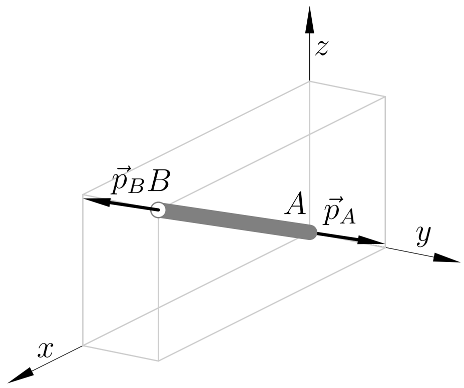
Prvi KOLOKVIJ iz MEHANIKE TRDNIH TELES
19. december 2007 (skupina A)

`VS` = vpisna številka.
`VS3` = tretja števka vpisne številke. Za vpisno številko 26104796 je `VS5` = 4, `VS7` = 9.



1. Palico iz linearno elastičnega, homogenega, izotropnega materiala, krožnega prereza, premera d, obtežimo s specifičnima površinskima obtežbama $\vec{p}_A = p\,\vec{e}_{BA}$ in $\vec{p}_B = p\,\vec{e}_{AB}$ na čelnih ploskvah skozi krajišči A in B, pravokotnih na os palice AB. Vektor $\vec{e}_{AB}$ označuje enotski vektor v smeri od točke A do točke B.
Izračunaj komponente tenzorja napetosti v poljubni točki palice v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z). Izračunaj tudi novo dolžino in nov premer palice po deformaciji. Za koliko stopinj moramo segreti palico, da se njen premer po defomaciji ne bo spremenil?
Podatki: $p = (\texttt{VS8}+1)$ MPa, $b = \frac{(\texttt{VS7}+1)}{10}$ m, $A(0,0,0)$, $B(3b, b, 2\,\mathrm{m})$, $E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $\alpha_T = 1.25\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$, $d = 5$ cm.

2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat y in z.

$$[\varepsilon_{ij}] = a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3(y+z)^2+1 & 3y^2+3z^2+1 \\ 0 & 3y^2+3z^2+1 & -3(y-z)^2-1 \end{bmatrix}.$$

Vsi delci telesa se premikajo le v ravnini (y,z). Poznani so tudi pomik $\vec{u}_0$ delca D_0 z materialnimi koordinatami $x=0, y=0, z=0$, pomik $\vec{u}_1$ delca D_1 z materialnimi koordinatami $x=0, y=1, z=0$ in pomik $\vec{u}_2$ delca D_2 z materialnimi koordinatami $x=0, y=0, z=1$. Razdalje in pomiki so v m.
Določi pomik delca D z materialnimi koordinatami $x=0, y=1, z=1$.
Podatki: $a = (\texttt{VS7}+1)\cdot 10^{-4}$, $\vec{u}_0 = 2a\,(\vec{e}_y - \vec{e}_z)$, $\vec{u}_1 = 4a\,\vec{e}_y$, $\vec{u}_2 = 4a\,(\vec{e}_y - \vec{e}_z)$.

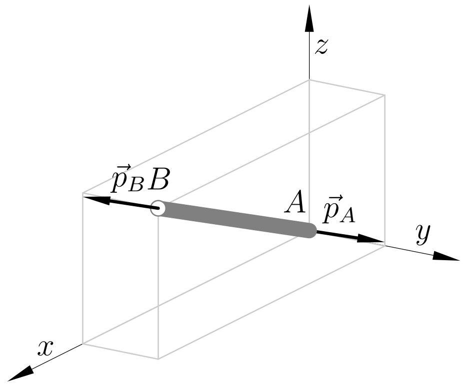
3. V tanki steni, v kateri vlada **ravninsko napetostno stanje** ($\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$), poznamo v točki T dve glavni normalni deformaciji ε_{11} in ε_{22}. Prav tako poznamo v tej točki tudi velikost strižne napetosti $\sigma_{nt} = a$ MPa, ki pripada ravnini z normalo $\vec{e}_n = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.
Določi komponete tenzorja napetosti σ_{ij} in komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) v točki T. Določi tudi velikosti in smeri po absolutni vrednosti največjih strižnih napetosti v točki T in normale pripadajočih ravnino. Če je rešitev več, poišči samo eno.
Podatki: $a = (\texttt{VS7}+\texttt{VS8}+1)$, $E = 200\,000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $\varepsilon_{11} = -2\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_{22} = 4\cdot 10^{-4}$.

Točkovanje: 40 % + 40 % + 40% = 120 %.

Prvi KOLOKVIJ iz MEHANIKE TRDNIH TELES
19. december 2007 (skupina B)

`VS` = vpisna številka.
`VS3` = tretja števka vpisne številke. Za vpisno številko 26104796 je `VS5` = 4, `VS7` = 9.

1. Palico iz linearno elastičnega, homogenega, izotropnega materiala, krožnega prereza, premera d, obtežimo s specifičnima površinskima obtežbama $\vec{p}_A = p\,\vec{e}_{BA}$ in $\vec{p}_B = p\,\vec{e}_{AB}$ na čelnih ploskvah skozi krajišči A in B, pravokotnih na os palice AB. Vektor $\vec{e}_{AB}$ označuje enotski vektor v smeri od točke A do točke B.
Izračunaj komponente tenzorja napetosti v poljubni točki palice v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z). Izračunaj tudi novo dolžino in nov premer palice po deformaciji. Za koliko stopinj moramo segreti palico, da se njen premer po defomaciji ne bo spremenil?
Podatki: $p = (\mathtt{VS8}+1)$ MPa, $b = \frac{(\mathtt{VS7}+1)}{10}$ m, $A(0,0,0)$, $B(3b,b,2\,\mathrm{m})$, $E = 2\cdot 10^5$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $\alpha_T = 1.25\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{K}}$, $d = 5$ cm.



2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in z.

$$[\varepsilon_{ij}] = a\begin{bmatrix} 3(x+z)^2+1 & 0 & 3x^2+3z^2+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3x^2+3z^2+1 & 0 & -3(x-z)^2-1 \end{bmatrix}.$$

Vsi delci telesa se premikajo le v ravnini (x,z). Poznani so tudi pomik $\vec{u}_0$ delca D_0 z materialnimi koordinatami $x=0, y=0, z=0$, pomik $\vec{u}_1$ delca D_1 z materialnimi koordinatami $x=1, y=0, z=0$ in pomik $\vec{u}_2$ delca D_2 z materialnimi koordinatami $x=0, y=0, z=1$. Razdalje in pomiki so v m.
Določi pomik delca D z materialnimi koordinatami $x=1, y=0, z=1$.
Podatki: $a = (\mathtt{VS7}+1)\cdot 10^{-4}$, $\vec{u}_0 = 2a(\vec{e}_x - \vec{e}_z)$, $\vec{u}_1 = 4a\,\vec{e}_x$, $\vec{u}_2 = 4a(\vec{e}_x - \vec{e}_z)$.

3. V tanki steni, v kateri vlada **ravninsko deformacijsko stanje** ($\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0$), poznamo v točki T dve glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22}. Prav tako poznamo v tej točki tudi velikost strižne deformcije $\varepsilon_{nt} = a\cdot 10^{-5}$, ki pripada ravnini z normalo $\vec{e}_n = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)$.
Določi komponete tenzorja napetosti σ_{ij} in komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) v točki T. Določi tudi velikosti in smeri po absolutni vrednosti največjih strižnih deformacij v točki T in normale pripadajočih ravnin. Če je rešitev več, poišči samo eno.
Podatki: $a = (\mathtt{VS7}+\mathtt{VS8}+1)$, $E = 200\,000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $\sigma_{11} = -20$ MPa, $\sigma_{22} = 40$ MPa.

Točkovanje: 40 % + 40 % + 40% = 120 %.

Prvi KOLOKVIJ iz MEHANIKE TRDNIH TELES
18. december 2007 (skupina A) – Rešitve

1. Tenzor napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu palice ξ, η, ζ, kjer je vektor $\vec{e}_\xi = \vec{e}_{AB}$ vektorja $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ pa sta pravokotna na njega lahko predstavimo z matriko.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Komponente tenzorja napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu x, y, z dobimo z enačbo

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} e_{i\alpha}\, \sigma_{\alpha\beta}\, e_{\beta j}$$

ker pa je od nič različen samo $\sigma_{\xi\xi}$ kar z enačbo

$$\sigma_{ij} = e_{i\xi}\, \sigma_{\xi\xi}\, e_{\xi j} = e_{i\xi}\, p\, e_{\xi j}$$

ali v matrični obliki

$$[\sigma_{ij}] = p\,[e_{i\xi}]\,[e_{\xi j}] = p \begin{bmatrix} e_{\xi x} \\ e_{\xi y} \\ e_{\xi z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\xi y} & e_{\xi z} \end{bmatrix}$$

Nova dolžina palice znaša

$$L' = (1 + \varepsilon_{\xi\xi})\, L = \left(1 + \frac{p}{E}\right) L.$$

Nov premer palice znaša

$$d' = (1 - \nu\, \varepsilon_{\xi\xi})\, d = \left(1 - \nu\, \frac{p}{E}\right) d.$$

Sprememba temperature pa

$$-\nu \frac{p}{E} + \alpha_T\, \Delta T = 0 \longrightarrow \Delta T = \frac{\nu\, p}{\alpha_T\, E}.$$

2. Preverimo kompatibilitetne pogoje

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2\, \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 6 - 6 = 0.$$

Izračunamo

$$\vec{\omega} = -6\, a\, y\, z \vec{e}_x.$$

$$\vec{u} = a(2 + (y+z) + (y+z)^3)\vec{e}_y + a(-2 + (y-z) + (y-z)^3)\vec{e}_z.$$

3. Najprej izračunamo Lamejevi konstanti

$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)\,(1-2\nu)}$$

in nato iz enačbe

$$0 = \sigma_{zz} = \sigma_{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

glavno normalno deformacijo ε_{33}. Iz enačb

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),\\
\sigma_{22} &= 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})
\end{aligned}$$

izračunamo glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22}, ter nazadnje iz enačb

$$\begin{aligned}
\sigma_{11,22} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2},\\
\sigma_{nt} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

še napetosti σ_{xx}, σ_{yy} in σ_{xy}.