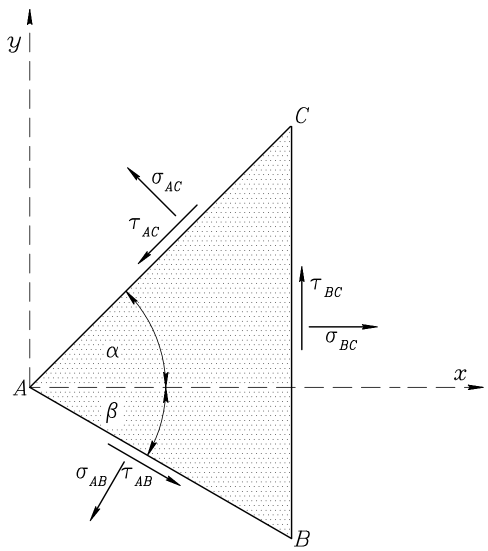
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
18. januar 2007

1. Iz stene iz linearno elastičnega materiala, konstantne debeline, v kateri vlada homogeno **ravninsko napetostno stanje (RNS)** v ravnini (x,y), izrežemo majhen trikotnik ABC. Poznamo eno glavno normalno napetost $\sigma_{11} = 10$ MPa in pripadajočo smer $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, prav tako poznamo tudi normalno napetost $\sigma_{AC} = 5$ MPa. Izračunaj manjkajoče napetosti σ_{AB}, τ_{AC}, τ_{BC}, τ_{AB} in σ_{BC} in komponente tenzorja deformacij v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z). Izračunaj tudi specifično spremembo ploščine trikotnika ABC. Lastno težo stene zanemari.
Podatki: $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$.

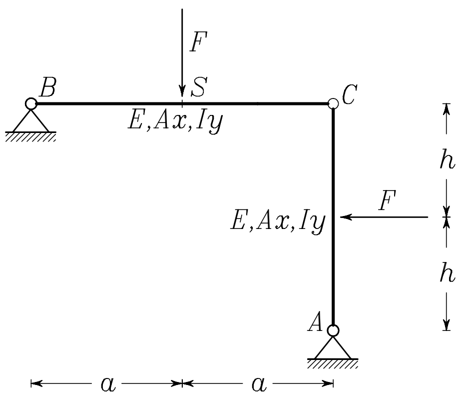


---

2. V telesu, v katerem vlada homogeno **ravninsko deformacijsko stanje (RDS)** v ravnini (x,y) poznamo pomike točk $A(2\text{ m}, 3\text{ m}, 0)$, $B(1\text{ m}, 4\text{ m}, 0)$ in $C(1\text{ m}, 5\text{ m}, 0)$ in sicer $\vec{u}_A = 10^{-4}\text{ m} \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, $\vec{u}_B = 10^{-4}\text{ m} \cdot (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ in $\vec{u}_C = 10^{-4}\text{ m} \cdot (\vec{e}_x)$. Določi tenzorja majhnih deformacij in rotacij v točki A.

---

3. Ravinski okvir na sliki je obtežen z navpično in z vodoravno silo F. **Obvezno določi notranje sile in nariši diagrame notranjih sil**. Z uporabo diferencialnih enačb nosilca ali z uporabo tabel določi tudi vodoravni in navpični pomik točke S na sredini vodoravnega nosilca.
Podatki: $F = 1$ kN, $a = 2$ m, $h = 1.5$ m, $A_x = 100\text{ cm}^2$, $I_y = 5000\text{ cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120%.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES - Rešitve nalog
18. januar 2007

1. Ker je normala ravnine AC tj. $\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ pravokotna na normalo $\vec{e}_1$ je to hkrati normala ravnine v kateri je prisotna ena od glavnih normalnih napetosti npr. $\sigma_{22} = \sigma_{AC} = 5$ MPa. Strižna napetost τ_{AC} je zato enaka nič. Ker imamo ravninsko napetostno stanje v ravnini (x,y), je normalna napetost v ravnini z normalo $\vec{e}_z$ enaka nič. Poznamo torej glavni koordinatni sistem $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ in $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ ter komponete tenzorja napetosti $\sigma_{\alpha\beta}$ v tem koordinatnem sistemu tj.

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{AC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

   Komponete tenzorja napetosti σ_{ij} v kartezijskem koordinatnem sistemu (x,y,z) dobimo potem z enačbo

$$[\sigma_{ij}] = [T]\cdot[\sigma_{\alpha\beta}]\cdot[T]^T =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

   Iz slike vidimo da je normalna napetost $\sigma_{BC} = \sigma_{xx} = 7.5$ MPa, strižna napetost $\tau_{BC} = \sigma_{xy} = 2.5$ MPa. Normalno napetost $\sigma_{AB} = \sigma_{\xi\xi}$ in strižno napetost $\tau_{AB} = \sigma_{\xi\eta}$ pa lahko izračunamo po enačbah ($\alpha = 240°$ je kot, ki ga normala ravnine AB oklepa z osjo x)

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos(2\alpha) + \sigma_{xy}\sin(2\alpha) = 9.6651 \text{ MPa},$$
$$\sigma_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin(2\alpha) + \sigma_{xy}\cos(2\alpha) = -1.2500 \text{ MPa}.$$

   Komponente tenzorja majhnih deformacij dobimo po enačbi

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\nu}{E}I_1^\sigma$$

   Dobimo

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.2625 & 0.1625 & 0 \\ 0.1625 & 0.2625 & 0 \\ 0 & 0 & -0.225 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

   Specifično spremembo površine pa po enačbi $\frac{\Delta S}{S} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0.525 \cdot 10^{-4}$.

2. Ker je stanje homogeno ravninsko deformacijsko lahko pomik poljubne točke zapišemo z enačbo

$$\vec{u}(x,y) = u_x(x,y)\vec{e}_x + u_y(x,y)\vec{e}_y = (a_0 + a_1 x + a_2 y)\vec{e}_x + (b_0 + b_1 x + b_2 y)\vec{e}_y.$$

Iz enačb

$$
\begin{aligned}
u_x(2,3) &= 10^{-4} = a_0 + a_1\,2 + a_2\,3\\
u_x(1,4) &= 10^{-4} = a_0 + a_1\,1 + a_2\,4\\
u_x(1,5) &= 10^{-4} = a_0 + a_1\,1 + a_2\,5\\
u_y(2,3) &= 10^{-4} = b_0 + b_1\,2 + b_2\,3\\
u_y(1,4) &= -10^{-4} = b_0 + b_1\,1 + b_2\,4\\
u_y(1,5) &= 0 = b_0 + b_1\,1 + b_2\,5
\end{aligned}
$$

Izračunamo konstante a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 in b_2 in dobimo

$$\vec{u}(x,y) = 10^{-4} \cdot (\vec{e}_x + (-8 + 3x + y)\vec{e}_y)\,.$$

Od tu z uporabo enačb $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ in $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ neposredno dobimo

$$[\varepsilon_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0\\ 1.5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\omega_{ij}] = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0\\ -1.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Ker je konstrukcija statično določena, notranje sile določimo z znanjem statike. Vodoravni pomik točke S na sredini nosilca označimo z u_S, navpični pa z w_S. Z uporabo diferencialnih enačb nosilca ali z uporabo tabel po krajšem računu dobimo

$$
\begin{aligned}
u_S &= \frac{-aF}{2EA_x} = -0.00005\ \text{cm},\\
w_S &= \frac{F}{6}\left(\frac{3h}{EA_x} + \frac{a^3}{EI_y}\right) = 0.013371\ \text{cm}.
\end{aligned}
$$