6. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(tenzor deformacij I)

(pomiki togega telesa, Lagrangev in Eulerjev opis, tenzor velikih deformacij)

NALOGA 1: Pomik togega telesa je glede na kartezijski koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ opisan s translacijo $\boldsymbol{u}_0$ in majhnim zasukom $\boldsymbol{\omega}_0$ referenčne točke $T_0(5,5,1)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_0 &= 10^{-2}\,(2\,\boldsymbol{e}_x - 3\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z),\\ \boldsymbol{\omega}_0 &= 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 2\,\boldsymbol{e}_y + 3\,\boldsymbol{e}_z).\end{aligned}$$

Delec Q je v začetnem stanju določen s točko $T(8,2,1)$ (telesne koordinate delca so torej $x=8$, $y=2$, $z=1$). Določi pomik in zasuk delca Q

a) v bazi $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$,

b) v bazi $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$ in $\boldsymbol{e}_\zeta$, ki je glede na bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ in $\boldsymbol{e}_z$ določena z enačbami

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\xi &= 1/\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_x + 1/\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_y + 1/\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{e}_\eta &= -2/\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_x + 1/\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_y + 1/\sqrt{6}\,\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{e}_\zeta &= -1/\sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_y + 1/\sqrt{2}\,\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

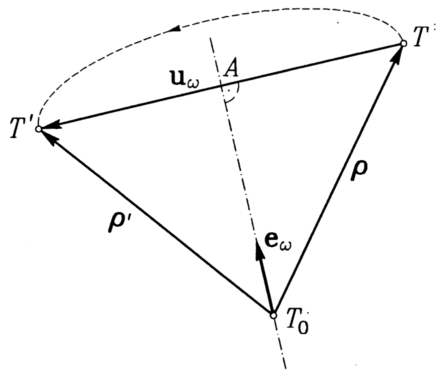
Rešitev:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 10^{-2}\,(11\,\boldsymbol{e}_x + 6\,\boldsymbol{e}_y - 8\,\boldsymbol{e}_z),\\ \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_0 = 10^{-2}\,(\boldsymbol{e}_x + 2\,\boldsymbol{e}_y + 3\,\boldsymbol{e}_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_x\,\boldsymbol{e}_x + u_y\,\boldsymbol{e}_y + u_z\,\boldsymbol{e}_z = u_\xi\,\boldsymbol{e}_\xi + u_\eta\,\boldsymbol{e}_\eta + u_\zeta\,\boldsymbol{e}_\zeta =\\ &= 10^{-2}\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{e}_\xi - \frac{24}{\sqrt{6}}\,\boldsymbol{e}_\eta - \frac{14}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta\right),\\ \boldsymbol{\omega} &= 10^{-2}\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\,\boldsymbol{e}_\xi + \frac{3}{\sqrt{6}}\,\boldsymbol{e}_\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta\right).\end{aligned}$$

NALOGA 2: Za podatke iz gornje naloge izračunaj točno vrednost pomika $\boldsymbol{u}$.
Rešitev:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0\,\boldsymbol{e}_\omega\\ \boldsymbol{\rho}' &= \cos(\omega_0)\,\boldsymbol{\rho} + (1-\cos(\omega_0))\,(\boldsymbol{e}_\omega\cdot\boldsymbol{\rho})\,\boldsymbol{e}_\omega + \sin(\omega_0)\,\boldsymbol{e}_\omega\times\boldsymbol{\rho} =\\ &= 3.0877\,\boldsymbol{e}_x - 2.9082\,\boldsymbol{e}_y - 0.0904\,\boldsymbol{e}_z,\\ \boldsymbol{u}_\omega &= \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho} = 10^{-2}\,(8.77\,\boldsymbol{e}_x + 9.18\,\boldsymbol{e}_y - 9.04\,\boldsymbol{e}_z),\\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_\omega = 10^{-2}\,(10.77\,\boldsymbol{e}_x + 6.18\,\boldsymbol{e}_y - 8.04\,\boldsymbol{e}_z).\end{aligned}$$



Rešitev lahko poiščemo tudi z uporabo rotacijske matrike $[R]$.

$$[R] = [I] + \sin(\omega_0)\,[N] + (1 - \cos(\omega_0))\,[N]^2,$$

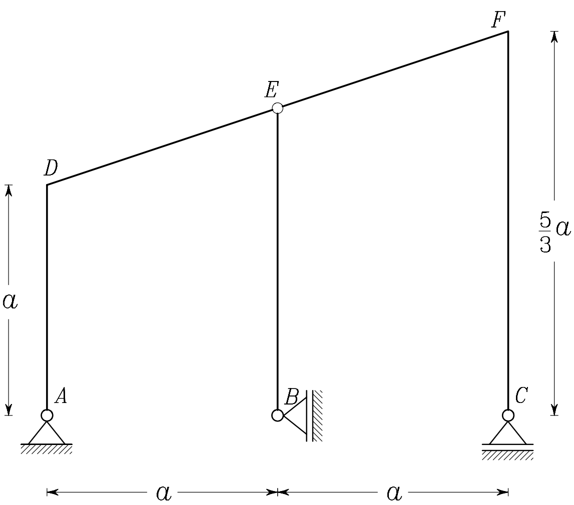
kjer ob upoštevanju oznak

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho} &= \rho_x\,\boldsymbol{e}_x + \rho_y\,\boldsymbol{e}_y + \rho_z\,\boldsymbol{e}_z,\\
\boldsymbol{\rho}' &= \rho'_x\,\boldsymbol{e}_x + \rho'_y\,\boldsymbol{e}_y + \rho'_z\,\boldsymbol{e}_z,\\
\boldsymbol{e}_\omega &= \omega_1\,\boldsymbol{e}_x + \omega_2\,\boldsymbol{e}_y + \omega_3\,\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

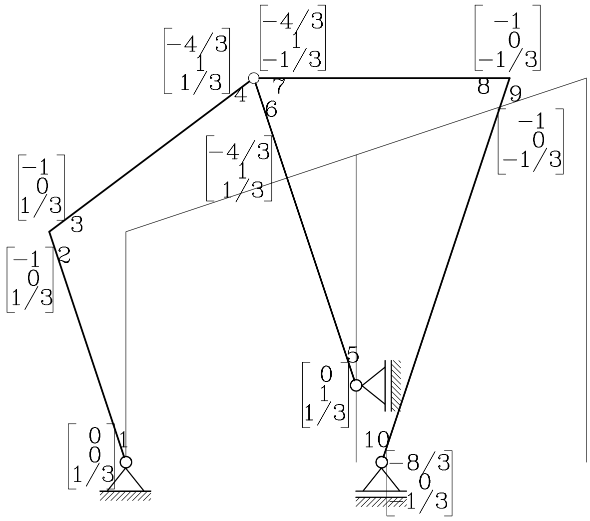
velja

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{bmatrix} = [R]\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}.$$

NALOGA 3: **3.** (35 %) Določi pomike in zasuke togih teles na sliki, če podporo B v vertikalni smeri premaknemo za $\delta v = 10^{-3}$ m.
$a = 3$ m.



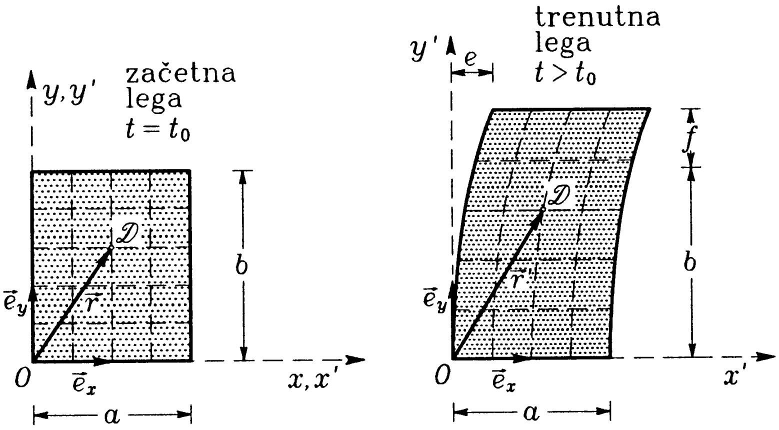
Rešitev:



Pomiki in zasuki konstrukcije $\times 10^{-3}$.

Pomen oznak: $\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}$.

NALOGA 4: Gumijasti pravokotni kvader ima v začetni nedeformirani legi dimenzije a, b, c. Zaradi delovanja zunanje obtežbe se kvader deformira kot je prikazano na sliki. Določi pomik v referenčnem in prostorskem opisu. Zapiši materialne bazne vektorje $\boldsymbol{g}_x = \boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{g}_y = \boldsymbol{e}'_y$ in $\boldsymbol{g}_z = \boldsymbol{e}'_z$ za ta primer. Pokaži, da vektor $\boldsymbol{e}'_y$ leži na tangenti na materialno os in ni nujno enotski.



Rešitev: Pomik v referenčnem opisu: $\boldsymbol{u} = \frac{e}{b^2}\, y^2\, \boldsymbol{e}_x + \frac{f}{b}\, y\, \boldsymbol{e}_y$.
Pomik v prostorskem opisu: $\boldsymbol{u} = \frac{e\, y'}{(b+f)^2}\, \boldsymbol{e}_x + \frac{f\, y'}{f+b}\, \boldsymbol{e}_y$.
Bazni vektorji: $\boldsymbol{e}'_x = \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}'_y = \frac{2\,y}{b^2}\, \boldsymbol{e}_x + \left(1 + \frac{f}{b}\right)\, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}'_z = \boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 5: Za materialni delec T so prostorske koordinate x', y' in z' podane v odvisnosti od telesnih koordinat x, y in z z enačbami

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + a\,z, \\ z' &= z + a\,y. \end{aligned}$$

V enačbah je a konstanta. Določi vektorja pomikov, izražena z materialnimi in prostorskimi koordinatami.
Rešitev: Komponente vektorja pomika, izražene z materialnimi koordinatami:
$u_x = x' - x = 0$, $u_y = y' - y = a\,z$, $u_z = z' - z = a\,y$.
Vektor pomika, izražen z materialnimi koordinatami:
$\boldsymbol{u} = u_x\,\boldsymbol{e}_x + u_y\,\boldsymbol{e}_y + u_z\,\boldsymbol{e}_z = a\,z\,\boldsymbol{e}_y + a\,y\,\boldsymbol{e}_z$.
Materialne koordinate, izražene v odvisnosti od prostorskih koordinat:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{y' - a\,z'}{1-a^2}, \\ z &= \frac{z' - a\,y'}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Od tu dobimo vektor pomika, izražen s prostorskimi koordinatami:
$\boldsymbol{u} = a\,\frac{z'-a\,y'}{1-a^2}\,\boldsymbol{e}_y + a\,\frac{y'-a\,z'}{1-a^2}\,\boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 6: Naj bo $a = \frac{1}{2}$. Kam po deformaciji (glej prejšnjo nalogo) preidejo materialne točke, ki v začetnem nedeformiranem stanju ležijo

a) na krožnici $x = 0$, $y^2 + z^2 = \frac{1}{1-a^2}$.

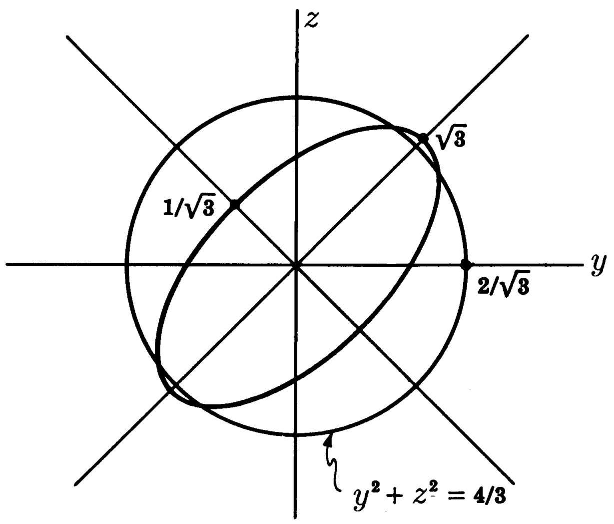
b) na kocki s stranicami $dx = dy = dz$ s središčem v točki $(dx/2, dy/2, dz/2)$.

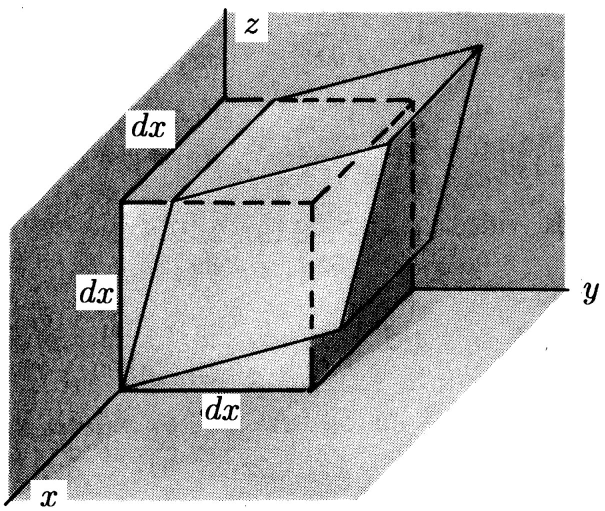
Rešitev:

a) Po izražavi materialnih koordinat s prostorskimi

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= \frac{y' - a\,z'}{1-a^2}, \\ z &= \frac{z' - a\,y'}{1-a^2} \end{aligned}$$

krožnica $x = 0$, $y^2 + z^2 = \frac{1}{1-a^2}$ preide v elipso $(1+a^2)\,y'^2 - 4\,a\,y'\,z' + (1+a^2)\,z'^2 = (1-a^2)$ pri $a = 1/2$ konkretno v $5\,y'^2 - 8\,y'\,z' + 5\,z'^2 = 3$.





b)

NALOGA 7: Deformiranje telesa je opisano v telesnih koordinatah x, y in z (dolžine so podane v cm) s poljem pomikov $\boldsymbol{u} = -a\,y\,z\,\boldsymbol{e}_x + a\,x\,z\,\boldsymbol{e}_y$, kjer je a poljubna konstanta. Določi vektor pomikov v cilindričnih prostorskih koordinatah, tj. določi u_r, u_φ in u_z, da velja $\boldsymbol{u} = u_r\,\boldsymbol{e}_r + u_\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi + u_z\,\boldsymbol{e}_z$.
Rešitev: $u_r = 0$, $u_\varphi = a\,r\,z$, $u_z = 0$, $\boldsymbol{u} = a\,r\,z\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

NALOGA 8: Deformiranje telesa je v Lagrangevem opisu podano z enačbami

$$\begin{aligned} x' &= x + z\,(e^2 - 1), \\ y' &= y + z\,(e^2 - e^{-2}) \\ z' &= e^2\,z, \end{aligned}$$

kjer je e konstanta. Pokaži da je Jacobijeva matrika povsod nesingularna in opiši deformiranje telesa z Eulerjevimi enačbami.
Rešitev:

$$|[J]| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & (e^2 - 1) \\ 0 & 1 & (e^2 - e^{-2}) \\ 0 & 0 & e^2 \end{vmatrix} = e^2 \neq 0.$$

$$\begin{aligned} x &= x' + z'\,(e^{-2} - 1), \\ y &= y' + z'\,(e^{-4} - 1) \\ z &= e^{-2}\,z', \end{aligned}$$

NALOGA 9: Polje pomikov je podano z vektorjem

$$\boldsymbol{u} = x\,z^2\,\boldsymbol{e}_x + x^2\,y\,\boldsymbol{e}_y + y^2\,z\,\boldsymbol{e}_z.$$

Določi (materialni) deformacijski gradient $[F]$ in materialni gradient pomikov $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ in pokaži, da velja $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] = [F] - [I]$.

Rešitev:

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} z^2 & 0 & 2\,x\,z \\ 2\,x\,y & x^2 & 0 \\ 0 & 2\,y\,z & y^2 \end{bmatrix}^T$$

$$[F] = \left[\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} 1+z^2 & 0 & 2\,x\,z \\ 2\,x\,y & 1+x^2 & 0 \\ 0 & 2\,y\,z & 1+y^2 \end{bmatrix}^T$$

NALOGA 10: Deformiranje telesa je opisano s poljem pomikov $\boldsymbol{u}$ v telesnih koordinatah x, y in z (dolžine so podane v cm).

$$\boldsymbol{u} = 10^{-4}\,(2\,x^2\,\boldsymbol{e}_x - (x+y)^2\,\boldsymbol{e}_y + 4\,\boldsymbol{e}_z).$$

a) Določi spremembo razdalje med delcema D_1 in D_2, ki sta v nedeformiranem stanju določena s točkama $T_1(10, 10, 0)$ in $T_2(11, 11, 0)$.

b) V točki T_1 določi točno vrednost specifične spremembe dolžine v smeri $\overline{T_1\,T_2}$. Kolikšno napako narediš, če to specifično spremembo dolžine izraziš

- z vrednostjo tenzorja majhnih deformacij v smeri $\overline{T_1\,T_2}$,
- s povprečno vrednostjo specifične spremembe dolžine med točkama T_1 in T_2.

Rešitev:

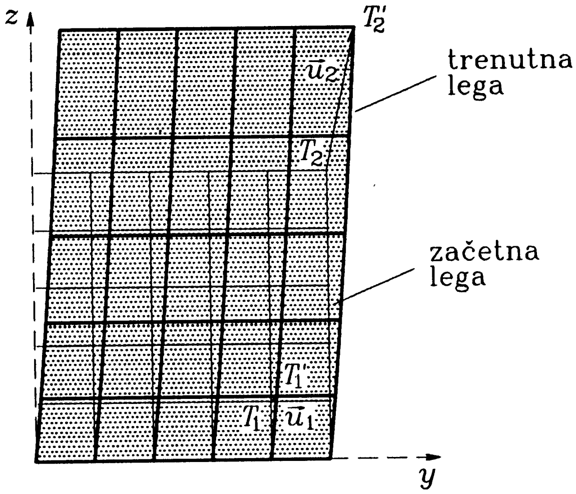
a)

$$|\Delta\boldsymbol{r}'| - |\Delta\boldsymbol{r}| = |(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{u}_2) - (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{u}_1)| - |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = -0.002942\,\text{cm}.$$

b) $\mathrm{E}_{xx} = 4\,x \cdot 10^{-4} + (8\,x^2 + 2\,(x+y)^2) \cdot 10^{-8} = 40.16 \cdot 10^{-4}$,
$E_{yy} = -2\,(x+y) \cdot 10^{-4} + 2\,(x+y)^2 \cdot 10^{-8} = -39.92 \cdot 10^{-4}$,
$E_{xy} = -(x+y) \cdot 10^{-4} + 2\,(x+y)^2 \cdot 10^{-8} = -19.92 \cdot 10^{-4}$,
$E_{rr} = E_{xx}\,e_{rx}^2 + 2\,E_{xy}\,e_{rx}\,e_{ry} + E_{yy}\,e_{ry}^2 = -19.80 \cdot 10^{-4}$,
$D_{rr} = \sqrt{1 + 2\,E_{rr}} - 1 = -19.8196 \cdot 10^{-4}$

- $\varepsilon_{rr} = -20 \cdot 10^{-4}$, $n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{rr}}{D_{rr}} - 1 = 0.91\%$,
- $\overline{D}_{rr} = \frac{|\Delta\boldsymbol{r}'| - |\Delta\boldsymbol{r}|}{|\Delta\boldsymbol{r}|} = -0.00208$, $\overline{n} = \frac{\overline{D}_{rr}}{D_{rr}} - 1 = 4.94\%$,

NALOGA 11: Deformiranje telesa je podano s poljem pomikov v materialnem koordinatnem sistemu $\boldsymbol{u} = 10^{-3}\left((x\,y-3)\,\boldsymbol{e}_x+(2\,x^2+z)\,\boldsymbol{e}_y+z^2\,\boldsymbol{e}_z\right)$ [cm]. Telo v nedeformiranem stanju zaseda trirazsežno območje $(x,y,z)\in[0,1]\times[0,5]\times[0,5]$. Analiziraj deformiranje telesa v ravnini $x=0$. Določi spremembo razdalje med delcema D_1 in D_2, ki sta se pred deformiranjem nahajala v točkah $\boldsymbol{r}_1 = 4\,\boldsymbol{e}_y + 1\,\boldsymbol{e}_z$ [cm] in $\boldsymbol{r}_1 = 5\,\boldsymbol{e}_y + 5\,\boldsymbol{e}_z$ [cm]. Določi tudi specifično spremembo dolžin vlaken v smeri $T_1\,T_2$.



Prerez telesa v nedeformirani začetni legi in pomika delcev $\mathscr{D}_1$ in $\mathscr{D}_2$

Rešitev: Specifična sprememba dožine daljice $\overline{T_1\,T_2}$ je $\overline{D}_{TT} = \overline{\varepsilon}_{TT} = \frac{\Delta\overline{T_1\,T_2}}{\overline{T_1\,T_2}} = 0.005881$.
Količina $\overline{D}_{TT}$ predstavlja **povprečno** normalno deformacijo $\overline{\varepsilon}_{TT}$ vlaken v smeri $\overrightarrow{T_1T_2}$ med točkama T_1 in T_2.
Normalna komponenta deformacije ε_{TT} v smeri $\boldsymbol{e}_T = \frac{\overrightarrow{T_1T_2}}{\overline{T_1\,T_2}}$ **v točki** T_1 je $\varepsilon_{TT}(T_1) = 0.00211$.
Normalna komponenta deformacije ε_{TT} v smeri $\boldsymbol{e}_T$ v točki T_3, ki se nahaja na sredini med točkama T_1 in T_2 je $\varepsilon_{TT}(T_3) = 0.005882$.

NALOGA 12: Deformiranje telesa je podano z enačbami

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + a\,z, \\ z' &= z + a\,y, \end{aligned}$$

kjer je a konstanta.

a) Izračunaj (Lagrangev) tenzor velikih deformacij $\boldsymbol{E}$,

b) Označimo z ds dolžino diagonale pravokotnika OC, kjer so koordinate točk $C(0,dy,dz)$ in $O(0,0,0)$ v nedeformiranem stanju. Izračunaj razliko $ds'^2 - ds^2$.

c) Izračunaj tenzor majhnih deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}$.

d) Naj bo $a = 10^{-4}$. Z uporabo tenzorja velikih deformacij $\boldsymbol{E}$ in z uporabo tenzorja majhih deformacij $\boldsymbol{\varepsilon}$ izračunaj razliko $ds'^2 - ds^2$ in primerjaj rezultata.

Rešitev:

a)

$$[E_{ij}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2\,a \\ 0 & 2\,a & a^2 \end{bmatrix}.$$

b)

$$ds'^2 - ds^2 = a^2\,(dy^2 + dz^2) + 4\,a\,dy\,dz.$$

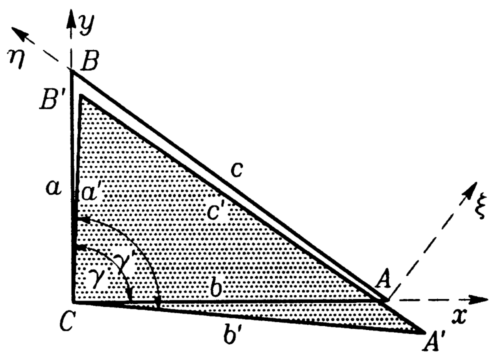
c)

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,a \\ 0 & 2\,a & 0 \end{bmatrix}.$$

d)

$$\begin{aligned} ds'^2 - ds^2 &= a^2\,(dy^2 + dz^2) + 4\,a\,dy\,dz = 10^{-8}\,(dy^2 + dz^2) + 10^{-4}\,dy\,dz, \\ ds'^2 - ds^2 &= 4\,a\,dy\,dz = 10^{-4}\,dy\,dz. \end{aligned}$$

NALOGA 13: Obravnavamo ploščo trikotne oblike s stranicami $a = 3\,\mathrm{m}$, $b = 4\,\mathrm{m}$ in $c = 5\,\mathrm{m}$. Pod v uplivom zunanje obtežbe se plošča deformira. Spremembe dolžin stranic trikotnika so $\Delta a = -0.012\,\mathrm{m}$, $\Delta b = 0.015\,\mathrm{m}$ in $\Delta c = 0.0088\,\mathrm{m}$. Določi spremembo pravega kota med stranicama a in b.



Trikotna plošča pred in po deformiranju

Rešitev: Točno: $\Delta\gamma = \gamma' - \gamma = 90.09482° - 90° = 0.09482° = 0.001655\,\mathrm{rad}$.
Približno: Iz ε_{xx}, ε_{yy}, $\varepsilon_{\eta\eta}$ izračunamo ε_{xy}. $\Delta\gamma \approx 2\,\varepsilon_{xy} = -0.001667\,\mathrm{rad}$.