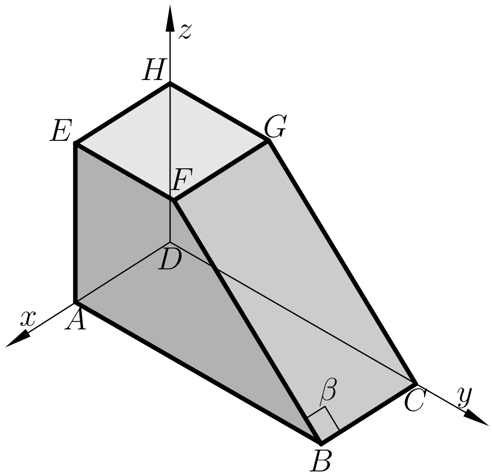
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
18. marec 2008

1. V telesu na sliki vlada homogeno deformacijsko in napetostno stanje. Obtežba na stranskih ploskvah ni vrisana. Pri deformaciji se stranica BC podaljša za 0.001 cm, stranica BF se skrajša za 0.001 cm, pravi kot β pa se ne spremeni. Prav tako ploskev $BCGF$ ni obtežena.
Določi komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij poljubnega delca v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z).
Podatki: $E = 200000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $a = 15$ cm, $A(2a,0,0)$, $B(2a,5a,0)$, $C(0,5a,0)$, $D(0,0,0)$, $E(2a,0,3a)$, $F(2a,2a,3a)$, $G(0,2a,3a)$, $H(0,0,3a)$.



---

2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in y. Vsi delci telesa se premikajo le v ravnini (x,y). Poznani so pomiki delca materialnimi koordinatami $x=0$, $y=0$ in $z=0$, tj. $\vec{u}_{T_0} = 10^{-4}\cdot(a\vec{e}_x + b\vec{e}_y)$ in zasuk okolice delca z materialnimi koordinatami $x=1$, $y=1$ in $z=0$, tj. $\vec{\omega}_{T_1} = \vec{0}$. Določi pomike delca z materialnimi koordinatami $x=5$, $y=5$ in $z=0$. Razdalje in pomiki so v m.

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4}\cdot\begin{bmatrix} 3yx^2+y+1 & \frac{1}{2}\left(x^3+x+y^3+y\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(x^3+x+y^3+y\right) & 3xy^2+x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

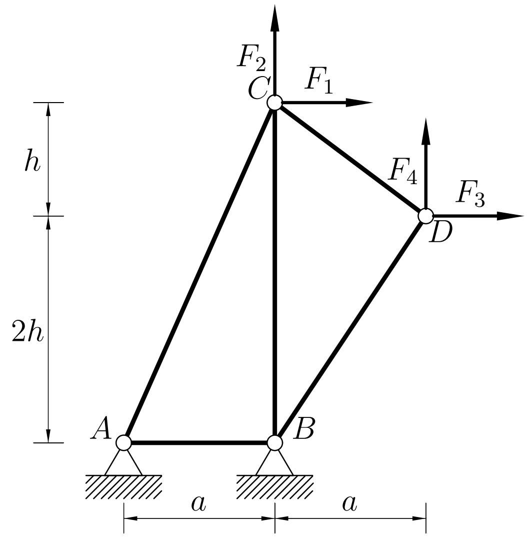
Podatki: $a=2$, $b=5$.

---

3. Paličje na sliki obtežimo s silami F_1, F_2, F_3, F_4, kot prikazuje slika, ter dodatno segrejemo za 1 K. Izmerimo pomike vozlišč C in D in dobimo

$$\vec{u}_C = 10^{-2}\cdot(4\vec{e}_x)\ \text{cm},$$
$$\vec{u}_D = 10^{-2}\cdot(4\vec{e}_x - 1\vec{e}_y)\ \text{cm}.$$

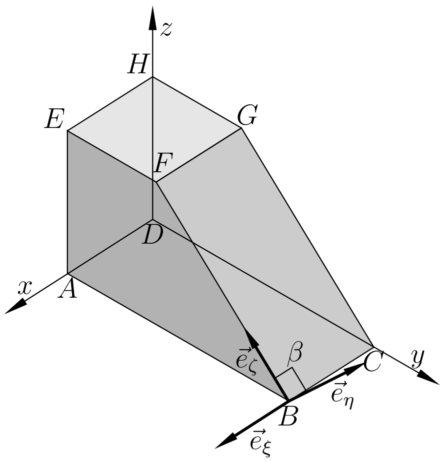
Določi neznane velikosti sil F_1, F_2, F_3 in F_4. Vse palice so iz enakega materiala in imajo enak prečni prerez.
Podatki: $a = 3$ m, $h = 2$ m, $A_x = 100\ \text{cm}^2$, $\alpha_T = 1.25\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\text{K}}$, $E = 210000$ MPa.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
18. marec 2008 – Rešitve

1. Najprej določimo komponente tenzorja napetosti v kartezičnem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ). Iz slike



odčitamo zveze

$$\vec{e}_\xi = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_y + \vec{e}_z), \quad \vec{e}_\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_y + \vec{e}_z).$$

Iz podatkov neposredno izračunamo

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{0.001 \text{ cm}}{2a} = 0.3333 \cdot 10^{-4}, \\
\varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{-0.001 \text{ cm}}{3\sqrt{2}a} = -0.1571 \cdot 10^{-4}, \\
\varepsilon_{\xi\zeta} &= 0, \\
\vec{\sigma}_\eta &= \vec{0} \longrightarrow \sigma_{\eta\xi} = \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\eta\zeta} = 0.
\end{aligned}$$

Nato z uporabo konstitucijskih enačb

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\delta_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}), \quad \alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$$

določimo komponente tenzorja napetosti in komponente tenzorja majhnih deformacij kartezičnem koordinatnem sistemu (ξ, η, ζ)

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 6.3215 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0355 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad [\varepsilon_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0881 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1571 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Komponente tenzorja napetosti in komponente tenzorja majhnih deformacij kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) izračunamo z uporabo transformacijske matrike

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

po enačbah $[\sigma_{ij}] = [T]\cdot[\sigma_{\alpha\beta}]\cdot[T]^T$ in $[\varepsilon_{ij}] = [T]\cdot[\varepsilon_{\alpha\beta}]\cdot[T]^T$. Dobimo

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 6.3215 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5178 & 0.5178 \\ 0 & 0.5178 & -0.5178 \end{bmatrix} \text{MPa}, \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1226 & 0.0345 \\ 0 & 0.0345 & -0.1226 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

2. Najprej preverimo kompatibilitetne pogoje, nato izračunamo zasuk okolice poljubnega delca z materialnimi koordinatami x, y in z. Ob upoštevanju robnih pogojev dobimo

$$\vec{\omega}(x,y,z) = \frac{10^{-4}}{2}\left(-x - x^3 + y + y^3\right)\vec{e}_z.$$

Z uporabo integracije in ob upoštevanju robnih pogojev, izračunamo pomik delca z materialnimi koordinatami x, y in z ter končno še pomik delca z materialnimi koordinatami $x = 5$ m, $y = 5$ m in $z = 0$. Dobimo

$$\vec{u}(x,y,z) = 10^{-4}\left((x^3y + xy + x + 2)\vec{e}_x + (xy^3 + xy + y + 5)\vec{e}_y\right),$$
$$\vec{u}(5,5,0) = 0.0657\,\text{m}\,\vec{e}_x + 0.066\,\text{m}\,\vec{e}_y.$$

3. Po enačbah

$$N_{ij} = k_{ij}\vec{e}_{ij}\cdot(\vec{u}_j - \vec{u}_i) - \theta_{ij}, \quad \theta_{ij} = \alpha_T\,\Delta T\,\ell_{ij}k_{ij} = \alpha_T\,\Delta T\,E A_x = 26.25\text{ kN}$$

izračunamo najprej osne sile v palicah, po metodi izrezovanja vozlišč pa nato iz ravnotežnih enačb v vozliščih 3 in 4 še manjkajočo obtežbo, tj. sile F_1, F_2, F_3 in F_4. Dobimo $F_1 = 8.2643$ kN, $F_2 = 3.7194$ kN, $F_3 = 29.6103$ kN in $F_4 = 29.3998$ kN.