3. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(tenzor napetosti I)

(napetostni vektor, transformacija koordinatnega sistema, glavne normalne napetosti)

Opomba: Pri obravnavi napetostnega tenzorja ne smemo pozabiti na enote. V nalogah, kjer enote niso posebej navedene, so vse komponente napetostnih tenzorjev kot tudi vse komponente napetostnih vektorjev podane v (Pascalih) [Pa].

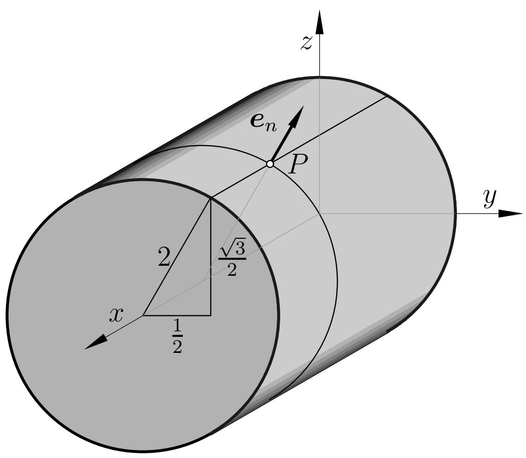
NALOGA 1: Napetostno stanje v točki P je podano s komponentami σ_{ij} tenzorja napetosti, glede na kartezijski koordinatni sistem (x, y, z). Skozi točko P položimo dve nekomplanarni ravnini: Γ_q z enotsko normalo $\boldsymbol{e}_a$ in Γ_b z enotsko normalo $\boldsymbol{e}_b$. Določi vektorja napetosti $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$, ki v točki P pripadata ravninama Γ_a in Γ_b. Dokaži, da je projekcija napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ na smer $\boldsymbol{e}_b$ enaka projekciji napetostnega vektorja $\boldsymbol{\sigma}_b$ na smer $\boldsymbol{e}_a$.

NALOGA 2: Trikotna plošča z oglišči $A(3\text{ m}, 0, 0)$, $B(0, 2\text{ m}, 0)$ in $C(0, 0, 1\text{ m})$ je obtežena s snegom itenzitete $q_S = 2\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$, ki pada v smeri $-\boldsymbol{e}_z$. Izračunaj velikost površinske obtežbe s snegom na m^2 plošče.

NALOGA 3: Napetostno stanje valja je določeno s tenzorjem napetosti, ki ga v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podaja matrika

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 3\,x\,y & 5\,y^2 & 0 \\ 5\,y^2 & 0 & 2\,z \\ 0 & 2\,z & 0 \end{bmatrix}.$$

Skozi točko $P(2, 1, \sqrt{3})$ položimo tangentno ravnino na površino cilindra $y^2 + z^2 = 4$. Določi vektor napetosti $\boldsymbol{\sigma}_n(P)$ v tej točki glede na tangentno ravnino.



Rešitev: Normala na ravnino v točki P je $\boldsymbol{e}_n(P) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{e}_z$. Napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n(P) = \frac{5}{2}\,\boldsymbol{e}_x + 3\,\boldsymbol{e}_y + \sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_z$.

NALOGA 4: Napetostno stanje v točki P je podano s tenzorjem napetosti

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & a\,\sigma & b\,\sigma \\ a\,\sigma & \sigma & c\,\sigma \\ b\,\sigma & c\,\sigma & \sigma \end{bmatrix},$$

kjer so a, b in c realne konstane, σ pa poljubna napetost. Določi konstate a, b in c, tako da bo napetostni vektor $\boldsymbol{\sigma}_n(P)$ v ravnini z normalo $\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$ skozi točko P enak $\mathbf{0}$.
Rešitev: Konstante so $a = b = c = \frac{-1}{2}$.

NALOGA 5: Telo iz linearno elastičnega, izotropnega, homogenega materiala v točki $T(0, 0, 0)$ prerežemo s tremi ravninami.
Normale ravnin so podane z vektorji: $\boldsymbol{e}_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$, $\boldsymbol{e}_{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$, $\boldsymbol{e}_{n_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z)$. Znani so napetostni vektorji v točki T, ki pripadajo tem trem

ravninam: $\boldsymbol{\sigma}_{n_1} = -2\,\sigma \boldsymbol{e}_x - \sigma \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\sigma}_{n_2} = -6\,\sigma \boldsymbol{e}_y + 3\,\sigma \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\sigma}_{n_3} = 4\,\sigma \boldsymbol{e}_x + 4\,\sigma \boldsymbol{e}_y - 9\,\sigma \boldsymbol{e}_z$. Izračunaj komponente napetostnega tenzorja v točki T v kartezičnem koordinatnem sistemu. Kakšne so komponente napetostnega tenzorja v točki T, če vektor $\boldsymbol{\sigma}_{n_3}$ zamenjamo z vektorjem $\boldsymbol{\sigma}_{n_3} = 4\,\sigma \boldsymbol{e}_x + 4\,\sigma \boldsymbol{e}_y + 9\,\sigma \boldsymbol{e}_z$? Ali rešitev takrat obstaja? Odgovor utemelji.

Podatki: $\sigma = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.

Rešitev: Ovedemo okrašave $\boldsymbol{\sigma}_a = \boldsymbol{\sigma}_{n_1}$, $\boldsymbol{\sigma}_b = \boldsymbol{\sigma}_{n_2}$, $\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}_{n_3}$ in $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_{n_1}$, $\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_{n_2}$, $\boldsymbol{e}_c = \boldsymbol{e}_{n_3}$. Komponente tenzorja napetosti dobimo iz ravnotežnih enačb

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_a &= \boldsymbol{\sigma}_x\, e_{ax} + \boldsymbol{\sigma}_y\, e_{ay} + \boldsymbol{\sigma}_z\, e_{az},\\
\boldsymbol{\sigma}_b &= \boldsymbol{\sigma}_x\, e_{bx} + \boldsymbol{\sigma}_y\, e_{by} + \boldsymbol{\sigma}_z\, e_{bz},\\
\boldsymbol{\sigma}_c &= \boldsymbol{\sigma}_x\, e_{cx} + \boldsymbol{\sigma}_y\, e_{cy} + \boldsymbol{\sigma}_z\, e_{cz}.
\end{aligned}$$

Enačbe lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$\begin{bmatrix}\sigma_{ax}\\ \sigma_{ay}\\ \sigma_{az}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{ax}\\ e_{ay}\\ e_{az}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{bx}\\ \sigma_{by}\\ \sigma_{bz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{bx}\\ e_{by}\\ e_{bz}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{cx}\\ \sigma_{cy}\\ \sigma_{cz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{cx}\\ e_{cy}\\ e_{cz}\end{bmatrix}$$

ali vse skupaj z eno samo matrično enačbo

$$\begin{bmatrix}\sigma_{ax} & \sigma_{bx} & \sigma_{cx}\\ \sigma_{ay} & \sigma_{by} & \sigma_{cy}\\ \sigma_{az} & \sigma_{bz} & \sigma_{cz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{ax} & e_{bx} & e_{cx}\\ e_{ay} & e_{by} & e_{cy}\\ e_{az} & e_{bz} & e_{cz}\end{bmatrix},$$

ki se v konkretnem primeru glasi

$$\begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & -9\,\sigma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Iz zadnje enačbe lahko neposredno izračunamo komponente tenzorja napetosti. Dobimo

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & -9\,\sigma\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}10 & -5 & -15\\ -5 & 15 & -10\\ -15 & -10 & 20\end{bmatrix}.$$

Tenzor napetosti je simetričen, torej je to iskana rešitev. V drugem primeru dobimo

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & 9\,\sigma\end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}10 & -5 & -15\\ -5 & 15 & -10\\ 30 & -10 & -25\end{bmatrix}.$$

Tokrat rešitve v okviru omenjene teorije nimamo, saj tenzor napetosti ni simetričen. V drugem primeru zato vektorji $\boldsymbol{\sigma}_a$, $\boldsymbol{\sigma}_b$ in $\boldsymbol{\sigma}_c$ niso napetostni vektorji.

NALOGA 6: Za podani napetostni tenzor (komponente tenzorja so dane v kartezičnem koordinatnem sistemu)

$$[\sigma_{ij}] = \sigma\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- poišči normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, da bosta napetostna vektorja v teh ravninah $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepala pravi kot. Ali je rešitev več? Če je rešitev več, poišči vsaj eno.

- poišči normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, da bosta napetostna vektorja v teh ravninah $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepala kot 30°. Ali je rešitev več? Če je rešitev več, poišči vsaj eno.

Podatki: $\sigma = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.
Rešitev:

- Normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, v katerih napetostna vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepata pravi kot sta $\boldsymbol{e}_a = \boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_y$. Rešitev je več. Za vektor $\boldsymbol{e}_a$ bi npr. lahko izbrali poljuben enotski vektor v ravnini XZ.

- Normali ravnin $\boldsymbol{e}_a$ in $\boldsymbol{e}_b$, v katerih napetostna vektorja $\boldsymbol{\sigma}_a$ in $\boldsymbol{\sigma}_b$ med seboj oklepata kot 30° sta npr. $\boldsymbol{e}_a = 0.3827\boldsymbol{e}_x + 0.9239\boldsymbol{e}_z$ in $\boldsymbol{e}_b = 0.2897\boldsymbol{e}_x + 0.9571\boldsymbol{e}_z$. Pripadajoča napetostna vektorja sta $\boldsymbol{\sigma}_a = \sigma\,(0.2241\boldsymbol{e}_x + 0.5412\boldsymbol{e}_z)$ in $\boldsymbol{\sigma}_b = \sigma\,(-0.0879\boldsymbol{e}_x + 0.6673\boldsymbol{e}_z)$. Tudi tu je rešitev neskončno mnogo.

NALOGA 7: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z bazo $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$. Privzemi sledeče zveze med baznimi vektorji: $\boldsymbol{e}_\xi = -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$. Fizikalno gledano, lahko novo bazo dobim z rotacijo stare okrog osi $\boldsymbol{e}_z$ za kot −90°.
Rešitev:

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Potek reševanja je prikazan na prosojnicah.

NALOGA 8: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) z bazo $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$, izražene v novi bazi $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$, ki jo dobim z rotacijo prvotne baze okrog osi $\boldsymbol{e}_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$ za kot $\alpha = 30°$. Pri rotaciji vektor $\boldsymbol{e}_x$ preide v $\boldsymbol{e}_\xi$ vektor $\boldsymbol{e}_y$ v $\boldsymbol{e}_\eta$ in vektor $\boldsymbol{e}_z$ v $\boldsymbol{e}_\zeta$.

NALOGA 9: Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) v bazi $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ opišemo z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokaži, da obstaja takšna baza $\{\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta\}$ v kateri lahko tenzor predstavimo z matriko

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in jo poišči.
Rešitev: Takšna baza obstaja, ker imata matriki $[\sigma_{ij}]$ in $[\sigma_{\alpha\beta}]$ enake invariante in s tem enak karakteristični polinom. Rešitev je več. Tule podajamo dve rešitvi:
$\boldsymbol{e}_\xi = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_\eta = -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_\zeta = -\boldsymbol{e}_z$ (novo bazo dobimo z rotacijo baze $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ okrog osi $\boldsymbol{e}_x$ za $180°$).
$\boldsymbol{e}_\xi = -\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$ (novo bazo dobimo z rotacijo baze $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ okrog osi $\boldsymbol{e}_z$ za $-90°$).
Opomba: Potek reševanja je prikazan na prosojnicah.

NALOGA 10: Dokaži, da so količine I_1^σ, I_2^σ, I_3^σ neodvisne od izbire koordinatega sistema, torej invariante.

NALOGA 11: Pokaži so vse lastne vrednosti tenzorja napetosti realne.

NALOGA 12: Z uporabo Lagrangevih množiteljev pokaži, da so ektremne vrednosti normalnih napetosti enake lastnim vrednostim napetostnega tenzorja.

NALOGA 13: Izhajajoč iz Gaussovega integralnega izreka izpelji ravnotežne pogoje za delec trdnega telesa izražene z napetostmi v kartezijskih koordinatah. Upoštevaj, da je zunanja obtežba telesa v ravnotežju.

NALOGA 14: Določi glavne normalne napetosti in smeri glavnih normalnih napetosti za napetostni tenzor, ki je v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) podan z matriko

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{bmatrix}.$$

Kakšno napetostno stanje opisuje tenzor napetosti?
Rešitev: Glavne normalne napetosti so $\sigma_{11} = 3\,\tau$, $\sigma_{22} = 0$, $\sigma_{33} = 0$.
Smeri glavnih normalnih napetosti so:
$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-2\,\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$,
$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$.
Tenzor napetosti opisuje enoosno napetostno stanje. Smer osi se ujema z vektorjem $\boldsymbol{e}_1$.