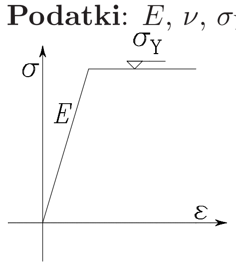
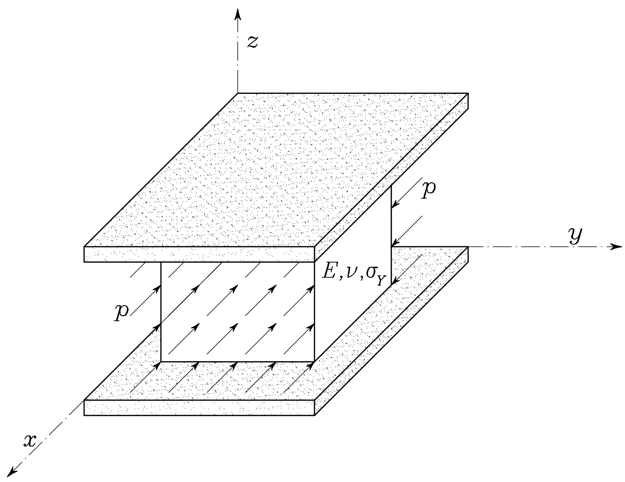
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 30. avgust 2002

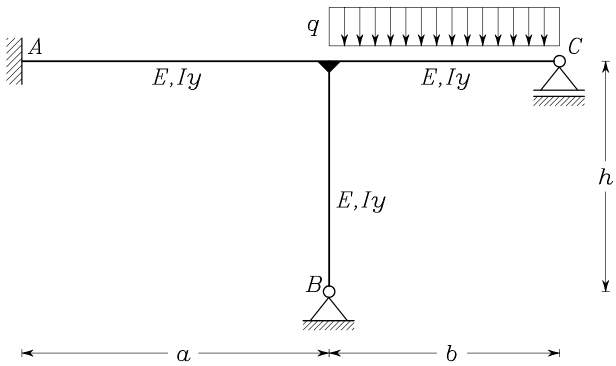
1. Telo iz idealno elastično–plastičnega, izotropnega, materiala je brez trenja vloženo med dve povsem togi plošči. Ob predpostavki, da v telesu vlada homogeno napetostno in deformacijsko stanje določi obtežbo p, pri kateri po Misesovemu kriteriju plastičnega tečenja nastopi začetek plastifikacije. Upoštevaj $\varepsilon_{zz} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$. Izračunaj tudi pripadajačo volumsko deformacijo ε_V za ta primer.
Podatki: E, ν, σ_Y.





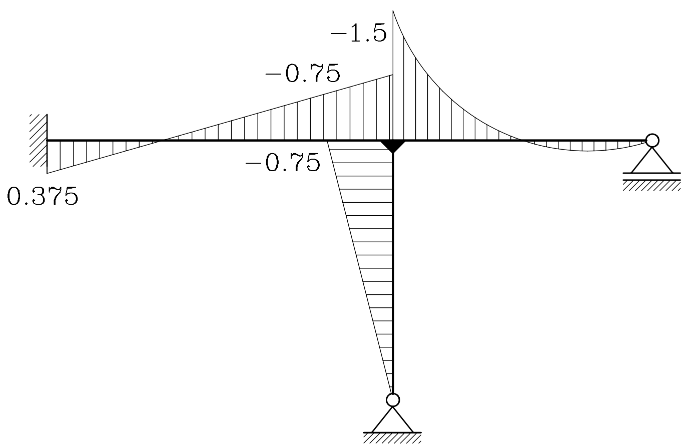
Rešitev:
Začetek plastifikacije nastopi pri obtežbi $p = \dfrac{\sigma_Y}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}}$.
Volumska deformacija telesa znaša $\varepsilon_V = \dfrac{\left(-1+\nu+2\,\nu^2\right)\,p}{E}$.

2. Izračunaj **upogibne momente** in nariši diagram **upogibnih momentov** v podani okvirni konstrukciji. **Osna togost stebrov in prečk je zelo velika** ($A_x = \infty$) **v primerjavi z upogibno togostjo.**
Podatki: $a = 4$ m, $b = 3$ m, $h = 3$ m, $q = 2\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $E = 2\cdot 10^4\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $I_y = 1\,000\ \text{cm}^4$.
Namig: Uporabi tabele na hrbtni strani.

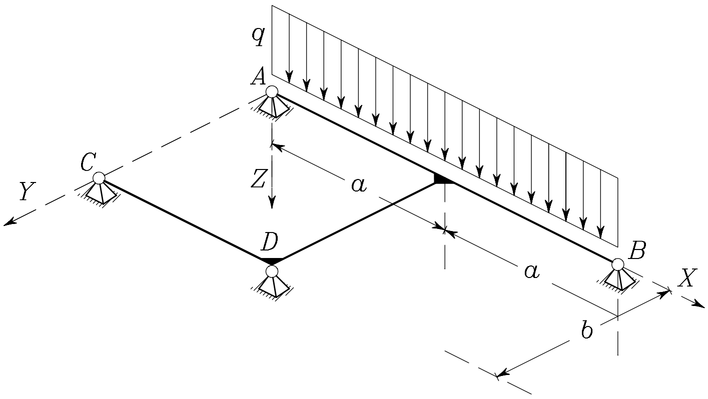


Rešitev:

Upogibni momenti My [kNm]

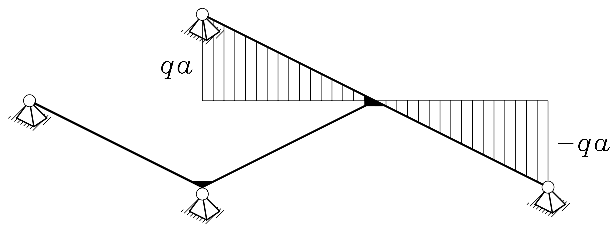


3. Ravninska mreža na sliki je obremenjena z enakomreno zvezno obtežbo q, kot prikazuje slika. Podpore A, B, C in D preprečujejo vse pomike, dopuščajo pa vse zasuke. Vsi nosilci so togo povezani med seboj.
Izračunaj notranje sile (N_z, M_x in M_y) in nariši diagrame notranjih sil.
Podatki: $q = 3\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $a = 2$ m, $b = 3$ m, $G\,I_x = 2\,E\,I_y$.

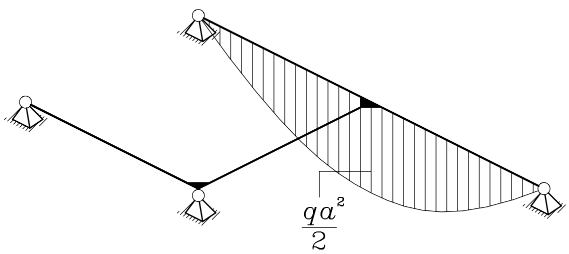


Rešitev:
Torzijski momenti M_x so enaki nič.

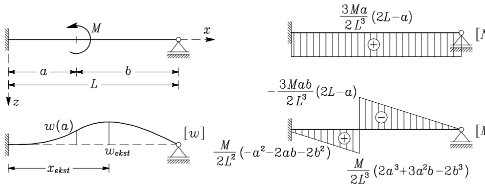
Prečne sile Nz



Upogibni momenti My



h) Upogibnica enkrat statično nedoločenega nosilca obteženega z momentom M



Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{M\,x^2}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(a^3 + 3\,a^2\,b - 2\,b^3 + (a - 2\,L)a\,x\right),$$

$$\omega_{y1} = -\frac{M\,x}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2(a^3 + 3\,a^2\,b - 2\,b^3) + 3\,(a - 2\,L)a\,x\right.$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{M\,a}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2\,a\,L^3 - 4\,L^3\,x - 3\,L(a - 2\,L)x^2 + (a - 2\,L)x^3\right),$$

$$\omega_{y2} = \frac{M\,a}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(4\,L^3 + 6\,L(a - 2\,L)x - 3\,(a - 2\,L)x^2\right).$$

Pomik in zasuk pri $x = a$ ter zasuk pri $x = L$:

$$w(a) = \frac{M\,a^2\,b}{4\,L^3\,E\,I_y}(a^2 - 2\,b^2),$$

$$\omega_y(a) = \frac{M\,a}{4\,L^3\,E\,I_y}(a^3 + 4\,b^3), \quad \omega_y(L) = -\frac{M\,a}{4\,L\,E\,I_y}(2\,b - a).$$

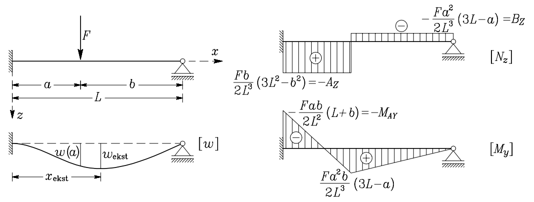
Pri $a_{\mathrm{mej}} = 0.582925\,L$ je $|w_{1,\mathrm{ekst}}| = |w_{2,\mathrm{ekst}}|$.
Ekstremni pomik, če je $a > a_{\mathrm{mej}}$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = \frac{2\,L(2\,b^2 - 2\,a\,b - a^2)}{3\,a(a - 2\,L)}, \quad w_{\mathrm{ekst}} = \frac{M}{27\,a^2\,(a + 2\,b)^2\,E\,I_y}(a^2 + 2\,a\,b - 2\,b^2)^3.$$

Ekstremni pomik, če je $a < a_{\mathrm{mej}}$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{2\,b - a}{3(2\,b + a)}}\right), \quad w_{\mathrm{ekst}} = -\frac{M\,a}{18\,L\,E\,I_y}\sqrt{\frac{3(2\,b - a)^3}{2\,b + a}}.$$

g) Upogibnica enkrat statično nedoločenega nosilca obteženega s silo F



Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{F\,b\,x^2}{12\,L^3\,E\,I_y}\left(3a\,L(L + b) - x(3\,L^2 - b^2)\right),$$

$$\omega_{y1} = -\frac{F\,b\,x}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2a\,L(L + b) - x(3\,L^2 - b^2)\right).$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{F}{12\,L^3\,E\,I_y}\left(3\,a\,b\,L\,x^2(L + b) - b\,x^3(3\,L^2 - b^2) + 2\,L^3(x - a)^3\right),$$

$$\omega_{y2} = -\frac{F}{4\,L^3\,E\,I_y}\left(2\,a\,b\,L\,x(L + b) - b\,x^2(3\,L^2 - b^2) + 2\,L^3(x - a)^2\right).$$

Pomik pri $x = a$ ter zasuk pri $x = L$:

$$w(a) = \frac{F\,a^3\,b^2}{12\,L^3\,E\,I_y}(3L + b),$$

$$\omega_y(a) = \frac{F\,a^2\,b}{4\,L^3\,E\,I_y}(a^2 - 2\,b^2), \quad \omega_y(L) = \frac{F\,a^2\,b}{4\,L\,E\,I_y}.$$

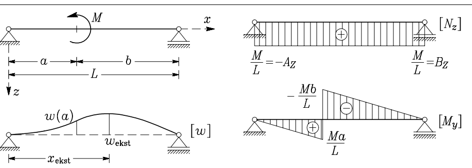
Največji pomik, če je $a > (2 - \sqrt{2})L = 0.5858\,L$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = \frac{3\,a\,L(L + b)}{3\,L^2 - b^2}, \quad w_{\mathrm{ekst}} = \frac{F\,a^3\,b}{3\,E\,I_y}\frac{(b + L)^3}{(3\,L^2 - b^2)^2}.$$

Največji pomik, če je $a < (2 - \sqrt{2})L$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{b}{b + 2\,L}}\right), \quad w_{\mathrm{ekst}} = \frac{F\,a^2\,b}{6\,E\,I_y}\sqrt{\frac{b}{b + 2\,L}}.$$

e) Upogibnica prostoležečega nosilca obteženega z momentom M



Pomik in zasuk v polju 1:

$$w_1 = \frac{M\,x}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,b^2 - x^2), \quad \omega_{y1} = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,b^2 - 3\,x^2).$$

Pomik in zasuk v polju 2:

$$w_2 = \frac{M}{6\,L\,E\,I_y}\left(x(L^2 - 3\,b^2 - x^2) + 3\,L(x - a)^2\right),$$

$$\omega_{y2} = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}\left(L^2 - 3\,b^2 - 3\,x^2 + 6\,L(x - a)\right).$$

Pomik pri $x = a$ ter zasuki pri $x = 0$, $x = a$ in $x = L$:

$$w(a) = \frac{M\,a\,b}{3\,L\,E\,I_y}(a - b), \quad \omega_y(0) = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,b^2),$$

$$\omega_y(a) = \frac{M}{3\,L\,E\,I_y}(a^2 - a\,b + b^2), \quad \omega_y(L) = -\frac{M}{6\,L\,E\,I_y}(L^2 - 3\,a^2),$$

Če je $a = L\sqrt{3}/3$, potem je $\omega_y(L) = 0$.

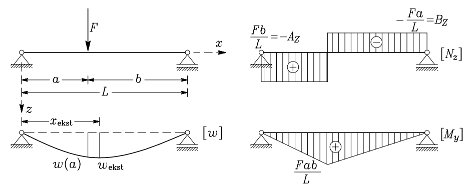
Ekstremni pomik, če je $a > b$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = \sqrt{\frac{L^2 - 3\,b^2}{3}}, \quad w_{\mathrm{ekst}} = \frac{M}{3\,L\,E\,I_y}\sqrt{\left(\frac{L^2 - 3\,b^2}{3}\right)^3}.$$

Ekstremni pomik, če je $a < b$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = L\left(1 - \sqrt{\frac{L^2 - 3\,a^2}{3\,L^2}}\right), \quad w_{\mathrm{ekst}} = -\frac{M}{3\,L\,E\,I_y}\sqrt{\left(\frac{L^2 - 3\,a^2}{3}\right)^3}.$$

Upogibnica prostoležečega nosilca obteženega s silo F



Pomik in zasuk v prvem polju:

$$w_1 = \frac{1}{6}\,\frac{Fbx\left(-x^2 + L^2 - b^2\right)}{LEIy} \qquad \omega_{y1} = -\frac{1}{6}\,\frac{Fb\left(-3\,x^2 + L^2 - b^2\right)}{LEIy}$$

Pomik in zasuk v drugem polju:

$$w_2 = -\frac{1}{6}\,\frac{F\left(-x + L\right)a\left(L^2 - 2\,Lb - 2\,Lx + x^2 + b^2\right)}{LEIy}$$

$$\omega_{y2} = -\frac{1}{6}\,\frac{Fa\left(3\,L^2 - 6\,Lx - 2\,Lb + 3\,x^2 + b^2\right)}{LEIy}$$

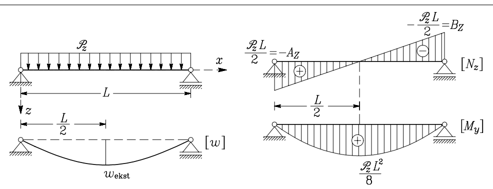
Pomik pri in zasuk pri $x = a$:

$$w(a) = \frac{1}{3}\,\frac{Fb^2a^2}{LEIy} \qquad \omega_y(a) = \frac{1}{3}\,\frac{bFa\left(L - 2\,b\right)}{LEIy}$$

Zasuka pri $x = 0$ in $x = L$:

$$\omega_y(0) = -\frac{1}{6}\,\frac{bFa\left(L + b\right)}{LEIy} \qquad \omega_y(L) = \frac{1}{6}\,\frac{Fb\left(2\,L - b\right)a}{LEIy}$$

f) Upogibnica prostoležečega nosilca obteženega s konstantno linijsko obtežbo $\mathscr{P}_z$



Pomik in zasuk:

$$w = \frac{\mathscr{P}_z\,x}{24\,E\,I_y}(L^3 - 2\,L\,x^2 + x^3), \quad \omega_y = -\frac{\mathscr{P}_z}{24\,E\,I_y}(L^3 - 6\,L\,x^2 + 4\,x^3).$$

Največji pomik ter zasuka pri $x = 0$ in $x = L$:

$$x_{\mathrm{ekst}} = \tfrac{L}{2}, \quad w_{\mathrm{ekst}} = \frac{5\,\mathscr{P}_z L^4}{384\,E\,I_y}, \quad \omega_y(0) = -\frac{\mathscr{P}_z\,L^3}{24\,E\,I_y}, \quad \omega_y(L) = \frac{\mathscr{P}_z\,L^3}{24\,E\,I_y}.$$