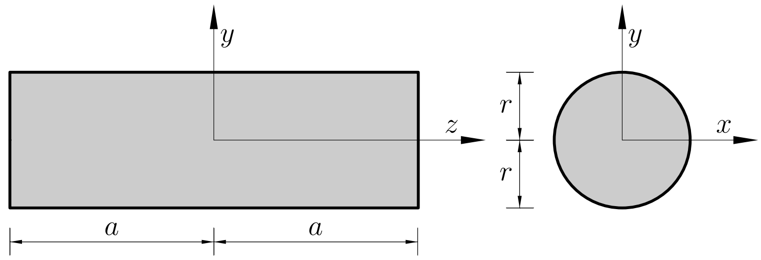
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
30. januar 2008

1. Obravnavamo deformacijsko in napetostno stanje valja, katerega vzdolžni in prečni prerez sta prikazana na sliki.



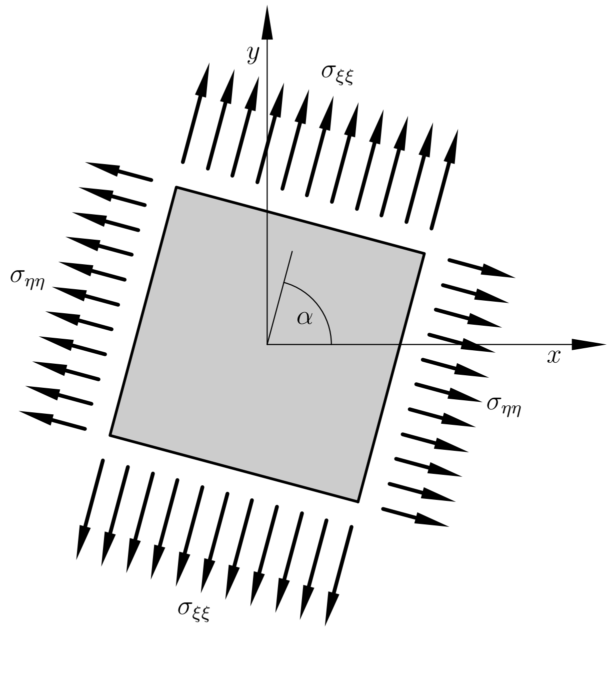
Poznamo komponente tenzorja majhih deformacij poljubnega delca z materialnimi koordinatami (x, y, z) v kartezičnem koordinatnem sistemu z bazo $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ in $\vec{e}_z$.

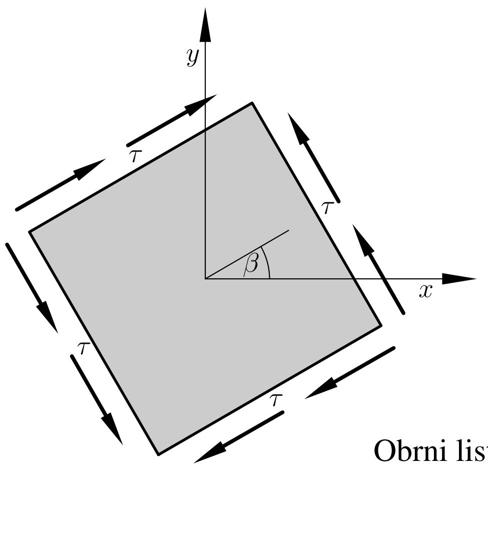
$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Pomik delca in zasuk okolice delca z materialnimi koordinatami $(x = 0, y = 0, z = 0)$ sta enaka nič. Določi vektor pomika poljubnega delca valja. Določi komponente tenzorja napetosti za poljubni delec v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z). Določi tudi specifično volumsko in specifično površinsko obtežo $\vec{v}$ in $\vec{p}_n$, ki sta povzročili takšno deformiranje.
Podatki: $E = 200\,000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $a = 15$ cm, $r = 5$ cm.

---

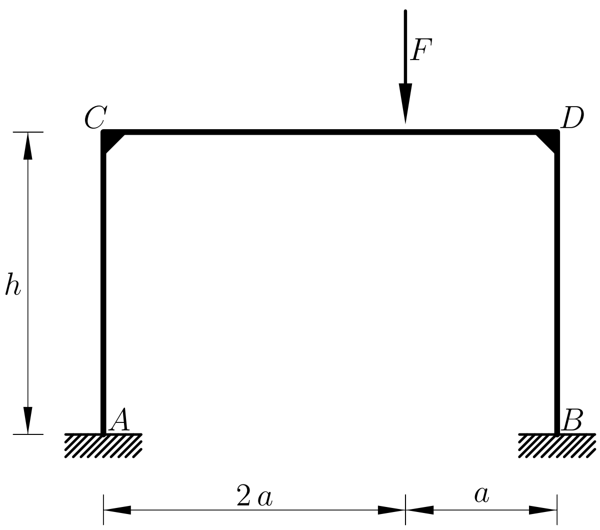
2. Iz tanke plošče, ki leži v ravnini $z = 0$ in v kateri vlada homogeno **ravninsko napetostno stanje**, izrežemo dva kvadrata, kot prikazuje slika. Vplive odstranjenih delov nadomestimo z napetostmi. Določi kot α ter manjkajoči napetosti $\sigma_{\xi\xi}$ in $\sigma_{\eta\eta}$.
Podatki: $\beta = 30°$, $\tau = 10$ MPa.





Obrni list!

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z navpično silo, kot prikazuje slika. Določi in skiciraj diagrame notranjih sil. Skrčke in raztezke stebrov in grede pri računu zanemari.
Podatki: $F = 1$ kN, $a = 2$ m, $h = 4$ m, $I_y = 20\,000$ cm^4, $E = 210\,000$ MPa.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
30. januar 2008 – Rešitve

1. Komponente tenzorja napetosti v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) dobimo z uporabo konstitucijskih enačb

$$[\sigma_{ij}] = 15 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Iz ravnotežne enačbe

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\sigma}_z}{\partial z} + \vec{v} = \vec{0}$$

neposredno sledi, da je vektor specifične volumske obtežbe $\vec{v} = \vec{0}$. Specifično površinsko obtežbo dobimo iz enačbe

$$\vec{p}_n = \vec{\sigma}_x e_{nx} + \vec{\sigma}_y e_{ny} + \vec{\sigma}_z e_{nz}.$$

Ta je enaka $\vec{0}$ na plašču valja, $15\, r\vec{e}_\varphi$ na ploskvi z normalo $\vec{e}_z$ in $-15\, r\vec{e}_\varphi$ na ploskvi z normalo $-\vec{e}_z$ ob privzetih okrajšavah $r = \sqrt{x^2+y^2}$ in $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y$. Kompatibilitetni pogoji so trivialno izpolnjeni. Z upoštevanjem robnih pogojev lahko enolično določimo vektor pomikov

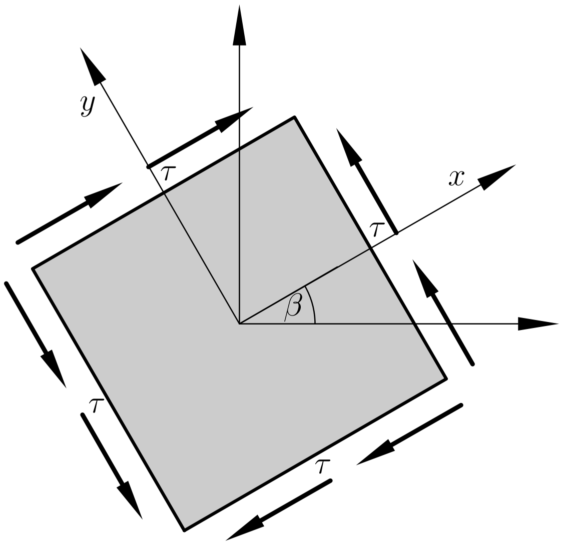
$$\vec{u}(x,y,z) = 2 \cdot 10^{-4} \left(-zy\,\vec{e}_x + zx\,\vec{e}_y\right),$$

izražen v polarnem koordinatem sistemu (r,φ,z)

$$\vec{u}(r,\varphi,z) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot z\, r\, \vec{e}_\varphi.$$

V nalogi imamo opravka s čisto torzijo. S kolikšnim torzijskim momentom je obtežen nosilec?

2. Reševanje poenostavimo z uvedbo novega koordinatnega sistema na sliki, ki ga bomo zaradi večje preglednosti označili kar s (x, y).



Namesto kota α bomo iskali kot $\gamma = \alpha - \beta$. Ker je strižna napetost v ravnini z normalo $\vec{e}_\xi$ enaka nič, velja

$$\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{xy} \cos(2\gamma) = \tau \cos(2\gamma) = 0.$$

Od tu sledi $\gamma = 45^\circ$ ali $\gamma = 135^\circ$ in posledično $\alpha = 30^\circ + \gamma = 75^\circ$ ali $\alpha = 165^\circ$. Določimo še normalne napetosti. Te dobimo iz enačb

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xy} \sin(2\gamma) = 10\,\text{MPa},$$
$$\sigma_{\eta\eta} = -\sigma_{xy} \sin(2\gamma) = -10\,\text{MPa}.$$

3. Diagrame notranjih sil prikazuje spodnja slika.