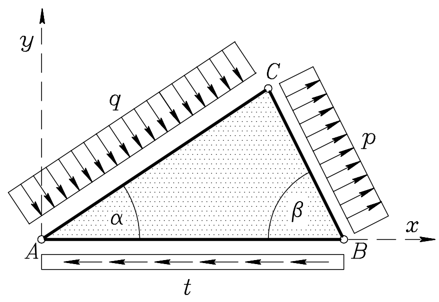
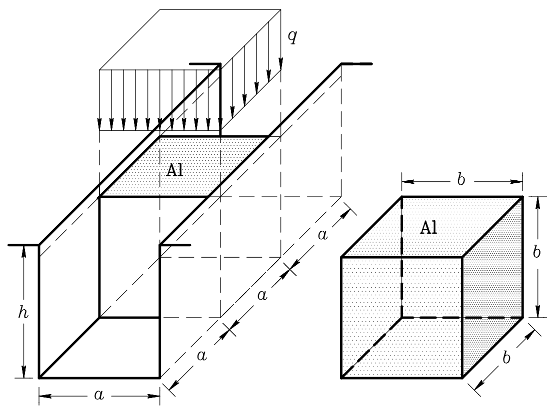
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
16. marec 2007

1. Tanka stena debeline $d = 1$ cm iz linearno elastičnega materiala, v kateri vlada **homogeno ravninsko napetostno stanje**, je na stranskih ploskvah obtežena s specifičnimi površinskimi obtežbami p, q in t kot prikazuje slika. Izračunaj komponente tenzorja napetosti in tenzorja majhnih deformacij v kartezičnem koordinatnem sistemu x, y, z. Izračunaj tudi glavne normalne deformacije in pripadajoče smeri. Poznamo pomik točke A in zasuk v točki A. Izračunaj pomik točke $C(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{m}}{2}, \frac{\mathrm{m}}{2})$.
Podatki: $E = 200\,000$ MPa, $\nu = \frac{1}{3}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $p = 10$ MPa, $\vec{u}_A = 10^{-4}$ m $(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, $\vec{\omega}_A = 10^{-4}$rad $\vec{e}_z$.



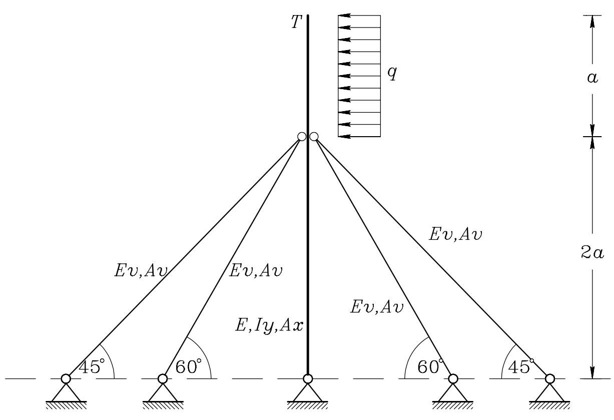
---

2. V tog žleb vstavimo aluminijasto kocko dimenzij $b \times b \times b$. S kakšno specifično površinsko obtežbo q moramo obtežiti kocko, da se bo le ta v vodoravni smeri raztegnila za Δ? Kakšne bodo tedaj napetosti v kocki? Trenje med žlebom in kocko pri računu zanemari.
Podatki: $a = 10$ cm, $b = 9.9999$ cm, $h = 10.001$ cm, $E_{Al} = 72000$ MPa, $\nu_{Al} = 0.34$, $\Delta = 0.001$ mm.



---

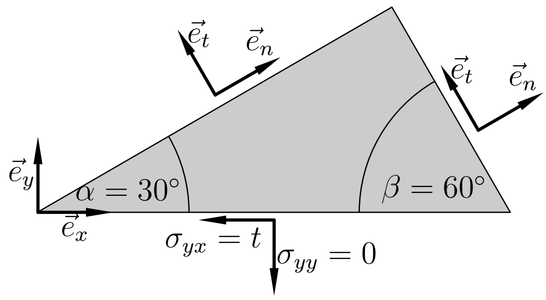
3. Vrvi, s katerimi je stabiliziran steber, lahko prevzamejo natezne, ne pa tudi tlačnih osnih sil. Določi in skiciraj potek notranjih sil vzdolž stebra ter vodoravni pomik točke T. Pri tem lahko zanemariš osno podajnost stebra v primerjavi z osno podajnostjo vrvi.
Podatki: $q = 9.6\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$, $a = 5$ m, $A_x = 200\ \mathrm{cm}^2$, $I_y = 5870\ \mathrm{cm}^4$, $A_v = 1.5\ \mathrm{cm}^2$, $E_v = 210\,000$ MPa, $E = 210\,000$ MPa.



Točkovanje: 40 % + 30 % + 40 % = 110%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
16. marec 2007 – Rešitve

1. Iz spodnje slike preberemo $\sigma_{yy} = 0$.



$$\vec{e}_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y, \quad \vec{e}_t = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y,$$

Od tu izračunamo napetostni vektor

$$\vec{\sigma}_n = \vec{p}_n = p\,\vec{e}_n = p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y\right)$$
$$= \vec{\sigma}_x\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{\sigma}_y\,\frac{1}{2} = (\sigma_{xx}\vec{e}_x + \sigma_{xy}\vec{e}_y)\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \sigma_{xy}\vec{e}_x\,\frac{1}{2}.$$

S primerjavo komponent dobimo

$$\sigma_{xy} = \frac{p\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma_{xx} = \frac{2p}{3}.$$

Izračunali smo

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} & \frac{10\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Z uporabo enačb $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij} I_1^\sigma$ izračunamo še komponente tenzorja majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 3.3333 & 3.849 & 0 \\ 3.849 & -1.1111 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1111 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

Glavne normalne deformacije bo izračunal bralec sam. Pripadajoče glavne smeri so $\vec{e}_n$, $\vec{e}_t$ in $\vec{e}_z$. Ob upoštevanju robnih pogojev po nekoliko daljšem računu izračunamo še pomik

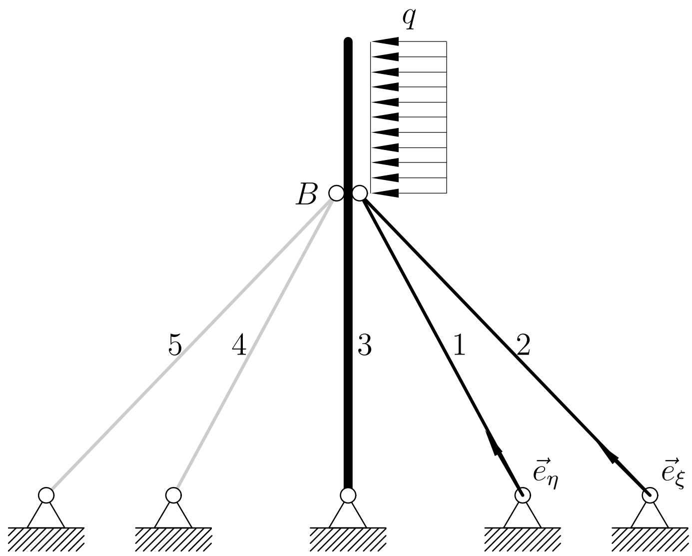
$$\vec{u}(x,y,z) = \frac{9 + 3x + (-9 + 2\sqrt{3})y}{90000}\vec{e}_x + \frac{9 + (9 + 2\sqrt{3})x - y}{90000}\vec{e}_y - \frac{z}{90000}\vec{e}_z,$$

ter pomik delca z materialnimi koordinatami $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0$

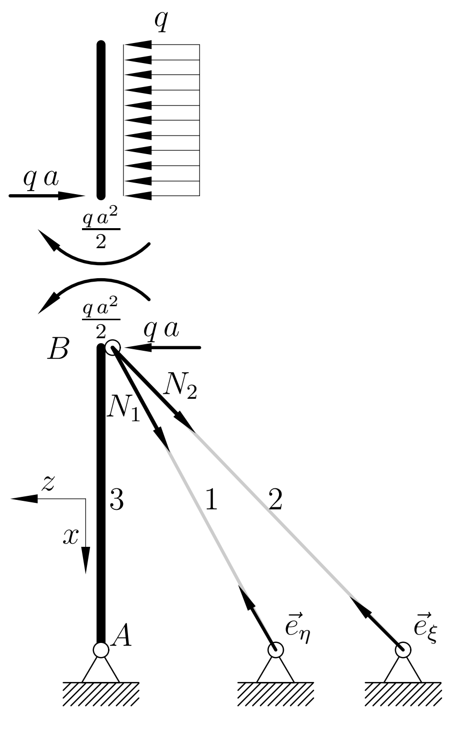
$$\vec{u}(C) = \vec{u}\left(x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0\right) = 0.0000981\ \mathrm{m}\,\vec{e}_x + 0.000214\ \mathrm{m}\,\vec{e}_y.$$

2. Kocko moramo obtežiti s specifično površinsko obtežbo $q = 2.1177$ MPa.

3. Iz narave problema je razvidno, da vrvi 4 in 5 pri prenosu obtežbe ne sodelujeta, zato ju izločimo.



Konstrukcijo razrežemo kot prikazuje spodnja slika. Vplive odstranjenih delov nadomestimo s silami.



Spodnji del stebra 3 mora zadoščati ravnotežni enačbi

$$\sum M_y^A = 0 = \frac{5\,q\,a^2}{2} - N1\,\frac{2\,a}{2} - N2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,2\,a,$$

kot tudi diferencialnim enačbam upogibnice

$$E\,I_y\,w'' = -M_y = -\left(-\frac{q\,a^2}{2} - q\,a\,x + \frac{N_1}{2}\,x + \frac{N_2\,\sqrt{2}}{2}\,x\right),$$

$$E\,A_x\,u' = N_x = -\frac{N_1\,\sqrt{3}}{2} - \frac{N_2\,\sqrt{2}}{2}.$$

Pri opisu diferencialnih enačb smo privzeli lokalni koordinatni sistem na sliki. Integriramo diferencialni enačbi upogibnice in dobimo

$$
\begin{aligned}
E I_y w' &= \frac{q a^2}{2} x + q a \frac{x^2}{2} - \frac{N_1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{N_2\sqrt{2}}{2}\frac{x^2}{2} + C_1, \\
E I_y w &= \frac{q a^2}{2}\frac{x^2}{2} + q a \frac{x^3}{6} - \frac{N_1}{2}\frac{x^3}{6} - \frac{N_2\sqrt{2}}{2}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,
\end{aligned}
$$

$$
E A_x u = -\frac{N_1\sqrt{3}}{2} x - \frac{N_2\sqrt{2}}{2} x + C_3.
$$

Z upoštevanjem robnega pogoja $u(2a) = 0$ določimo konstanto C_3. Uvedemo vektor pomikov $\vec{u} = u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$. Z upoštevanjem preostalih robnih pogojev

$$
\begin{aligned}
w(2a) &= 0, \\
\vec{u}(0)\cdot\vec{e}_\eta &= \frac{N_1 L_1}{E_v A_v}, \\
\vec{u}(0)\cdot\vec{e}_\xi &= \frac{N_2 L_2}{E_v A_v}.
\end{aligned}
$$

in ravnotežne enačbe določimo še preostali konstanti in osni sili v palicah 1 in 2. Po krajšem računu dobimo

$$
C_1 = -4.41\cdot 10^6, C_2 = 4.12\cdot 10^8, C_3 = 76681, \quad N_1 = 45.57\,\text{kN}, N_2 = 52.63\,\text{kN}.
$$

Vodoravni pomik prostega krajišča T stebra znaša -27.32 cm.
Nalogo bi lahko rešili tudi drugače, tako, da bi konstrukcijo (brez vrvi 4 in 5) razdelili najprej na nosilec in paličje (s palicama 1 in 2).