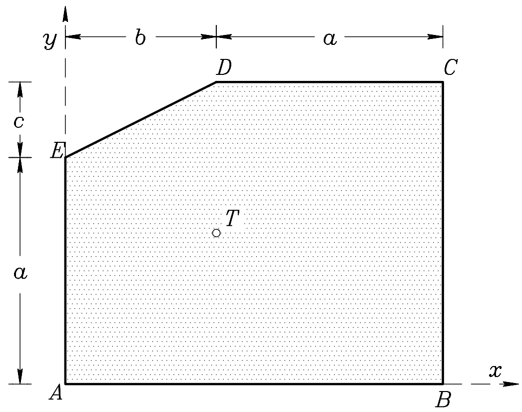
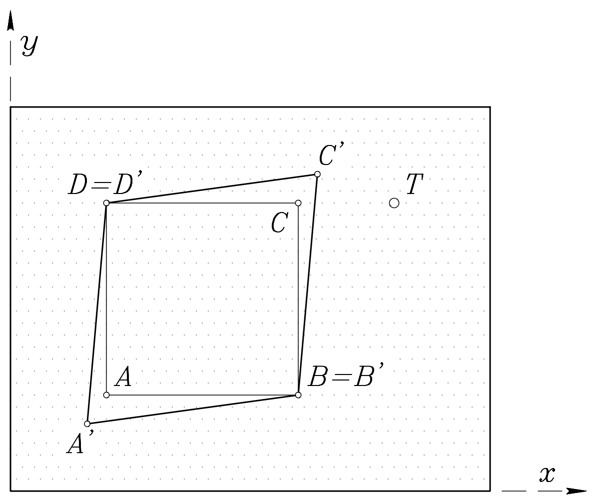
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES (skupina A)
21. januar 2005

1. V steni na sliki vlada homogeno ravninsko napetostno stanje (RNS). V točki T poznamo glavno napetost $\sigma_{11} = 10\,\text{MPa}$, ki deluje v ravnini z normalo $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_x + \frac{1}{2}\,\vec{e}_y$. Prav tako pozamo tudi velikost ekstremne strižne napetosti τ_I v točki T, tj. $|\tau_I| = 5$ MPa. Izračunaj komponete tenzorja napetosti v kartezičnem koordinatnem sistemu in specifično spremembo volumna ε_V v točki T. Ali je rešitev več? Koliko? Odgovor utemelji. Ob predpostavki homogenega napetostnega stanja izračunaj tudi obtežbo na delu robu DE, ki je pripada danemu napetostnemu stanju. Lastno težo stene zanemari.
Namig: Pri reševanju naloge si lahko pomagaš z Mohrovimi krogi.
Podatki: $a = 3$ m, $b = 2$ m, $c = 1$ m, $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$.



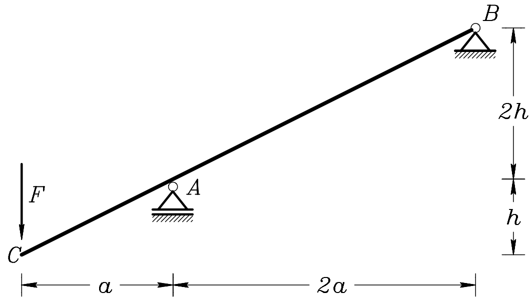
---

2. V steni na sliki vlada homogeno ravninsko deformacijsko stanje (RDS). Točki $B(5a, 2a, 0)$ in $D(2a, 5a, 0)$ po deformaciji ostaneta na svojem mestu, točka $A(2a, 2a, 0)$ preide v točko $A'(2a - \Delta a, 2a - \Delta b, 0)$, točka $C(5a, 5a, 0)$ pa v točko $C'(5a + \Delta a, 5a + \Delta b, 0)$. Izračunaj komponente tenzorjev majhnih in velikih deformacij. Določi prostorske koordinate točke $T(7a, 5a, 0)$ po deformaciji. **Podatki**: $E = 72\,000$ MPa, $\nu = 0.34$, $a = 10$ cm, $\Delta a = 0.001$ cm, $\Delta b = 0.002$ cm.



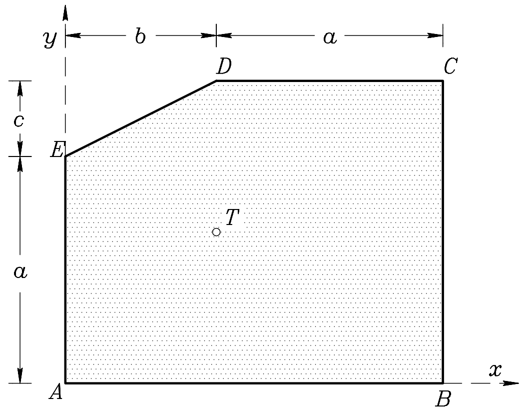
---

3. Ravninski nosilec na sliki je obtežen z navpično silo F. Z metodo upogibnice ali uporabo tabel določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil in določi pomik točke C.
Podatki: $a = 4$ m, $h = 2$ m, $F = 5$ kN, $A_x = 200\,\text{cm}^2$, $I_y = 5000\,\text{cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^4\,\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



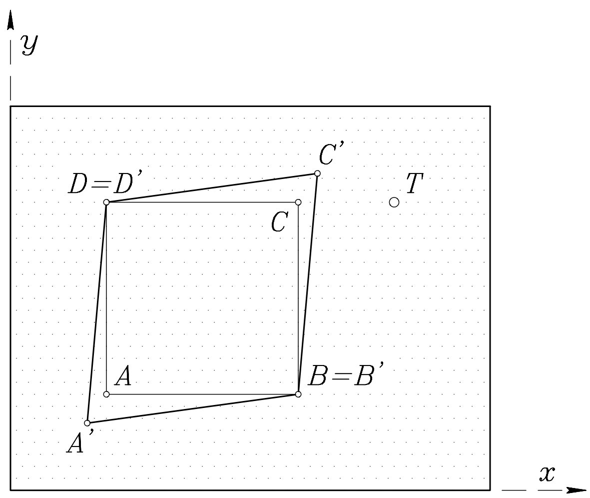
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES (skupina B)
21. januar 2005

1. V steni na sliki vlada homogeno ravninsko napetostno stanje (RNS). V točki T poznamo glavno napetost $\sigma_{11} = 10$ MPa, ki deluje v ravnini z normalo $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_x + \frac{1}{2}\,\vec{e}_y$. Prav tako pozamo tudi velikost ekstremne strižne napetosti τ_I v točki T, tj. $|\tau_I| = 5$ MPa. Izračunaj komponete tenzorja napetosti v kartezičnem koordinatnem sistemu in specifično spremembo volumna ε_V v točki T. Ali je rešitev več? Koliko? Odgovor utemelji. Ob predpostavki homogenega napetostnega stanja izračunaj tudi obtežbo na delu robu DE, ki je pripada danemu napetostnemu stanju. Lastno težo stene zanemari.
Namig: Pri reševanju naloge si lahko pomagaš z Mohrovimi krogi.
Podatki: $a = 3$ m, $b = 2$ m, $c = 1$ m, $E = 72\,000$ MPa, $\nu = 0.34$.



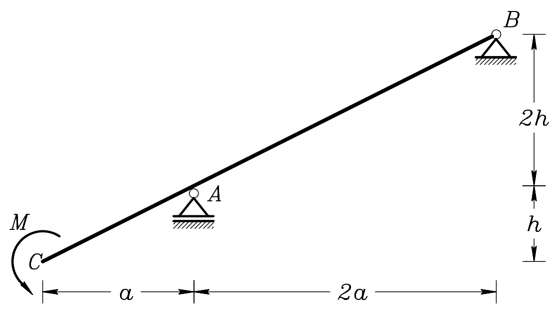
---

2. V steni na sliki vlada homogeno ravninsko deformacijsko stanje (RDS). Točki $B(5a,2a,0)$ in $D(2a,5a,0)$ po deformaciji ostaneta na svojem mestu, točka $A(2a,2a,0)$ preide v točko $A'(2a-\Delta a, 2a-\Delta b, 0)$, točka $C(5a,5a,0)$ pa v točko $C'(5a+\Delta a, 5a+\Delta b, 0)$. Izračunaj komponente tenzorjev majhnih in velikih deformacij. Določi prostorske koordinate točke $T(7a,5a,0)$ po deformaciji. **Podatki**: $E = 200\,000$ MPa, $\nu = 0.3$, $a = 10$ cm, $\Delta a = 0.001$ cm, $\Delta b = 0.002$ cm.



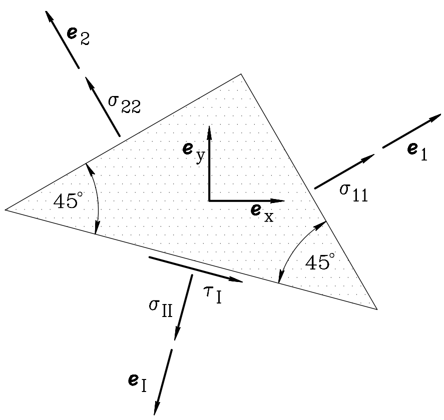
---

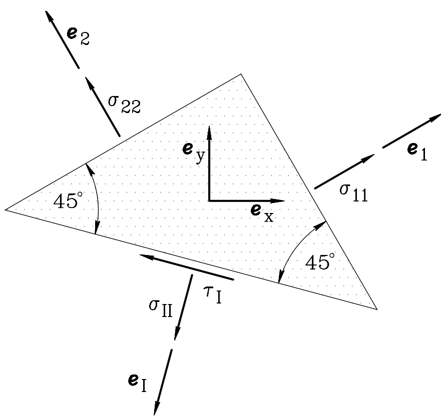
3. Ravninski nosilec na sliki je obtežen z momentom M. Z metodo upogibnice ali uporabo tabel določi notranje sile, nariši diagrame notranjih sil in določi pomik točke C.
Podatki: $a = 4$ m, $h = 2$ m, $M = 5$ kNm, $A_x = 200\ \text{cm}^2$, $I_y = 5000\ \text{cm}^4$, $E = 2\cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



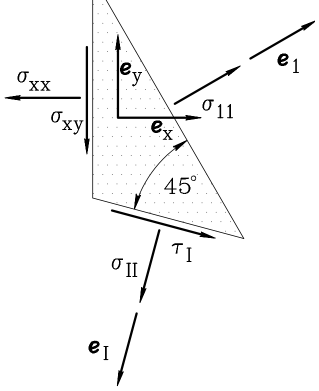
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
21. januar 2005 - namigi

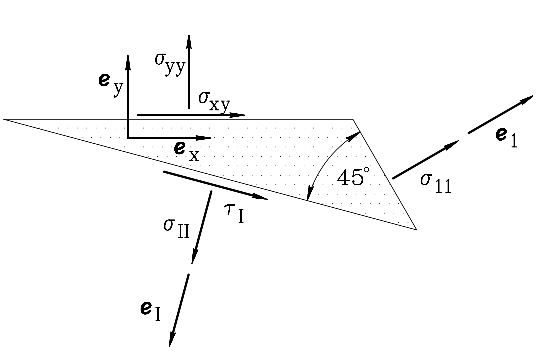
1. Nalogo lahko rešimo na več načinov:
Uporaba osnovnih enačb MTT:
Po enačbi $\tau_I = \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{33})$ dolo čimo še drugo glavno normalno napetost v ravnini xy. Bolj kot enačba sama je pomembna fizikalna vsebina enačbe. Iz zgleda 1.17 v učbeniku (normala $\vec{e}_I = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, pripadajoči napetostni vektor $\vec{\sigma}_I = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_3)$ in slika) vidimo, da vsi vektorji $\vec{e}_I$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{\sigma}_I$, $\vec{\sigma}_1$ in $\vec{\sigma}_2$ ležijo v isti ravnini, zaradi ravninskega napetostnega stanja samo v ravnini xy. Pri uporabi gornje enačbe moramo upoštevati, da imamo zaradi ravninskega napetostnega stanja prisotne od nič različne samo eno strižno ekstremno napetost τ_I in dve glavni normalni napetosti σ_{11} in σ_{22}. Zato gornjo enačbo v našem primeru pripišemo v $\tau_I = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})$.
Sedaj imamo dve možnosti. Z upoštevanjem $\tau_I = -5$ MPa, dobimo eno rešitev za σ_{22}, z upoštevanjem $\tau_I = 5$ MPa pa še drugo rešitev. Imamo homogeno **ravninsko napetostno stanje**. Kakšna je zato tretja glavna normalna napetost σ_{33}? Kakšne so napetosti σ_{zz}, σ_{xz} in σ_{yz}? Kako je to razvidno iz ravnotežnih enačb na ploskvi z normalo e_z? (Pozoren bralec bo ugotovil, da smo na nakatera vprašanja že odgovorili).
Ko napetosti σ_{22} in σ_{33} poznaš, lahko določiš komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{\alpha\beta}]$ v glavnem koordinatnem sistemu v bazi $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$. V kakšnem odnosu so vektorji $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ med seboj?
Komponente tenzorja napetosti $[\sigma_{ij}]$ v kartezičnem koordinatnem sistemu lahko določiš po enačbi $[\sigma_{ij}] = [T]\cdot[\sigma_{\alpha\beta}]\cdot[T]^T$. Kaj predstavljao stolpci transformacijske matrike $[T]$?
Specifično spremembo volumna ε_V lahko določiš po enačbi $\varepsilon_V = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ ali po enačbi $\varepsilon_V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$. Ali sta deformaciji ε_{zz} in ε_{33} različni od nič? Zakaj?
V kakšnem odnosu je obtežni vektor $\vec{p}_{DE}$ na robu z vektorjem napetosti $\vec{\sigma}_{BC}$? Napetostni vektor $\vec{\sigma}_{DE}$ lahko izračunaš z uporabo Cauchyeve enačbe.
Uporaba statike (obravnavamo ravnotežje izrezanih delov):
Določitev σ_{22} za obe rešitvi:
Ravnine ekstremnih strižnih napetosti oklepajo z ravninami glavnih normalnih napetosti kot 45°. Ravnine glavnih normalnih napetosti so med seboj pravokotne. Iz plošče izrežemo dva trikotnika konstantne debeline (glej sliko) in iz dveh ravnotežnih enačbi (momentni pogoj je glede na središče daljše daljice identično izpolnjen) določimo neznani napetosti σ_{22} in σ_{II} v obeh primerih.



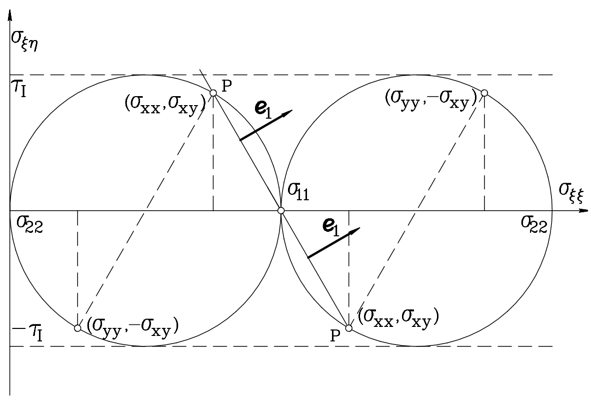


Določitev $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ za eno od rešitev:
Napetosti σ_{xx}, σ_{xy} in σ_{yy} določimo direktno iz ravnotežnih enačb. V prvem primeru na levi sliki spodaj iz treh ravnotežnih enačb izračunamo σ_{xx}, σ_{xy} in σ_{II}, nato pa iz ene od ravnotežnih enačb desne slike še σ_{yy}.





Uporaba Mohrovih krogov:
Na spodnji sliki sta prikazani obe rešitvi.



---

2. Nalogo lahko rešimo na več načinov:
Določitev deformacij z odvajanjem pomikov:
Ker je deformacijsko stanje homogeno, so deformacije konstante po vsem telesu, torej sta pomika u_x in u_y linearni funkciji od x in y tj. $u_x = a_0 + a_1 x + a_2 y$, $u_y = b_0 + b_1 x + b_2 y$. Iz poznanih pomikov točk B, D in A lahko določimo konstante a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 in b_2. Za določitev pomika u_x je potrebno rešiti sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}
u_x(2a,2a) &= -\Delta a = a_0 + a_1\, 2a + a_2\, 2a, \\
u_x(5a,2a) &= 0 = a_0 + a_1\, 5a + a_2\, 2a, \\
u_x(2a,5a) &= 0 = a_0 + a_1\, 2a + a_2\, 5a.
\end{aligned}$$

Kakšen sistem linearnih enačb je potrebno rešiti za določitev pomika u_y? Tenzor velikih in majhnih deformacij določimo z odvajanjem pomikov u_x in u_y.
Preveri, da tudi predpisana pomika točke C ustrezata izračunanima pomikoma. Ali bi bilo deformacijsko stanje še homogeno, če predpisana pomika točke C ne bi ustrezala izračunanima?
Določitev deformacij po definiciji iz slike:
Iz slike odčitamo

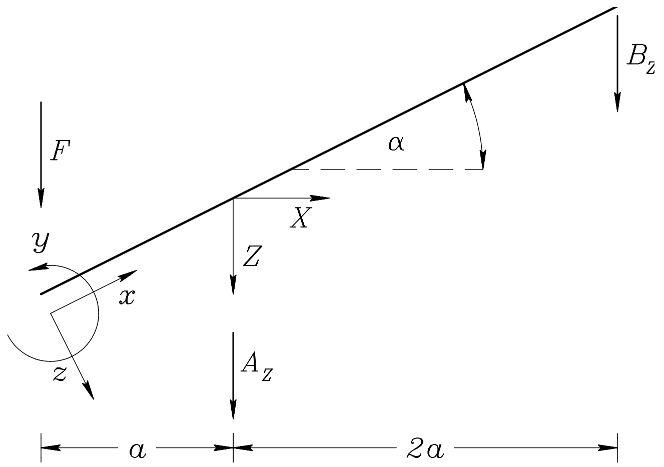
$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx} &= \frac{\Delta a}{3\,a} \approx \frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|}, \\
\frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\Delta b}{3\,a} \approx \frac{|B'C'| - |BC|}{|BC|}, \\
\frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\Delta a}{3\,a}, \\
\frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\Delta b}{3\,a}, \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \angle D'AB'\right).
\end{aligned}$$

Tenzor velikih deformacij določimo neposredno po definiciji, pomike in zasuke točke T pa iz enačb

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}(T) &= \vec{\omega}(T_0) + \int_{T_0}^{T} \vec{\nabla} \times \vec{\varepsilon}_x\, dx + \int_{T_0}^{T} \vec{\nabla} \times \vec{\varepsilon}_y\, dy, \\
\vec{u}(T) &= \vec{u}(T_0) + \int_{T_0}^{T} (\varepsilon_x + \vec{\omega} \times \vec{e}_x)\, dx + \int_{T_0}^{T} (\varepsilon_y + \vec{\omega} \times \vec{e}_y)\, dx,
\end{aligned}$$

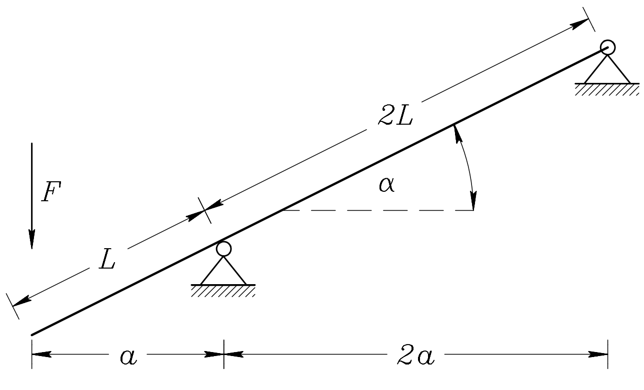
kjer za točko T_0 izberemo poljubno (npr. koordinatno izhodišče), zasuk $\vec{\omega}(T_0)$ in pomik $\vec{u}(T_0)$ pa določimo iz pogojev $\vec{u}(B) = \vec{0}$ in $\vec{u}(D) = \vec{0}$. Ali lahko iz pomikov $\vec{u}(B) = \vec{0}$ in $\vec{u}(D) = \vec{0}$ sklepamo, da je zasuk poljubne točke $\vec{\omega}(T) = \vec{0}$?

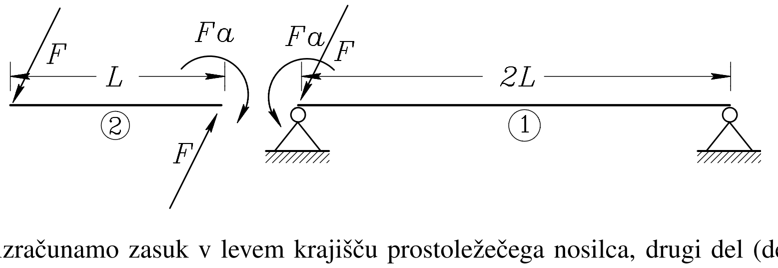
3. Konstrukcija je statično določena. Notranje sile določimo z znanjem statike.



Najprej iz ravnotežnih enačb konstrukcije izračunamo reakciji A_Z in B_Z. Potek upogibnih momentov M_y po nosilcu opišemo z uporabo Heavisideove funkcije. Potek osnih sil N_x po nosilcu prav tako opišemo z uporabo Heavisideove funkcije. Nato poiščemo splošni rešitvi enačb $EI_y w'' = -M_y$ in $EA_x u' = N_x$. V splošnih rešitvah nastopajo tri neznane konstate C_1,C_2 in C_3, ki jih, glede na koordinatni sistem na sliki, določimo iz treh robnih pogojev in sicer iz preprečenega pomika na koncu nosilca $u(\frac{3a}{\cos\alpha}) = 0$ in $w(\frac{3a}{\cos\alpha}) = 0$ in preprečenega pomika v smeri Z v levi podpori, ki ga opišemo z enačbo $\vec{u}(\frac{3a}{\cos\alpha}) \cdot \vec{e}_Z = 0$. Vekor $\vec{u} = u\vec{e}_x + w\vec{e}_z$, kjer imata vektorja $\vec{e}_x$ in $\vec{e}_z$ smer lokalnega koordinatega sistema xz na sliki. Komponenti pomika točke C v lokalnem koordinatnem sistemu xz podajata količini $u(0)$ in $w(0)$, v globalnem koordinatnem sistemu XZ ju izračunamo iz enačb $\vec{u}(0) \cdot \vec{e}_X$ in $\vec{u}(0) \cdot \vec{e}_Z$.

Približno lahko nalogo rešimo, če pri izračunu upoštevamo samo upogibno togost nosilca (privzamemo da se nosilec v vzdolžni smeri zaradi delovanja osnih sil nič ne skrči $A_x = \infty$). V tem primeru opazimo, da se podpora A ne premakne. Nalogo lahko potem poenostavimo, kot prikazuje spodnja slika in pri izračunu uporabimo tabele.





Z uporabo tabel najprej izračunamo zasuk v levem krajišču prostoležečega nosilca, drugi del (del 2) pa obravnavamo kot konzolo "vpeto" v desnem krajišču, katere zasuk desnega krajišča je enak zasuku levega krajišča prostolečega nosilca. Tako lahko hitro določimo pomik levega krajišča drugega dela v lokalnem koordinatnem sistemu tj. količini $u(0)$ in $w(0)$. Podobno lahko postopamo tudi reševanju tretje naloge skupine B.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
21. januar 2005 - rešitve

1. Rešitvi skupin A in B se razlikujeta v volumski deformaciji ε_V.

- **Prva rešitev: (lokalni maksimum)** Druga glavna normalna napetost $\sigma_{22} = 0$ MPa, $\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$, Matrika, ki predstavlja tenzor deformacij v KKS je $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 7.5 & 4.3301 \\ 4.3301 & 2.5 \end{bmatrix}$. Komponetne v matriki so v MPa. Volumska deformacija (skupina A) $\varepsilon_V =$, (skupina B) $\varepsilon_V = 0.00004444$. Napetostni vektor $\vec{\sigma}_{DE}$ na robu DE je enako obteženemu vektorju $\vec{p}_{DE} = 0.5189\vec{e}_x + 0.2996\vec{e}_y$. Komponente vektorja so v MPa.

- **Druga rešitev: (sedlo)** Druga glavna normalna napetost $\sigma_{22} = 20$ MPa, $\vec{e}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$, Matrika, ki predstavlja tenzor deformacij v KKS je $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 12.5 & -4.3301 \\ -4.3301 & 17.5 \end{bmatrix}$. Komponetne v matriki so v MPa. Volumska deformacija (skupina A) $\varepsilon_V =$, (skupina B) $\varepsilon_V = 0.00013333$. Napetostni vektor $\vec{\sigma}_{DE}$ na robu DE je enako obteženemu vektorju $\vec{p}_{DE} = -9.463\vec{e}_x + 17.589\vec{e}_y$. Komponente vektorja so v MPa.

---

2. Obe skupini imata enake rešitve.
Pomika sta $u_x = -\frac{7\Delta a}{3} + \frac{\Delta a}{3a}x + \frac{\Delta a}{3a}y$, $u_y = -\frac{7\Delta b}{3} + \frac{\Delta b}{3a}x + \frac{\Delta b}{3a}y$.
Tenzor majhnih deformacij

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta a}{3a} & \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a}{3a} + \frac{\Delta b}{3a}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a}{3a} + \frac{\Delta b}{3a}\right) & \frac{\Delta b}{3a} \end{bmatrix},$$

tenzor velikih deformacij

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{6\,a\,\Delta a + \Delta a^2 + \Delta b^2}{18\,a^2} & \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + 3\,a\,(\Delta a + \Delta b)}{18\,a^2} \\ \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + 3\,a\,(\Delta a + \Delta b)}{18\,a^2} & \frac{\Delta a^2 + 6\,a\,\Delta b + \Delta b^2}{18\,a^2} \end{bmatrix}$$

in pomik točke T, $\vec{u}(T) = \frac{5\Delta a}{3}\vec{e}_x + \frac{5\Delta b}{3}\vec{e}_y$.

3.

- **skupina A**
  Pomik točke C v lokalnem koordinatnem sistemu $\vec{u}(C) = 0\,\text{cm}\,\vec{e}_x + 4.0002\,\text{cm}\,\vec{e}_z$. Pomik točke C v globalnem koordinatnem sistemu $\vec{u}(C) = 1.7889\,\text{cm}\,\vec{e}_X + 3.5779\,\text{cm}\,\vec{e}_Z$.

- **skupina B**
  Pomik točke C v lokalnem koordinatnem sistemu $\vec{u}(C) = 0.0001\,\text{cm}\,\vec{e}_x + 1.1667\,\text{cm}\,\vec{e}_z$. Pomik točke C v globalnem koordinatnem sistemu $\vec{u}(C) = 0.5218\,\text{cm}\,\vec{e}_X + 1.0435\,\text{cm}\,\vec{e}_Z$.