Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
7. junij 2005

1. V točki T homogenega, izotropnega, elastičnega telesa poznamo glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22} in pripadajoči normali ravnin $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$ in $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$ delovanja teh napetosti. Prav tako poznamo napetostni vektor $\vec{\sigma}_n = p\,\vec{e}_z$ v točki T, ki deluje v ravnini z normalo $\vec{e}_n = \vec{e}_z$.

- Izračunaj komponente tenzorja napetosti σ_{ij} v točki T v kartezičnem koordinatnem sistemu $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ in $\vec{e}_z$.
- Izračunaj komponente tenzorja majhnih deformacij ε_{ij} v točki T v kartezičnem koordinatnem sistemu $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ in $\vec{e}_z$.
- Izračunaj specifično spremembo volumna ε_V v točki T.

Podatki: $\sigma_{11} = 5$ MPa, $\sigma_{22} = 5$ MPa, $p = 10$ MPa, $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$.

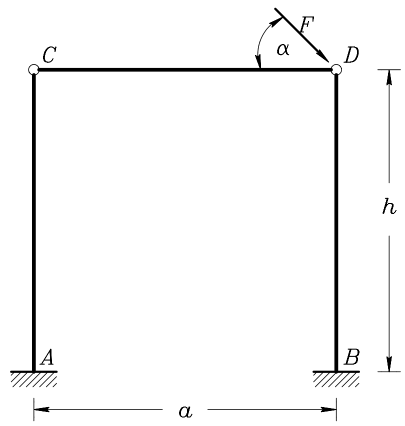
---

2. Kot rešitev mehanskega problema ravninskega telesa po metodi napetosti smo dobili majhne deformacije ε_{ij} kot funkcije telesnih koordinat x in z. Vse točke telesa se premikajo le v ravnini (x,z). Razen tega je v točkah $T_0(0,0,0)$ in $T_1(0,0,10)$ preprečen pomik v smeri x, v točki $T_2(10,0,0)$ pa je preprečen pomik v smeri z. Določi pomika u_x in u_z ter zasuk ω_y kot funkcije koordinat (x,z). Določi vrednost zasukov ω_y v obeh podporah, pomik u_x v točki T_1, ter vrednosti obeh pomikov in zasuka ω_y v točki $T(5,0,0.5)$. Dolžine so podane v m.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= 2x \cdot 10^{-5},\\
\varepsilon_{zz} &= -3z^2 \cdot 10^{-5},\\
\varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{zx} = \left(\frac{3x^2}{2} - z\right) \cdot 10^{-5},\\
\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zy} = 0.
\end{aligned}
$$

---

3. Ravninski okvir na sliki je obtežen s točkovno silo F. Z metodo upogibnice ali uporabo tabel določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil in določi pomik točke C.
Namig: Silo razstavi na komponenti in obravnavaj vsako komponento posebej.
Podatki: $F = 2$ kN, $a = 4$ m, $\alpha = 45^\circ$, $h = 4$ m, $A_x = 200$ cm^2, $I_y = 5000$ cm^4, $E = 2 \cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
7. junij 2005 - namigi in rešitve

1. Ker je ravnina z normalo $\vec{e}_z = \vec{e}_3$ ravnina v kateri je prisotna normalna napetost $\sigma_{33} = p$, poznamo komponente tenzorja napetosti v glavnem koordinatnem sistemu $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$

$$[\sigma_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo osnosimetričnega stanja ali z uporabo enačbe $[\sigma_{ij}] = [T] \cdot [\sigma_{\alpha\beta}] \cdot [T]^T$, kjer smo s $[T]$ označili transformacijsko matriko izračunamo

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Komponente tenzorjev napetosti so v MPa. Do istega rezultata lahko pridemo tudi po drugačnih poteh.
Komponete tenzorja majhnih deformacij dobimo direktno iz enačbe

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1^{\sigma} \delta_{ij}$$

Dobimo

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.000025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000025 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00035 \end{bmatrix}.$$

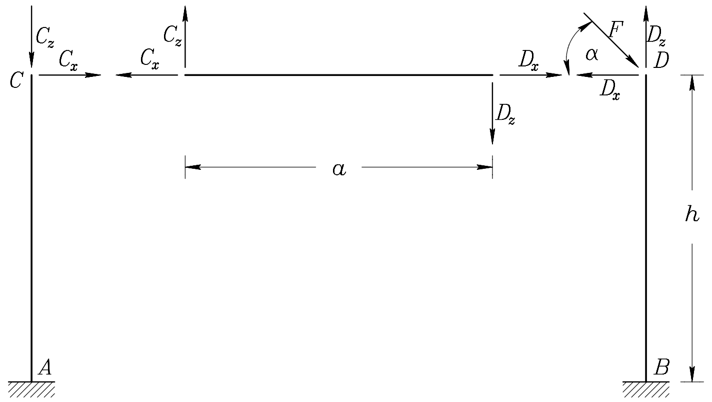
Volumska deformacija $\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0.0004$.
Vprašanja: Zakaj je ravnina z normalo $\vec{e}_z = \vec{e}_3$ ravnina, v kateri je prisotna tretja glavna normalna napetost? Zakaj je tretja glavna normalna napetost enaka p? Kako si pri izračunu lahko pomagamo z osnosimetričnim stanjem? Kako se glasi transformacijska matrika $[T]$?

2. Za postopek glej učbenik iz mehanike trdnih teles, zgled 2.9 ali vaje. Rešitve se glasijo

$$\omega_y = \left(10 - \frac{3x^2}{2} - z\right) \cdot 10^{-5},$$
$$u_x = \left(x^2 + 10z - z^2\right) \cdot 10^{-5},$$
$$u_z = \left(-900 - 10x + x^3 - z^3\right) \cdot 10^{-5}.$$

Pomiki so v m. Preveri ali rešitve zadoščajo kinematičnim enačbam in robnim pogojem v nalogi.

3. Konstrukcijo razrežemo kot prikazuje slika.



Najprej napišemo ravnotežne enačbe. Dobimo $C_z = D_z = 0$, $C_x = D_x = N$, kjer smo z N označili neznano osno silo v palici CD. Osno silo N lahko izračunamo iz pogoja, da bo horizontalni pomik vozlišča D enak horizontalnemu pomiku vozlišča C in raztezku palice CD. Z uporabo tabel dobimo

$$u_x(D) = \left(F\frac{\sqrt{2}}{2} - N\right)\frac{h^3}{3EI_y} = N\frac{h^3}{3EI_y} + N\frac{a}{EA_x}.$$

Od tu izračunamo $N = 0.7069$ kN, $u_x(C) = 0.1508$ cm, $u_z(C) = 0$.