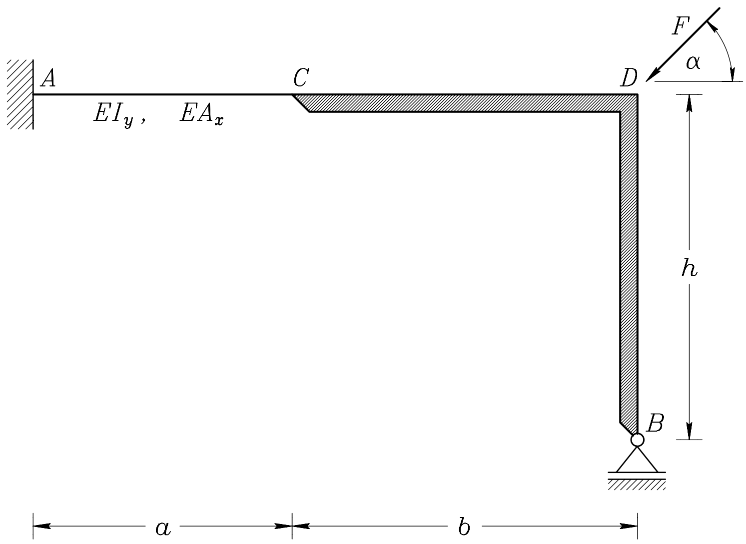
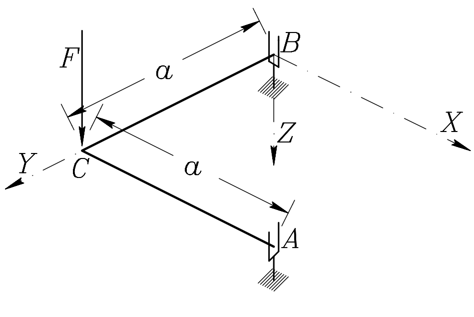
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 20. junij 2003

1. Telo iz linearno elastičnega, izotropnega, homogenega materiala v točki $T(0,0,0)$ prerežemo s tremi ravninami. Normale ravnin so podane z vektorji: $\vec{e}_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$, $\vec{e}_{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z)$, $\vec{e}_{n_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$. Znani so napetostni vektorji v točki T, ki pripadajo tem trem ravninam: $\vec{\sigma}_{n_1} = -2\,\sigma\vec{e}_x - \sigma\vec{e}_z$, $\vec{\sigma}_{n_2} = -6\,\sigma\vec{e}_y + 3\,\sigma\vec{e}_z$, $\vec{\sigma}_{n_3} = 4\,\sigma\vec{e}_x + 4\,\sigma\vec{e}_y - 9\,\sigma\vec{e}_z$. Izračunaj komponente napetostnega tenzorja v točki T v kartezičnem koordinatnem sistemu. Kakšne so komponente napetostnega tenzorja v točki T, če vektor $\vec{\sigma}_{n_3}$ zamenjamo z vektorjem $\vec{\sigma}_{n_3} = 4\,\sigma\vec{e}_x + 4\,\sigma\vec{e}_y + 9\,\sigma\vec{e}_z$? Ali rešitev takrat obstaja? Odgovor utemelji.
Podatki: $\sigma = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.

2. Ravninski okvir je obtežen s silo F kot prikazuje slika. Del CBD je neskončno tog v primerjavi z delom AC. V točki C sta oba dela togo povezana med seboj.
Izračunaj notranje sile na delu AC in nariši diagrame notranjih sil.
Izračunaj horizontalni pomik na mestu prijemališča sile.
Podatki: $a = 3$ m, $b = 4$ m, $h = 3$ m, $E = 2 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$, $A_x = 50\ \mathrm{cm}^2$, $I_y = 5000\ \mathrm{cm}^4$, $F = 10$ kN, $\alpha = 45°$.



3. Za prikazano ravninsko mrežo izračunaj reakcije v podporah in notranje sile ter nariši diagrame notranjih sil. V točkah A in B sta viličasti podpori (viličasta podpora preprečuje vse pomike in zasuk v smeri osi nosilca (torzijski zasuk), dopušča pa preostala upogibna zasuka). Izračunaj tudi navpični pomik točke C.
Podatki: $a = 2$ m, $F = 10$ kN, $\nu = 0.25$, $I_y = 5000\ \mathrm{cm}^4$, $I_x = 10000\ \mathrm{cm}^4$, $E = 2 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$.



Točkovanje: (25 + 15) % + (25 + 15) % + (20+20)% = 120 %.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 20. junij 2003 - Rešitve

1. Ovedemo okrašave $\vec{\sigma}_a = \vec{\sigma}_{n_1}$, $\vec{\sigma}_b = \vec{\sigma}_{n_2}$, $\vec{\sigma}_c = \vec{\sigma}_{n_3}$ in $\vec{e}_a = \vec{e}_{n_1}$, $\vec{e}_b = \vec{e}_{n_2}$, $\vec{e}_c = \vec{e}_{n_3}$. Komponente tenzorja napetosti dobimo iz ravnotežnih enačb

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_a &= \vec{\sigma}_x\, e_{ax} + \vec{\sigma}_y\, e_{ay} + \vec{\sigma}_z\, e_{az}, \\
\vec{\sigma}_b &= \vec{\sigma}_x\, e_{bx} + \vec{\sigma}_y\, e_{by} + \vec{\sigma}_z\, e_{bz}, \\
\vec{\sigma}_c &= \vec{\sigma}_x\, e_{cx} + \vec{\sigma}_y\, e_{cy} + \vec{\sigma}_z\, e_{cz}.
\end{aligned}$$

Enačbe lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\sigma_{ax}\\ \sigma_{ay}\\ \sigma_{az}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{ax}\\ e_{ay}\\ e_{az}\end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix}\sigma_{bx}\\ \sigma_{by}\\ \sigma_{bz}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{bx}\\ e_{by}\\ e_{bz}\end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix}\sigma_{cx}\\ \sigma_{cy}\\ \sigma_{cz}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{cx}\\ e_{cy}\\ e_{cz}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ali vse skupaj z eno samo matrično enačbo

$$\begin{bmatrix}\sigma_{ax} & \sigma_{bx} & \sigma_{cx}\\ \sigma_{ay} & \sigma_{by} & \sigma_{cy}\\ \sigma_{az} & \sigma_{bz} & \sigma_{cz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}e_{ax} & e_{bx} & e_{cx}\\ e_{ay} & e_{by} & e_{cy}\\ e_{az} & e_{bz} & e_{cz}\end{bmatrix},$$

ki se v konkretnem primeru glasi

$$\begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & -9\,\sigma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Iz zadnje enačbe lahko neposredno izračunamo komponente tenzorja napetosti. Dobimo

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & -9\,\sigma\end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}10 & -5 & -15\\ -5 & 15 & -10\\ -15 & -10 & 20\end{bmatrix}.$$

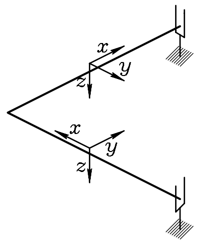
Tenzor napetosti je simetričen, torej je to iskana rešitev. V drugem primeru dobimo

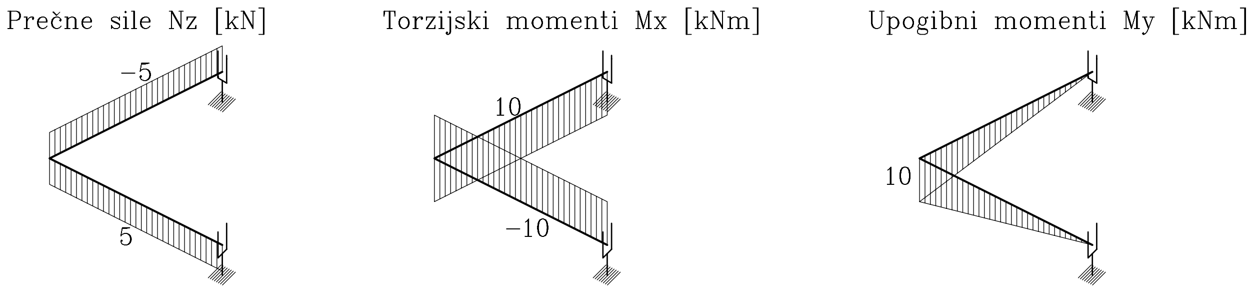
$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\,\sigma & 0 & 4\,\sigma\\ 0 & -6\,\sigma & 4\,\sigma\\ -\sigma & 3\,\sigma & 9\,\sigma\end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}10 & -5 & -15\\ -5 & 15 & -10\\ 30 & -10 & -25\end{bmatrix}.$$

Tokrat rešitve v okviru omenjene teorije nimamo, saj tenzor napetosti ni simetričen. V drugem primeru zato vektorji $\vec{\sigma}_a$, $\vec{\sigma}_b$ in $\vec{\sigma}_c$ niso napetostni vektorji.

2. Na delu AC so prisotne samo osne sile $N_x = -F\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -7.0711$ kN. Prečne sile in upogibni momenti so enaki nič. Horizontalni pomik točke D znaša $u_D = -F\,\frac{\sqrt{2}\,a}{2\,E\,A_x} = -0.00212$ cm.
Rezultat je fizikalno očiten, če silo F pred izračunam razstavimo na horizontano in vertikalno komponento in pogledamo prispevka obeh delov.

3. Reakcije so in notranje sile lahko dobimo z upoštevanjem simetrije kar iz ravnotežnih enačb. Dobimo $A_z = B_z = -\frac{F}{2} = -5$ kN, $M_X^A = \frac{F\,a}{2} = -10$ kN m, $M_Y^B = \frac{F\,a}{2} = -10$ kN m.
Diagrami notranjih sil





Navpični pomik točke C znaša $w_C = \frac{F\,a^3\,(G\,I_x + 3\,E\,I_y)}{6\,E\,I_y\,G\,Ix} = 0.6333$ cm.