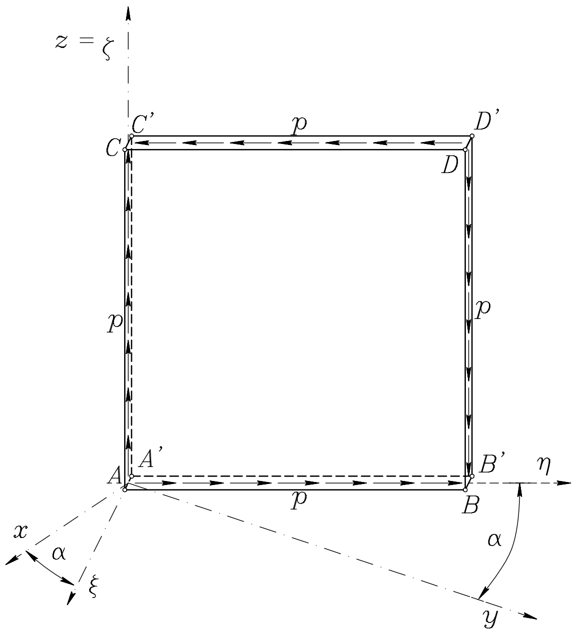
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
29. november 2007

1. Tanka kvadratna plošča na sliki leži v ravnini $\xi = 0$. Obremenjena je z enakomerno zvezno specifično površinsko obtežbo velikosti p, kot prikazuje slika. Ob privzetju homogenega napetostega stanja izračunaj tenzor napetosti v poljubni točki plošče v koordinatnem sistemu x, y, z, ki ga dobimo tako, da osi ξ in η zavrtimo za kot $-\alpha$ okrog osi $z = \zeta$ (glej sliko).
Podatki: $p = 10$ MPa, $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{AC} = 10$ cm, $\alpha = 30°$



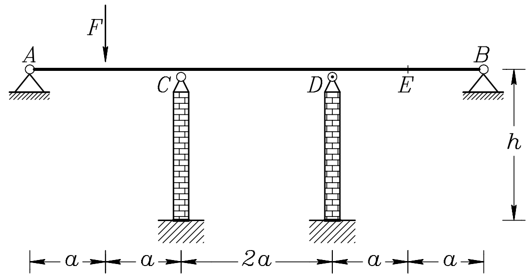
---

2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in y. Vse točke telesa se premikajo le v ravnini (x, y). Poznana sta tudi pomik točke $T_0(0,0,0)$, tj. $\vec{u}_0 = 10^{-4} \cdot (1\,\vec{e}_x + 1\,\vec{e}_y)$ in zasuk v točki $T_1(1,1,0)$, tj. $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$. Določi komponente tenzorja velikih deformacij v kartezičnem koodinatnem sistemu (x, y, z) v točki $T(5,5,0)$. Razdalje in pomiki so v m.

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} y^2+1 & 2yx+x+y & 0 \\ 2yx+x+y & x^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen z navpično silo, kot prikazuje slika. Stebra sta toga v primerjavi z gredo. Določi in skiciraj diagrame notranjih sil. Določi tudi navpični pomik vozlišča E.
Podatki: $F = 10$ kN, $a = 5$ m, $h = 10$ m, $A_x = 500$ cm^2, $I_y = 100\,000$ cm^4, $E = 210\,000$ MPa.



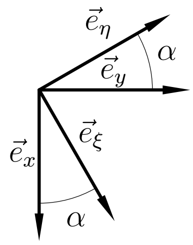
Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
29. november 2007 – Rešitve

1. Iz slike je razvidno, da je od nič različna samo strižna napetost $\sigma_{\eta\zeta} = -p$. Od tu neposredno sledi

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix}.$$

Z upoštevanjem slike



povežemo bazne vektorje $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$, $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$ z enačbami

$$\vec{e}_\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\eta = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\zeta = \vec{e}_z.$$

Z upoštevanjem gornjih enačb določimo transformacijsko matriko $[e_{i\alpha}] = [T]$. Dobimo

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Komponente tenzorja napetosti σ_{ij} v kartezijskem koordinatnem sistemu (x, y, z) so določene z matriko

$$[\sigma_{ij}] = [T]\,[\sigma_{\alpha\beta}]\,[T]^T = -p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Preverimo kompatibilitetni pogoj

$$K_{zz} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 2+2-4 = 0.$$

Iz podatkov preberemo deformacijske vektorje

$$\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}_x &= 10^{-6}\left((y^2+1)\,\vec{e}_x + (2xy+x+y)\,\vec{e}_y\right),\\
\vec{\varepsilon}_y &= 10^{-6}\left((2xy+x+y)\,\vec{e}_x + (y^2+1)\,\vec{e}y\right),\\
\vec{\varepsilon}_z &= 0
\end{aligned}$$

Integriramo od točke $T_0(0,0,0)$. Zasuk okolice točke T dobimo z enačbo

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{T_0}^{T} (\nabla \times \vec{\varepsilon}_x)\,dx + \int_{T_0}^{T} (\nabla \times \vec{\varepsilon}_y)\,dy + \int_{T_0}^{T} (\nabla \times \vec{\varepsilon}_z)\,dz$$

V ta namen najprej izračunamo

$$\nabla \times \vec{\varepsilon}_x = 10^{-6}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (y^2+1) & (2xy+x+y) & 0 \end{vmatrix} = 10^{-6}\vec{e}_z,$$

$$\nabla \times \vec{\varepsilon}_y = 10^{-6}\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2xy+x+y) & (x^2+1) & 0 \end{vmatrix} = -10^{-6}\vec{e}_z.$$

Integriramo in dobimo

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{T_0}^{T} 10^{-6}(dx-dy)\vec{e}_z = \left(\omega_0 + 10^{-6}(x-y)\right)\vec{e}_z.$$

Ob upoštevanju robnega pogoja $\vec{\omega}(x=1, y=1, z=0) = \vec{0}$ dobimo $\omega_0 = 0$ in od tu neposredno

$$\vec{\omega} = 10^{-6}(x-y)\vec{e}_z$$

in

$$[\omega_{ij}] = 10^{-6}\begin{bmatrix} 0 & x-y & 0 \\ y-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

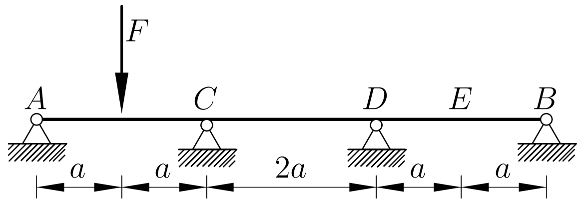
Komponente tenzorja velikih deformacij E_{ij} v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) izračunamo z upoštevanjem matrike $[F]$, ki predstavlja deformacijski gradient v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) po enačbah

$$\begin{aligned}
[F] &= [I] + [\varepsilon_{ij}] + [\omega_{ij}],\\
[E_{ij}] &= \frac{1}{2}\left([F]\,[F]^T - [I]\right).
\end{aligned}$$

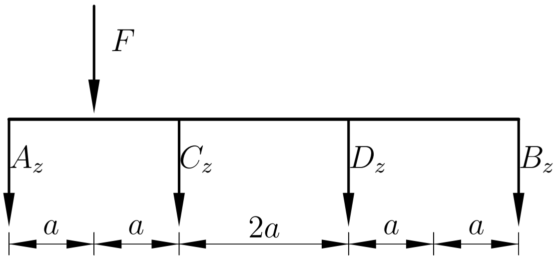
Vse skupaj izračunamo v točki $T(x=5, y=5, z=0)$ in dobimo

$$[F] = \begin{bmatrix} 1.000026 & 0.00006 & 0 \\ 0.00006 & 1.000026 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [E_{ij}] = \begin{bmatrix} 26.0021 & 60.0016 & 0 \\ 60.0016 & 26.0021 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-6}.$$

3. Ker skrčka stebrov zanemarimo, lahko most nadomestimo s kontinurnim nosilcem na sliki.



Obtežba deluje pravokotno na kontinuirni nosilec, zato so vodoravne reakcije enake nič.



Napišemo ravnotežni enačbi nosilca

$$\sum Z = 0 = A_z + B_z + C_z + D_z + F,$$
$$-\sum M_Y^A = 0 = C_z 2a + D_z 4a + B_z 6a + F\,a$$

in diferencialno enačbo upogiba nosilca

$$E\,I_y\,w'' = -M_y = -\left(-A_z x - F < x-a > -C_z < x-2a > -D_z < x-4a >\right).$$

Pri opisu momenta smo uporabili Heavisideovo funkcijo H in okrajšavo

$$< x-a >^n := (x-a)^n H(x-a).$$

Enačbo dvakrat integriramo in dobimo

$$E\,I_y\,w' = A_z \frac{x^2}{2} + F\,\frac{< x-a >^2}{2} + C_z \frac{< x-2a >^2}{2} + D_z \frac{< x-4a >^2}{2} + C_1,$$
$$E\,I_y\,w = A_z \frac{x^3}{6} + F\,\frac{< x-a >^3}{6} + C_z \frac{< x-2a >^3}{6} + D_z \frac{< x-4a >^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

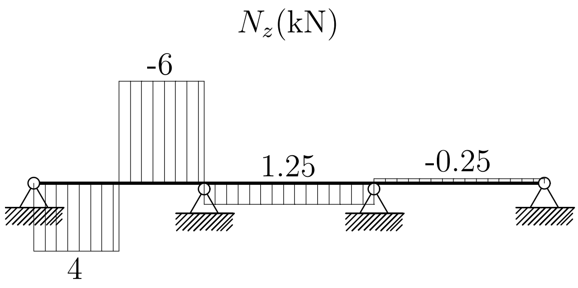
Upoštevamo robne pogoje $E\,I_y\,w(0) = 0$, $E\,I_y\,w(2a) = 0$, $E\,I_y\,w(4a) = 0$ in $E\,I_y\,w(6a) = 0$. Iz prvega robnega pogoja izločimo konstanto $C_2 = 0$, preostale robne pogoje in ravnotežni enačbi pa zapišemo z eno samo matrično enačbo

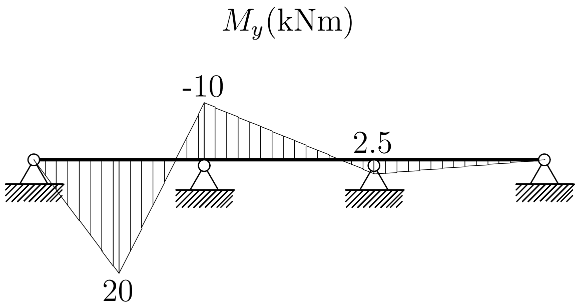
$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 64 & 8 & 0 & 0 & 24 \\ 216 & 64 & 8 & 0 & 36 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_z \\ C_z \\ D_z \\ B_z \\ C_1/a^2 \end{bmatrix} = (-F) \begin{bmatrix} 1 \\ 27 \\ 125 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem enačb in dobimo

$$A_z = -0.4F, \quad B_z = -0.025F, \quad C_z = -0.725F, \quad D_z = 0.15F, \quad C_1 = 0.18333\,F\,a^2.$$

Diagrame notranjih sil prikazujeta spodnji sliki.





Navpični pomik točke E znaša $0.744 \cdot 10^{-3}$ cm.