Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 29. avgust 2003

1. V telesu vlada ravninsko napetosto stanje (RNS)

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podana sta dva vektorja $\vec{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$ in $\vec{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$.

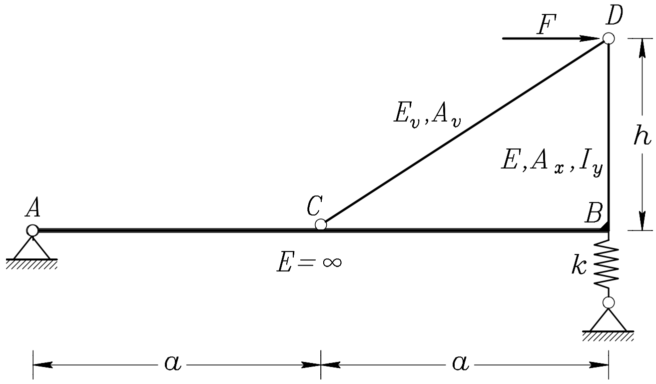
- V točki $A(0,0,0)$ smo izmerili naslednje deformacije $\varepsilon_{\xi\xi}(A) = \varepsilon_0$ in $\varepsilon_{\eta\eta}(A) = \varepsilon_0$, v točki $B(0,0,1)$ pa $\varepsilon_{yy}(B) = \varepsilon_0$. Za primer **homogenega** napetostnega in deformacijskega stanja določi napetostni tenzor v točki A.
- V točki $A(0,0,0)$ smo izmerili naslednje deformacije $\varepsilon_{\xi\xi}(A) = \varepsilon_0$ in $\varepsilon_{\eta\eta}(A) = \varepsilon_0$, v točki $B(0,0,1)$ pa $\varepsilon_{zz}(B) = \varepsilon_0$. Ali je napetostno stanje v telesu homogeno? Odgovor utemelji!

Podatki: $E = 2 \cdot 10^4 \, \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\nu = 0.3$, $\varepsilon_0 = 0.0001$.

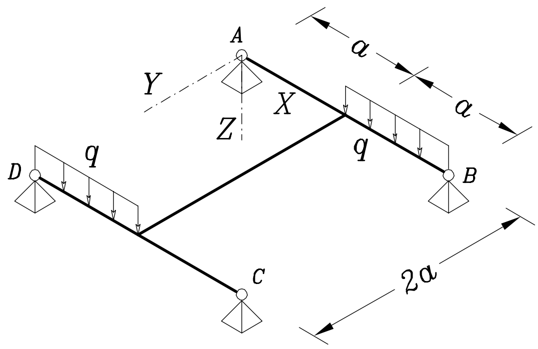
2. Ravninski okvir je obtežen s silo F, kot prikazuje slika. Nosilec AB je neskončno tog.

- Izračunaj osno silo v palici CD.
- Izračunaj pomik vozlišča D.

Podatki: $a = 4$ m, $h = 3$ m, $E = 2 \cdot 10^4 \, \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $A_x = 50 \text{ cm}^2$, $I_y = 1000 \text{ cm}^4$, $F = 10$ kN, $E_v = 2 \cdot 10^4 \, \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $A_v = 10 \text{ cm}^2$, $k = 100 \, \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$.



3. Za prikazano ravninsko mrežo izračunaj reakcije v podporah in notranje sile ter nariši diagrame notranjih sil.
Podatki: $a = 3$ m, $q = 2 \, \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $\nu = 0.3$, $I_y = 5000 \text{ cm}^4$, $I_x = 10000 \text{ cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^4 \, \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.



Točkovanje: 40% + 40 % + 40% = 120 %.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 29. avgust 2003 - Rešitve

1.

- V prvem primeru zaradi homogenosti velja $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(A) = \varepsilon_{ij}(B)$ in $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(A) = \sigma_{ij}(B)$. Deformacijski tenzor dobimo iz enačb

$$\begin{aligned}
\text{točka A in B: } \varepsilon_{\xi\xi} &= \varepsilon_{xx}\, e_{\xi x}\, e_{\xi x} + 2\,\varepsilon_{xy}\, e_{\xi x}\, e_{\xi y} + \varepsilon_{yy}\, e_{\xi y}\, e_{\xi y} + \varepsilon_{zz}\, e_{\xi z}\, e_{\xi z}, \\
\text{točka A in B: } \varepsilon_{\eta\eta} &= \varepsilon_{xx}\, e_{\eta x}\, e_{\eta x} + 2\,\varepsilon_{xy}\, e_{\eta x}\, e_{\eta y} + \varepsilon_{yy}\, e_{\eta y}\, e_{\eta y} + \varepsilon_{zz}\, e_{\eta z}\, e_{\eta z}, \\
\text{točka A in B: } \sigma_{zz} &= 2\,\mu\varepsilon_{zz} + \lambda\,(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 0,
\end{aligned}$$

  kjer sta $\mu = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$ in $\lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ znani Lamejevi konstanti. Dobimo

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2\,\varepsilon_0\,\nu}{-1+\nu} \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \dfrac{E\,\varepsilon_0}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{E\,\varepsilon_0}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- V drugem primeru ob privzetku homogenega napetostno deformacijskega stanja ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(A) = \varepsilon_{ij}(B)$ in $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(A) = \sigma_{ij}(B)$) rešitev gornjih enačb ne obstaja. Drugače povedano za obe točki A in B ne obstaja en sam tenzor napetosti in deformacij, ki bi zadostil gornjim enačbam. Ker pa imamo po predpostavki ravninsko napetostno stanje, mora biti gornjim enačbam zadoščeno. Le tem lahko zadostita samo dva različna tenzorja. To pa pomeni, da napetostno stanje ni več homogeno.

2.

- Osna sila v palici CD znaša 12.3878 kN.
- Pomik vozlišča D znaša $\vec{u}_D = 0.0544468\ \text{cm}\,\vec{e}_x + 0.0397298\ \text{cm}\,\vec{e}_z$.

3. Reakcije v podporah so:
$A_z = -1.54261$ kN, $B_z = -4.45739$ kN, $C_z = -1.54261$ kN, $D_z = -4.45739$ kN.