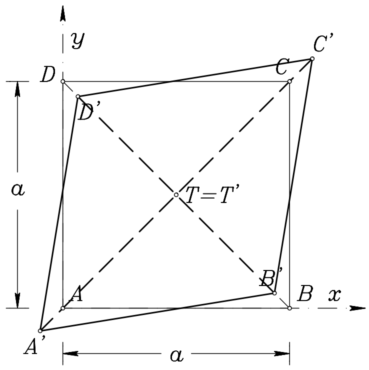
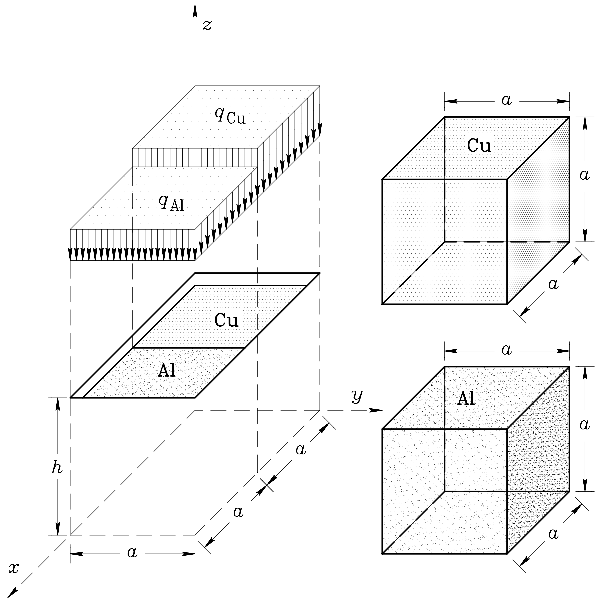
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES
5. februar 2004

1. Tanka plošča dimenzij $a \times a \times d$ se defororrmira kot prikazuje slika. Nedeformirano ploščo na sliki predstavlja kvadrat $ABCD$, deformirano pa romb $A'B'C'D'$. Pri tem se diagonala AC podaljša za 0.001 cm, diagonala BD se skrajša za 0.001 cm, debelina plošče pa zmanjša za 0.0001 cm. Pravi kot CTD se po deformaciji ohrani, deformaciji ε_{xz} in ε_{yz} pa sta enaki nič. Pomik in zasuk točke $T(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ sta enaka $\vec{0}$.
Določi tenzor majhnih deformacij v kartezijskem koordinatnem sistemu in vektor pomikov poljubne točke na plošči. Pri računu predpostavi homogeno deformacijsko stanje.
Podatki: $a = 1$ m, $d = 10$ cm.



---

2. V togi podlagi je narejena luknja dimenzij $2\,a \times a \times h$. Vanjo brez trenja vstavimo aluminijasto kocko (Al) in bakreno kocko (Cu) enakih dimenzij $a \times a \times a$.
Določi velikost zveznih obtežb q_{Al} in q_{Cu}, pri katerih nastopi po von Misesovem kriteriju začetek plastičnega tečenja hkrati v obeh kockah. Napiši vse potrebne enačbe in določi tenzorja napetosti za obe kocki (resitev a),b),c) ali d)). Pri računu v vsaki kocki predpostavi homogeno napetostno stanje. Trenje med kockama in luknjo in trenje med kockama zanemari.
Podatki: $a = 10$ cm, $h = 10.001$ cm, $E_{\mathrm{Al}} = 72\,000$ MPa, $E_{\mathrm{Cu}} = 115\,000$ MPa, $\nu_{\mathrm{Al}} = \frac{1}{3}$, $\nu_{\mathrm{Cu}} = \frac{1}{3}$, $\sigma_{Y_{\mathrm{Al}}} = 50$ MPa, $\sigma_{Y_{\mathrm{Cu}}} = 120$ MPa.
Med rešitvami a),b),c) in d) so tri napačne. Katere tri so to? Utemelji odgovor! (napetosti so v $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.)



a) $\sigma_{ij}^{Al} = \begin{bmatrix} -7.60 & 0 & 0 \\ 0 & -6.53 & 0 \\ 0 & 0 & -11.98 \end{bmatrix}, \sigma_{ij}^{Cu} = \begin{bmatrix} -7.60 & 0 & 0 \\ 0 & -9.32 & 0 \\ 0 & 0 & -20.37 \end{bmatrix}$

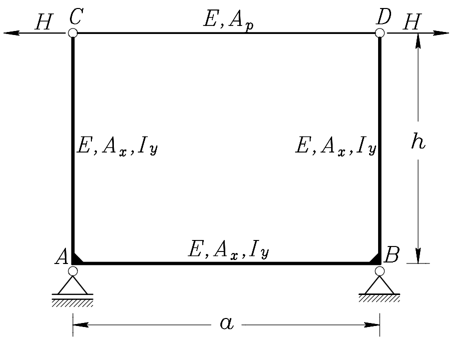
b) $\sigma_{ij}^{Al} = \begin{bmatrix} -7.60 & 0 & 0 \\ 0 & -6.53 & 0 \\ 0 & 0 & -11.98 \end{bmatrix}, \sigma_{ij}^{Cu} = \begin{bmatrix} 7.60 & 0 & 0 \\ 0 & -9.32 & 0 \\ 0 & 0 & -20.37 \end{bmatrix}$

c) $\sigma_{ij}^{Al} = \begin{bmatrix} -3.60 & 0 & 0 \\ 0 & -2.53 & 0 \\ 0 & 0 & -7.98 \end{bmatrix}, \sigma_{ij}^{Cu} = \begin{bmatrix} -3.60 & 0 & 0 \\ 0 & -5.32 & 0 \\ 0 & 0 & -16.37 \end{bmatrix}$

d) $\sigma_{ij}^{Al} = \begin{bmatrix} -3.60 & 0 & 0 \\ 0 & -2.53 & 0 \\ 0 & 0 & -16.37 \end{bmatrix}, \sigma_{ij}^{Cu} = \begin{bmatrix} -3.60 & 0 & 0 \\ 0 & -5.32 & 0 \\ 0 & 0 & -7.98 \end{bmatrix}$

---

3. Ravninski okvir iz elastičnega materiala na sliki je obtežen z vodoravnima silama H.
Določi reakcije v podporah in notranje sile ter nariši diagrame notranjih sil.
Podatki: $a = 8$ m, $h = 6$ m, $H = 5$ kN, $A_x = 100$ cm^2, $A_p = 1$ cm^2, $I_y = 5000$ cm^4, $E = 2 \cdot 10^4$ $\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120 %.

REŠITVE

1. Tenzor majhnih defomacij je

$$\left[\varepsilon_{ij}\right] = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

vektor pomikov pa

$$\vec{u} = 10^{-5} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(y - \frac{a}{2} \right) \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \vec{e}_y - z \, \vec{e}_z \right).$$

2. Enačbe, ki opisujejo deformiranje obeh kock so:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{Al} + \varepsilon_{xx}^{Cu} &= 0 && (1) \\ \varepsilon_{yy}^{Al} &= 0 && (2) \\ \varepsilon_{yy}^{Cu} &= 0 && (3) \\ \sigma_{xx}^{Al} &= \sigma_{xx}^{Cu} && (4) \\ \left(\sigma_{xx}^{Al} - \sigma_{yy}^{Al}\right)^2 + \left(\sigma_{xx}^{Al} - \sigma_{zz}^{Al}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}^{Al} - \sigma_{yy}^{Al}\right)^2 &= 2\left(\sigma_{Y}^{Al}\right)^2 && (5) \\ \left(\sigma_{xx}^{Cu} - \sigma_{yy}^{Cu}\right)^2 + \left(\sigma_{xx}^{Cu} - \sigma_{zz}^{Cu}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}^{Cu} - \sigma_{yy}^{Cu}\right)^2 &= 2\left(\sigma_{Y}^{Cu}\right)^2 && (6) \end{aligned}$$

Pravilna je rešitev a), ker edina zadošča vsem enačbam.

3. Iz ravnotežnih enačb izračunamo reakcije, ki so v našem primeru vse enake nič. Iz enačbe

$$\frac{N_{CD}\, a}{E\, A_p} = \frac{(H - N_{CD})\, a}{E\, A_x} + 2 \cdot \frac{(H - N_{CD})\, h^2\, a}{2\, E\, I_y} + 2 \cdot \frac{(H - N_{CD})\, h^3}{3\, E\, I_y}.$$

izračunamo osno silo N_{CD} v palici CD. Pri danih podatkih dobimo $N_{CD} = 4.95413$ kN. Diagrame notranjih sil nato določimo po metodah statike.