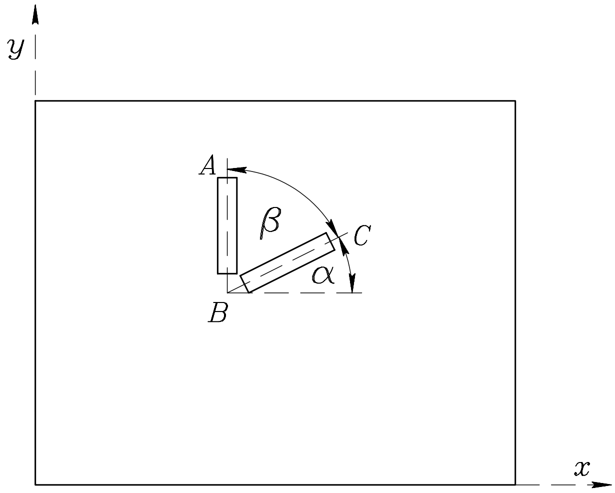
# Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES

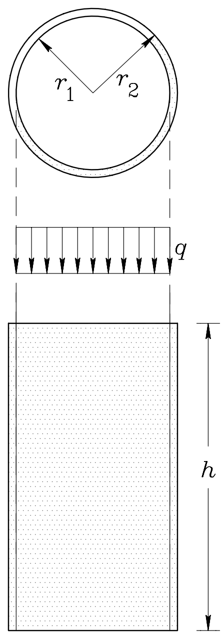
# 18. marec 2005

**1.** V tanki pravokotni steni debeline $d$ vlada homogeno ravninsko napetostno stanje. Z merilnimi lističi izmerimo deformacije $\varepsilon_{AB} = 0.0002$ in $\varepsilon_{BC} = 0.0001$. Kot $\beta = 60^\circ$ se pri deformiranju ne spremeni. Točka $B(2\text{ cm}, 3\text{ cm}, 0)$ se pri deformiranju ne premakne in njena okolica se ne zasuče. Določi novi legi točk $A(2\text{ cm}, 4\text{ cm}, 0)$ in $C(\sqrt{3} + 2\text{ cm}, 4\text{ cm}, 0)$. Izračunaj komponente tenzorja deformacij in tenzorja napetosti v kartezičnem koordinatnem sistemu. Za koliko se spremeni debelina stene?
**Podatki**: $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $d = 1$ cm, $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$.



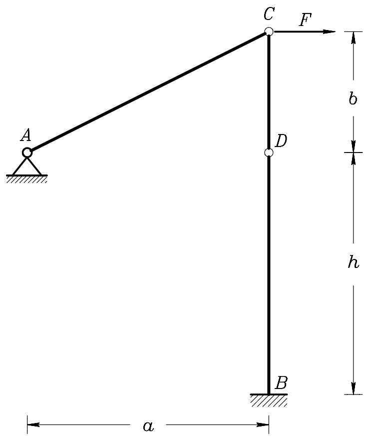

---

**2.** Homogen aluminijast valj polmera $r_1$ in višine $h$ tesno brez trenja vstavimo v bakreno cev notranjega polmera $r_1$, zunanjega polmera $r_2$ in višine $h$. Valj nato na gornji ploskvi obtežimo z enakomerno zvezno površinsko obtežbo $q$ kot kaže slika. Izračunaj posedek valja in napetosti v valju in cevi. Za koliko moramo povečati obtežbo, da bo po Misesovem kriteriju nastopilo plastično tečenje? Kje se bodo pojavile prve plastične deformacije? V cevi ali v valju? Trenje med valjem in cevjo zanemari.
**Podatki**: $q = 40$ MPa, $E_{\mathrm{Al}} = 72\,000$ MPa, $\nu_{\mathrm{Al}} = 0.34$, $\sigma_{Y_{Al}} = 50$ MPa, $E_{\mathrm{Cu}} = 115\,000$ MPa, $\nu_{\mathrm{Cu}} = 0.34$, $\sigma_{Y_{Cu}} = 120$ MPa, $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 5.1$ cm, $h = 20$ cm.




---

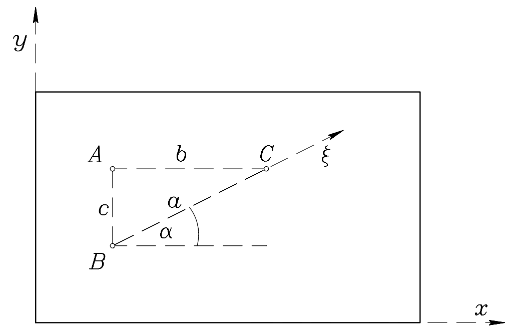
**3.** Ravninski okvir na sliki je obtežen s točkovno silo $F$. Z metodo upogibnice ali uporabo tabel <u>**obvezno določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil**</u> in določi pomik točke $C$.
**Podatki**: $F = 2$ kN, $a = 4$ m, $b = 2$ m, $h = 4$ m, $A_x = 200\text{ cm}^2$, $I_y = 5000\text{ cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



# Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES - namigi in vprašanja
# 18. marec 2005

**Naloga 1:**

Tenzor majhnih deformacij bomo izračunali z opazovanjem deformacij trikotnika $ABC$ na sliki. Po deformaciji trikotnik $ABC$ preide v trikotnik $A'B'C'$. Označimo dolžine stranic $c = |AB|$, $b = |AC|$ in $c = |BC|$, ter $c' = |A'B'|$, $b' = |A'C'|$ in $c' = |B'C'|$. Poznamo deformacijo $\varepsilon_{BC} = \varepsilon_{\xi\xi}$ in s tem novo dolžino $a' = (1 + \varepsilon_{\xi\xi})\,a$. Prav tako poznamo deformacijo $\varepsilon_{BC} = \varepsilon_{yy}$ in s tem tudi novo dolžno $c' = (1 + \varepsilon_{yy})\,c$. Kot $\beta$ med stranicama $AB$ in $BC$ se po deformaciji ohrani torej je to tudi kot med stranicama $A'B'$ in $B'C'$. Pri deformiranem trikotniku poznamo dolžini stranic $a'$, $c'$ in kot $\beta$ med njima, zato lahko po kosinusnem izreku izračunamo dolžino $b'$. Prav tako iz slike razberemo dolžino $b$. Vemo (zakaj?)




$$\varepsilon_{xx} = \frac{b' - b}{b}.$$

Od tenzorja deformacij poznamo $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$ in $\varepsilon_{\xi\xi}$, torej lahko izračunamo $\varepsilon_{xy}$, z uporabo konstitucijskih enačb pa še $\varepsilon_{zz}$. Komponente tenzorja napetosti dobimo iz konstitucijskih enačb

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\,I_1^{\varepsilon}, \text{ kjer so}$$
$$\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)},\ \lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\,\nu)},\ I_1^{\varepsilon} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Ker se točka $B$ pri deformiranju ne premakne in se njena okolica ne zasuče veljata enačbi

$$\vec{u}(B) = \vec{0} \text{ in } \vec{\omega}(B) = \vec{0}.$$

Pomike in zasuke potem lahko določimo po postopku iz zgleda 2.9 v učbeniku Mehanika trdnih teles.
Na spodnja vprašanja odgovori takoj (pred pričetkom reševanja naloge):

- Zakaj si pri reševanju naloge nismo pomagali z $\varepsilon_{y\xi}$? Kaj predstavlja $\varepsilon_{y\xi}$? Ai bi si s to količino lahko kaj pomagali? Kako?
- Ali lahko iz podatka, da se kot $\beta$ ne spremeni in da je zasuk $\vec{\omega}(B) = \vec{0}$ lahko sklepamo, da je tudi $\varepsilon_{xy} = 0$?
- Ali se točka $A$ premakne lahko samo v navpični smeri ali se premakne tudi v vodoravni?
- Ali se trikotnik $ABC$ pri deformiranju lahko zasuče okrog točke $B$ ali se ne more, glede na to, da je $\vec{\omega}(B) = \vec{0}$?
- Zakaj trikotnik $ABC$ po deformaciji preide spet v trikotnik $A'B'C'$?

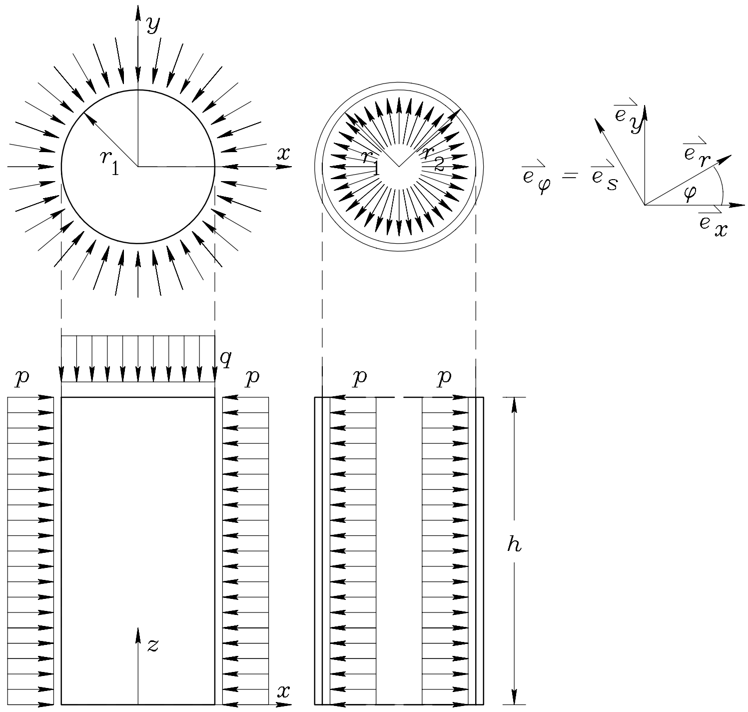
Z uporabo namigov in podatkov v nalogi poišči odgovore na gornja vprašanja in jih primerjaj s prvotnimi odgovori.

**Naloga 2:**

Po obremenitvi se hoče valj razširiti v vodoravni smeri, zato pritisne na cev s tlakom $p$, cev pa po zakonu akcije in reakcije z istim tlakom nazaj. Pri dani obtežbi $q$ izračunamo napetosti v valju $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p$, $\sigma_{zz} = -q$. Napetosti v cevi na notranjem robu so $\sigma_{rr} = -p$, $\sigma_{zz} = 0$ in po kotelni formuli $\sigma_{ss} = \frac{pr_1}{\delta}$, kjer smo z $\delta = r_2 - r_1$ označili debelino cevi. V nadaljevanju upoštevamo pomembno zvezo

$$\varepsilon_{ss}^{\text{cevi}} = \varepsilon_{xx}^{\text{valja}}.$$

Iz te zveze lahko izračunamo napetost $p$. V drugem delu je poleg neznane napetosti $p$ neznana tudi velikost površinske obtežbe $q$. Imamo pa še eno dodatno enačbo tj. Misesov pogoj tečenja. Kje? V valju ali v cevi?

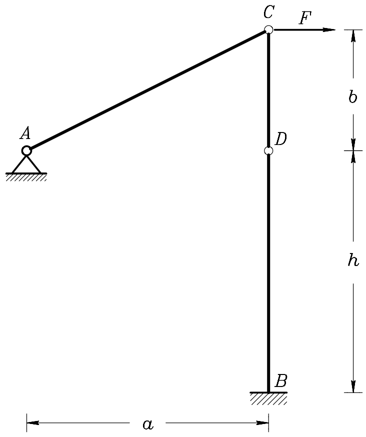



Na spodnja vprašanja odgovori takoj (pred pričetkom reševanja naloge):

- Zakaj velja zveza
$$\varepsilon_{ss}^{\text{cevi}} = \varepsilon_{xx}^{\text{valja}}?$$
Namig: glej učbenik Mehanika trdnih teles, str. 432. Zakaj ne velja zveza
$$\varepsilon_{rr}^{\text{cevi}} = \varepsilon_{xx}^{\text{valja}}?$$
Kaj že predstavljata $\varepsilon_{rr}^{\text{cevi}}$ in $\varepsilon_{ss}^{\text{cevi}}$?
- Zakaj pri valju veljajo zveze $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}$? Zakaj pri obravnavi valja lahko uporabljamo katrezični koordinatni sistem? Namig: Kako izgleda tenzor napetosti v kartezičnem in v poljubno zavrtenem koordinatnem sistemu okrog osi $z$?
- Kaj predstavljajo napetosti $\sigma_{rr}$ in $\sigma_{\varphi\varphi}$ pri valju?
- Kakšne zveze veljajo med deformacijami $\varepsilon_{xx}^{\text{valja}}$, $\varepsilon_{xx}^{\text{valja}}$, $\varepsilon_{rr}^{\text{valja}}$ in $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{\text{valja}}$? Ali so tudi te enake med sabo ali ne? Pri cevi velja $\varepsilon_{rr}^{\text{cevi}} \neq \varepsilon_{ss}^{\text{cevi}}$.
- Cev se v $x$ in $y$ smeri raztegne? Ali bo zato $\varepsilon_{rr}^{\text{cevi}} > 0$ ali mogoče ne? Zakaj?
- Kje najprej pričakuješ začetek plastičnega tečenja? V cevi ali v valju? Zakaj? Namig: Kje so večje napetosti? Zakaj?

Z uporabo namigov in podatkov v nalogi poišči odgovore na gornja vprašanja in jih primerjaj s prvotnimi odgovori.

**Naloga 3:**
Konstrukcija je statično določena, zato notranje sile določimo z uporabo statike. Konstrukcija je sestavljena iz paličja $ACD$ in konzole $BD$. Ker poznamo notranje sile lahko z uporabo tabel določimo pomik točke $D$ kot prostega krajišča konzole $BD$. Pomik točke $C$ potem lahko določimo kot pomik vozlišča $C$ paličja $ACD$ s podporami $A$ in $D$ z znanim pomikom podpore $D$.



# Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES - rešitve
# 18. marec 2005

**1.** Deformacije $\varepsilon_{xy} = -0.00002887$, $\varepsilon_{zz} = -0.0001286$.
Napetosti $\sigma_{xx} = 3.5165\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{xy} = -0.4441\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ in $\sigma_{yy} = 5.0550\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.
Ostale napetosti so enake nič.

**2.**

- $q = 4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$**:** $p = 0.04227\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. Napetosti $\sigma_{xx}^{\text{valja}} = -0.04227\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{yy}^{\text{valja}} = -0.04227\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{zz}^{\text{valja}} = -4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{rr}^{\text{cevi}} = -0.04227\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\sigma_{ss}^{\text{cevi}} = 2.1133\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.
  Deformacije $\varepsilon_{xx}^{\text{valja}} = 0.000185$, $\varepsilon_{yy}^{\text{valja}} = 0.000185$, $\varepsilon_{zz}^{\text{valja}} = -0.000552$, $\varepsilon_{ss}^{\text{cevi}} = 0.000185$, $\varepsilon_{zz}^{\text{cevi}} = -0.0000612$.

**3.** Pomik $u_C = 0.000354$ cm, $w_C = 0.00015$ cm.