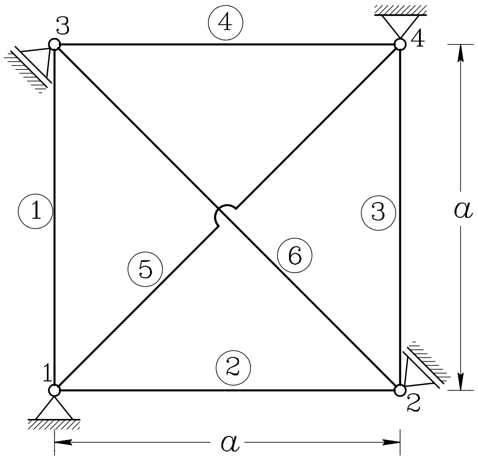
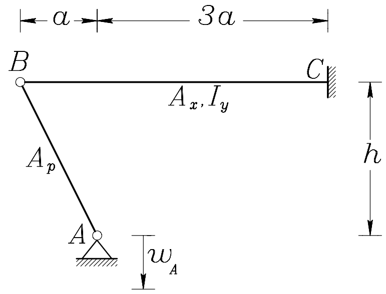
Drugi KOLOKVIJ iz MEHANIKE TRDNIH TELES 17. januar 2003

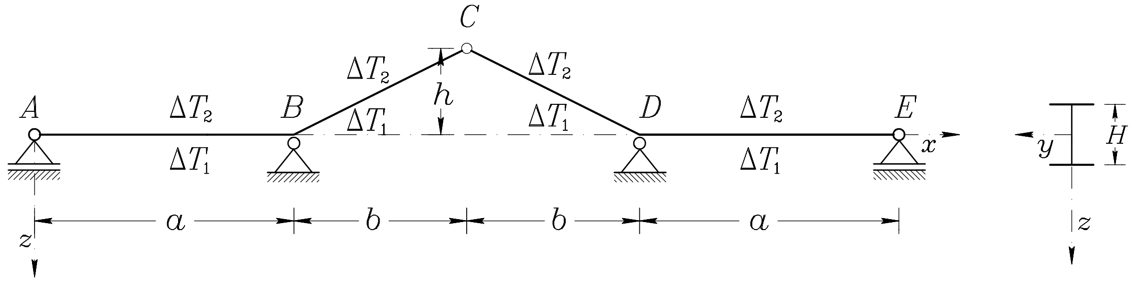
1. Vse palice v ravninskem paličju so iz enakega materiala in imajo enak prečni prerez. Po metodi pomikov izračunaj notranje sile v palicah, če palico 6 segrejemo za 50 K.
Namig: Upoštevaj simetrijo.
Podatki: $A_p = 25$ cm^2, $E = 200\,000$ MPa, $a = 3$ m, $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$.



2. Zaradi slabega temeljenja se podpora A vertikalno posede za w_A. Vsi nosilci so iz enakega materiala. Z uporabo diferencialnih enačb upogibnice in/ali z uporabo tabel izračunaj notranje sile in vertikalni pomik točke B. Nariši tudi diagrame notranjih sil.
Podatki: $A_x = 25$ cm^2, $A_p = 10$ cm^2, $I_y = 1000$ cm^4, $E = 200\,000$ MPa, $a = 2$ m, $h = 4$ m, $w_A = 4$ cm.



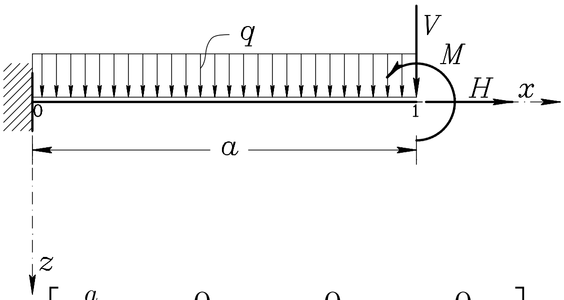
3. Nosilec, katerega prečni prerez je I-profil višine $H = 20$ cm, na gornji strani segrejemo za $\Delta T_2 = 10$ K, na spodnji pa ohladimo za $\Delta T_1 = -10$ K. Celoten nosilec je iz enakega materiala in konstantnega prečnega prereza. Predpostavi linearen potek temperature po prerezu. Z uporabo diferencialnih enačb upogibnice in/ali z uporabo tabel izračunaj vertikalni pomik točke C in notranje sile v nosilcu. Nariši tudi diagrame notranjih sil.
Namig: Upoštevaj simetrijo.
Podatki: $a = 3$ m, $b = 2$ m, $h = 1$ m, $E = 200\,000$ MPa, $I_y = 2000$ cm^4, $A_x = 30$ cm^2, $\alpha_T = 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$.



Točkovanje: 35 % + 35 % + 40 % = 110 %.

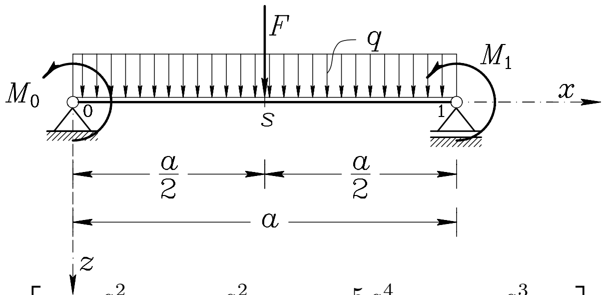
PODAJNOSTNE MATRIKE ZA KONZOLO IN PROSTOLEŽEČI NOSILEC

1. KONZOLA



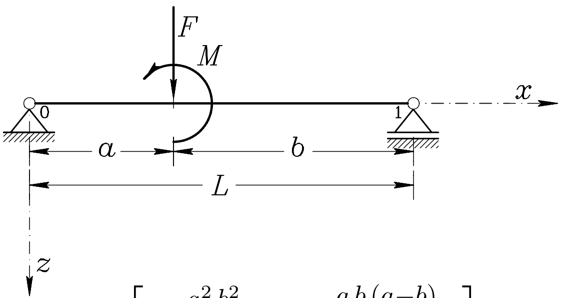
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \omega_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{E\,A_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a^3}{3\,E\,I_y} & -\dfrac{a^2}{2\,E\,I_y} & \dfrac{a^4}{8\,E\,I_y} \\ 0 & -\dfrac{a^2}{2\,E\,I_y} & \dfrac{a}{E\,I_y} & -\dfrac{a^3}{6\,E\,I_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ V \\ M \\ q \end{bmatrix}.$$

2. PROSTOLEŽEČI NOSILEC (1. obtežni primer)



$$\begin{bmatrix} w_s \\ \omega_{ys} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a^2}{16\,E\,I_y} & \dfrac{a^2}{16\,E\,I_y} & \dfrac{5\,a^4}{384\,E\,I_y} & \dfrac{a^3}{48\,E\,I_y} \\ -\dfrac{a}{24\,E\,I_y} & \dfrac{a}{24\,E\,I_y} & 0 & 0 \\ \dfrac{a}{3\,E\,I_y} & -\dfrac{a}{6\,E\,I_y} & -\dfrac{a^3}{24\,E\,I_y} & -\dfrac{a^2}{16\,E\,I_y} \\ -\dfrac{a}{6\,E\,I_y} & \dfrac{a}{3\,E\,I_y} & \dfrac{a^3}{24\,E\,I_y} & \dfrac{a^2}{16\,E\,I_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ q \\ F \end{bmatrix}.$$

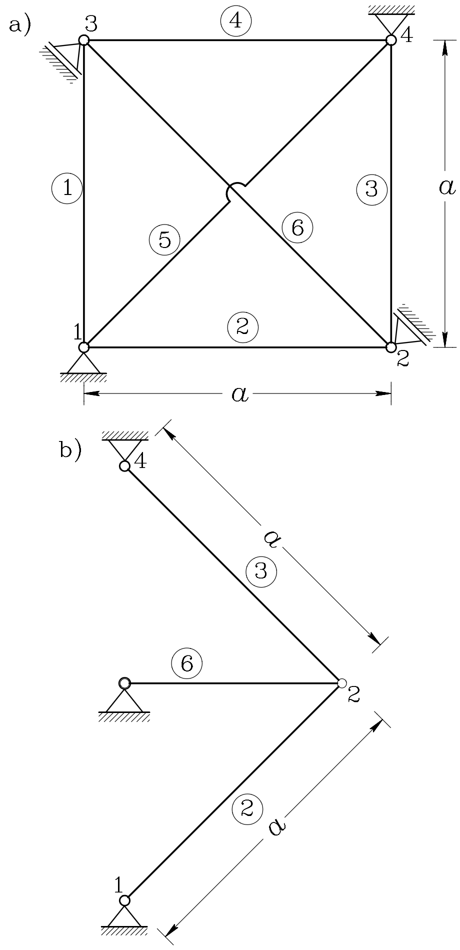
3. PROSTOLEŽEČI NOSILEC (2. obtežni primer)



$$\begin{bmatrix} w(a) \\ \omega_y(a) \\ \omega_{y0} \\ \omega_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2\,b^2}{3\,L\,E\,I_y} & \dfrac{a\,b\,(a-b)}{3\,L\,E\,I_y} \\ \dfrac{a\,b\,(a-b)}{3\,L\,E\,I_y} & \dfrac{(a^2-a\,b+b^2)}{3\,L\,E\,I_y} \\ -\dfrac{a\,b\,(L+b)}{6\,L\,E\,I_y} & -\dfrac{(L^2-3\,b^2)}{6\,L\,E\,I_y} \\ \dfrac{a\,b\,(L+a)}{6\,L\,E\,I_y} & -\dfrac{(L^2-3\,a^2)}{6\,L\,E\,I_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix}.$$

Namigi in rešitve nalog

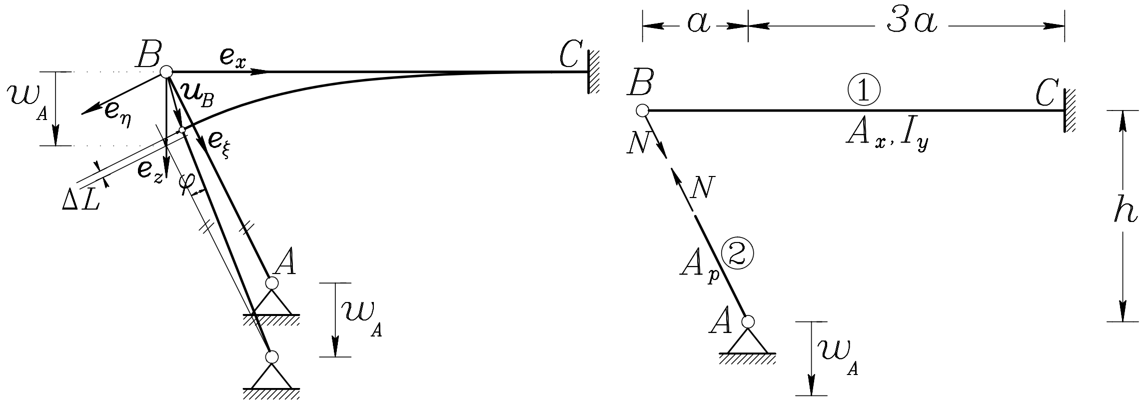
1. Vozlišči 1 in 4 se ne premakneta (glej sliko a), zato je sila v palici 5 enaka 0. Ker v tej palici ni osne sile, jo lahko v tem obtežnem primeru iz paličja črtamo. Zaradi simetrije (premisli) sta reakciji v podporah 2 in 3 enaki nič. Opazimo tudi, da se središče palice 6 ne premakne. Zato lahko računski model poenostavimo (glej sliko b).



Palico 6 segrejemo za $\Delta T = 50$ K in pri izbranih podatkih izračunamo: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 87.868$ kN, $N_6 = -124.2641$ kN.

Podroben potek reševanja za primer, ko palico 6 segrejemo z ΔT, lahko najdemo v učbeniku (zgled 5.15).

2. Iz slike vidimo, da je pomik krajišča B palice AB sestavljen iz treh delov: pomika w_A, raztezka palice ΔL in zasuka φ raztegnjene palice. Do istega rezultata pridemo tudi povsem formalno z enačbami. Nalogo bomo rešili na dva načina:



Prva rešitev:
Ob uvedenih oznakah $L = \sqrt{a^2+h^2}$, $\cos\alpha = \frac{a}{L}$ in $\sin\alpha = \frac{h}{L}$ z uporabo tabel iz slik dobimo

$$\vec{u}_B^1 = \frac{N\,\cos\alpha\,4\,a}{E\,A_x}\vec{e_x} + \frac{N\,\sin\alpha\,(4\,a)^3}{3\,E\,I_y}\vec{e_z}.$$

$$\begin{aligned}\vec{u}_B^2 &= w_A\,\vec{e_z} - \frac{N\,L}{E\,A_p}\,\vec{e_\xi} + \varphi\,\vec{e_y}\times\vec{AB}\\ &= w_A\,\vec{e_z} - \frac{N\,L}{E\,A_p}\,\vec{e_\xi} + \varphi\,L\,\vec{e_\eta}.\end{aligned}$$

Slika dejansko prikazuje

$$\vec{u}_B^2 = w_A\,\vec{e_z} - \frac{N\,L}{E\,A_p}\,\vec{e_\xi} + \varphi\,(L+\Delta L)\,\vec{e_\eta},$$

vendar je $\varphi\,(L+\Delta L) \approx \varphi\,L$. Poleg majhnih raztezkov ΔL smo, kot običajno, privzeli tudi majhne zasuke φ. Upoštevamo kompatibilitetni pogoj

$$\vec{u}_B^1 = \vec{u}_B^2. \tag{1}$$

Nalogo lahko sedaj rešimo na dva načina.

- Vektorja $\vec{e_\xi}$ in $\vec{e_\eta}$ zapišemo v bazi $\vec{e_x}$ in $\vec{e_y}$. Vektorska enačba (1) predstavlja sistem dveh skalarnih enačb v smereh $\vec{e_x}$ in $\vec{e_z}$, ki jih dobimo tako, da enačbo (1) najprej pomnožimo skalarno z $\vec{e_x}$ nato pa še z $\vec{e_z}$. Iz teh dveh enačb pri izbranih podatkih izračunamo neznanki $N = 0.52388$ kN in $\varphi = -2.2469\cdot 10^{-6}$(rad).
- Enačbo (1) pomnožimo skalarno z vektorjem $\vec{e_\xi}$. Dobimo eno enačbo za neznanko N. Kratek račun da $N = 0.52388$ kN. Ta način reševanja je praktično najhitrejši.

Vertkalni pomik točke B dobimo iz enačbe $w_B = \frac{N\,\sin\alpha\,(4\,a)^3}{3\,E\,I_y} = 3.9985$ cm. Pomik $w_B \approx w_A$, ker sta tako raztezek palice, kot tudi pomik zaradi zasuka palice majhna v primerjavi s pomikom w_A.

Notranje sile naj na osnovi slike b) določi bralec sam.

Druga rešitev:

- Najprej za telo 1 napišemo diferencialni enačbi $u' = \frac{N_x}{E\,A_x}$ in $w'' = \frac{-M_y}{E\,I_y}$ z ustreznimi robnimi pogoji $u(4\,a) = 0$, $w'(4\,a) = 0$, $w(4\,a) = 0$. Iz robnih pogojev najprej izračunamo integracijske konstante C_1, C_2, C_3. Nato izračunamo pomik $\vec{u}_B^1$ in dobimo

$$\vec{u}_B^1 \quad = \quad \frac{N\,\cos\alpha\,4\,a}{E\,A_x}\vec{e_x} + \frac{N\,\sin\alpha\,(4\,a)^3}{3\,E\,I_y}\vec{e_z}.$$

- Napišemo diferencialni enačbi z ustreznimi robnimi pogoji še za drugi del. Os x naj ima smer vektorja $\vec{e}_\xi$, os z pa smer vektorja $\vec{e}_\eta$. Ker je drugi del palica, znaša osna sila kar N, upogibni moment pa je enak nič, zato lahko pišemo

$$u' = \frac{N}{E\,A_p}, \quad w'' = \frac{-M_y}{E\,I_p} = 0.$$

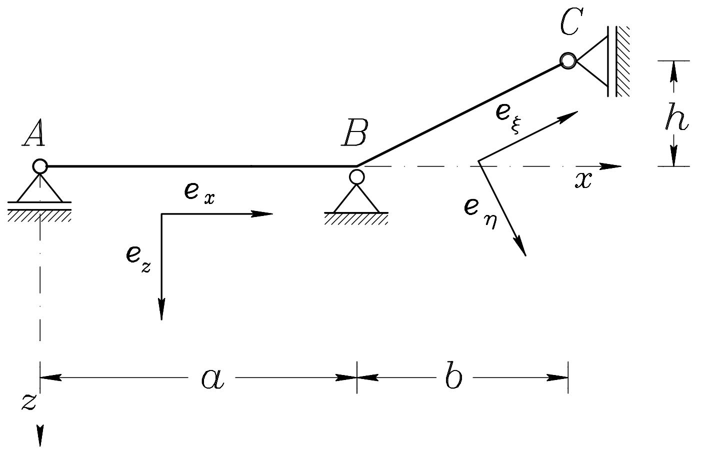
  Od tu dobimo rešitvi $u = \frac{N\,x}{E\,A_p} + C_4$ in $w = C_5\,x + C_6$. Opazimo, da pomik w predstavlja pomik palice AB, ki je enak pomiku togega telesa ob upoštevanju majhnega zasuka, u pa skrček/raztezek palice v vzdolžni smeri. S temi enačbami utemeljimo prvo sliko in hkrati tudi prvo (krajšo) rešitev. Robne pogoje podajata enačbi

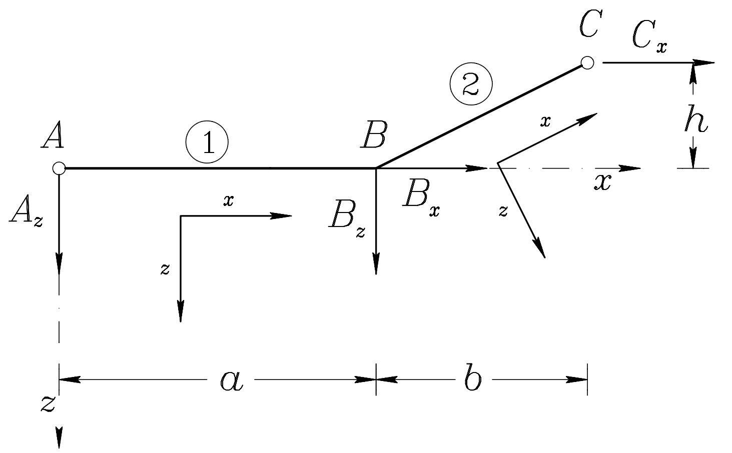
$$\vec{u}_B^2 = u(0)\,\vec{e}_\xi + w(0)\,\vec{e}_\eta = \vec{u}_B^1, \quad \vec{u}_A = u(L)\,\vec{e}_\xi + w(L)\,\vec{e}_\eta = w_A\,\vec{e}_z.$$

  Dve vektorski enačbi predstavljata štiri skalarne enačbe. Te lahko dobimo npr. tako, da enačbi po vrsti skalarno pomnožimo z $\vec{e}_x$ in $\vec{e}_y$, ali pa tako, da enačbi po vrsti skalarno pomnožimo z $\vec{e}_\xi$ in $\vec{e}_\eta$. Iz teh štirih enačb izračunamo mankajoče neznanke N, C_4, C_5 in C_6. Ob izbranih podatkih dobimo $N = 0.52388$ kN.

3. Nalogo bi lahko hitreje rešili z uporabo tabel, vendar bi bil postopek manj razumljiv. Zato jo bomo rešili kar z uporabo diferencialnih enačb upogibnice.

Najprej bomo upoštevali simetrijo. Nato pa napisali ravnotežne enačbe, ter diferencialne enačbe upogibnice z ustreznimi robnimi pogoji.





Izračunamo $\Delta T_x = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} = 0$ K in $\Delta T_z = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{H} = -1\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{cm}}$.
Ravnotežne enačbe so npr. $\sum X = 0$, $\sum Z = 0$ in $\sum M_Y^B = 0$. Iz zadnje enačbe opazimo zvezo $C_x = A_z\,\frac{a}{h}$.

- Polje 1: Napišemo diferencialni enačbi

$$u_1' = \frac{N_x}{E\,A_x} + \alpha_T\,\Delta T_x = 0, \quad w_1'' = -\frac{M_y}{E\,I_y} - \alpha_T\,\Delta T_z = \frac{A_z\,x}{E\,I_y} - \alpha_T\,\Delta T_z.$$

Splošni rešitvi gornjih enačb se glasita

$$u_1 = C_1, \quad w_1 = A_z\,\frac{x^3}{6\,E\,I_y} - \alpha_T\,\Delta T_z\,\frac{x^2}{2} + C_2\,x + C_3.$$

Ob upoštevanju robnih pogojev $u_1(a) = 0$, $w_1(0) = 0$ in $w_1(a) = 0$ izračunamo pomike

$$u_1 = 0, \quad w_1 = \frac{1}{6}\,\frac{A_z\,x^3}{EIy} - \frac{1}{2}\,\alpha_T\,\Delta T_z\,x^2 + \left(\frac{1}{2}\,\alpha_T\,\Delta T_z\,a - \frac{1}{6}\,\frac{A_z\,a^2}{EI_y}\right)x.$$

- Polje 2: Označimo dolžino nosilca BC z L. Napišemo diferencialni enačbi

$$u_2' = \frac{N_x}{E\,A_x} + \alpha_T\,\Delta T_x = \frac{A_z\,a\,b}{h\,L\,E\,A_x}, \quad w_1'' = -\frac{M_y}{E\,I_y} - \alpha_T\,\Delta T_z = -\frac{A_z\,a\,(x-L)}{L\,E\,I_y} - \alpha_T\,\Delta T_z.$$

Upoštevamo robni pogoj $u_2(0) = 0$ in dobimo

$$u_2 = \frac{A_z\, a\, b\, x}{h\, L\, E A_x}.$$

Drugo enačbo integriramo

$$w_2 = -\frac{1}{6}\,\frac{A_z\, a\,(x-L)^3}{L\, E I_y} - \frac{1}{2}\,\alpha_T\,\Delta T_z\, x^2 + C_5\, x + C_6.$$

Ob upoštevanju $\vec{u}_2 = u_2\,\vec{e}_\xi + w_2\,\vec{e}_\eta$, konstanti C_5 in C_6 in neznano reakcijo A_z dobimo iz robnih pogojev

$$w_2(0) = 0, \quad \vec{u}_2(C)\cdot\vec{e}_x = 0$$

in ključnega robnega pogoja, da je zasuk na koncu prvega nosilca enak zasuku na začetku drugega nosilca, tj.

$$-w_1'(a) = -w_2'(0).$$

Pri izbranih podatkih izračunamo reakcijo $A_z = -2.3837$ kN ($C_6 = .14898$, $A_z = -2.3837$, $C_5 = -.001986$).

Notranje sile sedaj lahko določi bralec sam.

Vertikalni pomik točke C pa dobimo iz enačbe $w(C) = \vec{u_2}(C)\cdot\vec{e}_z = 0.00533$ cm.