7. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(tenzor deformacij II)

(tenzor majhnih deformacij in rotacij, kompatibilitetni pogoji)

NALOGA 1: Pomik deformabilnega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ opisan s translacijo $\boldsymbol{u}_0$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(5,5,1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_0 &= 10^{-2}\,(2\,\boldsymbol{e}_x - 3\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z),\\ \boldsymbol{\omega}_0 &= 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 2\,\boldsymbol{e}_y + 3\,\boldsymbol{e}_z).\end{aligned}$$

Predpostavi da so zasuki majhni. Pri določitvi pomikov poljubne točke $T(x,y,z)$ uporabi približno Rodriguesovo enačbo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0),$$

kjer je $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$.

a) Določi komponente tenzorjev velikih in majhih deformacij v točki T.

b) Določi komponente tenzorja majhih rotacij v točki T.

c) Pojasni dobljene rezultate.

Rešitev:

a) Tenzor velikih deformacij v točki T je

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 6.5 & -1 & -1.5 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1.5 & -3 & 2.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

a') Tenzor majhih deformacij v točki T je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Tenzor majhih rotacij v točki T je

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} = 10^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Ker smo vektor pomikov zapisali s približno Rodriguesovo enačbo

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0),$$

ki opisuje translacijo in majhno rotacijo telesa, je tenzor majhnih deformacij enak nič. Tenzor velikih deformacij ni enak nič, saj smo pri računu pomika uporabili približno enačbo. Iz tenzorja rotacij lahko preberemo rotacijski vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\boldsymbol{e}_x + \omega_y\,\boldsymbol{e}_y + \omega_z\,\boldsymbol{e}_z = 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 2\,\boldsymbol{e}_y + 3\,\boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{\omega}_0.$$

NALOGA 2: Pomik deformabilnega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ opisan s translacijo $\boldsymbol{u}_0$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(5,5,1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_0 &= 10^{-2}\,(2\,\boldsymbol{e}_x - 3\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z),\\ \boldsymbol{\omega}_0 &= 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 2\,\boldsymbol{e}_y + 3\,\boldsymbol{e}_z).\end{aligned}$$

Pri določitvi pomikov poljubne točke $T(x,y,z)$ uporabi točne enačbe

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_\omega,\\ \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0\,\boldsymbol{e}_\omega\\ \boldsymbol{\rho}' &= \cos(\omega_0)\,\boldsymbol{\rho} + (1-\cos(\omega_0))\,(\boldsymbol{e}_\omega\cdot\boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{e}_\omega + \sin(\omega_0)\,\boldsymbol{e}_\omega\times\boldsymbol{\rho},\\ \boldsymbol{u}_\omega &= \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho},\\ \boldsymbol{\rho} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0.\end{aligned}$$

kjer je $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$.

a) Določi komponente tenzorjev velikih in majhih deformacij v točki T.

b) Določi komponente tenzorja majhih rotacij v točki T.

c) Pojasni dobljene rezultate.

Rešitev:

a) Tenzor velikih deformacij v točki T je

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

a') Tenzor majhih deformacij v točki T je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix}-6.5&1&1.5\\1&-5&3\\1.5&3&-2.5\end{bmatrix}\cdot 10^{-4}.$$

b) Tenzor majhih rotacij v točki T je

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix}0&\omega_z&-\omega_y\\-\omega_z&0&\omega_x\\\omega_y&-\omega_x&0\end{bmatrix} = 10^{-2}\cdot\begin{bmatrix}0&2.9993&-1.9995\\-2.9993&0&0.9998\\1.9995&-0.9998&0\end{bmatrix}.$$

c) Ker smo vektor pomikov zapisali s točno Rodriguesovo enačbo je tenzor velikih deformacij enak nič. Tenzor majhnih deformacij ni enak nič, saj smo pri računu pomika uporabili točno enačbo. Iz tenzorja majhnih rotacij lahko dokaj natančno odčitamo rotacijski vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\boldsymbol{e}_x + \omega_y\,\boldsymbol{e}_y + \omega_z\,\boldsymbol{e}_z = 10^{-2}\,(0.9998\,\boldsymbol{e}_x + 1.9995\,\boldsymbol{e}_y + 2.9993\,\boldsymbol{e}_z) \approx \boldsymbol{\omega}_0.$$

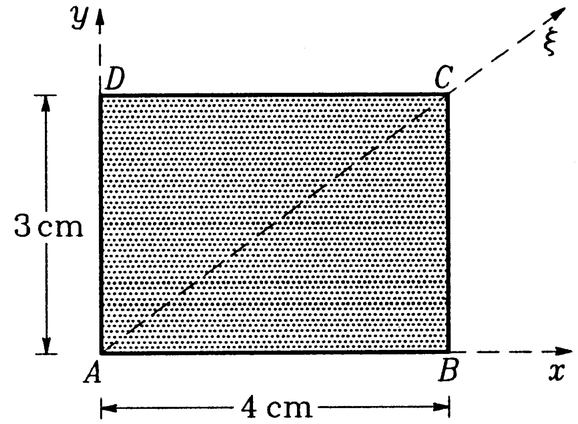
NALOGA 3: Predpostavi, da so deformacije po pravokotni plošči konstantne po prostornini plošče. Deformacijski tenzor je

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Privzemi, da sta pomik in zasuk v točki A enaka nič. Določi spremembo dolžine diagonale pravokotne plošče na dva načina:

(1) izračunaj pomik v točki C in določi deformirano dolžino diagonale.

(2) določi deformacijo $\varepsilon_{\xi\xi}$ v smeri diagonale in iz nje izračunaj spremembo dolžine diagonale.

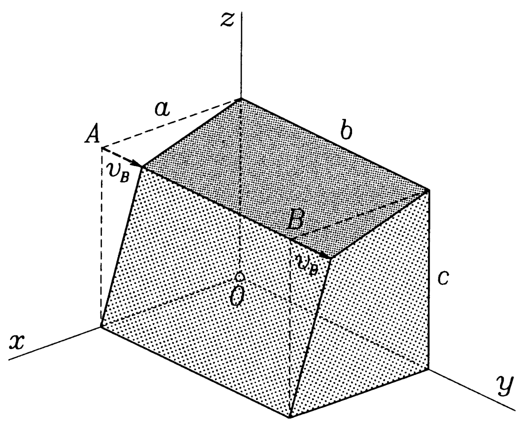


Dimenziji a in b pravokotne plošče ter lega točke C

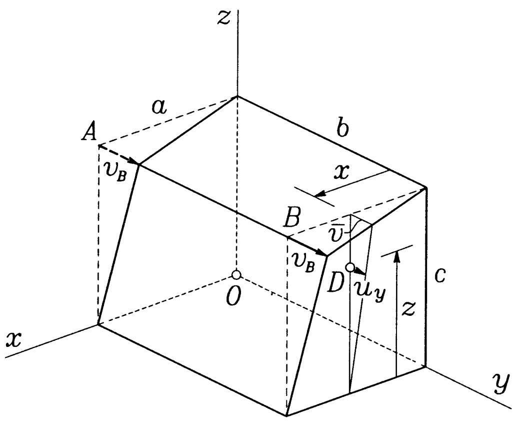
Rešitev: Pri izračunu pomika lahko uporabimo rezultat naloge 7. Dobimo $\boldsymbol{u}_C = 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 1.7\,\boldsymbol{e}_y)$ [cm]. Od tu izračunamo $\Delta d = d - d_0 = 5.018206 - 5 = 0.018206\,\text{cm}$, kjer smo z d označili dolžino diagonale v deformirani legi z d_0 pa dolžino diagonale v začetni nedeformirani legi.

Upoštevamo enačbi $\varepsilon_{\xi\xi} = \varepsilon_{xx}\, e_{\xi x}^2 + \varepsilon_{yy}\, e_{\xi y}^2 + 2\,\varepsilon_{xy}\, e_{\xi x}\, e_{\xi y} = 3.64 \cdot 10^{-4}$ in $\varepsilon_{\xi\xi} = \frac{\Delta d}{d_0}$ in dobimo $\Delta d = 0.018200\,\text{cm}$.

NALOGA 4: Homogen kvader se deformira tako, da se stranica $\overline{AB}$ translatorno premakne v smeri y za vrednost v_B. Vse stranice ostanejo pri tem ravne (glej sliko). Določi vektor pomika poljubnega delca $D(x, y, z)$ ter komponente tenzorja majhnih deformacij glede na prikazani kartezijski koordinatni sistem. Določi tudi velikosti in smeri glavnih normalnih deformacij.



Rešitev: Pri določitvi pomika si lahko pomagamo s spodnjo sliko. Velja (glej sliko) $u_y = \overline{v}\,\frac{z}{c}$ in $\overline{v} = v_B\,\frac{x}{a}$. Od tu dobimo $u_y = v_B\,\frac{x}{a}\,\frac{z}{c}$ in končno $\boldsymbol{u}(x, y, z) = v_B\,\frac{x}{a}\,\frac{z}{c}\,\boldsymbol{e}_y$.



Z odvajanjem pomika dobimo

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\, z & 0 \\ \alpha\, z & 0 & \alpha\, x \\ 0 & \alpha\, x & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo se glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \alpha\sqrt{x^2 + z^2}, \\ \varepsilon_{22} &= 0, \\ \varepsilon_{33} &= -\alpha\sqrt{x^2 + z^2} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \frac{z}{\sqrt{2\,(x^2 + z^2)}}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{x}{\sqrt{2\,(x^2 + z^2)}}\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_2 &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}\,\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{e}_3 &= \frac{z}{\sqrt{2\,(x^2 + z^2)}}\,\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{x}{\sqrt{2\,(x^2 + z^2)}}\,\boldsymbol{e}_z. \end{aligned}$$

NALOGA 5: Deformiranje telesa je opisano z vektorskim poljem pomikov

$$\boldsymbol{u} = 10^{-4}\,((5\,x^2 - 6\,z)\,\boldsymbol{e}_x + 2\,y^2\,z\,\boldsymbol{e}_y + (x^2 - 3\,y^2\,z)\,\boldsymbol{e}_z).$$

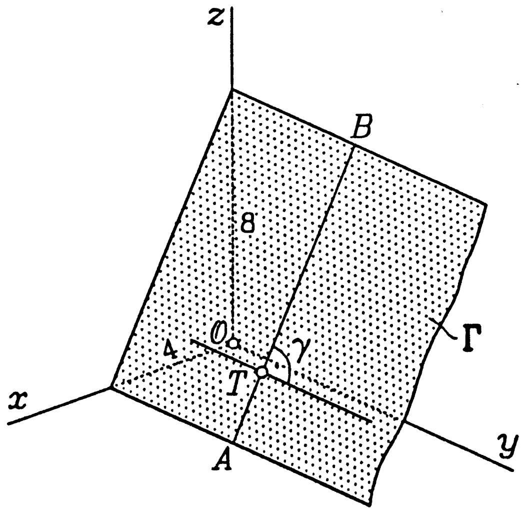
V točki $T(x, 4, 2)$, ki leži v ravnini Γ določi:

a) specifično spremembo dolžine normale na ravnino Γ,

b) specifično spremembo pravega kota γ,

c) rezultirajoči vektor zasuka $\boldsymbol{\omega}$, vrednosti $\boldsymbol{\omega}_n$ in $\boldsymbol{\omega}_t$ tenzorja zasukov ter povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ,

d) ugotovi ali v kakšni točki na črti $\overline{AB}$ vlada izohrono defomacijsko stanje (to pomeni, da je specifična sprememba prostornine v kakšni točki enaka 0).



Rešitev:

a) specifična sprememba dolžine normale na ravnino Γ je $D_{nn} \approx \varepsilon_{nn} = \frac{72}{5} \cdot 10^{-4}$,

b) specifična sprememba pravega kota γ je $\Delta\gamma = D_{yt} \approx 2\,\varepsilon_{yt} = -\frac{32}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$,

c) rezultirajoči vektor zasuka $\boldsymbol{\omega} = 10^{-4}\,(-40\,\boldsymbol{e}_x - 6\,\boldsymbol{e}_y)$,
$\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_n = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}}\,(-6\,\boldsymbol{e}_x + 40\,\boldsymbol{e}_y + 12\,\boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_t = \frac{10^{-4}}{\sqrt{5}}\,(-12\,\boldsymbol{e}_x + 80\,\boldsymbol{e}_y - 6\,\boldsymbol{e}_z)$,
povprečni zasuk ω_n okrog smeri normale na ravnino Γ je $\omega_n = \frac{-80}{\sqrt{5}} \cdot 10^{-4}$,

d) v točki $T\left(\frac{40}{11}, 4, \frac{8}{11}\right)$ na črti $\overline{AB}$ vlada izohrono defomacijsko stanje.

NALOGA 6: Polje pomikov je podano z enačbo

$$\boldsymbol{u} = 10^{-4}\left((x-z)^2\,\boldsymbol{e}_x + (y+z)^2\,\boldsymbol{e}_y - x\,y\,\boldsymbol{e}_z\right).$$

V točki $P(0, 2, -1)$ določi:

a) tenzor majhnih deformacij,

b) tenzor majhnih zasukov,

c) vektor zasuka $\boldsymbol{\omega}$.

d) specifično spremembo dolžine v smeri $\boldsymbol{e}_\xi = \frac{1}{9}\,(8\,\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 4\,\boldsymbol{e}_z)$

e) spremembo pravega kota med vektorjema $\boldsymbol{e}_\xi$ in $\boldsymbol{e}_\eta = \frac{1}{9}\,(4\,\boldsymbol{e}_x + 4\,\boldsymbol{e}_y - 7\,\boldsymbol{e}_z)$.

Rešitev:

a) tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

b) tenzor majhnih zasukov

$$[\omega_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

c) vektor zasuka $\boldsymbol{\omega} = -10^{-4}\, \boldsymbol{e}_x$.

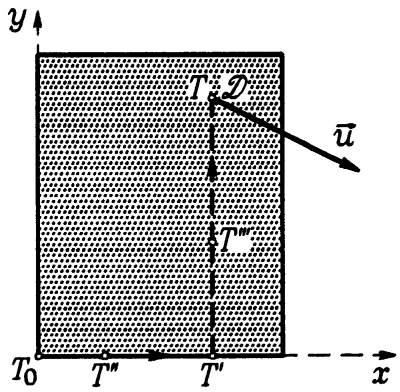
d) specifična sprememba dolžine v smeri $\boldsymbol{e}_\xi = \frac{1}{9}\,(8\,\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 4\,\boldsymbol{e}_z)$ je $D_{\xi\xi} \approx \varepsilon_{\xi\xi} = \frac{-6}{81} \cdot 10^{-4}$.

e) sprememba pravega kota med vektorjema $\boldsymbol{e}_\xi$ in $\boldsymbol{e}_\eta = \frac{1}{9}\,(4\,\boldsymbol{e}_x + 4\,\boldsymbol{e}_y - 7\,\boldsymbol{e}_z)$ znaša $D_{\xi\eta} \approx 2\,\varepsilon_{\xi\eta} = 10^{-4} \cdot \frac{318}{81}$

NALOGA 7: Vzemimo, da so deformacije v ravninskem deformacijskem stanju linearne funkcije materialnih koordinat x in y:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= a_1\, x + b_1\, y + c_1, \\ \varepsilon_{yy} &= a_2\, x + b_2\, y + c_2, \\ \varepsilon_{xy} &= a_3\, x + b_3\, y + c_3. \end{aligned}$$

Preveri, ali so koeficienti a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 medsebojno neodvisni. Izračunaj pomik delca D z materialnimi koordinatami $x = x_1$, $y = y_1$, če vemo, da sta pomik in zasuk v točki $T(0,0)$ enaka nič (glej sliko).



Integracijsko pot izberemo tako, da je vzporedna koordinatnim osem *x* in *y*

Rešitev: Neodvisnost koeficientov preverimo s kompatibilnostnim pogojem, ki ga v primeru RDS zapišemo z enačbo

$$K_{zz} = \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\, \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\, \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Izračunamo odvode in dobimo

$$\frac{\partial^2\, \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\, \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0.$$

Kompatibilnostnemu pogoju je torej zadoščeno s poljubno izbiro koeficientov a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3.

Pri izračunu pomikov uporabimo enačbi

$$\boldsymbol{u}_T = \boldsymbol{u}_{T_0} + \int_{T_0}^{T} \left((\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x)\, dx + (\boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_y)\, dy \right),$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega}_{T_0} + \int_{T_0}^{T} ((\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}_x)\, dx + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}_y)\, dy).$$

Ugotovimo, da velja $\boldsymbol{\omega}_T = \omega_{T_z}\, \boldsymbol{e}_z$. Najprej izračunamo zasuke v pomožnih točkah T'' in T''' (glej sliko). Dobimo $\omega_{T''_z} = (a_3 - b_1)\, x$ in $\omega_{T'''_z} = (a_3 - b_1)\, x_1 + (a_2 - b_3)\, y$. Od tu sledi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_T &= \left(a_1 \frac{x_1^2}{2} + c_1\, x_1 + b_1\, x_1\, y_1 + c_3\, y_1 + b_3\, y_1^2 - a_2 \frac{y_1^2}{2}\right) \boldsymbol{e}_x \\ &+ \left(a_3\, x_1^2 - b_1 \frac{x_1^2}{2} + c_3\, x_1 + a_2\, x_1\, y_1 + c_2\, y_1 + b_2 \frac{y_1^2}{2}\right) \boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

NALOGA 8: Komponente tenzorja majhnih deformacij so podane v telesnih koordinatah x, y in z, in sicer v odvisnosti od konstantnega parametra K. Določi konstanto K tako, da bo iz deformacij mogoče enolično izračunati pomike. Telo je v točki $A(0,0,0)$ togo vpeto v nepomično podlago. Določi prostorske koordinate in telesne bazne vektorje delca $D(3,4,0)$ po deformaciji telesa. Kako se med deformiranjem telesa spremenijo koordinate krajevnega vektorja $\boldsymbol{\Delta r}$ med delcema D in $P(3.06, 4.02, 0)$. Dolžine so podane v cm.

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 2\,x^2 - K\,y^2 & x\,y\,(3\,y-2) & 0 \\ x\,y\,(3\,y-2) & 3\,K\,x^2\,y & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Kompatibilnostni pogoj, ki ga v primeru RDS zapišemo z enačbo

$$K_{zz} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = 10^{-4}\,(K-2)\,(6\,y-2) = 0$$

bo izpolnjen, če bo $K = 2$. S tem je tenzor majhnih deformacij določen.
Pri izračunu pomika in zasuka poljubne točke $T(x,y,z)$ uporabimo enačbi

$$\boldsymbol{u}_T = \boldsymbol{u}_{T_0} + \int_{T_0}^{T} ((\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x)\, dx + (\boldsymbol{\varepsilon}_y + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_y)\, dy),$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega}_{T_0} + \int_{T_0}^{T} ((\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}_x)\, dx + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}_y)\, dy).$$

Z upoštevanjem robnega pogoja $\omega_z(A) = 0$ po drugi enačbi izračunamo zasuk

$$\boldsymbol{\omega}_T = 10^{-4}\,(3\,x\,y^2 + 2\,x\,y)\,\boldsymbol{e}_z$$

in nato ob upoštevanju robnih pogojev $u_x(A) = 0$ in $u_y(A) = 0$ iz prve še pomik. Dobimo

$$\boldsymbol{u}_T = 10^{-4}\,\left(\left(\frac{2\,x^3}{3} - 2\,x\,y^2\right)\,\boldsymbol{e}_x + 3\,x^2\,y^2\,\boldsymbol{e}_y\right).$$

Prostorske koordinate točke D dobimo iz enačb

$$x'(D) = x(D) + u_x(D) = 3 - 0.00780 = 2.99220\,\text{cm},$$

$$y'(D) = y(D) + u_y(D) = 4 + 0.04320 = 4.04320\,\text{cm}.$$

Nove bazne vektorje v točki D pa iz enačb

$$\boldsymbol{e}'_x(D) = \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\, x}(D) = 0.99860\,\boldsymbol{e}_x + 0.02880\,\boldsymbol{e}_y,$$

$$\boldsymbol{e}_y'(D) = \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\, y}(D) = -0.00480\, \boldsymbol{e}_x + 1.02160\, \boldsymbol{e}_y.$$

V nedeformiranem stanju velja

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(P) - \boldsymbol{r}(D) = 0.06\, \boldsymbol{e}_x + 0.02\, \boldsymbol{e}_y.$$

V deformiranem pa

$$\Delta \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'(P) - \boldsymbol{r}'(D) = (\boldsymbol{r}(P) + \boldsymbol{u}(P)) - (\boldsymbol{r}(D) + \boldsymbol{u}(D)) = 0.05982\, \boldsymbol{e}_x + 0.02220\, \boldsymbol{e}_y.$$

NALOGA 9: Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in z. Vse točke telesa se premikajo le v ravnini (x, z). Razen tega je točka $T_0(0,0,0)$ nepomično vrtljivo podprta, v točki $T_1(10,0,0)$ pa je preprečen pomik v smeri z. Določi pomika u_x in u_z ter zasuk ω_y kot funkcije koordinat (x, z). Določi vrednost zasukov ω_y v obeh podporah, pomik u_x v točki T_1, ter vrednosti obeh pomikov in zasuka ω_y v točki $T(5, 0, 0.5)$. Dolžine so podane v m.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= 8\, x\, \cos(2\pi\, z) \cdot 10^{-4}, \\
\varepsilon_{zz} &= -100\, x\, z \cdot 10^{-4}, \\
\varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zx} = (-x^2\, (3 + 4\,\pi\, \sin(2\,\pi\, z) - 25\, z^2 + 15\, x + 25) \cdot 10^{-4}, \\
\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zy} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x(0,0,0) &\equiv u_x^0 = 0, \\
u_z(0,0,0) &\equiv u_z^0 = 0, \\
u_z(10,0,0) &\equiv u_z^1 = 0.
\end{aligned}$$

Rešitev: Zaradi enakosti

$$\frac{\partial^2\, \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0, \qquad 10^4\, \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = -32\,\pi^2\, x\, \cos(2\,\pi\, z), \qquad 10^4\, \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xz}}{\partial z\, \partial x} = -16\,\pi^2\, x\, \cos(2\,\pi\, z)$$

je kompatibilnostni pogoj, ki ga v našem primeru zapišemo z enačbo

$$K_{yy} = \frac{\partial^2\, \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2\, \frac{\partial^2\, \varepsilon_{xz}}{\partial z\, \partial x} = 0$$

identično izpolnjen. Pri izračunu pomika in zasuka poljubne točke $T(x, y, z)$ uporabimo enačbi

$$\boldsymbol{u}_T = \boldsymbol{u}_{T_0} + \int_{T_0}^{T} ((\boldsymbol{\varepsilon}_x + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x)\, dx + (\boldsymbol{\varepsilon}_z + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_z)\, dz),$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega}_{T_0} + \int_{T_0}^{T} ((\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}_x)\, dx + (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon}_z)\, dz).$$

Pri izračunu zasuka, za referenčno točko izberemo T_0, pa čeprav zasuka v tej točki zaenkrat še ne poznamo. Od nič različna je samo komponenta ω_y. Dobimo

$$\omega_y = \omega_y(T_0) + 10^{-4}\, \left(x^2\, (3 - 4\,\pi\, \sin(2\,\pi\, z) + 25\, z^2 - 15\, x)\right).$$

Pri izračunu pomika upoštevamo robna pogoja $u_x(T_0) = 0$ in $u_z(T_0) = 0$ in tako dobimo

$$u_x = z\,\omega_y(T_0) + 10^{-4}\left(4\,x^2\,\cos(2\,\pi\,z) + 25\,z\right),$$

$$u_z = -x\,\omega_y(T_0) + 10^{-4}\left(-2\,x^3 + 15\,x^2 + 25\,x\,(1 - 2\,z^2)\right).$$

Ob upoštevanju robnega pogoja $u_z(T_1) = 0$ dobimo

$$\omega_y(T_0) = -25 \cdot 10^{-4}.$$

S tem so vsi pomiki in zasuki znani.

NALOGA 10: Pri enakomerni torzijski obremenitvi ravnega nosilca z vzdolžno težiščno osjo z in krožnim prečnim prerezom je vektorsko polje pomikov v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z izrazom

$$\boldsymbol{u} = -\Omega\,y\,z\,\boldsymbol{e}_x + \Omega\,z\,x\,\boldsymbol{e}_y.$$

Pri tem je Ω konstanten obtežni faktor.

Zapiši vektor pomikov in izračunaj komponente tenzorja majhnih deformacij v cilindričnih koordinatah.

Rešitev: Vektor pomikov v cilindričnih koordinatah

$$\boldsymbol{u} = \Omega\,z\,r\,\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Komponente tenzorja majhnih deformacij v cilindričnih koordinatah dobimo iz enačb

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0,\\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0,\\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,\\
\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) = 0,\\
\varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\right) = \frac{\Omega\,r}{2},\\
\varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Rezultat zapišemo krajše

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\varphi} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\Omega\,r}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

NALOGA 11: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\boldsymbol{u} = 10^{-4}((4\,x - y + 3\,z)\,\boldsymbol{e}_x + (x + 7\,y)\,\boldsymbol{e}_y + (-3\,x + 4\,y + 4\,z)\,\boldsymbol{e}_z).$$

Določi:

a) specifično spremembo volumna,

b) tenzor majhnih deformacij,

c) glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri,

d) ekstremne strižne deformacije in pripadajoče smeri,

e) deviatorični del tenzorja majhnih deformacij,

f) Rezultate prikaži z Mohrovimi krogi.

Rešitev:

a) specifična sprememba volumna $\varepsilon_V = 10^{-4}\,(4+7+4)$,

b) tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

c) glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri so
$\varepsilon_{11} = 8\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{22} = 4\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{33} = 3\cdot 10^{-4}$,
$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}\,(2\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_x$,
$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}\,(\boldsymbol{e}_y - 2\,\boldsymbol{e}_z)$.

d) ekstremne strižne deformacije in pripadajoče smeri so
$\gamma_1 = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33}) = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}) = -\frac{5}{2}\cdot 10^{-4}$, $\gamma_3 = \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}) = 2\cdot 10^{-4}$,
$\boldsymbol{e}_I = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = \pm(0.7071\,\boldsymbol{e}_x + 0.3162\,\boldsymbol{e}_y - 0.6325\,\boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_{II} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1) = \pm(0.9487\,\boldsymbol{e}_y - 0.3162\,\boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_{III} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) = \pm(0.7071\,\boldsymbol{e}_x + 0.6325\,\boldsymbol{e}_y + 0.3162\,\boldsymbol{e}_z)$.

e) deviatorični del tenzorja majhnih deformacij

$$[e_{ij}] = 10^{-4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

NALOGA 12: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\boldsymbol{u} = (-c\,y + b\,z)\,\boldsymbol{e}_x + (c\,x - a\,z)\,\boldsymbol{e}_y + (-b\,x + a\,y)\,\boldsymbol{e}_z,$$

kjer so a, b in c zelo majhne konstante.

Pokaži, da vektor pomikov opisuje rotacijo telesa. Poišči tudi vektor rotacije $\boldsymbol{\omega}_0$.
Rešitev: Vektor rotacije $\boldsymbol{\omega}_0 = a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y + c\,\boldsymbol{e}_z$

NALOGA 13: Polje pomikov je v kartezijskem telesnem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ in koordinatami x, y, z podano z vektorjem

$$\boldsymbol{u} = \frac{2\cdot 10^{-3}\,y}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{e}_z.$$

Poišči normalo ravnine, v kateri ni normalnih deformacij.
Rešitev: Normali ravnin, v kateri ni normalnih deformacij sta $\boldsymbol{e}_n = \alpha\, \boldsymbol{e}_x + \beta\, \boldsymbol{e}_y, \alpha^2 + \beta^2 = 1$ in $\boldsymbol{e}_n = \alpha\, \boldsymbol{e}_x + \beta\, \boldsymbol{e}_z, \alpha^2 + \beta^2 = 1$.

NALOGA 14: V kartezijskem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ in koordinatami x, y, z je podan kvader z oglišči $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(0,b,0)$, $D(a,b,0)$, $E(0,0,c)$, $G(a,0,c)$, $F(0,b,c)$, $H(a,b,c)$. Velja $a : b : c = 2 : 3 : 5$. Pri deformaciji ostanejo dolžine stranic $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ in $\overline{AE}$ nespremenjene, pravi kot BAC se poveča na 90°00′03”, pravi kot CAE se zmanjša na 89°59′54”, pravi kot EAB pa preide na 89°59′56”.

Določi specifično spremembo dolžine diagonale $\overline{AH}$.
Rešitev: Specifična sprememba dolžine diagonale $\varepsilon_{\xi\xi} = 0.143 \cdot 10^{-4}$.

NALOGA 15: Valj na sliki je na levem krajišču vpet v steno, na desnem pa prost. Pri deformaciji se volumen valja ne spremeni, prav tako se ne spremeni premer valja. Razdalji $|\overline{AB}|$ in $|\overline{CD}|$ se med deformacijo ne spremenita (velja $|\overline{A^*B^*}| = |\overline{AB}|$, $|\overline{C^*D^*}| = |\overline{CD}|$). Pač pa se spremeni kot, ki ga daljica $\overline{AC}$ oklepa z osjo z. Glej sliko.

Pokaži, da velja $\gamma_{zx} = 2\,\varepsilon_{zx} \approx \tan(\alpha)$.
Namig: Za opis polja pomikov uporabi nastavek iz naloge 10 ali nastavek iz naloge 7 v vaji 6.