2. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(linearna algebra, Kroneckerjev δ_{ij}, permutacijski simbol e_{ijk})

NALOGA 1: Izračunaj:

a) $\sum_i \delta_{ii}$,

b) $\sum_i \sum_j \delta_{ij}\,\delta_{ij}$,

c) $\sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij}\,\delta_{ik}\,\delta_{jk}$,

d) $\sum_j \delta_{ij}\,\delta_{jk}$,

e) $\sum_i \delta_{ij}\,A_{ik}$,

f) $\sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}\,e_{kij}$,

g) $\sum_j \sum_k e_{ijk}\,a_j\,a_k$,

kjer sta e permutacijski simbol, δ pa Kroneckerjev delta.
Rešitev: $\sum_i \delta_{ii} = 3$, $\sum_i \sum_j \delta_{ij}\,\delta_{ij} = 3$, $\sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij}\,\delta_{ik}\,\delta_{jk} = 3$, $\sum_j \delta_{ij}\,\delta_{jk} = \delta_{ik}$, $\sum_i \delta_{ij}\,A_{ik} = A_{jk}$, $\sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}\,e_{kij} = 6$, $\sum_j \sum_k e_{ijk}\,a_j\,a_k = 0$.

NALOGA 2: Dokaži veljavnost identitet

- $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$,
- $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$.

NALOGA 3: Dokaži veljavnost identitete

$$e_{pqs}\,e_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix},$$

NALOGA 4: Z uporabo rešitve gornje naloge dokaži veljavnost identitet

$$\sum_s e_{pqs}\,e_{snr} = \delta_{pn}\,\delta_{qr} - \delta_{pr}\,\delta_{qn},$$

$$\sum_q \sum_s e_{pqs}\,e_{sqr} = -2\,\delta_{pr}.$$

NALOGA 5: Izračunaj lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokaži, da imata matriki $[A]$ in $[A]^2$ enake lastne vektorje.
Rešitev: Lastne vrednosti so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Lastni vektorji so $[\boldsymbol{e}_1] = [0, 0, 1]^T$, $[\boldsymbol{e}_2] = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1, 0]^T$, $[\boldsymbol{e}_3] = \frac{\sqrt{2}}{2}[1, -1, 0]^T$.

NALOGA 6: Dokaži trditev: Lastni vektorji simetrične matrike, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so pravokotni med seboj.

NALOGA 7: Z uporabo dejstva, da imata simetrični matriki $[T]$ in $[T]^2$ enake lastne vektorje, izračunaj $\sqrt{[T]}$ za matriko

$$[T] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

$$\sqrt{[T]} = 0.402 \begin{bmatrix} 5.414 & -0.586 & -0.586 \\ -0.586 & 4.863 & -0.035 \\ -0.586 & -0.035 & 4.863 \end{bmatrix}$$

NALOGA 8: Z uporabo rezultata

$$\det[A] = e_{ijk}\, A_{1i}\, A_{2j}\, A_{3k}$$

pokaži veljavnost

$$\det([A]\,[B]) = \det[A]\, \det[B].$$

NALOGA 9: Naj velja

$$[B] = [Q]^{\top}\,[A]\,[Q],$$

kjer je $[Q]$ ortogonalna matrika (rotacija). Pokaži, da veljajo enakosti

$$\sum_i A_{ii} = \sum_i B_{ii}$$

$$\sum_i \sum_j A_{ij}\, A_{ij} = \sum_i \sum_j B_{ij}\, B_{ij},$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_p e_{ijk}\, e_{kjp}\, A_{ip} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_p e_{ijk}\, e_{kjp}\, B_{ip},$$

$$\sum_i A_{ii} = I_1^{[A]} = I_1^{[B]} = \sum_i B_{ii},$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j (A_{ii}\, A_{jj} - A_{ij}\, A_{ji}) = I_2^{[A]} = I_2^{[B]} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (B_{ii}\, B_{jj} - B_{ij}\, B_{ji}),$$

$$\det([A]) = I_3^{[A]} = I_3^{[B]} = \det([B]).$$

NALOGA 10: Naj veljata enakosti $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ in $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$, kjer smo s piko označili odvod po času. Pokaži da velja

$$\frac{d\left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\right)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}).$$

NALOGA 11: V prostor postavimo kartezijev koordinatni sistem z bazo $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$. Novi bazi dobimo na sledeč način:

- Vektorja $\boldsymbol{e}_x$ in $\boldsymbol{e}_y$ najprej zavrtimo v smeri vektorja $\boldsymbol{e}_z$ za kot $\alpha = 30°$. Bazni vektorji $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ preidejo v nove bazne vektorje $\boldsymbol{e}'_x$, $\boldsymbol{e}'_y$, $\boldsymbol{e}'_z$.
- Bazne vektorje zavrtimo za kot $\alpha = 30°$ okrog enotskega vektorja $\boldsymbol{e}_d = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\right)$. Bazni vektorji $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ preidejo v nove bazne vektorje $\boldsymbol{e}^*_x$, $\boldsymbol{e}^*_y$, $\boldsymbol{e}^*_z$.

Določi rotacijski matriki $[R]$ za oba primera.
Namig za drugi primer: Rotacija v prostoru je določena z enotskim vektorjem $\boldsymbol{e}_n$ in kotom zasuka α. Naj bo $\boldsymbol{e}_n$ podan v Kartezijevem koordinatnem sistemu z bazo $\boldsymbol{e}_1 \equiv \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_2 \equiv \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_3 \equiv \boldsymbol{e}_z$ tj. $\boldsymbol{e}_n = n_1\,\boldsymbol{e}_1 + n_2\,\boldsymbol{e}_2 + n_3\,\boldsymbol{e}_3 = n_i\,\boldsymbol{e}_i$. Definiramo matriko

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem rotacijsko matriko $[R]$ lahko zapišemo z enačbo

$$[R] = [I] + \sin\alpha\,[N] + (1 - \cos\alpha)\,[N]^2.$$