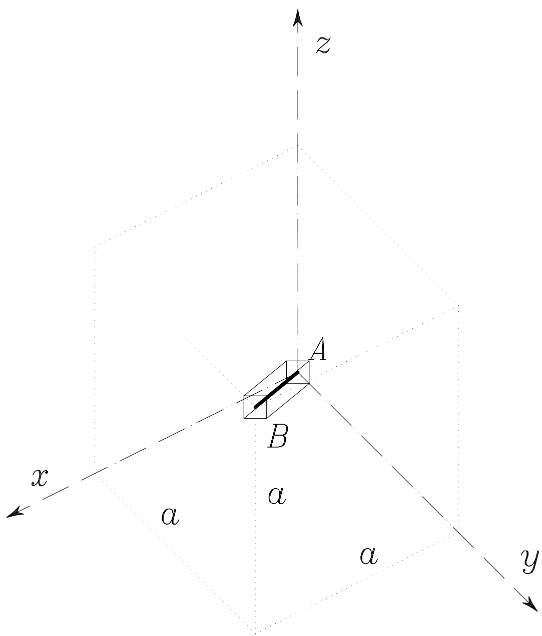
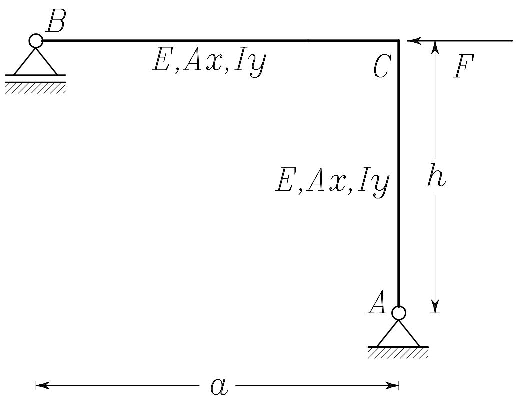
Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 22. marec 2002

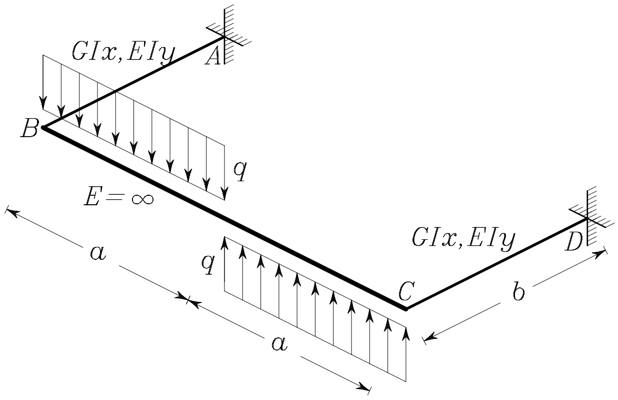
1. Palica s krajiščema težiščne osi $A(0,0,0)$ in $B(a,a,a)$ se pod vplivom zunanje obtežbe raztegne za ΔL vzdolž težiščne osi AB, hkrati pa prečni prerez palice po deformaciji ohrani enako obliko in velikost, kot jo je imel pred deformacijo. Prečni prerez, ki je bil pred deformacijo pravokoten na os AB, ostane tudi po defomaciji pravokoten to os.
Ob privzetku linearizirane teorije elastičnosti in upoštevanju dejstva, da je deformacijsko stanje v palici konstantno, določi tenzor majhih deformacij v poljubni točki palice v kartezičnem koordinatnem sistemu na sliki.
Namig: Uvedi nov koordinatni sistem, kjer ima en vektor smer osi AB, ostala dva ležita v ravnini, ki je pravokotna na to os. Tenzor deformacij ima v tem koordinatnem sistemu samo eno komponento različno od nič.
Podatki: $\Delta L = 1$ mm, $a = 1$ m.



2. Ravninski okvir na sliki je obremenjen z horizontalno silo F. Z uporabo diferencialnih enačb upogibnice določi horizontalni pomik točke C.
Podatki: $F = 2$ kN, $a = 4$ m, $h = 3$ m, $E = 20\,000\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $A_x = 70\ \text{cm}^2$, $I_y = 5000\ \text{cm}^4$.



3. Prostorski okvir na sliki je obtežen z enakomerno zvezno obtežbo q, kot prikazuje slika. Del nosilca med točkama B in C je zelo tog v primerjavi s preostalim delom okvirja. Deplanacijo prerezov zanemari. Izračunaj notranje sile in nariši diagrame notranjih sil.
Namig: Upoštevaj antisimetrijo obtežbe.
Podatki: $q = 3\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, $a = 4$ m, $b = 3$ m, $I_y = 5000\ \text{cm}^4$, $I_x = 20000\ \text{cm}^4$, $E = 21\,000\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$, $\nu = 0.3$.



Točkovanje: 40 % + 40 % + 40 % = 120 %.

Pisni izpit iz MEHANIKE TRDNIH TELES, 22. marec 2002
Rešitve nalog

1 Izberemo ortonormiran koordinatni sistem z baznimi vektorji $\vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$,
Vektor $\vec{e}_\xi$ ima smer diagonale AB. Skupaj z vektorja $\vec{e}_\eta$ in $\vec{e}_\zeta$, ki ležita v ravnini z normalo $\vec{e}_\xi$ tvorijo ortonormirano bazo. Zakaj smo izbrali takšne vektorje? Preprosto zato ker poznamo tenzor deformacij v tem koordinatnem sistemu. Specifična sprememba dolžine diagonale ustreza deformaciji $\varepsilon_{\xi\xi}$. Iz podatka se oblika in velikost prečnega prereza pri deformiranju ne spremeni in upoštevanja dejstva, da je deformacijski tenzor po palici konstanten razberemo, da so deformacije $\varepsilon_{\eta\eta}$, $\varepsilon_{\eta\zeta}$ in $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ enake 0. Iz podatka, ostane prečni prerez ki je bil pred deformacijo pravokoten os AB tudi po deformaciji pravokoten na to os, razberemo da sta tudi komponenti $\varepsilon_{\xi\eta}$ in $\varepsilon_{\xi\zeta}$ enaki 0.
Komponente tenzorja v novem koordinatem sistemu $\varepsilon_{\alpha\beta}$ in komponente tenzorja v starem (običajno kartezičnem) koordinatem sistemu ε_{ij} so povezane z enačbo

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sum_{i\in\{x,y,z\}} \sum_{j\in\{x,y,z\}} e_{\alpha i}\, \varepsilon_{\beta j}\, \varepsilon_{ij}, \qquad \alpha \in \{\xi,\eta,\zeta\}, \quad \beta \in \{\xi,\eta,\zeta\}.$$

Enačbo lahko, kar naj za vajo preveri bralec sam, zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\zeta} \\ \varepsilon_{\eta\xi} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\eta\zeta} \\ \varepsilon_{\zeta\xi} & \varepsilon_{\zeta\eta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{\xi x} & e_{\eta x} & e_{\zeta x} \\ e_{\xi y} & e_{\eta y} & e_{\zeta y} \\ e_{\xi z} & e_{\eta z} & e_{\zeta z} \end{bmatrix}$$

ali krajše

$$[\varepsilon_{\alpha\beta}] = Q^T \cdot [\varepsilon_{ij}] \cdot Q,$$

kjer je Q ortogonalna matrika. V prvem stolpcu matrike Q so komponente vektorja $\vec{e}_\xi$ v smereh vektorjev $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ in $\vec{e}_z$. V drugem stolpcu so komponente vektorja $\vec{e}_\eta$ in v tretjem komponente vektorja $\vec{e}_\zeta$. Če gornjo enačbo pomnožimo z leve z Q in z desne s Q^T in upoštevamo relacije $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$, kjer s smo z I označili identiteto (enotsko matriko reda 3), dobimo iskan rezultat.

$$[\varepsilon_{ij}] = Q \cdot [\varepsilon_{\alpha\beta}] \cdot Q^T.$$

V našem primeru je $\vec{e}_\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$. Vektor $\vec{e}_\eta$ izberemo tako, da bo pravokoten na $\vec{e}_\xi$, npr. $\vec{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_z)$. Vektor $\vec{e}_\zeta$ pa določimo z vektorskim produktom $\vec{e}_\zeta = \vec{e}_\xi \times \vec{e}_\eta$. Dobimo $\vec{e}_\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ in od tu

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Tenzor deformacij lahko sedaj izračunamo iz enačbe

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1000\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3000\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2 Konstrukcija je statično določena. Določimo diagrame upogibnih momentov in osnih sil. Postavimo lokalna koordinatna sistema v polji AC in CB v katerih napišemo diferencialne enačbe upogibnic:

Polje 1 ≡ polje AC:

$$
\begin{aligned}
M_y(x) &= F\,\frac{h}{a}\,x && \text{(1a)}\\
w_1'' &= -\frac{M_y}{E\,I_y} = -F\,\frac{h}{a\,E\,I_y}\,x && \text{(1b)}\\
w_1' &= -F\,\frac{h}{a}\,\frac{x^2}{2\,E\,I_y} + C_1 && \text{(1c)}\\
w_1 &= -F\,\frac{h}{a}\,\frac{x^3}{6\,E\,I_y} + C_1\,x + C_2 && \text{(1d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_x(x) &= 0 && \text{(2a)}\\
u_1' &= \frac{N_x}{E\,A_x} = 0 && \text{(2b)}\\
u_1 &= C_3 && \text{(2c)}
\end{aligned}
$$

Polje 2 ≡ polje CB:

$$
\begin{aligned}
M_y(x) &= F\,(h-x) && \text{(3a)}\\
w_2'' &= -\frac{M_y}{E\,I_y} = \frac{F\,(x-h)}{E\,I_y} && \text{(3b)}\\
w_2' &= F\,\frac{(x-h)^2}{2\,E\,I_y} + D_1 && \text{(3c)}\\
w_2 &= F\,\frac{(x-h)^3}{6\,E\,I_y} + D_1\,x + D_2 && \text{(3d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_x(x) &= F\,\frac{h}{a} && \text{(4a)}\\
u_2' &= \frac{N_x}{E\,A_x} = F\,\frac{h}{a\,E\,A_x} && \text{(4b)}\\
u_2 &= F\,\frac{h}{a\,E\,A_x}\,x + D_3 && \text{(4c)}
\end{aligned}
$$

s pripadajočimi robni pogoji:

$$
\begin{aligned}
w_1(0) &= 0 && \text{(5a)}\\
w_1(a) &= u_2(0) && \text{(5b)}\\
u_1(a) &= -w_2(0) && \text{(5c)}\\
w_1'(a) &= w_2'(0) && \text{(5d)}\\
w_2(h) &= 0 && \text{(5e)}\\
u_2(h) &= 0 && \text{(5f)}
\end{aligned}
$$

Lokalni koordinatni sistemi:

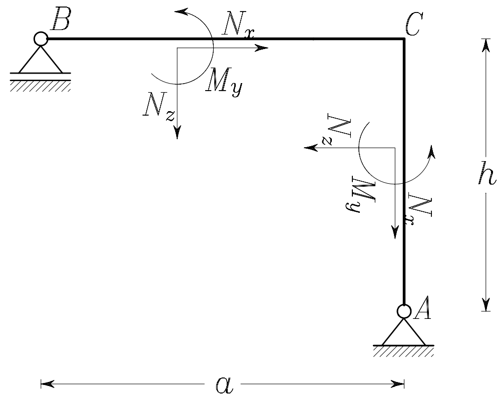


Diagram osnih sil:

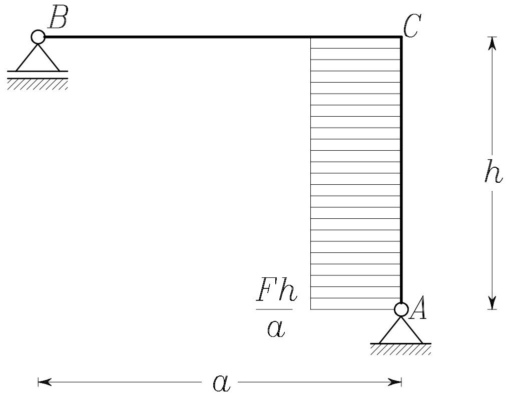
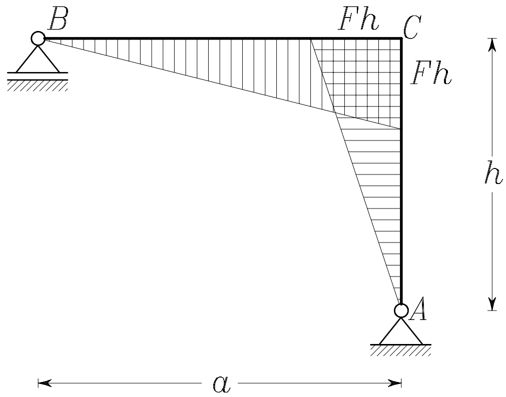


Diagram upogibnih momentov:



Robni pogoji predstavljajo sistem 6 linearnih enačb s 6 neznankami C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3. Matrika sistema enačb je razpršena, tako da z reševanjem nimamo težav. Najprej iz enačbe (5a) preberemo $C_2 = 0$, nato iz enačbe (5f) izračunamo $D_3 = -\frac{F\,h^2}{a\,E\,A_x}$, nadalje iz enačbe (5a) izračunamo C_1, Po ureditvi dobimo

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -1/6\,\frac{hF\left(-a^3E\,A_x + 6\,hE\,I_y\right)}{a^2E\,A_x\,E\,I_y}\\
C_2 &= 0\\
C_3 &= -1/3\,\frac{Fh^2\left(ha^2E\,A_x + a^3E\,A_x + 3\,hE\,I_y\right)}{a^2E\,A_x\,E\,I_y}\\
D_1 &= -1/6\,\frac{hF\left(2\,a^3E\,A_x + 6\,hE\,I_y + 3\,ha^2E\,A_x\right)}{a^2E\,A_x\,E\,I_y}\\
D_2 &= 1/6\,\frac{Fh^2\left(2\,a^3E\,A_x + 6\,hE\,I_y + 3\,ha^2E\,A_x\right)}{a^2E\,A_x\,E\,I_y}\\
D_3 &= -\frac{Fh^2}{aE\,A_x}.
\end{aligned}
$$

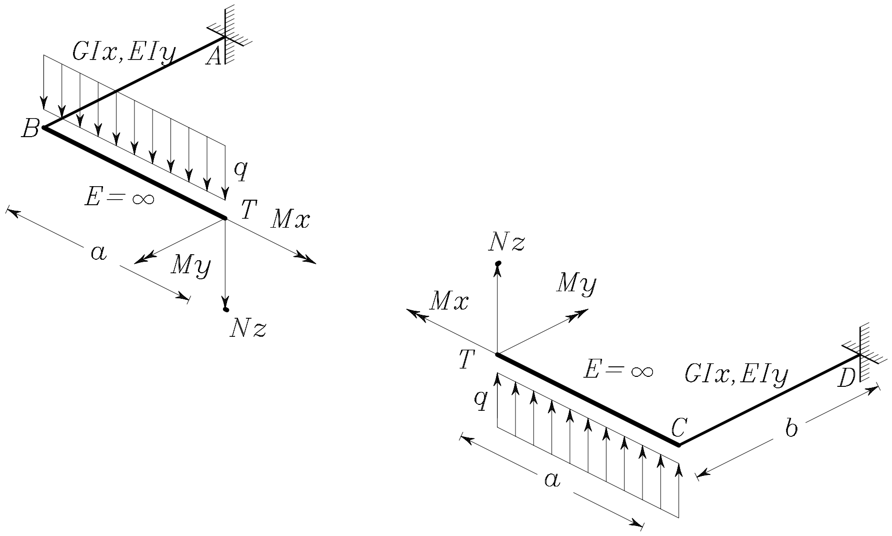
Iskani pomik predstavlja konstanta C_3. Pomik potemtakem znaša

$$u = C_3 = -1/3\,\frac{Fh^2\left(ha^2E\,A_x + a^3E\,A_x + 3\,hE\,I_y\right)}{a^2E\,A_x\,E\,I_y}.$$

Ko vstavimo numerične podatke dobimo $u = -0.4202$ cm.

Komentar: Ko opisujemo notranje statične količine npr. M_y kot funkcijo x to počnemo na odprtih intervalih npr. v polju AC na delu $x \in (0, a)$ v polju CB pa na delu $x \in (0, h)$. Torej v nobenem primeru robne točke niso zajete saj v njih notrane sile sploh niso definirane (npr. prečna sila v podpori). V primerih, ko so notranje sile zvezne lahko rezultat razširimo na krajišča (npr. upogibni moment v točki C). Kakorkoli, količine w, w' in u pa so zvezne zato npr velja $u_1(h-) = u_1(h)$, zato tudi robne pogoje izrazimo preko diferencialnih enačb (pa čeprav diferencialne enačbe veljajo samo na odprtih intervalih).

3 Konstrukcijo v splošnem prerežemo po spodnji sliki. **Pri branah so samo upogibni momenti M_x in M_y prečne sile N_z od nič različne**.



Če upoštevamo antisimetrijo obtežbe lahko obravnavamo samo polovico konstrukcije npr. del ABT. Mi tega ne bomo naredili. Notranje sile bomo izračunali tako kot bi jih izračunali pri poljubni pravokotni obtežbi. V točki T morata biti enaka zasuka okrog osi x in y kot tudi vertikalni pomik w levega in desnega dela konstrukcije. Označimo del konstrukcije ABT z 1 in del TCD z 2. Potem lahko pogoje matematično zapišemo z enačbami

$$\omega_x^1(T) = \omega_x^2(T), \tag{6a}$$

$$\omega_y^1(T) = \omega_y^2(T), \tag{6b}$$

$$w^1(T) = w^2(T), \tag{6c}$$

kjer smeri x, y in z sovpadajo s smermi M_x, M_y in N_z na delu 1. Z izrazi N_x, M_x in M_y smo označili prečno silo, torzijski in upogibni moment **v točki** T. Pri izračunov pomikov in zasukov bomo privzeli, da sta dela BT in CT toga. Privzamemo rezultate iz tabel in dobimo

$$\omega_x^1(T) = \omega_x^1(B) = \frac{q\,a\,b^2}{2\,E\,I_y} + \frac{N_z\,b^2}{2\,E\,I_y} + \frac{M_x\,b}{E\,I_y}, \tag{7a}$$

$$\omega_x^2(T) = \omega_x^2(C) = -\frac{q\,a\,b^2}{2\,E\,I_y} - \frac{N_z\,b^2}{2\,E\,I_y} - \frac{M_x\,b}{E\,I_y}, \tag{7b}$$

$$\omega_y^1(T) = \omega_y^1(B) = \frac{M_y\,b}{G\,I_x} - \frac{q\,a^2\,b}{2\,G\,I_x} - \frac{N_z\,a\,b}{G\,I_x}, \tag{7c}$$

$$\omega_y^2(T) = \omega_y^2(C) = -\frac{M_y\,b}{G\,I_x} - \frac{q\,a^2\,b}{2\,G\,I_x} - \frac{N_z\,a\,b}{G\,I_x}, \tag{7d}$$

$$w^1(T) = \frac{N_z\,b^3}{3\,E\,I_y} + \frac{q\,a\,b^3}{3\,E\,I_y} + \frac{M_x\,b^2}{E\,Iy} - \omega_y^1(B)\,a, \tag{7e}$$

$$w^2(T) = -\frac{N_z\,b^3}{3\,E\,I_y} - \frac{q\,a\,b^3}{3\,E\,I_y} - \frac{M_x\,b^2}{E\,Iy} + \omega_y^1(C)\,a. \tag{7f}$$

Imamo sistem 3 linearnih enačb s tremi neznankami N_z, M_x in M_y. Enačbo (6b) prepišemo v obliko $\omega_y^1(T) - \omega_y^2(T) = 0$ od koder neposredno sledi $M_y = 0$. Enak rezultat bi dobili z upoštevanjem antisimetrije obtežbe. Preostane sistem dveh linearnih enačb (6a) in (6c) z dvema neznankama N_z in M_x.

Sistem enačb rešimo po Cramerjevem pravilu in dobimo

$$
\begin{aligned}
N_z &= -\frac{aq\left(b^2 G\, I_x + 6\, a^2 E\, I_y\right)}{b^2 G\, I_x + 12\, a^2 E\, I_y} \\
M_x &= -3\, \frac{ba^3 E\, I_y\, q}{b^2 G\, I_x + 12\, a^2 E\, I_y}
\end{aligned}
$$

Vstavimo numerične vrednosti in končno izračunamo

$$
\begin{aligned}
Nz &= -6.4036\ \mathrm{kN} \\
Mx &= -8.3946\ \mathrm{kN\,m}.
\end{aligned}
$$

Diagramov notranjih sil od tu naprej ni več težko konstruirati.