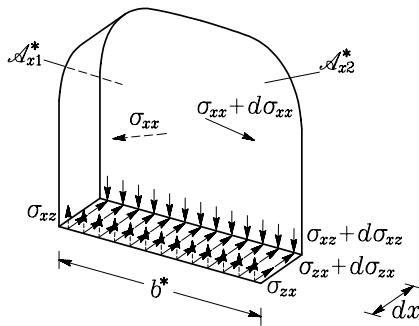
**Primer 1.27** Z uporabo ravnotežne enačbe za del nosilca na sliki 1.110 izpeljimo enačbo za račun strižne napetosti  $\sigma_{xz}$ . Predpostavimo ravninsko napetostno stanje v ravnini  $x, z$ . Ploskev  $\mathcal{A}_z$  je vzporedna ravnini  $x, y$ .

Slika 1.110: Iz nosilca v ravnini  $x, z$ , na katerega deluje navpična obtežba, izrežemo del nosilca dolžine  $dx$  s prečnim prerezom  $A_x^*$ 

Vzemimo, da na nosilec v ravnini  $x, z$  deluje zunanje sile pravokotno na vzdolžno os nosilca, to je v smeri osi  $z$ . Prečni prerez  $A_x$  nosilca se vzdolž osi nosilca ne spreminja. Oblika prečnega prereza najima simetrijsko os, ki sovpada z osjo  $z$ . V tem primeru računamo vzdolžno normalno napetost  $\sigma_{xx}$  po enačbi

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (1.196)$$

V nadaljevanju predpostavimo, da se velikost strižne napetosti  $\sigma_{xz}$  vzdolž premic, ki so vzporedne osi  $y$ , ne spreminja. Na sliki 1.111 prikazujemo napetosti, ki na obravnavani del telesa delujejo.



Slika 1.111: Na izrezani del nosilca delujejo normalna in strižna napetost

Izraz za strižno napetost  $\sigma_{xz}$  izpeljemo, če za sile na sliki 1.111 zapišemo ravnotežni pogoj  $\sum X = 0$ . Pri tem upoštevamo, da na prečni prerez  $A_{x1}^*$  deluje normalna napetost  $\sigma_{xx}$ , na prečni prerez  $A_{x2}^*$  pa  $\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}$ . V ploskvici, ki je vzporedna ravnini  $x, y$ , deluje vzdolž robu  $x$  konstantna strižna napetost  $\sigma_{zx}$ , vzdolž robu  $x + dx$  pa konstantna strižna napetost  $\sigma_{zx} + d\sigma_{zx}$ . Srednja (povprečna) strižna napetost v tej ploskvici je zato  $\sigma_{zx} + (1/2) d\sigma_{zx}$ . Ravnotežni pogoj zapišemo z enačbo:

$$-\int_{A_{x1}^*} \sigma_{xx} dA_x + \left( \sigma_{zx} + \frac{1}{2} d\sigma_{zx} \right) b^*(z) dx + \int_{A_{x2}^*} (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) dA_x = 0. \quad (1.197)$$

Upoštevamo enčbo (1.196) ter zvezo  $dM_y/dx = N_z$

$$\sigma_{xx} + d\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{d}{dx} \left( \frac{M_y}{I_y} z \right) dx = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{dM_y}{dx} \frac{z}{I_y} dx = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N_z}{I_y} z dx. \quad (1.198)$$

in dobimo

$$-\frac{M_y}{I_y} \int_{A_{x1}^*} z dA_x + \sigma_{zx} b^*(z) dx + \frac{1}{2} d\sigma_{zx} b^*(z) dx + \frac{M_y}{I_y} \int_{A_{x2}^*} z dA_x + \frac{N_z}{I_y} dx \int_{A_{x2}^*} z dA_x = 0.$$

Če upoštevamo še, da sta ploskvi  $A_{x1}^*$  in  $A_{x2}^*$  enaki in če zanemarimo kvadrat diferencialnih količin ( $d\sigma_{zx} dx$ ), sledi

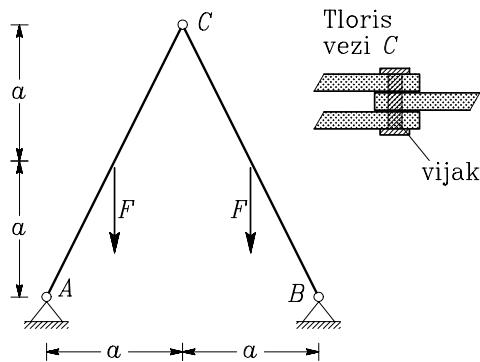
$$\sigma_{zx} b^*(z) dx + \frac{N_z}{I_y} dx \int_{A_x^*} z dA_x = 0.$$

Upoštevamo še, da je  $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$  in dobimo

$$\sigma_{xz} = -\frac{N_z S_y^*}{b^*(z) I_y}. \quad (1.199)$$

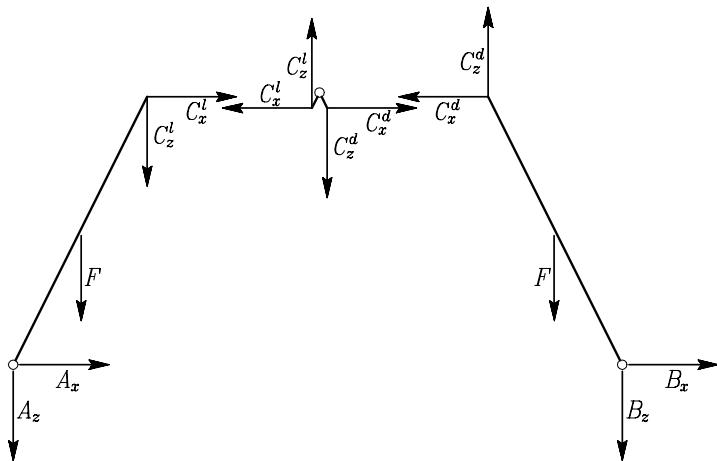
Z  $S_y^*$  je označen statični moment delnega prereza  $A_x^*$ .

**Primer 1.28** Izračunajmo največjo strižno napetost v vijaku v konstrukciji na sliki 1.112. Nosilec med točkama AC je sestavljen iz dveh delov, med točkama BC pa iz enega dela. Polmer r prečnega prereza vijaka ima velikost 1 cm, sila  $F = 5 \text{ kN}$ , razdalja a pa 1 m.



Slika 1.112: Nosilec AC je sestavljen iz dveh delov, nosilec BC pa iz enega dela

Reakcije in sile v vezi izračunamo iz ravnotežnih pogojev (slika 1.113).



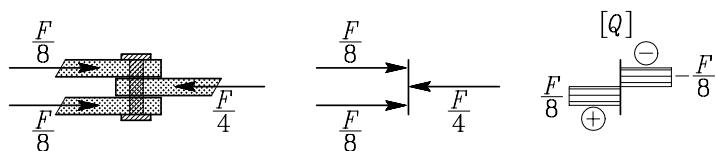
Slika 1.113: Vpliv podpor nadomestimo z reakcijami, vez pa izrežemo

Ravnotežni pogoji:

Členek:

$$C_x^l = C_x^d, \quad C_z^l = C_z^d.$$

Iz momentnega pogoja na členek v podpori A za celo konstrukcijo dobimo, da je  $B_z = -F$ , iz pogoja  $\sum Z = 0$  za celo konstrukcijo sledi  $A_z = -F$ , iz momentnega ravnotežnega pogoja na členek C za levi del konstrukcije  $A_x = F/4$ , iz pogojev  $\sum X = 0$  in  $\sum Z = 0$  za levi del pa  $C_x^l = -F/4$  in  $C_z^l = 0$ . Na sliki 1.114 so prikazane sile na vijak. Upoštevano je, da je nosilec AC iz dveh delov.

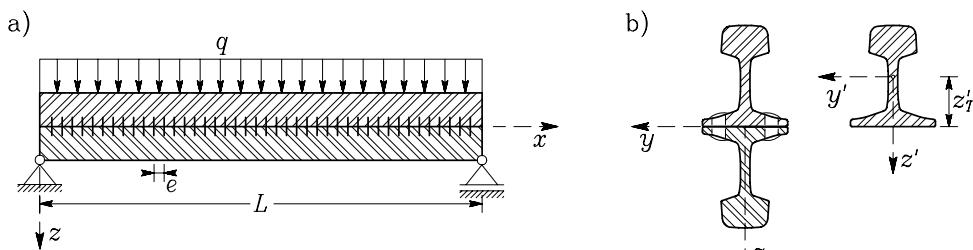


Slika 1.114: Sile, ki na vijak delujejo

Na prečni prerez vijaka deluje prečna sila  $Q$  velikosti  $F/8$ . Največja strižna napetost v vijaku je (enačba (1.194))

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{5}{8 \pi 1^2} = 0.265 \text{ kN/cm}^2.$$

**Primer 1.29** Določimo velikost strižne sile  $F_s$ , ki učinkuje na prvo zakovico prostoležečega nosilca, sestavljenega iz dveh tračnic! Nosilec je obremenjen z enakoverno obtežbo  $q = 18 \text{ kN/m}$ . Ploščina prereza tirkice je  $A_x = 55.6 \text{ cm}^2$ , vztrajnostni moment tirkice na težišče prereza je  $I_y^T = 1476 \text{ cm}^4$ , oddaljenost težišča  $z'_T = 6.96 \text{ cm}$ . Dolžina nosilca je  $L = 6.5 \text{ cm}$ , razdalja e med zakovicami pa 15 cm (slika 1.115). Določimo tudi potrebeni premer prve zakovice! Največja dovoljena strižna napetost  $\tau_{\max}$  v zakovici je  $\tau_{\max} = 4 \text{ kN/cm}^2$ .

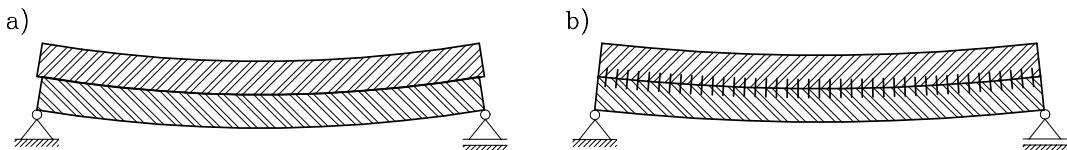


Slika 1.115: Nosilec je sestavljen iz dveh tračnic, ki sta med seboj povezani z zakovicami

Pri računu predpostavimo, da se zakovičen nosilec obnaša tako, kot da bi bil prerez nosilca homogen. Na sliki 1.116 je prikazano deformiranje dveh nepovezanih in dveh povezanih nosilcev. Slika 1.116a prikazuje primer, ko tirkici nista povezani, med njima pa ni trenja. Slika 1.116b prikazuje togo povezani tirkici. Taki tirkici sta po vsej dolžini zavarjeni. Zakovičeni tirkici nista povsem togo povezani. Vendar je njuno obnašanje bližje drugemu primeru.

Če se nosilec obnaša, kot da je iz enega samega dela, izračunamo napetosti  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  zaradi prečne sile  $N_z$  po enačbi

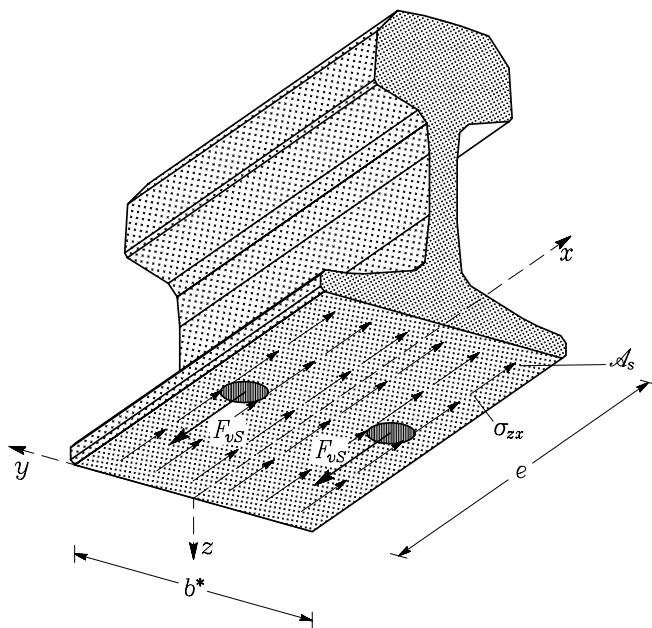
$$\sigma_{xz}(N_z) = -\frac{N_z S_y^*(z^*)}{b^*(z^*) I_y}.$$



Slika 1.116: Deformirani legi nepovezanih in togo povezanih tračnic

Strižno silo  $F_s$ , ki jo morata “prevzeti” prvi dve zakovici, približno določimo, če integriramo strižno napetost  $\sigma_{zx}$  po ravnini  $\mathcal{A}_s(x, y)$  pri  $z = 0$  na dolžini  $0 \leq x \leq e$  (slika 1.117)

$$2F_s = \int_{\mathcal{A}_s} \sigma_{zx} dA_s = \int_{\mathcal{A}_s} \sigma_{xz} dA_s.$$



Slika 1.117: Območje stika med tračnicama, ki pripada prvima dvema zakovicama

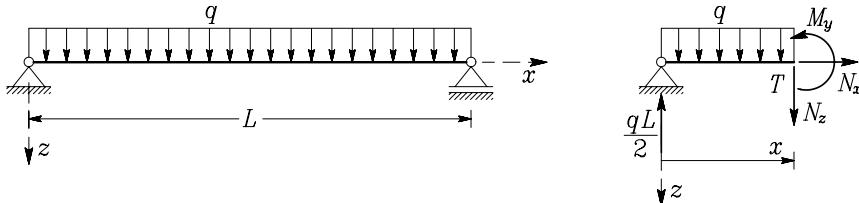
Integral po ploskvi lahko prevedemo na enojni integral tako, da upoštevamo  $dA_s = b^*(z = 0) dx$

$$2F_s = \int_0^e -\frac{N_z S_y^*(z = 0)}{b^*(z = 0) I_y} b^*(z = 0) dx = -\int_0^e \frac{N_z S_y^*(z = 0)}{I_y} dx.$$

Izračunati moramo prečno silo  $N_z$  v odvisnosti od koordinate  $x$ , statični moment dela prereza za  $z = 0$  in vztrajnostni moment glede na os  $y$ .

Račun prečne sile (slika 1.118):

$$N_z(x) = -A_z - q x = \frac{q L}{2} - q x = 0.18 \left( \frac{650}{2} - x \right) = 0.18 (325 - x).$$



Slika 1.118: Statični model za račun prečne sile  $N_z$

Račun statičnega momenta dela prereza  $S_y^*(z = 0)$ :

$$S_y^*(z = 0) = -6.96 \cdot 55.6 = -386.98 \text{ cm}^3.$$

Račun vztrajnostnega momenta  $I_y$  glede na os  $y$ :

$$I_y = 2 (1476 + 6.96^2 \cdot 55.6) = 8338.71 \text{ cm}^4.$$

Strižna sila, ki jo prevzameta dve zakovici, je

$$2F_s = \int_0^{15} 0.18 (325 - x) \frac{386.98}{8338.71} dx = 39.78 \text{ kN},$$

na eno zakovico pa deluje polovična sila

$$F_s = \frac{39.78}{2} = 19.89 \text{ kN}.$$

Določimo prerez zakovice (dimenzioniranje zakovice).

Zakovica ima krožni prerez polmera  $R$ . Največja strižna napetost je (glej (1.194))

$$\sigma_{xz}^{\max} = \frac{4}{3 \pi} \frac{F_s}{R^2}$$

in mora biti manjša ali enaka največji dovoljeni strižni napetosti

$$\sigma_{xz}^{\max} \leq \tau_{\max}.$$

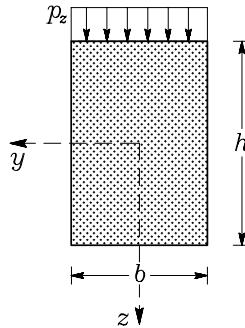
Iz te neenačbe izračunamo pogoj, ki mu mora ustrezati polmer zakovice

$$R \geq \sqrt{\frac{4}{3} \frac{F_s}{\pi \tau_{\max}}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{19.89}{4 \pi}} = 1.453 \text{ cm},$$

premer  $D$  zakovice pa mora ustrezati pogoju

$$D = 2R \geq 2.91 \text{ cm.}$$

**Primer 1.30** Določimo prečno normalno napetost  $\sigma_{zz}$  v nosilcu z ravno osjo in pravokotnim prečnim prerezom (slika 1.119). Prečni prerez je obtežen s prečno silo  $N_z$  ter upogibnim momentom  $M_y$ .



Slika 1.119: Prečni prerez pravokotne oblike širine  $b$  in višine  $h$

Prečno normalno napetost izračunamo po enačbi (1.177)

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{b^*(z^*)} \left( \mathcal{P}_z^*(x) + \int_{\mathcal{A}_x^*(x)} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dA_x \right). \quad (1.200)$$

V obravnavanem primeru je ( $p_z$  [N/cm<sup>2</sup>])

$$b^*(z^*) = b, \quad \sigma_{xz} = -\frac{6N_z}{bh^3} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad \mathcal{P}_z^* = \int_{\mathcal{C}_{x,z}^*} p_z ds = p_z b$$

in

$$\mathcal{P}_z = \int_{\mathcal{C}_x} p_z ds = p_z b = \mathcal{P}_z^*, \quad dA_x = b dz, \quad \frac{dN_z}{dx} + \mathcal{P}_z = 0.$$

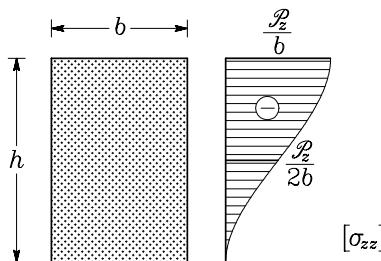
Tako dobimo

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= -\frac{1}{b} \left( \mathcal{P}_z^* + \int_{\mathcal{A}_x^*} \left( -\frac{6}{b h^3} \frac{dN_z}{dx} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{b} \left( \mathcal{P}_z + \frac{6 \mathcal{P}_z}{b h^3} \int_{-h/2}^z \left( \bar{z}^2 - \frac{h^2}{4} \right) b d\bar{z} \right) = \\ &= -\frac{\mathcal{P}_z}{b} - \frac{6 \mathcal{P}_z}{b h^3} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{h^2}{4} z - \frac{h^3}{12} \right) = -\frac{6 \mathcal{P}_z}{b h^3} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{h^2}{4} z + \frac{h^3}{12} \right).\end{aligned}$$

Vrednosti prečne normalne napetosti  $\sigma_{zz}$  za  $z = -h/2$ ,  $z = 0$  in  $z = h/2$ :

$$\sigma_{zz}(-h/2) = -\frac{\mathcal{P}_z}{b}, \quad \sigma_{zz}(0) = -\frac{\mathcal{P}_z}{2b}, \quad \sigma_{zz}(h/2) = 0.$$

Na sliki 1.120 prikazujemo potek prečne normalne napetosti  $\sigma_{zz}$ .



Slika 1.120: Potek prečne normalne napetosti  $\sigma_{zz}$ a

Določimo še razmerek med največjo prečno normalno napetostjo  $\sigma_{zz,max} = \sigma_{zz}(-h/2)$  ter največjo vzdolno normalno napetostjo  $\sigma_{xx,max}$  za prostoležeči nosilec pravokotnega prereza, na katerega deluje enakomerna linijska obtežba  $\mathcal{P}_z$ .

Največja vzdolžna normalna napetost je (z  $L$  je označena dolžina nosilca)

$$\sigma_{xx,max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{\mathcal{P}_z L^2}{b h^2} = \frac{3 \mathcal{P}_z L^2}{b h^2}.$$

Po absolutni vrednosti največja prečna normalna napetost je  $|\sigma_{zz,max}| = \mathcal{P}_z/b$ . Razmerje med prečno normalno in vzdolžno normalno napetostjo je

$$\frac{|\sigma_{zz,max}|}{\sigma_{xx,max}} = \frac{4}{3} \left( \frac{h}{L} \right)^2.$$

Za linijski nosilec, pri katerem je  $h/L = 0.1$  dobimo

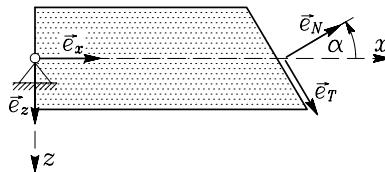
$$|\sigma_{zz,max}| = \frac{4}{300} \sigma_{xx,max}.$$

V tem primeru znaša prečna normalna napetost 1.33% vzdolžne normalne napetosti. Zaradi teh pri linujskih nosilcih prečne normalne napetosti največkrat zanemarimo.

## 1.4 Glavne normalne napetosti v nosilcu

Napetosti  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$  in  $\sigma_{xz}$  določajo ravninsko napetostno stanje v ravni  $x, z$ . Napetostni vektor  $\vec{\sigma}_N$  v prerezu z zunanjim normalom  $\vec{e}_N$  lahko izrazimo z napetostnima vektorjema  $\vec{\sigma}_x$  in  $\vec{\sigma}_z$ , ki pripadata ravninam z zunanjima normalama  $\vec{e}_x$  in  $\vec{e}_z$  (slika 1.121)

$$\vec{\sigma}_N = \vec{\sigma}_x e_{Nx} + \vec{\sigma}_z e_{Nz}.$$



Slika 1.121: Prerez nosilca z zunanjim normalom  $\vec{e}_N$

Če je  $\alpha$  kot med vektorjem  $\vec{e}_x$  in  $\vec{e}_N$ , zapišemo normalno napetost  $\sigma_{NN}$  in strižno napetost  $\sigma_{NT}$  z enačbama

$$\sigma_{NN} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \cos 2\alpha - \sigma_{xz} \sin 2\alpha, \quad (1.201)$$

$$\sigma_{NT} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xz} \cos 2\alpha, \quad (1.202)$$

ki ju izpeljemo na enak način kot v razdelku 2.6.1 v učbeniku: M. Stanek, G. Turk, Osnove mehanike trdnih teles, Univerza v Ljubljani. Ekstremno vrednost normalnih napetosti določa kot  $\alpha_\sigma$  (glej razdelek 2.6.2 v istem učbeniku)

$$\tan 2\alpha_\sigma = \frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}, \quad (1.203)$$

ekstremno vrednost strižnih napetosti pa kot  $\alpha_\tau$

$$\tan 2\alpha_\tau = -\frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2\sigma_{xz}}. \quad (1.204)$$

Velikosti ekstremnih napetosti lahko izračunamo z enačbama

$$\sigma_{11,22} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \sigma_{xz}^2}, \quad (1.205)$$

velikosti ekstremnih strižnih napetosti pa po enačbah

$$\tau_{II} = \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2} \right)^2 + \sigma_{xz}^2} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (1.206)$$

Pri grednih nosilcih prečno normalno napetost  $\sigma_{zz}$  običajno zanemarimo. Zato se enačbe (1.201) - (1.206) poenostavijo.

$$\sigma_{NN} = \frac{\sigma_{xx}}{2} + \frac{\sigma_{xx}}{2} \cos 2\alpha - \sigma_{xz} \sin 2\alpha \quad (1.207)$$

$$\sigma_{NT} = \frac{\sigma_{xx}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{xz} \cos 2\alpha. \quad (1.208)$$

Ekstremno vrednost normalnih napetosti določa kot  $\alpha_\sigma$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = -\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}}, \quad (1.209)$$

ekstremno vrednost strižnih napetosti pa kot  $\alpha_\tau$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_{xx}}{2\sigma_{xz}}. \quad (1.210)$$

Velikosti ekstremnih napetosti lahko izračunamo z enačbama

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{\max} &= \frac{1}{2} [\sigma_{xx} + \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xz}^2}], \\ \sigma_{22} = \sigma_{\min} &= \frac{1}{2} [\sigma_{xx} - \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xz}^2}], \end{aligned} \quad (1.211)$$

velikosti ekstremnih strižnih napetosti pa po enačbah

$$\tau_{II} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{xz}^2} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (1.212)$$

Z uporabo enačb (1.209) in (1.211) lahko določimo v vseh točkah  $(x, z)$  linijskega nosilca smeri in velikosti glavnih normalnih napetosti in narišemo dve skupini med seboj pravokotnih krivulj, katerih tangente se v vsaki točki  $(x, z)$  nosilca ujemajo z eno od glavnih ravnin za to točko. Te krivulje imenujemo **trajektorije glavnih napetosti**.

Trajektorije glavnih normalnih napetosti določimo z uporabo enačbe (1.209), v kateri upoštevamo, da sta  $\sigma_{xx}$  in  $\sigma_{xz}$  funkciji koordinat  $x$  in  $z$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = -\frac{2\sigma_{xz}(x, z)}{\sigma_{xx}(x, z)}. \quad (1.213)$$

Enačbo (1.213) izrazimo v odvisnosti od  $\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\sigma = \frac{2\operatorname{tg} \alpha_\sigma}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_\sigma} = f(x, z) \quad \rightarrow \quad f(x, z) \operatorname{tg}^2 \alpha_\sigma + 2\operatorname{tg} \alpha_\sigma - f(x, z) = 0$$

in jo rešimo

$$\operatorname{tg} \alpha_\sigma = -\frac{1}{f(x, z)} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{f^2(x, z)}}.$$

Posamezna trajektorija glavnih normalnih napetosti je funkcija  $z(x)$ . Če upoštevamo, da je odvod  $dz/dx$  enak  $\operatorname{tg} \alpha_\sigma$ , ter namesto  $f(x, y)$  zapisemo (1.213), dobimo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sigma_{xx}(x, z)}{2 \sigma_{xz}(x, z)} \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma_{xx}^2(x, z)}{4 \sigma_{xz}^2(x, z)}}. \quad (1.214)$$

Enačba (1.214) predstavlja diferencialno enačbo prvega reda, katere rešitev je funkcija  $z(x)$ . Diferencialni enačbi prvega reda pripada en robni pogoj. Če vzamemo

$$z(0) = k, \quad (1.215)$$

kjer je s  $k$  označena konstanta, dobimo eno izmed trajektorij. Različnim trajektorijam napetosti ustrezajo različne vrednosti robnega pogoja  $z(0) = k$ . Diferencialno enačbo (1.214) z robnim pogojem (1.215) lahko rešimo numerično (na primer s programom Mathematica ali Matlab).

**Primer 1.31** Določimo trajektorije glavnih normalnih napetosti v konzolnem nosilcu dolžine  $L = 3 \text{ m}$ , višine  $h = 1 \text{ m}$  in širine  $b = 20 \text{ cm}$ , ki je obtežen s silo  $F = 1 \text{ kN}$  na prostem koncu konzole pri  $x = L$ !

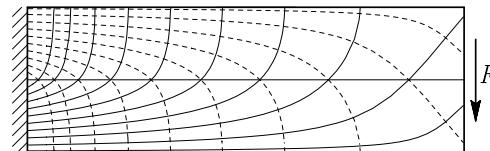
Notranje sile v obravnavani konstrukciji so

$$N_x(x) = 0, \quad N_z(x) = F, \quad M_y(x) = -F(L - x).$$

Normalno napetost  $\sigma_{xx}$  izračunamo po enačbi (1.89), strižno napetost  $\sigma_{xz}$  pa po enačbi (1.193)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, z) &= \frac{M_y(x)}{I_y} z = \frac{M_y(x)}{b h^3} 12 z = -\frac{12 F(L - x) z}{b h^3}, \\ \sigma_{xz}(x, z) &= -\frac{N_z(x) S_y^*}{b^* I_y} = -\frac{6 F}{b h^3} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (1.216)$$

Ob upoštevanju enačb (1.216) v diferencialni enačbi (1.214) smo z računalniškim programom določili potek trajektorij glavnih normalnih napetosti, ki jih prikazujemo na sliki 1.122.



Slika 1.122: Potek trajektorij glavnih normalnih napetosti v konzoli