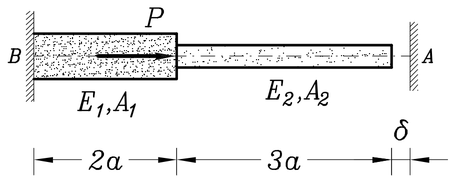
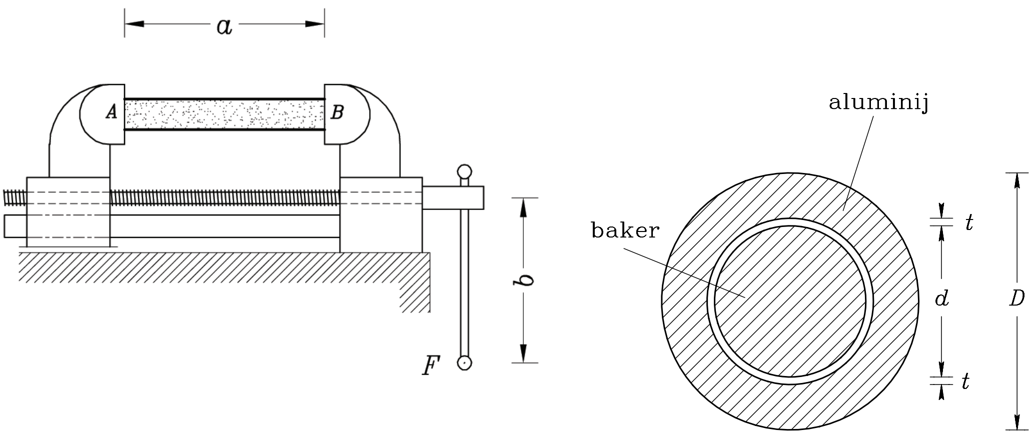
9. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES
(linearizirana elastičnost, plastično tečenje)

NALOGA 1: Izračunaj napetosti v sestavljeni palici v točkah A in B po deformiranju s silo P.
Podatki: $a = 50\,\mathrm{cm}$, $\delta = 0.05\,\mathrm{mm}$, $P = 200\,\mathrm{kN}$, $A_1 = 150\,\mathrm{cm}^2$, $E_1 = 10\,000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$ (baker), $A_2 = 50\,\mathrm{cm}^2$, $E_2 = 20\,000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$ (jeklo)
Rešitev: $\sigma_A = -0.77\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $\sigma_B = 1.08\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$

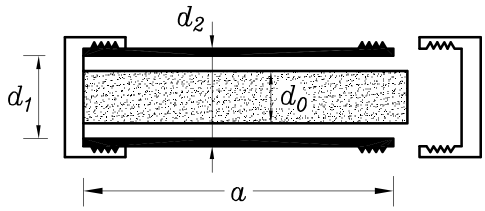


NALOGA 2: Bakrena palica elastičnega modula E_1, dolžine a in premera d je vložena v aluminijsko cev iste dolžine a, elastičnega modula E_2 in zunanjega premera D. Tako sestavljena palica je tesno vstavljena v tog primež, kot kaže slika. Izračunaj napetosti in deformacije v palici in cevi, če ročico primeža dolžine b zavrtimo z n obratov. Dolžina navojev je e.
Podatki: $d = 15\,\mathrm{mm}$, $D = 25.06\,\mathrm{mm}$, $t = 0.1\,\mathrm{mm}$, $a = 300\,\mathrm{mm}$, $n = 0.169$, $E_1 = 10\,300\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$ (baker), $E_2 = 7000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$ (aluminij), $e = 2.5\,\mathrm{mm}$, $b = 15\,\mathrm{cm}$



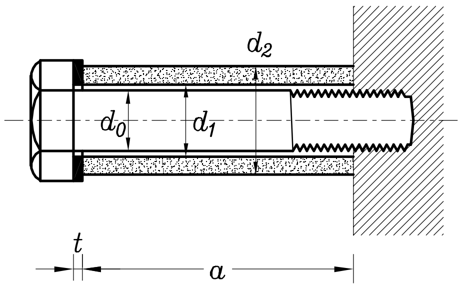
Rešitev: $\sigma_1 = -14.49\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $\sigma_2 = -9.85\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$,

NALOGA 3: Aluminijska cev dolžine a, elastičnega modula E_2, zunanjega premera d_2 in notranjega premera d_1 ima na obeh straneh vrezane navoje širine e. Na enem koncu cev zapremo z vijakom, v cev pa vložimo bakreno palico premera d_0 in elastičnega modula E_1, ki je nekoliko daljša od cevi. Cev zapremo še z drugim vijakom. Ko vijak privijemo do cevi, ga zavrtimo še za n obratov. Določi notranji sili in raztezka v palicah.
Podatki: $a = 25\,\mathrm{cm}$, $d_0 = 25\,\mathrm{mm}$, $d_1 = 28\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 36\,\mathrm{mm}$, $e = 1.5\,\mathrm{mm}$, $E_1 = 10\,500\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$ (baker), $E_2 = 7000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$ (aluminij), $n = 14$



Rešitev: $\sigma_1 = 5.56\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $\sigma_2 = 6.79\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$

NALOGA 4: Jekleni vijak premera d_0, ki ima n navojev na 1 cm dolžine, vstavimo z jekleno podložko debeline t v aluminijevo cev notranjega premera d_1 in zunanjega premera d_2, kot kaže slika. Pri temperaturi T_0 vijak z momentnim ključem tesno privijemo do cevi, nato pa ga zategnemo še za k obratov. Določi napetosti in pripadajoče deformacije v jeklenem vijaku in podložki ter v aluminijevi cevi, če temperaturo dvignemo na T_1.
Podatki: $a = 100\,\mathrm{mm}$, $t = 2\,\mathrm{mm}$, $d_0 = 13\,\mathrm{mm}$, $n = 16$, $k = 14$, $d_1 = 14\,\mathrm{mm}$, $E_j = 20\,000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $\alpha_j = 12 \cdot 10^{-6}(1/°C)$ (jeklo), $d_2 = 17\,\mathrm{mm}$, $E_a = 7500\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $\alpha_a = 23 \cdot 10^{-6}(1/°C)$ (aluminij), $T_0 = 25°C$, $T_1 = 65°C$.



Rešitev: $\sigma_j = 15.05\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $\sigma_a = 27.34\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.

NALOGA 5: Zapiši Misesov pogoj za začetek plastičnega tečenja za prikazani primer napetostega stanja

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Misesov pogoj plastičnega tečenja zapišemo z enačbo

$$\sigma_{xx}^2 + 3\,\sigma_{xz}^2 = \sigma_Y^2.$$

NALOGA 6: Napetostno stanje delca D je opisano s komponentami tenzorja napetosti glede na koordinatni sistem (x, y, z).

a) Dokaži, da je ravnina Π_ζ, katere normala $\boldsymbol{e}_\zeta$ oklepa enake kote z osmi, ena od glavnih ravnin podanega napetostnega stanja! Določi preostali dve glavni ravnini in vse glavne normalne napetosti.

b) Obravnavano telo je narejeno iz bilinearnega elastičnoplastičnega materiala. Pri enoosnem napetostnem stanju je prehod iz elastičnega v plastično stanje določen z mejo plastičnega tečenja σ_Y. Upoštevajoč Misesov pogoj tečenja določi napetost q_Y, pri kateri pri podanem prostorskem napetostnem stanju delca D nastopijo prve plastične deformacije. Napetost q_Y izrazi v odvisnosti od vrednosti σ_Y!

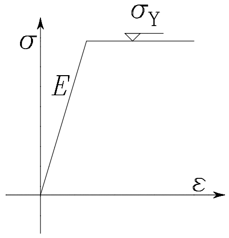
$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} q & 2\,q & 2\,q \\ 2\,q & q & 2\,q \\ 2\,q & 2\,q & q \end{bmatrix}.$$

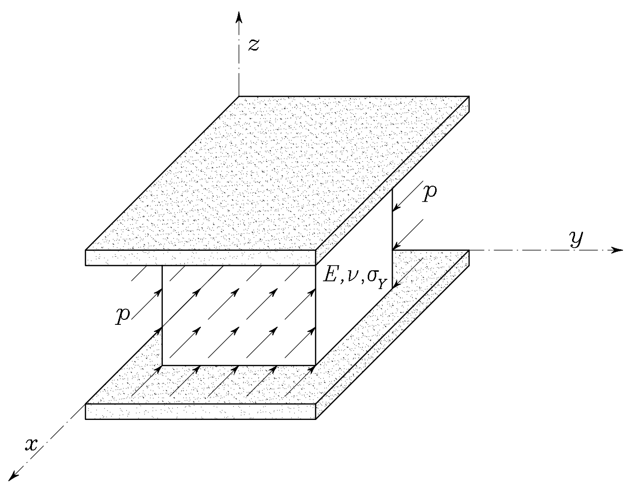
Rešitev:

a) Ker je $\sigma_{\zeta\xi} = \sigma_{\zeta\eta} = 0$, je dokaz končan. Izračunamo $\sigma_{\zeta\zeta} = 5\,q$. Preostali dve glavni normalni napetosti sta $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -q$. Glavni smeri $\boldsymbol{e}_1$ in $\boldsymbol{e}_2$ sta torej poljubna medsebojno pravokotna vektorja v ravnini Π_ζ.

b) Napetost, pri kateri pri podanem prostorskem napetostnem stanju delca D nastopijo prve plastične deformacije $q_Y = \frac{\sigma_Y}{6}$.

NALOGA 7: Telo iz idealno elastično–plastičnega, izotropnega, materiala je brez trenja vloženo med dve povsem togi plošči. Ob predpostavki, da v telesu vlada homogeno napetostno in deformacijsko stanje določi obtežbo p, pri kateri po Misesovemu kriteriju plastičnega tečenja nastopi začetek plastifikacije. Upoštevaj $\varepsilon_{zz} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$. Izračunaj tudi pripadajačo volumsko deformacijo ε_V za ta primer.
Podatki: E, ν, σ_Y.

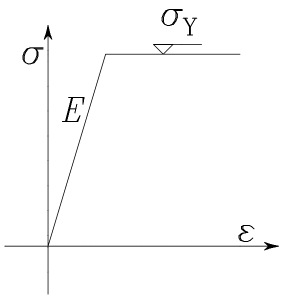




Rešitev: Začetek plastifikacije nastopi pri obtežbi $p = \dfrac{\sigma_Y}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$.

Volumska deformacija telesa znaša $\varepsilon_V = \dfrac{(-1+\nu+2\,\nu^2)\,p}{E}$.

NALOGA 8: Tanka cev je izpostavljena torzijski in natezni obremenitvi. Osne napetosti vzdolž cevi $\sigma_{xx} = \frac{\sigma_Y}{2}$, kjer σ_Y označuje napetost na meji tečenja (glej sliko) so vseskozi konstantne. Strižne napetosti zaradi torzije τ pa postopoma povečujemo od 0 naprej. Pri kateri vrednosti strižnih napetosti τ nastopi plastično tečenje po Misesovem kriteriju.



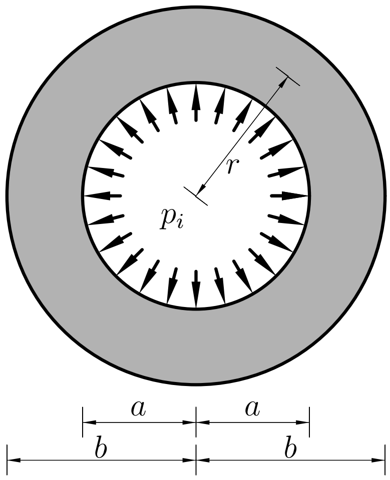
Rešitev: $\tau = \frac{\sigma_Y}{2}$.

NALOGA 9:* Debela cev je izpostavljena notranji enakomerni tlačni obtežbi. Tlak p_i enakomerno narašča.

a) Določi tisti tlak p_i, pri katerem po Misesovem pogoju plastičnega tečenja nastopi začetek plastifikacije.

b) Določi tisti tlak p_i, pri katerem po Trescovem pogoju plastičnega tečenja nastopi začetek plastifikacije.

Kje material najprej steče.



Rešitev:

a)

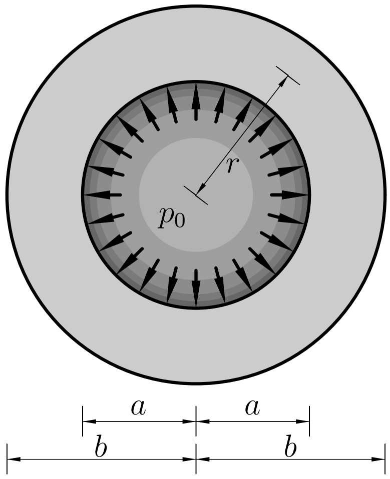
$$p_i = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

b)

$$p_i = \frac{\sigma_Y}{2} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right).$$

Material najprej steče ne robu $r = a$.

NALOGA 10:* Debela sfera je izpostavljena notranji enakomerni tlačni obtežbi. Tlak p_0 enakomerno narašča. Določi tisti tlak p_0, pri katerem po Misesovem pogoju plastičnega tečenja nastopi začetek plastifikacije. Kje material najprej steče.

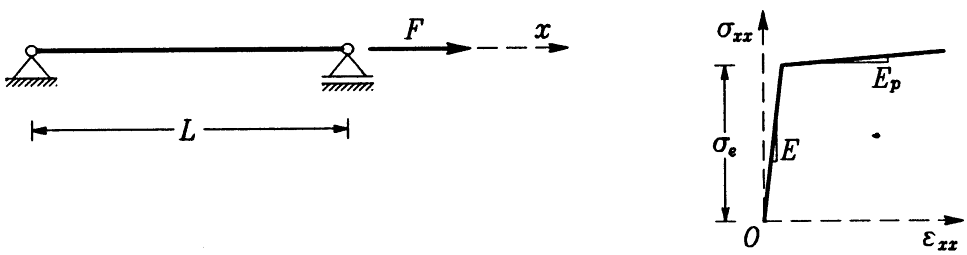


Rešitev:

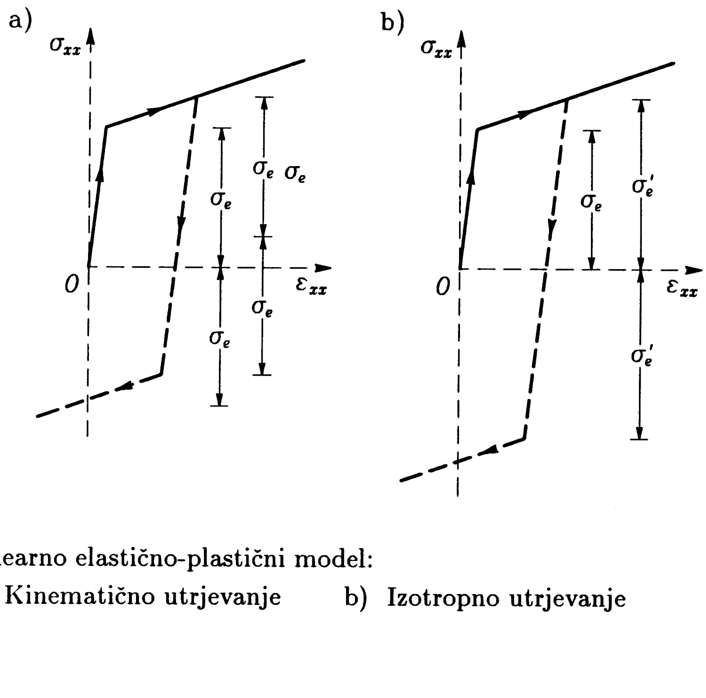
$$p_0 = \frac{2\,\sigma_Y}{3}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right).$$

Tečenje najprej nastopi na notranjem robu pri $r = a$.

NALOGA 11: Izračunajmo pomik na koncu prostoležečega nosilca, obteženega le z vodoravno silo F, ki najprej naraste do vrednosti $F = 10\,\mathrm{kN}$, nato pa pade na ter narašča v nasprotno smer do $F = -10\,\mathrm{kN}$ (slika)! Ploščina prečnega prereza je $A_x = 0.4\,\mathrm{cm}^2$, meja elastičnosti je $\sigma_e = 20\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, elastični modul je $E = 20000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, modul plastičnega utrjevanja pa je $E_p = 200\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$. Uporabimo obe vrsti utrjevanja: kinematično in izotropno. Dolžina nosilca je $L = 0.1\,\mathrm{m}$.

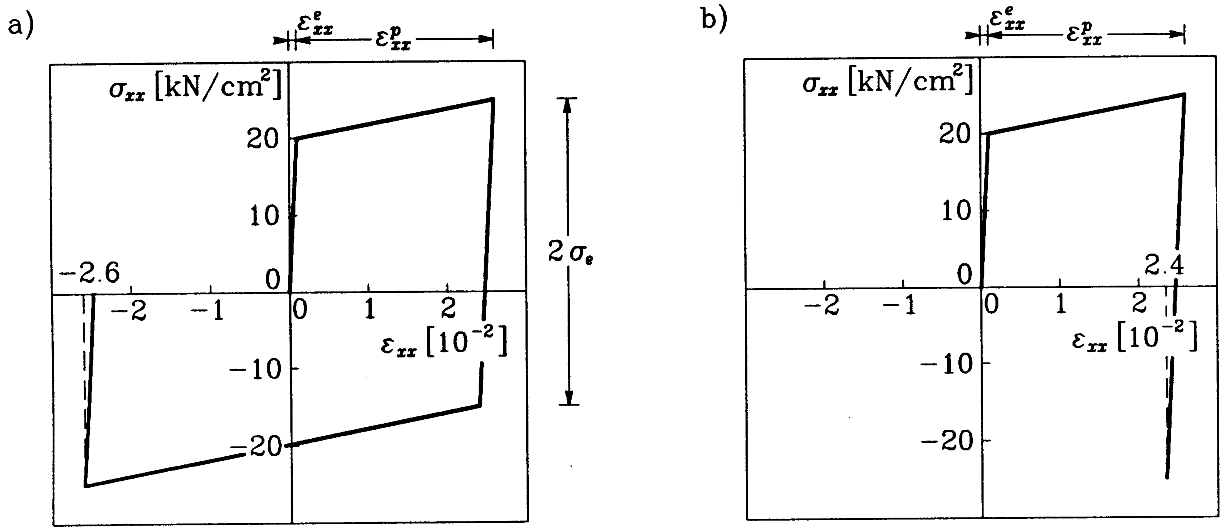


Model konstrukcije in model materiala



Linearno elastično-plastični model:
a) Kinematično utrjevanje b) Izotropno utrjevanje

Rešitev:
V primeru kinematičnega utrjevanja znaša pomik na prostem koncu nosilca $u_x = -0.0026\,\text{m}$.
V primeru izotropnega utrjevanja znaša pomik na prostem koncu nosilca $u_x = 0.0024\,\text{m}$.



Zveza med napetostjo in deformacijo:
a) Kinematično utrjevanje b) Izotropno utrjevanje