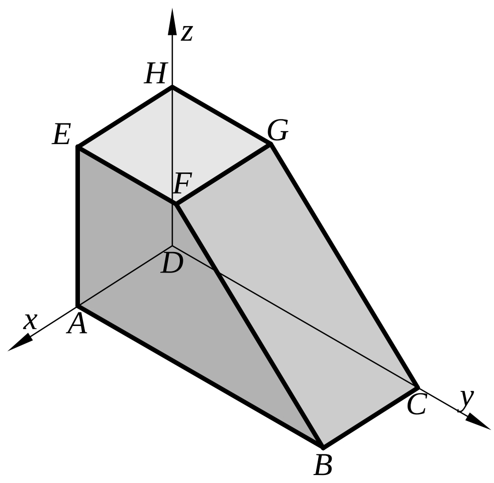
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
3. junij 2008

1. V telesu na sliki vlada homogeno deformacijsko in napetostno stanje. Obtežba na stranskih ploskvah ni vrisana. Poznamo vektor specifične površinske obtežbe na stranskih ploskvah $BCGF$ in $FGHE$ in sicer je $\vec{p}_{BCGF} = \vec{p}_{FGHE} = -1$ MPa$\vec{e}_x$. Vemo tudi, da se pri deformaciji volumen telesa poveča za 0.1 cm^3. Določi komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij poljubnega delca v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z). Določi tudi vektorje specifične površinske obtežbe na preostalih stranskih ploskvah.
Podatki: $E = 200000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $a = 15$ cm, $A(2a,0,0)$, $B(2a,5a,0)$, $C(0,5a,0)$, $D(0,0,0)$, $E(2a,0,3a)$, $F(2a,2a,3a)$, $G(0,2a,3a)$, $H(0,0,3a)$.



---

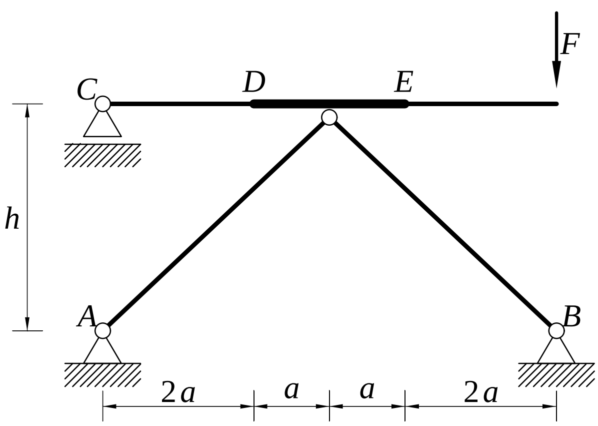
2. Napetostno stanje v točki T je podano s tenzorjem napetosti, ki ga v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z) predstavlja matrika

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Določi normalo ravnine, v kateri ni normalne napetosti, rezultirajoča strižna napetost pa znaša $\sqrt{2}$ MPa. Ali je rešitev več? Koliko?
Podatki: $E = 200000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$.

---

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z navpično silo. Del nosilca DE je tog v primerjavi s preostalimi deli. Določi in skiciraj diagrame notranjih sil. Določi tudi navpični in vodoravni pomik prostega krajišča (prijemališča sile F). **Podatki**: $F = 1$ kN, $a = 1$ m, $h = 3$ m, $I_y = 20000$ cm^4, $A_x = 100$ cm^2, $E = 210000$ MPa.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
3. junij 2008 – Rešitve

1. Najprej napišemo ravnotežni enačbi na ploskvah $BCGF$ in $FGHE$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

nato izračunamo specifično spremembo volumna

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = 1.41093 \cdot 10^{-6} = \frac{1-2\nu}{E} I_1^{\sigma}.$$

Iz gornjih enačb izračunamo

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.8466 & -0.4142 & -1 \\ -0.4142 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa},$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 4.2328 & -2.76142 & -6.66667 \\ -2.76142 & -1.41093 & 0. \\ -6.66667 & 0. & -1.41093 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

Vektorje specifične površinske obtežbe na preostalih stranskih ploskvah dobimo po enačbi $\vec{p}_n = \vec{\sigma}_x e_{nx} + \vec{\sigma}_y e_{ny} + \vec{\sigma}_z e_{nz}$. Konkretno

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ABFE} &= \vec{\sigma}_x, \\ \vec{p}_{DCGH} &= -\vec{\sigma}_x, \\ \vec{p}_{ADHE} &= -\vec{\sigma}_y, \\ \vec{p}_{ABCD} &= -\vec{\sigma}_z. \end{aligned}$$

2. Iščemo normalo ravnine

$$\vec{e}_n = e_{nx}\vec{e}_x + e_{ny}\vec{e}_y + e_{nz}\vec{e}_z.$$

Ker je $\vec{e}_n$ enotski vektor, velja

$$e_{nx}^2 + e_{ny}^2 + e_{nz}^2 = 1. \tag{1}$$

Normalna napetost σ_{nn} v iskani ravnini je enaka nič, kar zapišemo z enačbo

$$\sigma_{nn} = 2\,e_{nx}^2 + e_{ny}^2 - e_{nz}^2 = 0. \tag{2}$$

Rezultirajoča strižna napetost pa je enaka $\sqrt{2}$ MPa. Zapišimo to še z enačbo

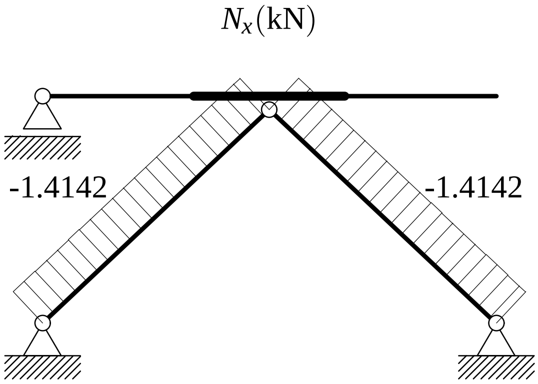
$$2 = \sigma_{nt}^2 = \|\vec{\sigma}_n\|^2 - \sigma_{nn}^2 = \|\vec{\sigma}_n\|^2 = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{\sigma}_n = 4\,e_{nx}^2 + e_{ny}^2 + e_{nz}^2. \tag{3}$$

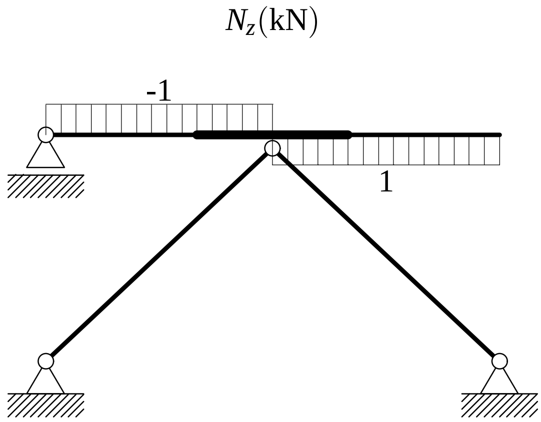
Sistem enačb (1), (2) in (3) prevedemo z uvedbo novih spremenljivk $x_1 = e_{nx}^2$, $x_2 = e_{ny}^2$ in $x_3 = e_{nz}^2$ na sistem treh linearnih enačb. Rešimo ta sistem in dobimo štiri rešitve

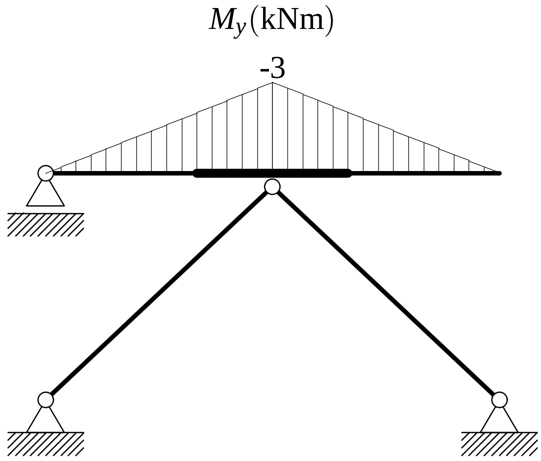
$$
\begin{aligned}
e_{nx} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{ny} = 0, \quad e_{nz} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\
e_{nx} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{ny} = 0, \quad e_{nz} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\
e_{nx} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{ny} = 0, \quad e_{nz} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \\
e_{nx} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_{ny} = 0, \quad e_{nz} = \sqrt{\frac{2}{3}},
\end{aligned}
$$

ki predstavljajo dve iskani ravnini.

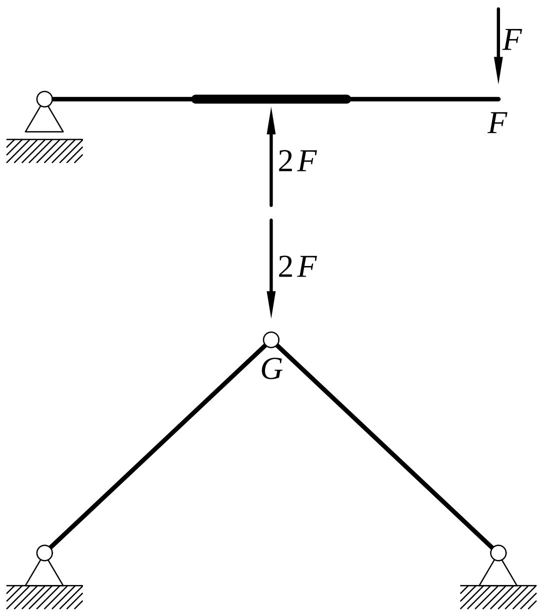
3. Konstrukcija je statično določena. Z uporabo ravnotežnih enačb iz statike določimo notranje sile. Diagrame notranjih sil prikazujejo spodnje slike.







Pri računu pomikov konstrukcijo razrežemo na nosilec in paličje (glej sliko spodaj). Z uporabo diferencialnih enačb nosilca in metode pomikov (paličje) določimo navpični in vodoravni pomik vozlišča G, nato pa še navpični in vodoravni pomik prostega krajišča nosilca.



Po metodi pomikov najprej izračunamo

$$u_G = 0, \quad w_G = 4.0406 \cdot 10^{-4}\ \text{cm}$$

in nato z uporabo diferencialnih enačb nosilca še

$$u_F = 0, \quad w_F = 1.3507 \cdot 10^{-2}\ \text{cm}.$$