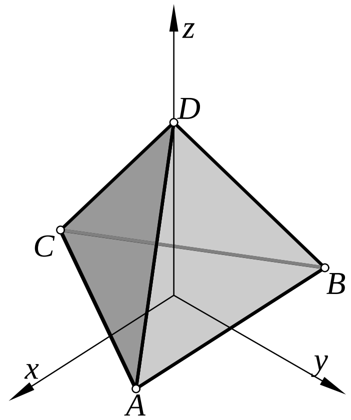
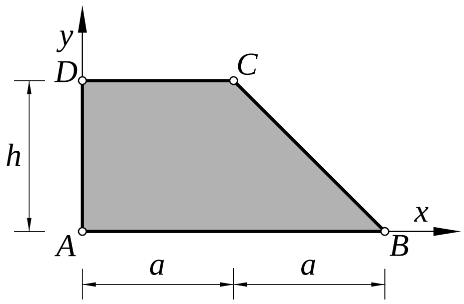
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
29. avgust 2008

1. V pravilnem tetraedru s stranico $a = 1$ m na sliki, v katerem vlada **homogeno deformacijsko in napetostno stanje**, poznamo vektor specifične površinske obtežbe $\vec{p}_{ABC} = 10\ \text{MPa}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ na ploskvi ABC ter vektor specifične površinske obtežbe $\vec{p}_{ABD} = p \cdot \vec{e}_{ABD}$ na ploskvi ABD. Vektor $\vec{e}_{ABD}$ označuje zunanjo normalo ploskve ABD. Poznamo tudi specifično spremembo volumna $\varepsilon_V = 10^{-4}$.
Določi vrednost p ter komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij poljubnega delca v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z).
Podatki: $E = 200\,000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $A\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{6}, 0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{6}, 0\right)$, $C\left(0, -\frac{\sqrt{3}a}{3}, 0\right)$, $D\left(0, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\,a\right)$.



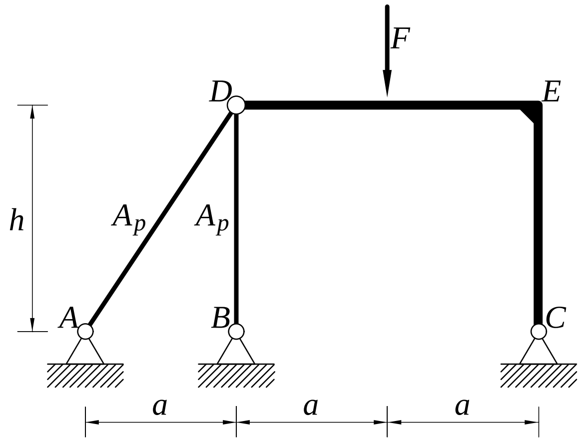
---

2. V telesu, v katerem vlada **homogeno ravninsko deformacijsko stanje (RDS)** v ravnini (x, y) poznamo pomike delcev
$B(x = 2a, y = 0, z = 0)$,
$C(x = a, y = h, z = 0)$ in
$D(x = 0, y = h, z = 0)$ in sicer
$\vec{u}_B = 10^{-4}\ \text{m} \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$,
$\vec{u}_C = 10^{-4}\ \text{m} \cdot (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ in
$\vec{u}_D = 10^{-4}\ \text{m} \cdot (\vec{e}_x)$.
Določi komponente tenzorja majhnih deformacij poljubnega delca v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) ter pomik delca A.
Podatki: $a = h = 2$ m.



---

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z navpično silo F. Greda DE in steber EC sta toga v primerjavi s palicama AD in BD.
Določi notranje sile in skiciraj diagrame notranjih sil.
Določi tudi navpični pomik točke D.
Podatki: $F = 5$ kN, $a = 4$ m, $h = 6$ m, $A_p = 100\ \text{cm}^2$, $E = 200\,000$ MPa.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
29. avgust 2008 - rešitve

1. Izračunamo zunanjo normalo ploskve ABD in dobimo $\vec{e}_{ABD} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}\vec{e}_y + \vec{e}_z)$.
Z uporabo Cauchyevih enačb na ploskvah ABC in ABD, tj.

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{ABC} &= -\vec{\sigma}_z, \\
\vec{p}_{ABD} &= \frac{p}{3}(2\sqrt{2}\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{\sigma}_y + \frac{1}{3}\vec{\sigma}_z
\end{aligned}
$$

in enačbe

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

izračunamo $p = -28.2843$ MPa in

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 84.7487 & 3.53553 & -10. \\ 3.53553 & -24.7487 & -10. \\ -10. & -10. & 0. \end{bmatrix} \text{MPa}$$

ter nazadnje z uporabo konstitucijskega zakona še

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 4.64992 & 0.235702 & -0.666667 \\ 0.235702 & -2.64992 & -0.666667 \\ -0.666667 & -0.666667 & -1. \end{bmatrix}.$$

2. Nalogo lahko rešimo na dva načina:

- Ker imamo opravka s homogenim ravninskim napetostno deformacijskim stanjem iščemo pomik v obliki nastavka

  $$\vec{u}(x,y,z) = (a_0 + a_1\, x + a_2\, y)\vec{e}_x + (b_0 + b_1\, x + b_2\, y)\vec{e}_y.$$

  Iz robnih pogojev

  $$\begin{aligned}
  \vec{u}_B &= 10^{-4}\ \mathrm{m}\cdot(\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{u}(2a,0,0) = (a_0 + a_1\, 2a)\vec{e}_x + (b_0 + b_1\, 2a)\vec{e}_y,\\
  \vec{u}_C &= 10^{-4}\ \mathrm{m}\cdot(\vec{e}_x - \vec{e}_y) = \vec{u}(a,h,0) = (a_0 + a_1\, a + a_2\, h)\vec{e}_x + (b_0 + b_1\, a + b_2\, h)\vec{e}_y,\\
  \vec{u}_D &= 10^{-4}\ \mathrm{m}\cdot\vec{e}_x = \vec{u}(0,h,0) = (a_0 + a_2\, h)\vec{e}_x + (b_0 + b_2\, h)\vec{e}_y,
  \end{aligned}$$

  izračunamo konstante in iskani pomik. Dobimo

  $$\vec{u}(x,y,z) = 10^{-4}\cdot\left(\vec{e}_x + \left(3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{2}\right)\vec{e}_y\right).$$

  Od tu pridemo z odvajanjem do komponent tenzorja majhnih defomacij

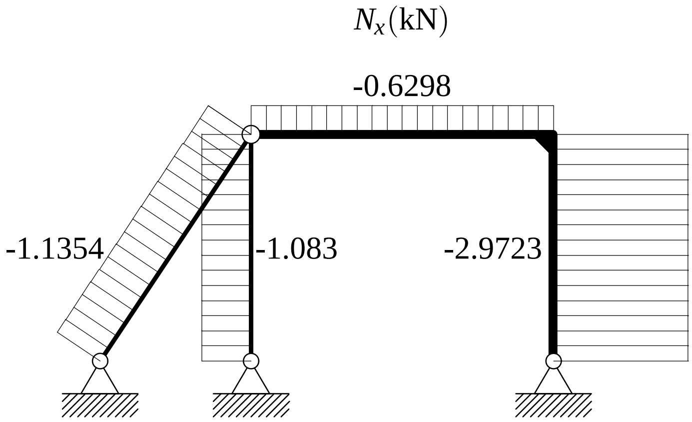
  $$[\varepsilon_{ij}] = 10^{4}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

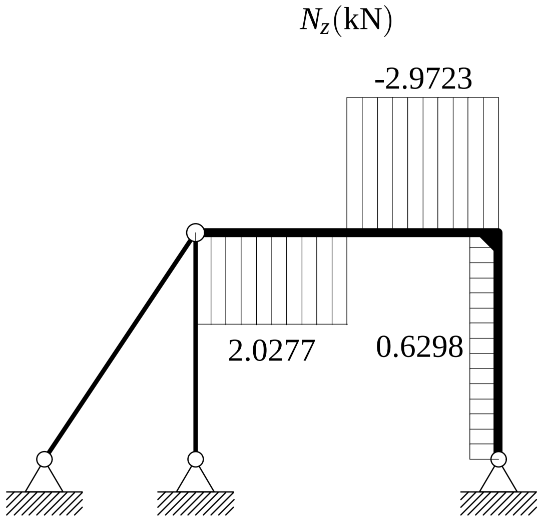
  in iskanega pomika točke A

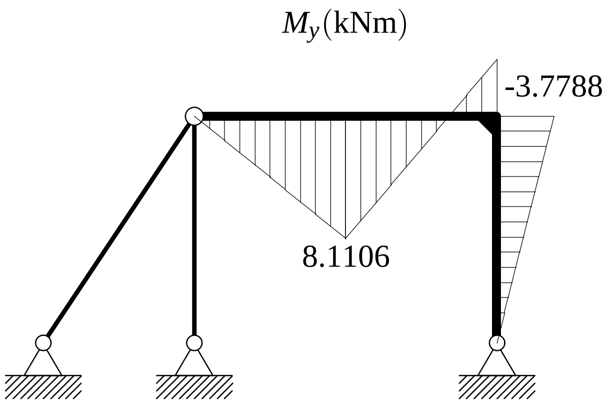
  $$\vec{u}_A = \vec{u}(0,0,0) = 10^{-4}\cdot(\vec{e}_x + 3\,\vec{e}_y).$$

-

3. Na spodnjih slikah so prikazani diagrami notranjih sil.







Navpični pomik točke D je enak skrčku palice BD od koder dobimo

$$w_D = \frac{N_{BD}\, h}{E A_p} = 3.249 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$