1. VAJA IZ MEHANIKE TRDNIH TELES

(ponovitev linearne algebre)

NALOGA 1: Zapiši vektor $\boldsymbol{a} = [1, -2, 5, 1]^\top$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\boldsymbol{e}_1 = [1, 1, 1, 0]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [1, 2, 3, 1]^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = [2, -1, 1, -1]^\top$ in $\boldsymbol{e}_4 = [0, 0, 0, 1]^\top$.

Rešitev: Resitev v MATLABU $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}) = -6\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$

NALOGA 2: Preveri, da so vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, 0, 0]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [1, 1, 0, 0]^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = [1, 1, 1, 0]^\top$ in $\boldsymbol{e}_4 = [1, 1, 1, 1]^\top$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$. Določi koordinate vektorja $\boldsymbol{a} = [2, -3, 1, 5]^\top$ v tej bazi. Kakšne so koordinate vektorja $\boldsymbol{a}$ v bazi $\boldsymbol{f}_1 = [1, 1, -1, 1]^\top$, $\boldsymbol{f}_2 = [1, -1, -1, 1]^\top$, $\boldsymbol{f}_3 = [1, 1, 1, 1]^\top$ in $\boldsymbol{f}_4 = [-1, 1, 1, 1]^\top$?

Rešitev: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}) = [5, -4, -4, 5]^\top$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}) = [-2, 4, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}]^\top$

NALOGA 3: V prostoru $\mathbb{R}^4$ so dani vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1, 2, 0, 1]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [-1, 2, 1, 0]^\top$ in $\boldsymbol{e}_3 = [0, 3, 1, 1]^\top$. Dopolni jih do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Rešitev: Na primer $\boldsymbol{e}_4 = [0, 0, 0, 1]^\top$.

NALOGA 4: Prepričaj se, da sestavljajo vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1, 2, 1, 3]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [-1, 3, 2, 1]^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = [0, 5, 3, 4]^\top$ in $\boldsymbol{e}_4 = [2, -1, -1, 2]^\top$ podprostor razsežnosti 2 v prostoru $\mathbb{R}^4$.

NALOGA 5: Določi parameter $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo vektor $\boldsymbol{a} = [-1, a+2, -2, a^2+a+1]^\top$ pripadal podprostoru, razpetemu z vektorji $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, 2, 4]^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = [3, 1, 1, 2]^\top$ in $\boldsymbol{e}_3 = [5, 1, 5, 3]^\top$.

Rešitev: $a = -2$

NALOGA 6: Naj bosta M in N podprostora v $\mathbb{R}^5$. Podprostor M je napet na vektorjih $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, 0, 0, -1]^\top$ in $\boldsymbol{e}_2 = [1, 1, 1, 1, 1]^\top$, podprostor N pa na vektorjih $\boldsymbol{f}_1 = [-1, -1, 0, 0, 1]^\top$, $\boldsymbol{f}_2 = [3, 2, 2, 2, 1]^\top$ in $\boldsymbol{f}_3 = [1, 0, 2, 2, 3]^\top$. Določi bazo podprostora $M \cap N$.

Rešitev: Resitev v MATLABU $M \cap N = \{\lambda \boldsymbol{f}_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

NALOGA 7: Zapiši polinom $f(t) = t^2 + 4t - 3$ kot linearno kombinacijo polinomov $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ in $p_3(t) = t + 3$.

Rešitev: $f = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$

NALOGA 8: V vektorskem prostoru $P_4(\mathbb{R})$ imamo podprostora $U = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p''(0) = p'(0) = 0\}$ in $V = \{p \in P_4(\mathbb{R}) \mid p'(1) = p(1) = 0\}$. Pokaži, da sta U in V podprostora v $P_4(\mathbb{R})$ in poišči po eno od baz za podprostora $U + V$ in $U \cap V$.

Rešitev: Podprostor $U + V = P_4(\mathbb{R})$ in zanj lahko vzamemo standardno bazo 1, t, t^2, t^3 in t^4. Baza za $U \cap V$ pa je polinom $1 - 4t^3 + 3t^4$.

NALOGA 9: Naj bosta $U = L\{[0, -1, 1, -1, 0]^\top, [1, 0, 0, 0, 1]^\top\}$ in $V = \{\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$ podprostora v $\mathbb{R}^5$. Določi po eno od baz za V in $U \cap V$.

Rešitev: Baza za podprostor V sta npr. vektorja $[-1, 1, -1, 0, 0]^\top$ in $[0, 0, 0, 1, -1]^\top$, za $U \cap V$ pa vektor $[-1, 1, -1, 1, -1]^\top$.

NALOGA 10: Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo $U = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$ in $V = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \cdot X = X \cdot B\}$. Pokaži, da sta množici U in V vektorska podprostora v $M_3(\mathbb{R})$ in poišči baze prostorov U, V in $U \cap V$.

Rešitev:

NALOGA 11: Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ in $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A + X) = \det A + \det X\}$. Pokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in določi njegovo dimenzijo in eno od baz.

NALOGA 12: Izračunaj determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 11 \\ 7 & 13 & 20 & 26 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}.$$

Rešitev: Resitev v MATLABU 216, 5

NALOGA 13: Izračunaj determinanto n-tega reda

$$\begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rešitev: $\frac{1}{2}(-n)^{n-1}(n+1)$

NALOGA 14: Izračunaj determinanto z rekurzijsko formulo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdotsfor{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Rešitev: $D_n = (-1)^n(n+1)$

NALOGA 15: Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunaj A^n in rezultat preveri z indukcijo.

NALOGA 16: Določi rang matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Resitev v MATLABU 4, 2

NALOGA 17: Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna zveza mora veljati med parametroma a in b, da bosta matriki A in B ekvivalentni? Določi parametra a in b tako, da bosta matriki A in B podobni. Izračunaj tudi matriko P, za katero je $A = PBP^{-1}$.

Rešitev: Matriki sta ekvivalentni, če je $b = -a$, podobni pa pri $a = -b = 4$.

NALOGA 18: Za vsako realno število a izračunaj rang matrik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -a & 3 & 1+a \\ -2-a & 4 & 5+a \end{bmatrix}$$

in pokaži, da sta matriki A in B ekvivalentni.

Rešitev: Za $a \neq 1$ je rang obeh matrik enak 3, za $a = 1$ pa 2.

NALOGA 19: Pokaži, da za kvadratni matriki A, B velja $(AB)^\top = B^\top A^\top$. če sta matriki A, B še obrnljivi, je matrika AB obrnljiva in je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Dokaži tudi, da velja $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$! Pokaži, da inverzna operacija ohranja simetrijo (poševno simetrijo) matrike.

NALOGA 20: Za kvadratno matriko lahko definiramo sled matrike A kot $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$. Pokaži, da je sled linearen operator. Pokaži, da je $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$. Če je Q obrnljiva, pokaži, da je $\mathrm{tr}(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}) = \mathrm{tr}(A)$. Če je A simetrična B pa poševno simetrična matrika, potem je $\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = 0$.

NALOGA 21: Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 1 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: Resitev v MATLABU $\boldsymbol{x} = [1, 2, 1, 1]^\top$

NALOGA 22: Poišči splošno rešitev sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev: Resitev v MATLABU $\boldsymbol{x} = [0, 0, 6, -7]^\top + \alpha_1[1, 0, -15, 18]^\top + \alpha_2[0, 1, 10, -12]^\top$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

NALOGA 23: Zapiši rešitev sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Pri $a = -3$ in $a = 0$ sistem ni rešljiv, pri vseh drugih vrednostih parametra a pa imamo rešitev $\boldsymbol{x} = \frac{1}{a(a+3)}[2 - a^2, 2a - 1, a^3 + 2a^2 - a - 1]^\top$.

NALOGA 24: Določi razsežnost in eno od baz prostora rešitev sistema homogenih enačb podanega z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 2a & 1 \\ a & 0 & 1 & a \\ a-1 & a & a+1 & a \\ a & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

glede na parameter $a \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Za $a = 0$ imamo le trivialno rešitev, za $a \neq 0$ imamo dvoparametrično rešitev.

NALOGA 25: Reši matrično enačbo $AX + B = 0$, kjer sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 3a-1 & -2 & 4b-1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

NALOGA 26: Podana je matrična enačba

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X - X \cdot \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Za katere vrednosti parametra a je enačba rešljiva? Določi matriko X za $a = 1$.

Rešitev: $a \neq \frac{7}{2}$, $X(1) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

NALOGA 27: Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resitev v MATLABU

```
% MTT0101.m
% postopek in resitev naloge 1 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
% enacbo a = lambda1 e1 + lambda2 e2 + lambda3 e3 + lambda4 e4
% lahko v matricni obliki zapisemo kot [e1 e2 e3 e4] * lambda = a,
% kjer je lambda = [lambda1 lambda2 lambda3 lambda4]'
%
a = [1 -2 5 1]';
e1 = [1 1 1 0]'; e2 = [1 2 3 1]'; e3 = [2 -1 1 -1]'; e4 = [0 0 0 1]';
lambda = [e1 e2 e3 e4]\a,

% >> MTT0101
% lambda =
%    -6
%     3
%     2
%     0
```

```
% MTT0106.m
% postopek in resitev naloge 6 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
% vektor v iz preseka prostorov M in N lahko zapisemo na dva nacina, tj.
% v = a1 e1 + a2 e2 = b1 f1 + b2 f2 + b3 f3, kjer so a1,a2,b1,b2,b3 neznani skalarji
% Gornji sistem enacb lahko po zgledu iz prve naloge ob uvedbi vektorja x =
% [-a1 -a2 b1 b2 b3]' zapisemo v matricni obliki [e1 e2 f1 f2 f3]*x = [0 0 0 0 0]'
%
e1 = [1 0 0 0 -1]'; e2 = [1 1 1 1 1]';
f1 = [-1 -1 0 0 1]'; f2 = [3, 2, 2 2, 1]'; f3 = [1 0 2 2 3]';
x = null([e1 e2 f1 f2 f3]); % bazni vektorji iz jedra zlozeni po stolpcih
                            % ukaz null(A) izracuna bazne vektorje iz jedra matrike A
v = -x(1)*e1 - x(2)*e2;     % lahko tudi v = x(1)*e1 + x(2)*e2
[v v/v(end)],               % iz resitve opazimo, da je f2 = v/v(end) (v(end)=-0.4140)
% V nasem primeru je bila dimenzija jedra enaka 1.
% Kako bi postopal, ce bi bila dimenzija jedra 2?

% >> MTT0106
% ans =
%    -1.2421    3.0000
%    -0.8281    2.0000
%    -0.8281    2.0000
%    -0.8281    2.0000
%    -0.4140    1.0000
```

```
% MTT0112.m
% postopek in resitev naloge 12 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
A = [1 0 0 -1; 2 3 4 7; -3 4 5 9; -4 -5 6 1],
detA = det(A), % ukaz det(A) izracuna determinanto matrike A
B = [1 2 3 4; 3 6 8 11; 7 13 20 26; 31 23 55 42],
detB = det(B),

% >> MTT0112
% A =
%      1     0     0    -1
%      2     3     4     7
%     -3     4     5     9
%     -4    -5     6     1
% detA =
%    216
% B =
%      1     2     3     4
%      3     6     8    11
%      7    13    20    26
%     31    23    55    42
% detB =
%      5
```

```
% MTT0116.m
% postopek in resitev naloge 16 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
A = [1 3 7 5 2; 4 1 -1 0 0; 2 0 1 3 -2; 2 4 3 0 1],
rankA = rank(A), % ukaz rank(A) izracuna rang matrike A
B = [1 3 -2 1; 2 -1 3 4; 3 -5 8 7],
rankB = rank(B),

% >> MTT0116
% A =
%      1     3     7     5     2
%      4     1    -1     0     0
%      2     0     1     3    -2
%      2     4     3     0     1
% rankA =
%      4
% B =
%      1     3    -2     1
%      2    -1     3     4
%      3    -5     8     7
% rankB =
%      2
```

```
% MTT0121.m
% postopek in resitev naloge 21 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
A = [1 -2 1 1; 2 1 -1 -1; 1 2 -1 -1; 3 1 1 -2],
b = [-1 2 3 4]',  % ali b = [-1; 2; 3; 4],
x = A\b,  % x resi sistem enacb A * x = b (pazi b je stolpec!)

% >> MTT0121
% A =
%      1    -2     1     1
%      2     1    -1    -1
%      1     2    -1    -1
%      3     1     1    -2
% b =
%     -1
%      2
%      3
%      4
% x =
%     1.0000
%     2.0000
%     1.0000
%     1.0000
```

```
% MTT0122.m
% postopek in resitev naloge 22 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
A = [3 -2 -1 -1; 6 -4 4 3; 3 -2 5 4; 9 -6 3 2],
b = [1; 3; 2; 4],
%
% Ker je matrika A singularna, z ukazom A\b ne dobimo splosne resitve!
y = A\b,          % y resi sistem enacb A * y = b (pazi b je stolpec!)
%
% Splosno resitev lahko dobimo na sledec nacin:
xh = null(A),     % velja A * xh = 0 (matrika 4x2 samih nicel)
xp = pinv(A)*b,  % velja A * xp = b, xp je resitev, dobljena po metodi najmansih kvadratov
% splosna resitev x = xp + alpha1 * xh(:,1) + alpha2 * xh(:,2),
%                     kjer sta alpha1 in alpha2 poljubni realni stevili

% >> MTT0122
% A =
%      3    -2    -1    -1
%      6    -4     4     3
%      3    -2     5     4
%      9    -6     3     2
% b =
%      1
%      3
%      2
%      4
% Warning: Matrix is singular to working precision.
% > In MTT0122 at 8
% y =
%        Inf
%        Inf
%    -0.2500
%     0.5000
% xh =
%     0.5485    0.0878
%     0.8093    0.1942
%    -0.1345    0.6255
%     0.1615   -0.7506
% xp =
%     0.2720
%    -0.1814
%     0.1058
%     0.0730
```

```
% MTT0127.m
% postopek in resitev naloge 27 iz prve vaje MTT-ja v MATLABU
%
A = [2 -1 0; -1 2 0; 0 0 0],
B = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 0],
C = [1 1 0; 0 1 0; 0 0 0],
% lastni vektorji = (stolpci) matrike V, lastne vrednosti = elementi na diagonali matrike D
[VA, DA] = eig(A),
[VB, DB] = eig(B),
[VC, DC] = eig(C),

% >> MTT0127
% A =
%      2    -1     0
%     -1     2     0
%      0     0     0
% B =
%      1     0     0
%      0     1     0
%      0     0     0
% C =
%      1     1     0
%      0     1     0
%      0     0     0
% VA =
%          0   -0.7071   -0.7071
%          0   -0.7071    0.7071
%     1.0000         0         0
% DA =
%      0     0     0
%      0     1     0
%      0     0     3
% VB =
%      0     0     1
%      0     1     0
%      1     0     0
% DB =
%      0     0     0
%      0     1     0
%      0     0     1
% VC =
%     1.0000   -1.0000         0
%          0    0.0000         0
%          0         0    1.0000
% DC =
%      1     0     0
%      0     1     0
%      0     0     0
```